# Universidad Nacional Autónoma de México

## Facultad de Ciencias

**Lógica Computacional — 2025-2**

# Tarea 03


**Docentes:**
Noé Hernández Santiago Escamilla Ricardo López

**Autores:**
Fernanda Ramírez Juárez Ianluck Rojo Peña


**Fecha de entrega:** Martes 18 de marzo de 2025

---

## Notas sobre la resolución.

**Nota general:** Los ejercicios fueron resueltos en base a las notas de clase lcNota6.pdf, lNota7.pdf, y lcNota8.pdf, además de los comentarios dados en las sesiones del curso.

---

## Resolución de Ejercicios.

1. (1.5 pts.) Realice la especificación formal funcional acerca del tipo abstracto de datos pila, donde todos sus elementos son del tipo $A$. Utilice el predicado $P(x)$ : $x$ es una pila de elementos de $A$, la constante para pila vacía *empty*, y las funciones *push*, *pop* y *top*, con su significado usual para pilas.

   a) Definición del tipo de datos pila:
      I. *empty* es una pila vacía de elementos de $A$.
      II. El resultado de agregar un elemento de $A$ en el tope de la pila es una pila de elementos de $A$.
      III. Son todos.

   b) Si una pila no es vacía, entonces el elemento en el tope es un elemento de $A$.

   c) Si una pila no es vacía, entonces la pila que resulta de eliminar el elemento en el tope es una pila de elementos de $A$.

### Especificación formal funional.

Denotamos las pilas con elementos del tipo A como $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.
Tenemos el predicado $P(x)$, la constante *empty* y las funciones $push^{(2)}$, $pop^{(1)}$ y $top^{(1)}$.

a) Definición del tipo de datos pila:

I. *empty* es una pila vacía de elementos de $A$.

$$P(\mathit{empty})$$

II. El resultado de agregar un elemento de $A$ en el tope de la pila es una pila de elementos de $A$.

$$\forall p : \mathcal{P}_A \;\; \forall a : A \left( P\big( \operatorname{push}(a, p)\big)\right)$$

III. Son todos.

b) Si una pila no es vacía, entonces el elemento en el tope es un elemento de $A$.

$$\forall p : \mathcal{P}_A \, \big(p \neq \mathit{empty} \to \operatorname{top}(p) = a : A\big)$$

c) Si una pila no es vacía, entonces la pila que resulta de eliminar el elemento en el tope es una pila de elementos de $A$.

$$\forall p : \mathcal{P}_A \, \big(p \neq \mathit{empty} \to P(\operatorname{pop}(p))\big)$$

2. (2 pts.) ¿Qué se sigue lógicamente de lo siguiente? *Todos los monquitos son pachones. Pac es un monquito. Todos los chicubus son monquitos. Algunos monquitos son chicubus. Pac no es chicubus.*

a) Pac no es pachon.

b) Todos los monquitos son chicubus.

c) Existen chicubus que no son monquitos.

d) Todos los chicubus son pachones.

e) Existen chicubus que no son pachones

Traduzca el argumento, con la conclusión que haya seleccionado, a un secuente de la lógica de predicados, y halle una prueba de dicho secuente usando deducción natural. Use los predicados $M(x)$ : $x$ es monquito, $P(x)$ : $x$ es pachón, $C(x)$ : $x$ es chicubus, y la constante $a$ para denotar a Pac.

2 Obtenemos las premisas

- Todos los monguitos son pachones: $\forall x\,(M(x) \rightarrow P(x))$
- Pac es un monguito: $M(a)$
- Todos los chicubos son monguitos: $\forall x\,(C(x) \rightarrow M(x))$
- Algunos monguitos son chicubos: $\exists x\,(M(x) \wedge C(x))$
- Pac no es chicubos: $\neg C(a)$

Según las opciones dadas la conclusión correcta es:
d) Todos los chicubos son pachones: $\forall x\,(C(x) \rightarrow P(x))$

Lo probamos usando deducción natural.

Tenemos: $\forall x\,(M(x) \rightarrow P(x)),\ M(a),\ \forall x\,(C(x) \rightarrow M(x)),\ \exists x\,(M(x) \wedge C(x))$
$\neg C(a) \vdash \forall x\,(C(x) \rightarrow P(x))$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x\,(M(x) \rightarrow P(x))$ | premisa |
| 2 | $M(a)$ | premisa |
| 3 | $\forall x\,((C(x) \rightarrow M(x))$ | premisa |
| 4 | $\exists x\,(M(x) \wedge C(x))$ | premisa |
| 5 | $\neg C(a)$ | premisa |
| 6 | $y$ | hipotesis |
| 7 | $C(y) \rightarrow M(y)$ | $E \forall$ 3 |
| 8 | $M(y)$ | MP 6 y 7 |
| 9 | $M(y) \rightarrow P(y)$ | $E \forall$ 1 |
| 10 | $P(y)$ | MP 8 y 9 |
| 11 | $\forall x\,(C(x) \rightarrow P(x)$ | $I \forall$ 6-10 |

Explicación de las conclusiones

a) Pac no es pachon:
Falso ya que sabemos que Todos los monguitos son pachones ademas que Pac es monguito.

b) Todos los monguitos son chicubus.
No se puede garantizar que todos los monguitos sean chicubus ya que lo unico que sabemos es que algunos lo son

d) Todos los chicubus son pachones
Es verdad ya que, si todos los chicubus son monguitos, y todos los monguitos son pachones podemos concluir que todos los chicubus son pachones.

c) Existen chicubus que no son monguitos
Dado que todos los chicubus son monguitos la afirmacion dada no puede ser cierta.

e) Existen chicubus que no son pachones
No puede ser esta opción ya que contradice que todos todos los monguitos (y chicubus son pachones.

3. (2 pts.) Mediante deducción natural muestre la validez de:

a) $\exists x \exists y (S(x,y) \lor S(y,x)) \vdash \exists x \exists y S(x,y)$,

b) $\forall x (P(x) \lor Q(x)), \exists x \neg Q(x), \forall x (R(x) \to \neg P(x)) \vdash \exists x \neg R(x)$.

3 a) $\exists x \exists y (S(x,y) \lor S(y,x)) \vdash \exists x \exists y S(x,y)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x \exists y (S(x,y) \lor S(y,x))$ | premisa |
| 2 | $x_0$ | hip |
| 3 | $\exists y (S(x_0,y) \lor S(y,x_0))$ | $\mathcal{E} \exists 1$ |
| 4 | $y_0$ | hip |
| 5 | $S(x_0,y_0) \lor S(y_0,x_0)$ | $\mathcal{E} \exists 3$ |
| 6 | $S(x_0,y_0)$ | hipo para eliminar el $\lor$ |
| 7 | $\exists y S(x_0,y)$ | $I \exists 6$ |
| 8 | $\exists x \exists y S(x,y)$ | $I \exists 7$ |
| 9 | $S(y_0,x_0)$ | hip para eliminar el $\lor$ |
| 10 | $\exists x S(x,x_0)$ | $I \exists 9$ |
| 11 | $\exists x \exists y S(x,y)$ | $I \exists 10$ |
| 12 | $\exists x \exists y S(x,y)$ | $I \lor$ 6-11 |
| 13 | $\exists x \exists y S(x,y)$ | $\mathcal{E} \exists$ 2-12 |

b) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x), \forall x(R(x) \to \neg P(x)) \vdash \exists x \neg R(x)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ | premisa |
| 2 | $\exists x \neg Q(x)$. | premisa |
| 3 | $\forall x\,(R(x) \to \neg P(x)$ | premisa |
| 4 | $x_0$ | hipotesis |
| 5 | $\neg Q(x_0)$ | $E \exists 2$ |
| 6 | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $E \forall 1$ |
| 7 | $P(x_0)$ | hip para eliminar $\vee$ |
| 8 | $R(x_0) \to \neg P(x_0)$ | $E \forall 3$ |
| 9 | $R(x_0)$ | hipotesis para demostrar $\perp$ |
| 10 | $\neg P(x_0)$ | MP 9-8 |
| 11 | $P(x_0) \wedge \neg P(x_0)$ | Contradicción $\perp$ |
| 12 | $\neg R(x_0)$ | I 9-11 |
| 13 | $\exists x \neg R(x)$ | $I \exists 12$ |
| 14 | $Q(x_0)$ | Segunda parte del $\vee$ 6 |
| 15 | $Q(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$ | Contradicción $\perp$ |
| 16 | $\exists x \neg R(x)$ | $I \exists$ 14-15 |

4. (1 pt.) Una fórmula atómica cerrada es una fórmula atómica $P(a_1, \ldots, a_n)$ cuyos argumentos son constantes. Considere un lenguaje con $n$ objetos constantes y una sola relación *binaria* $R^{(2)}$.

I) ¿Cuántas fórmulas atómicas cerradas hay en este lenguaje?

a) $n$ b) $n^2$ c) $2^n$ d) $2^{n^2}$ e) $2^{2^n}$

II) ¿Cuántas asignaciones de verdad son posibles en este lenguaje, i.e., cuántas posibilidades hay de definir $R^{\mathcal{M}}$?

a) $n$ b) $n^2$ c) $2^n$ d) $2^{n^2}$ e) $2^{2^n}$

i) ¿Cuantas Fórmulas atómicas cerradas hay en este lenguaje?

Una formula atómica cerrada es de la Forma $R(a_i, a_j)$, en donde $a_i$ y $a_j$ son constantes en el lenguaje. Ya que hay $n$ constantes, el número de pares $(a_i, a_j)$ es $n \times n$.

$\therefore$ El número de Fórmulas atómicas cerradas es b) $n^2$

ii) ¿Cuántas asignaciones de verdad son posibles en este lenguaje, es decir cuantas posibilidades hay de definir $R^m$?

Sabemos que cada fórmula atómica cerrada $R(a_i, a_j)$ tiene 2 posibles valores, verdadero o Falso, Como hay $n^2$ Fórmulas atómicas cerradas, el número posible de asignaciones de verdad es $2^{n^2}$, ya que cada Formula solo puede tomar uno de los dos valores que tenemos.

$\therefore$ Las asignaciones de verdad son $2^{n^2}$

5. (1.5 pts.) Sea $\varphi$ el enunciado $\forall x \forall y \exists z (R(x, y) \rightarrow R(y, z))$, con $R^{(2)}$.

a) Sea $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, d\}$ y $R^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. ¿Es cierto que $\mathcal{M} \models \varphi$? Justifique su respuesta.

b) Sea $A' \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$ y $R^{\mathcal{M}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, c), (a, b), (c, a)\}$. ¿Es cierto que $\mathcal{M}' \models \varphi$? Justifique su respuesta.

5 Sea $\emptyset$ el enunciado $\forall x \forall y \exists z (R(x,y) \to R(y,z))$, con $R^{(2)}$

a) Sea $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b,c,d\}$ y $R^{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b,c),(b,b),(b,a)\}$

¿Es cierto que $M \models \emptyset$?

a) $A = \{a,b,c,d\}$ $R^{M} = \{(b,c),(b,b),(b,a)\}$

Verificamos si se cumple que $M \models \emptyset$

Sea $x = b$

Caso 1: $R(b,c)$ es verdadero:

Debemos encontrar un $z$ tal que $R(c,z)$ sea verdadero, pero $R(c,z)$ no está definido para ningún $z$ en $R^{M}$

$\therefore$ no existe $z$ entonces el enunciado $\emptyset$ no se cumple.

Caso 2: $y = b$

$R(b,b)$ es verdadero:

Debemos encontrar un $z$ tal que $R(b,z)$ que sea verdadero, en este caso $z$ puede ser $c, b$ o $a$ ya que $R(b,c)$, $R(b,b)$, y $R(b,a)$ son verdaderos.

$\therefore$ $\emptyset$ se cumple.

Caso 3:

$R(b,a)$ es verdadero.

Necesitamos encontrar un $z$ tal que $R(a,z)$ sea verdad, pero $R(a,z)$ no esta definido en $R^{M}$

$\therefore$ No hay $z$ entonces $\emptyset$ no se cumple

$\therefore$ Ya que hay casos en los que $z$ no existe entonces $M \not\models \emptyset$

b) Sea $A' \overset{def}{=} \{a,b,c\}$ y $R^{\mathcal{M}'} \overset{def}{=} \{(b,c),(a,b),(c,a)\}$. Es cierto que $\mathcal{M}' \models \phi$

Parte b
$A' = \{a,b,c\}$ $R^{\mathcal{M}'} = \{(b,c),(a,b),(c,a)\}$

Para $x=a$

Caso 1: $y=b$
$R(a,b)$ es verdadero.
Debemos encontrar un $z$ tal que $R(b,z)$ sea verdadero
Aquí $z=c$ satisface $R(b,c)$
$\therefore$ El enunciado $\phi$ se cumple para este caso

Caso 2: $y=c$
$R(a,c)$ directamente no esta definido en $R^{\mathcal{M}}$
$\therefore$ tenemos $R(a,c) \to R(c,z)$ en donde el antecedente falso y el consecuente verdadero.
, entonces el enunciado $\phi$ se cumple.

Para $x=b$

Caso 1: $y=c$
$R(b,c)$ es verdadero
Necesitamos encontrar un $z$ tal que $R(c,z)$ sea verdad
$z=a$ satisface $R(c,a)$
$\therefore$ $\phi$ se cumple.

Caso 2: $y=a$
$R(b,a)$ no está definido en $R^{\mathcal{M}'}$
y tenemos un caso como el anterior en el que $R(b,a) \to R(a,z)$, antecedente Falso y consecuente verdadero.
$\therefore$ $\phi$ se cumple.

Para $x = c$

Caso 1: $y = a$

$R(c,a)$ es verdadero,

Debemos encontrar un $z$ tal que $R(a,z)$ sea verdad

$z = b$ satisface $R(a,b)$

$\therefore$ El enunciado $\phi$ se cumple

Caso 2: $y = b$

$R(c,b)$ no está definido en $R^{M'}$

tenemos que $R(c,b) \to R(b,z)$, el antecedente ~~es~~ ~~ver~~

Falso y el consecuente verdad.

$\therefore$ $\phi$ se cumple.

$\therefore$ En todos los casos, existe un $z$ que satisface $R(y,z)$ cuando $R(x,y)$ es verdadero.

$$M' \models \phi$$

6. (2 pts.) Determine si el siguiente conjunto es satisfacible:

$$\Gamma = \{P(b), Q(b), R(b), \exists x(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x))), \forall x(R(x) \rightarrow P(x))\}$$

6 Determine si el siguiente conjunto es satisfacible:

$\Gamma = \{P(b), Q(b), R(b), \exists x(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x))), \forall x(R(x) \rightarrow P(x))\}$

El conjunto $\Gamma$ está compuesto por:

1 $P(b)$ donde $b$ esta en el universo y $P(b)$ = verdadero

2 $Q(b)$ = verdadero

3 $R(b)$ = verdadero

4 $\exists x(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x)))$ - Debe existir un elemento $c$ tal que.

$P(c)$ = verdadero

$Q(c)$ = Falso

$R(c)$ = Falso

5 $\forall x(R(x) \rightarrow P(x))$, para todo $x$, si $R(x)$ es verdadero entonces $P(x)$ tambien lo es.

Proponemos el universo : $U = \{b, c\}$

Modelo :

$P^M = \{b, c\}$ $P$ es verdadero para ambos elementos

$Q^M = \{b\}$ $Q$ es verdadero solo para $b$

$R^M = \{b\}$ → $R$ es verdadero solo para $b$

Ambiente : $g(b) = b$

Verificamos

$P(b)$ es verdadero porque $b \in P^{\mathcal{M}}$

$Q(b)$ es verdadero porque $b \in Q^{\mathcal{M}}$

$R(b)$ es verdadero porque $b \in R^{\mathcal{M}}$

$\exists x(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x)))$

para $x = c$
$P(c) =$ Verdadero
$Q(c)$ : Falso y $R(c) =$ Falso

$\forall x(R(x) \to P(x))$

Para $x = b$
$R(b) =$ verdadero $\longrightarrow$ $P(b) =$ verdadero

Para $x = c$
$R(c) =$ Falso $\therefore$ la implicación se cumple automaticamente

$\therefore$ El conjunto $\Gamma$ es satisfacible bajo el universo $\mathcal{U}$, el modelo $\mathcal{M}$ definido y el ambiente $g$.