Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Lógica Computacional — 2025-2

Tarea 01

Docentes:
Noé Hernández Santiago Escamilla Ricardo López

Autores:
Fernanda Ramírez Juárez Ianluck Rojo Peña

Fecha de entrega: Martes 11 de febrero de 2025

Notas sobre la resolución

Nota general: Los ejercicios fueron resueltos en base a las notas de clase (IcNota2.pdf) y a los comentarios dados en las sesiones del curso. Se tomaron en cuenta los siguientes puntos específicos:

- **Ejercicios 1 y 2:** Se basan en las notas del profesor y los comentarios del 30 de enero y 6 de febrero.
- **Ejercicio 4:** Resuelto con base en la sección '7. Conceptos semánticos básicos' en IcNota2.pdf y explicaciones del ayudante Santiago el 7 de febrero.
- **Ejercicio 5:** Derivado de un ejercicio resuelto en clase el 30 de enero.

Resolución de Ejercicios

1. (1.5 pt.) Usando las siguientes claves:

   - $p :=$ María está contenta.
   - $q :=$ María pide una bicicleta por su cumpleaños.
   - $r :=$ María recibe una bicicleta por su cumpleaños.
   - $s :=$ María odia a Juan.
   - $t :=$ Juan va a la playa.
   - $u :=$ Juan está de vacaciones.
   - $v :=$ El sol brilla.

   Exprese en español las siguientes fórmulas llenando el cuadro que está abajo.

   (a) Siempre que María está contenta y el sol brilla, deja de odiar a Juan.
   (b) Cuando brilla el sol, Juan va a la playa, si está de vacaciones.

(c) María está contenta siempre que Juan está de vacaciones y se va a la playa.

(d) Aunque María está contenta porque pidió una bicicleta para su cumpleaños y la ha recibido, odia a Juan.

(e) María recibirá una bicicleta en su cumpleaños sólo si la pide.

	$(u \wedge t) \to p$	$\neg(r \wedge \neg q)$	$(p \wedge v) \to \neg s$	$(p \wedge (q \wedge r)) \wedge s$	$v \to u \to t$
1			✓		
2					✓
3	✓				
4				✓	
5		✓			

2. (1 pt.) Desarrolle las siguientes sustituciones, además elimine los paréntesis que sean redundantes según el orden de precedencia de los operadores lógicos visto en clase:

a) $((\neg(p \wedge q) \leftrightarrow ((\neg q) \to (p \to s))) \quad [p := (q \to s)][s := (\neg p)]$

Sustituímos a la variable atómica p con la fórmula $(q \to s)$ en la proposición:

$$((\neg((q \to s) \wedge q)) \leftrightarrow ((\neg q) \to ((q \to s) \to s))) \quad [s := (\neg p)]$$

Ahora continuamos con la sustitución de s:

$$((\neg((q \to s) \wedge q)) \leftrightarrow ((\neg q) \to ((q \to (\neg p)) \to (\neg p))))$$

Por jerarquía de operadores eliminamos los paréntesis innecesarios:

$$((\neg((q \to s) \wedge q)) \leftrightarrow ((\neg q) \to ((q \to (\neg p)) \to (\neg p))))$$

$$= \neg((q \to s) \wedge q) \leftrightarrow \neg q \to (q \to \neg p) \to \neg p$$

Resultado final:

$$\neg((q \to s) \wedge q) \leftrightarrow \neg q \to (q \to \neg p) \to \neg p$$

b) $((p \vee q) \to ((\neg r) \leftrightarrow p)) \quad [r, p, q := p, q, r]$

Dado que es una única sustitución, se reemplazan las variables una vez:

$$((q \vee r) \to ((\neg p) \leftrightarrow q))$$

Eliminamos los paréntesis:

$$((q \vee r) \to ((\neg p) \leftrightarrow q))$$

Resultado final:

$$q \vee r \to (\neg p \leftrightarrow q)$$

3. (1 pt.) Tomando en cuenta la sintaxis para las fórmulas de la lógica proposicional definida en la Nota 01, reinserte tantos paréntesis como sea posible a la fórmula: $(q \to p \to \neg r \land s) \lor \neg p$

$$(q \to p \to \neg r \land s) \lor \neg p = ((q \to (p \to ((\neg r) \land s))) \lor (\neg p))$$

Resultado final:

$$((q \to (p \to ((\neg r) \land s))) \lor (\neg p))$$

4. (2 pts.) Sean Γ y Δ dos conjuntos de oraciones de la lógica proposicional, y sean φ y ψ fórmulas de la lógica proposicional. Determine para cada una de las siguientes afirmaciones si es verdadera, con una demostración, o si es falsa, con un contraejemplo.

   - Si $\Gamma \vdash \varphi \land \Delta \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.
   - Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta \nvdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.
   - Si $\Gamma \nvdash \psi$, entonces $\Gamma \models \neg\psi$.

5. (1.5 pts.) Mediante interpretaciones decida si los siguientes conjuntos de proposiciones son satisfacibles:

   a) $\{p \to q, (s \lor p) \land \neg q, \neg s\}$ Definimos el conjunto de fórmulas:

$$\Gamma = \{p \to q, (s \lor p) \land \neg q, \neg s\}$$

donde:

$$\varphi_1 = p \to q, \quad \varphi_2 = (s \lor p) \land \neg q, \quad \varphi_3 = \neg s$$

Se dice que Γ es satisfacible si existe una interpretación I tal que $I(\varphi) = 1$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

Así, evaluamos $I(\varphi_1) = 1$, es decir, $I(p \to q) = 1$, lo que implica que $I(p) = 0$ o $I(q) = 1$.

Si $I(p) = 0$, entonces $I(q)$ puede tomar cualquier valor. Supongamos que $I(q) = 0$.

Ahora, evaluamos $I(\varphi_2) = 1$, es decir, $I((s \lor p) \land \neg q) = 1$.

Para que esto se cumpla, se debe cumplir que $I(s \lor p) = 1$ y $I(\neg q) = 1$.

Dado que $I(\neg q) = 1$, se tiene que $I(q) = 0$.

Por otro lado, $I(s \lor p) = 1$ implica que $I(s) = 1$ o $I(p) = 1$.

Como habíamos supuesto que $I(p) = 0$, entonces necesariamente $I(s) = 1$.

Sin embargo, evaluando $I(\varphi_3) = 1$, es decir, $I(\neg s) = 1$, se deduce que $I(s) = 0$, lo cual contradice la evaluación anterior de $I(s) = 1$.

Dado que llegamos a una contradicción, se concluye que no existe una interpretación que satisfaga todas las fórmulas de Γ.

$$\therefore \Gamma \text{ es insatisfacible.}$$

b) $\{p \to q, q \leftrightarrow s, \neg p, \neg s\}$ Definimos el conjunto de fórmulas:

$$\Gamma = \{p \to q, q \leftrightarrow s, \neg p, \neg s\}$$

donde:

$$\varphi_1 = p \to q, \quad \varphi_2 = q \leftrightarrow s, \quad \varphi_3 = \neg p, \quad \varphi_4 = \neg s$$

Analizamos la satisfacibilidad del conjunto.
Si $I(\varphi_1) = 1$, es decir, $I(p \to q) = 1$, entonces debe cumplirse que $I(p) = 0$ o $I(q) = 1$.

Dado que $I(\varphi_3) = 1$, es decir, $I(\neg p) = 1$, se tiene que $I(p) = 0$.

Por lo tanto, $I(p \to q) = 1$ se cumple para cualquier valor de $I(q)$.

Ahora evaluamos $I(\varphi_2) = 1$, es decir, $I(q \leftrightarrow s) = 1$, lo que implica que $I(q) = I(s)$.

Si $I(q) = 0$, entonces $I(s) = 0$.

Por otro lado, $I(\varphi_4) = 1$, es decir, $I(\neg s) = 1$, lo que implica que $I(s) = 0$.

Esto es consistente con la evaluación anterior de $I(s) = 0$.

Sin embargo, si asumimos que $I(q) = 1$, entonces $I(s) = 1$ por la equivalencia $q \leftrightarrow s$.
Esto contradice la evaluación de $I(\neg s) = 1$, lo que significa que nuestra suposición de $I(q) = 1$ es incorrecta.

Así, forzamos que $I(q) = 0$ y $I(s) = 0$, lo cual es consistente con todas las fórmulas.

Por lo tanto, hemos encontrado una interpretación que satisface todas las fórmulas en Γ, lo que implica que Γ **es satisfacible**.

6. (2 pts.) Usando deducción natural pruebe la validez de los siguientes:

- $p \to q, q \to r \vee s, \neg s, p \vdash r$
- $\neg p \vee q \vdash p \to q$

7. (2 pts.) Considere el siguiente argumento lógico:

Si Sarah Connor destruye a Skynet en 1994, entonces no habrá Día del Juicio Final. Si no hay Día del Juicio Final, John Connor no enviará a su padre a 1984. Es condición necesaria que John Connor envíe a su padre a 1984, para que el mismo John nazca. Sarah Connor no destruye a Skynet en 1994, si John no nace. Por lo tanto, Sarah Connor no destruirá a Skynet en 1994.

Tradúzcalo a lógica proposicional y a través de tableaux semánticos determine si es correcto o no.