

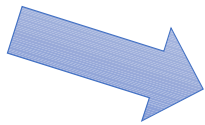


PUC Minas  
Virtual

# Família exponencial - continuação

# Componente aleatório de um GLM

Consiste em uma variável aleatória  $Y$ , com distribuição pertencente à família exponencial.



Família exponencial extra

A função densidade da v.a  $Y$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(x; \theta; \phi) = \exp\{\phi^{-1}[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\}$$

Sabemos que a família exponencial da forma canônica é dada por:

$$f(x; \theta) = h(x) \cdot \exp[\theta x - b(\theta)]$$

Ou seja, é uma reparametrização da família exponencial canônica.

# Componente aleatório de um GLM

$$f(x; \theta; \phi) = \exp\{\phi^{-1}[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\}$$

em que  $\phi > 0$  é um parâmetro extra de perturbação - medida de dispersão da distribuição.

Quando  $\phi$  é conhecido, a família de distribuição será idêntica à família exponencial na forma canônica.

Quando temos  $\phi = 1$ , temos que:

$$f(x; \theta; \phi) = \exp\{\phi^{-1}[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\}$$

$$f(x; \theta) = h(x) \cdot \exp[\theta x - b(\theta)]$$

# Componente aleatório de um GLM

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\phi}) = \exp\{\boldsymbol{\phi}^{-1}[\mathbf{y}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})] + c(\mathbf{y}, \boldsymbol{\phi})\}$$

Reparametrização da família exponencial na forma canônica

Esse modelo é chamado de **família exponencial linear** ou **família exponencial de dispersão na forma canônica**

# Propriedades do componente aleatório

Temos que **valor esperado e a variância estarão associados as derivadas em relação a função  $\theta$ .**

Assim como ocorria na Família exponencial na forma canônica.

A média (valor esperado) e a variância da variável aleatória  $Y$ , com distribuição na família exponencial de dispersão pode ser dadas por:

$$E(Y) = \mu = b'(\theta) \quad e \quad Var(Y) = \phi \cdot b''(\theta)$$

Obs. 1.: A partir da expressão da variância temos que  $\phi$  é um **parâmetro de dispersão** do modelo e seu **inverso**  $\phi^{-1}$ , é uma **medida de precisão**.



\*Modelos sobre dispersos.

Obs. 2.: A função que relaciona o parâmetro canônico ( $\theta$ ) com a média ( $\mu$ ) é denotada por :

$$\theta = q(\mu)$$

Uma vez que  $E(Y) = \mu = b'(\theta)$ , temos que  $q(\mu)$  é a inversa da  $b'(\theta)$ .

Obs. 3 : Assim a variância de Y pode ser fatorada em **dois componentes**:

1 . O **parâmetro  $\phi$**  está associado exclusivamente à dispersão de Y

2. A **função da média  $\mu$**  na variância é representada por  $b''(\theta) = V(\mu)$ , denominada de **função variância**. Obtendo  $\theta$  a partir da função de variância temos:

$$\theta = \int V^{-1}(\mu) d\mu$$

Obs.4 : Cada distribuição pertencente à família exponencial de dispersão tem sua **particular função de variância** e vice-versa (unicidade) – **é uma função única** .

# Distribuição conjunta da Família Exponencial de Dispersão

Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  **variáveis aleatórias independentes** que seguem distribuição pertencente à família exponencial de dispersão. A distribuição conjunta de  $Y_1, \dots, Y_n$  é dada por:

$$f(y; \theta, \phi) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \phi^{-1} \sum_{i=1}^n [y_i \theta_i - b(\theta_i)] + \sum_{i=1}^n c(y_i, \phi) \right\}$$

Pelo teorema da fatoração de Neyman, tem-se que  $\sum_{i=1}^n Y_i$  é uma estatística suficiente para  $\theta_i$  se  $\phi$  for conhecido.





**PUC Minas**  
**Virtual**