Família exponencial - continuação

Componente aleatório de um GLM

Consiste em uma variável aleatória Y, com distribuição pertencente à família exponencial.

Família exponencial extra

A função densidade da v.a Y pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x};\, \theta;\ \phi) = \exp\{\phi^{-1}[y\theta - \mathrm{b}(\theta)] +\ c(y,\phi)\}$$

Sabemos que a família exponencia da forma canônica é dada por:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x};\, \theta) = \mathrm{h}(\mathrm{x}).\exp[\theta \mathrm{x} - \mathrm{b}(\theta)]$$

Ou seja, é uma reparametrização da família exponencial canônica.

Componente aleatório de um GLM

$$\mathrm{f}(\mathrm{x};\, \theta;\; \phi) = \exp\{\phi^{-1}[y\theta - \mathrm{b}(\theta)] +\; c(y, \phi)\}$$

em que **$\phi\ >\ 0$ é um parâmetro extra de perturbação - medida de dispersão da distribuição.**

Quando ϕ é conhecido, a família de distribuição será idêntica à família exponencial na forma canônica.

Quando temos $\phi\ =\ 1$, temos que:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x};\, \theta;\; \phi) = \exp\{\phi^{-1}[y\theta - \mathrm{b}(\theta)] +\; c(y, \phi)\}$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x};\, \theta) = \mathrm{h}(\mathrm{x}).\exp[\theta\mathrm{x} - \mathrm{b}(\theta)]$$

Componente aleatório de um GLM

$$\mathbf{f(x;}\ \boldsymbol{\theta};\ \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{exp}\{\boldsymbol{\phi}^{-1}[\boldsymbol{y\theta} - \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})] + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\phi})\}$$

Reparametrização da família exponencial na forma canônica

Esse modelo é chamado de **família exponencial linear** ou **família exponencial de dispersão na forma canônica**

Propriedades do componente aleatório

Temos que **valor esperado e a variância estarão associado as derivadas em relação a função $\boldsymbol{\theta}$**.

Assim como ocorria na Família exponencial na forma canônica.

A média (valor esperado) e a variância da variável aleatória Y, com distribuição na família exponencial de dispersão pode ser dadas por:

$$E(Y) = \mu = b'(\theta) \qquad e \qquad Var(Y) = \phi \cdot b''(\theta)$$

Obs. 1.: A partir da expressão da variância temos que $\boldsymbol{\phi}$ **é um parâmetro de dispersão** do modelo e seu **inverso** $\boldsymbol{\phi^{-1}}$ **, é uma medida de precisão**.

Precisão $\longleftrightarrow$ Dispersão

*Modelos sobre dispersos.

Obs. 2.: A função que relaciona o parâmetro canônico (θ) com a média (μ) é denotada por :

$$\theta = q(\mu)$$

Uma vez que $E(Y) = \mu = b'(\theta)$, temos que $q(\mu)$ é a inversa da b' (θ) .

Obs. 3 : Assim a variância de Y pode ser fatorada em **dois componentes**:

1 . O **parâmetro $\boldsymbol{\phi}$** está associado exclusivamente à dispersão de Y

2. A **função da média $\boldsymbol{\mu}$** na variância é representada por b''$(\theta) = V(\mu)$, denominada de **função variância**. Obtendo θ a partir da função de variância temos:

$$\theta = \int V^{-1}(\mu) d\mu$$

Obs.4 : Cada distribuição pertencente à família exponencial de dispersão tem sua **particular função de variância** e vice-versa (unicidade) **– é uma função única .**

Distribuição conjunta da Família Exponencial de Dispersão

Sejam $Y_1,\ldots,Y_n$ **variáveis aleatória independentes** que seguem distribuição pertencente à família exponencial de dispersão. A distribuição conjunta de $Y_1,\ldots,Y_n$é dada por:

$$f(y;\theta,\phi) = \prod_{i=1}^{n} f(y;\theta,\phi) = \exp\left\{\phi^{-1} \sum_{i=1}^{n}[y_i\theta_i - b(\theta_i)] + + \sum_{i=1}^{n} c(y_i, \phi)\right\}$$

Pelo teorema da fatoração de Neyman, tem-se que $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ é uma estatística suficiente para θ_i se ϕ for conhecido.

PUC Minas
Virtual