Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Lógica Computacional — 2025-2

Tarea 02

Docentes:
Noé Hernández Santiago Escamilla Ricardo López

Autores:
Fernanda Ramírez Juárez Ianluck Rojo Peña

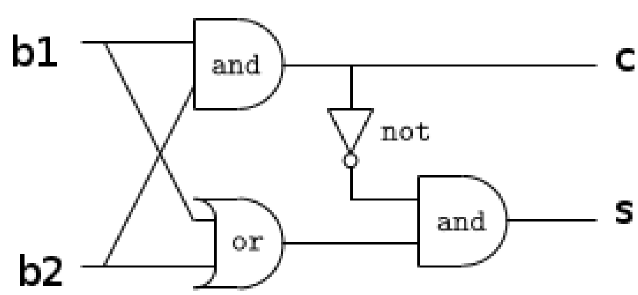
Fecha de entrega: Martes 25 de febrero de 2025

Notas sobre la resolución.

Nota general: Los ejercicios fueron resueltos en base a las notas de clase LcNota5.pdf y LcNota6.pdf.
Junto con los comentarios impartidos en las sesiones del curso de la semana del 17 de febrero al 21 de febrero del 2025, además de los días 24 y 25 de febrero.

Resolución de Ejercicios.

1. (1.5 pts.) El sumador que aparece a continuación implementa el par de fórmulas:



$$s \leftrightarrow \neg(b_1 \wedge b_2) \wedge (b_1 \vee b_2), \quad c \leftrightarrow b_1 \wedge b_2$$

Sea C el conjunto que contiene al par de fórmulas anteriores.

- ❒ Muestre que $C \cup \{b_1 \wedge b_2 \wedge \neg s \wedge \neg c\}$ es insatisfacible usando resolución binaria.
- ❒ Exhiba una interpretación que satisfaga al conjunto $C \cup \{b_1 \wedge b_2 \wedge \neg s \wedge c\}$.

Explique el significado de estos dos puntos en términos del comportamiento del circuito.

Forma Clausular y Resolución Binaria.

Definimos el conjunto C^* cómo: $C^* = C \cup \{b_1 \wedge b_2 \wedge \neg s \wedge \neg c\}$
Notemos que $\{b_1 \wedge b_2 \wedge \neg s \wedge \neg c\}$ ya está en su Forma Clausular, por lo que tenemos que pasar las dos fórmulas de C a su Forma Clausular.

- $s \leftrightarrow \neg(b_1 \wedge b_2) \wedge (b_1 \vee b_2)$:

  Eliminamos la doble implicación $\leftrightarrow$

$$s \leftrightarrow \neg(b_1 \wedge b_2) \wedge (b_1 \vee b_2) \equiv \Big(\neg s \vee \big(\neg(b_1 \wedge b_2) \wedge (b_1 \vee b_2)\big)\Big) \wedge \Big(s \vee \neg\big(\neg(b_1 \wedge b_2) \wedge (b_1 \vee b_2)\big)\Big)$$

  Distribuimos la negación $\neg$, en las respectivas fórmulas

$$\equiv \Big(\neg s \vee \big((\neg b_1 \vee \neg b_2) \wedge (b_1 \vee b_2)\big)\Big) \wedge \Big(s \vee \big((b_1 \wedge b_2) \vee (\neg b_1 \wedge \neg b_2)\big)\Big)$$

  Distribución de $\neg s$ para el lado izquierdo del $\wedge$ y distribución de $(b_1 \wedge b_2)$ en $(\neg b_1 \wedge \neg b_2)$ del lado derecho

$$\equiv \Big(\big(\neg s \vee (\neg b_1 \vee \neg b_2)\big) \wedge \big(\neg s \vee (b_1 \vee b_2)\big)\Big) \wedge \bigg(s \vee \Big(\big(b_1 \vee (\neg b_1 \wedge \neg b_2)\big) \wedge \big(b_2 \vee (\neg b_1 \wedge \neg b_2)\big)\Big)\bigg)$$

  Nótese que el lado derecho del $\wedge$ ya está en su forma clausular, continuamos con la distribución de $(\neg b_1 \wedge \neg b_2)$ en b_1 y b_2

$$\equiv (\neg s \vee \neg b_1 \vee \neg b_2) \wedge (\neg s \vee b_1 \vee b_2) \wedge \bigg(s \vee \Big(\big((b_1 \vee \neg b_1) \wedge (b_1 \vee \neg b_2)\big) \wedge \big((b_2 \vee \neg b_1) \wedge (b_2 \vee \neg b_2)\big)\Big)\bigg)$$

  Eliminamos $(b_1 \vee \neg b_1)$ y $(b_2 \vee \neg b_2)$ pues son tautologías y no tiene sentido seguir ditribuyendo estas dos fórmulas pues es hacer trabajo de más por darnos trivialidades, igualmente tomamos en cuenta la resolució del ejercico 4.
  Por lo que tenemos

$$\equiv (\neg s \vee \neg b_1 \vee \neg b_2) \wedge (\neg s \vee b_1 \vee b_2) \wedge \Big(s \vee \big((b_1 \vee \neg b_2) \wedge (b_2 \vee \neg b_1)\big)\Big)$$

  Distribuyendo s tenemos

$$\equiv (\neg s \vee \neg b_1 \vee \neg b_2) \wedge (\neg s \vee b_1 \vee b_2) \wedge \Big(\big(s \vee (b_1 \vee \neg b_2)\big) \wedge \big(s \vee (b_2 \vee \neg b_1)\big)\Big)$$

$$\equiv (\neg s \vee \neg b_1 \vee \neg b_2) \wedge (\neg s \vee b_1 \vee b_2) \wedge (s \vee b_1 \vee \neg b_2) \wedge (s \vee b_2 \vee \neg b_1)$$

  Por lo que tenemos las premisas:

$$1.\ \neg s, \neg b_1, \neg b_2 \ \Big|\ 2.\ \neg s,\ b_1,\ b_2 \ \Big|\ 3.\ s,\ b_1, \neg b_2 \ \Big|\ 4.\ s, \neg b_1,\ b_2$$

- $c \leftrightarrow b_1 \wedge b_2$:

  Eliminamos la doble implicación $\leftrightarrow$

$$c \leftrightarrow b_1 \wedge b_2 \equiv \big(\neg c \vee (b_1 \wedge b_2)\big) \wedge \big(c \vee \neg(b_1 \wedge b_2)\big)$$

Del lado derecho distribuimos $\neg c$ y del lado izquierdo distribuimos la negación

$$\big(\neg c \lor (b_1 \land b_2)\big) \land \big(c \lor \neg(b_1 \land b_2)\big) \equiv (\neg c \lor b_1) \land (\neg c \lor b_2) \land (c \lor \neg b_1 \lor b_2)$$

Por lo que tenemos las premisas:

$$5.\ \neg c,\ b_1 \ \Big|\ 6.\ \neg c,\ b_2 \ \Big|\ 7.\ c, \neg b_1,\ b_2$$

Realizamos la Sustitución Binaria

1. $\neg s, \neg b_1, \neg b_2$ Prem
2. $\neg s, b_1, b_2$ Prem
3. $s, b_1, \neg b_2$ Prem
4. $s, \neg b_1, b_2$ Prem
5. $\neg c, b_1$ Prem
6. $\neg c, b_2$ Prem
7. $c, \neg b_1, \neg b_2$ Prem
8. b_1 Prem
9. b_2 Prem
10. $\neg s$ Prem
11. $\neg c$ Prem
12. $c, \neg b_2$ Res(7, 8)
13. c Res(12, 9)
14. $\square$ Res(13, 11)

$\therefore$ El conjunto C^* es insatisfacible pues hemos llegado a la cláusula vacía.

Interpretación satisfactible.

Definimos el conjunto C^* cómo: $C^* = C \cup \{b_1 \land b_2 \land \neg s \land c\}$
Es decir $C^* = \{s \leftrightarrow \neg(b_1 \land b_2) \land (b_1 \lor b_2), \quad c \leftrightarrow b_1 \land b_2, \quad b_1 \land b_2 \land \neg s \land c\}$
Y así tenemos la interpretación:

$$I(b_1) = I(b_2) = 1, \quad I(s) = 0 \to I(\neg s) = 1, \quad I(c) = 1$$

La cual satisface al conjunto C^*:

$$I(s \leftrightarrow \neg(b_1 \land b_2) \land (b_1 \lor b_2)) = I(s) = I(\neg(b_1 \land b_2) \land (b_1 \lor b_2)) = 0$$

$$I(c \leftrightarrow b_1 \land b_2) = I(c) = I(b_1 \land b_2) = 1$$

$$I(b_1 \land b_2 \land \neg s \land c) = 1$$

- $C^* = C \cup \{b_1 \wedge b_2 \wedge \neg s \wedge \neg c\}$ es insatisfacible porque si tomamos en el circuito b_1, b_2 como entradas que valen 1, entonces el carry c tiene que ser 1, (pues tenemos $c \leftrightarrow ()b_1 \wedge b_2)$, por lo que $\neg c = 0$, no satisface al conjunto C^*.
  Si pretendemos que $\neg c = 1$, entonces $c = 0$ lo que contradice el circuito y, por lo tanto, no hay forma de asignar valores que lo hagan satisfacible.

- $C^* = C \cup \{b_1 \wedge b_2 \wedge \neg s \wedge c\}$ sí es satisfacible porque, de igual forma, si tomamos en el circuito $b = 1, y b_1 = 1$, el carry c es 1 y la suma s es 0. Pues s es como un medio sumador en el circuito, donde, si $b_1 + b_2$, es $1 + 1$ tenemos 10 y el bit menos significativo s es 0 y c, el carry es 1. Lo que coincide con nuestra interpretración $I(b_1) = 1, I(b_2) = 1, I(s) = 0, I(c) = 1$.

2. (1.5 pts.) ¿Es el siguiente conjunto de fórmulas satisfacible? Utilice resolución binaria para contestar esta pregunta.

$$\{(p \to r) \vee (\neg s \wedge p), \quad s \to \neg(p \wedge r), \quad r \vee s\}$$

Forma Clausular y Resolución Binaria.

- $(p \to r) \vee (\neg s \wedge p)$:

  Eliminamos la implicación $\to$

$$(p \to r) \vee (\neg s \wedge p) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg s \wedge p)$$

  Distribuimos $(p \to r) \vee (\neg s \wedge p)$ en $(\neg p \vee r) \vee (\neg s \wedge p)$

$$(\neg p \vee r) \vee (\neg s \wedge p) \equiv (\neg p \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee r \vee p)$$

  Por lo que tenemos la premisa:

  1. $\neg p, r, \neg s$

- $s \to \neg(p \wedge r)$:

  Eliminamos la implicación $\to$

$$s \to \neg(p \wedge r) \equiv \neg s \vee \neg(p \wedge r)$$

  Distribuimos la negacion de $p \wedge r$

$$\neg s \vee \neg(p \wedge r) \equiv \neg s \vee \neg p \vee \neg r$$

  Por lo que tenemos la premisa:

  2. $\neg s, \neg p, \neg r$

Realizamos la Sustitución Binaria

1. $\neg p, r, \neg s$ Prem
2. $\neg s, \neg p, \neg r$ Prem

3. r, s Prem
4. $\neg p, \neg s$ Res(1, 3)
5. $\neg p, r$ Res(1, 2)
6. $\neg s, \neg p$ Res(2, 5)
7. $r, \neg p$ Res(3, 4)

Nótese que no hay manera de llegar a la cláusula vacía $\square$

$\therefore$ El conjunto es satisfacible.

3. (2 pts.) Compruebe la validez del siguiente argumento lógico usando resolución binaria.

   Si Batman es el más popular de los superhéroes, entonces Superman ha muerto. Si Superman ha muerto, la Mujer Maravilla preside la Liga de la Justicia. Si la Mujer Maravilla preside la Liga de la Justicia, Batman es el más popular de los superhéroes. Por lo tanto, Superman no ha muerto si y sólo si Batman no es el más popular de los superhéroes.

   Use las siguientes claves:

   - b: Batman es el más popular de los superhéroes.
   - s: Superman ha muerto.
   - m: La Mujer Maravilla preside la Liga de la Justicia.

1. $\neg b, s$ Prem
2. $\neg s, m$ Prem
3. $\neg m, b$ Prem
4. b, s Prem
5. $\neg s, \neg b$ Prem
6. $\neg b, m$ Res(1, 2)
7. $s, \neg m$ Res(1, 3)
8. s Res(1, 4)
9. $\neg b$ Res(1, 5)
10. $\neg s, b$ Res(2, 3)
11. m, b Res(2, 4)
12. $\neg m, \neg s$ Res(3, 5)
13. $\neg s$ Res(9, 10)
14. $\square$ Res(8, 13)

$\therefore$ Sí, es correcto por el p. de refutación, ya que el conjunto con el consecuente negado es insatisfacible

4. (1.5 pts.) Demuestre el Lema 1.4 en la Nota 05. *Sea S un conjunto de cláusulas y sea $C \in S$ una cláusula trivial. Entonces $S - \{C\}$ es lógicamente equivalente a S.*

4. Demuestre el lema 1.4 en la nota 05:
Sea S un conjunto de cláusulas y sea $C \in S$ una cláusula trivial.
$S - \{C\}$ es lógicamente equivalente a S

Queremos demostrar que $S-\{C\}$ es lógicamente equivalente a S
es decir que cualquier interpretación I que satisface a S
también satisface a $S - \{C\}$ y viceversa.

Dem

$S \Rightarrow S-\{C\}$

Supongamos que existe una interpretación I satisface a S,
entonces todas las cláusulas en S son verdaderas en I
incluyendo a C

Dado que C es trivial (es decir contiene una literal y su complemento)
se cumple siempre sin importar la interpretación

∴ ya que I satisface a S, también satisface $S-\{C\}$,
porque C no impone ninguna restricción.

$S-\{C\} \Rightarrow S$

Ahora supongamos que existe una interpretación I que satisface
a $S-\{C\}$

Como C es trivial, eso significa que es una tautología
(es verdadero en cualquier interpretación). Entonces si
I ya satisface $S-\{C\}$, también satisface a C, lo
que significa que también satisface a S,
ya que por hipótesis si a S le quitas C es
satisfacible.

∴ $S-\{C\}$ es lógicamente equivalente a S.

5. (1.5 pts.) Demuestre que una disyunción de literales $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_m$ es válida si y sólo si existen $1 \leq i, j \leq m$ tal que ℓ_i es $\neg \ell_j$.

5: Demuestre que una disyunción de literales $l_1 \vee \ldots \vee l_m$ es válida syss existen $1 \leq i, j \leq m$ tal que l_i es $\neg l_j$

Dem $\Rightarrow$

Supongamos que existen i, j tales que $l_i = \neg l_j$

Entonces significa que en la disyunción contiene una literal y su negación.

Como l_i y l_j son mutuamente excluyentes entonces cualquier interpretación, al menos uno de los dos debe ser verdad.

Sabemos que la disyunción es verdadera si algún termino es verdad.

En conclusión la disyunción completa siempre es verdadera.

$\therefore$ La disyunción es válida

$\Leftarrow$

Supongamos que $l_1 \vee \ldots \vee l_m$ es valida, esto significa que siempre es verdadera para cualquier interpretación dada.

para que lo anterior ocurra, no es posible que todas las literales sean falsas simultaneamente.

La única forma de que lo anterior se cumple es que exista un par l_i y l_j donde $l_i = \neg l_j$. Si tenemos este caso no importa la interpretación que se tome, ya que al menos uno de ellos será verdadero, asegurando la satisfacibilidad de la disyunción.

Si no existiera l_i, l_j, entonces se podrían asignar valores de tal manera que las literales sean falsas, por ende la disyunción no sería valida.

$\therefore$ $l_1 \vee \ldots \vee l_m$ es valida sii existen $1 \leq i, j \leq m$ tal que l_i es $\neg l_j$

6. (1 pts.) Realice las siguientes sustituciones:

   a) $\Big(\forall x.\big(Q(w,y,x) \land P(f(x),w,b)\big)\Big)[y,w := f(w),g(x)]$

      Distribuimos $[y,w := f(w),g(x)]$ a cada predicado

      $$\forall x.\big(Q(w,y,x)[y,w := f(w),g(x)] \ \land \ P(f(x),w,b)[y,w := f(w),g(x)]\big)$$

      Aplicamos la sustitución únicamente en las variables no ligadas como w y y

      $$= \forall x.\big(Q(g(x),f(w),x) \ \land \ P(f(x),g(x),b)\big)$$

      Por lo que el resultado final simplemente es

      $$\forall x.\big(Q(g(x),f(w),x) \ \land \ P(f(x),g(x),b)\big)$$

   b) $\Big(\big(\forall v.\forall w.\big(P(u,v,x) \land R(a,x) \land Q(u,w)\big)\big)[x,u := v,g(a,w)]\Big)[v := f(y)]$

      Distribuimos $[x,u := v,g(a,w)]$ a cada predicado

      $$= \Big(\forall v.\forall w.\big(P(u,v,x)[x,u := v,g(a,w)] \land R(a,x)[x,u := v,g(a,w)] \land Q(u,w)[x,u := v,g(a,w)]\big)\Big)[v := f(y)]$$

      Aplicamos la sustitución únicamente en las variables no ligadas como u y x

      $$= \Big(\forall v.\forall w.\big(P(g(a,w),v,v) \ \land \ R(a,v) \ \land \ Q(g(a,w),w)\big)\Big)[v := f(y)]$$

      Ahora, nótese que no es posible aplicar $[v := f(y)]$ pues v es una variable que está ligada, por lo que el resultado final es

      $$\forall v.\forall w.\big(P(g(a,w),v,v) \ \land \ R(a,v) \ \land \ Q(g(a,w),w)\big)$$

7. (1 pts.) ¿Cuál es la mejor traducción para: *Se siente bien feo cuando se muere algo adorable que querías mucho*? Donde: $S(x)$: x se siente bien feo; $M(x)$: x se muere; $A(x)$: x es adorable y $Q(x,y)$: x quiere mucho a y.

   a) $\forall x\Big(S(x) \lor \forall y \, \neg\big(M(y) \land Q(y,x) \land A(y)\big)\Big)$

   b) $\forall x\Big(\forall y\big(\neg M(y) \to (Q(y,x) \to \neg A(y))\big) \lor S(x)\Big)$

   c) $\forall x\Big(\neg S(x) \to \forall y\big(M(y) \land Q(x,y) \to \neg A(y)\big)\Big)$

   d) $\forall x\Big(\forall y\big(A(y) \land (Q(x,y) \land M(x)\big) \to S(x)\Big)$

   La respuesta correcta es la *d*) $\forall x\Big(\forall y\big(A(y) \land (Q(x,y) \land M(x)\big) \ \to \ S(x)\Big)$. Por simple descarte del resto de incisos, pues *a*) no es posible pues niega que $M(y)$, $Q(y,x)$ y $A(y)$, nuestros predicados se cumplan, los predicados que afirman nuestro enunciado, es decir $\neg(M(y) \land Q(y,x) \land A(y) := Nosucedeque'y'semuereni'y'quierea'x'nique'y'seaadorable.$ Del mismo modo con *b*) que niega directamente $A(y)$, pues tenemos $\neg A(y) := yNOesadorable$, y c) que igual niega uno de nuestros predicados definidos, $\neg S(x) := xNOsesientebienfeo.$ Por eso *a*), *b*) y *c*) no hacen una fiel traducción al enunciado propuesto.

8. (1 pt.) En una isla habitada por ingleses, funcionan tres clubes. ¿Cuál simbolización expresa mejor la siguiente afirmación? *Cualesquiera dos clubes tienen un socio en común.* Donde: $C(x)$: x es un club; $S(x, y)$: x es socio de y.

   a) $\exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(x \neq y \wedge C(x) \wedge C(y) \wedge S(z, x) \wedge S(z, y)\big)$
   b) $\exists z\ \forall x\ \forall y\ \big((x \neq y \wedge C(x) \wedge C(y)) \rightarrow (S(z, x) \wedge S(z, y))\big)$
   c) $\forall x\ \forall y\ \big((x \neq y \wedge C(x) \wedge C(y)) \rightarrow \exists z\ (S(z, x) \vee S(z, y))\big)$
   d) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \big((x \neq y \wedge C(x) \wedge C(y)) \rightarrow (S(z, x) \wedge S(z, y))\big)$

   Para los dos últimos incisos tome en cuenta estas equivalencias:

$$\begin{aligned}
\varphi \rightarrow \psi &\equiv \neg\varphi \vee \psi \\
\varphi \rightarrow \psi &\equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \\
\neg(\varphi \wedge \psi) &\equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \\
\neg(\varphi \vee \psi) &\equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \\
\neg\forall x\ \varphi &\equiv \exists x\ \neg\varphi \\
\neg\exists x\ \varphi &\equiv \forall x\ \neg\varphi
\end{aligned}$$

   La respuesta correcta es la *d*) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \big((x \neq y \wedge C(x) \wedge C(y)) \rightarrow (S(z, x) \wedge S(z, y))\big)$.
   La afirmación nos dice *Cualesquiera dos clubes tienen un socio en común*, esto lo podemos interpretar de la forma: *para cualquier par de los 3 clubes que puedas tomar existe al menos una persona que es socio de ambos.*
   En este caso la opción que representa la oración es el inciso *d*) ya que en el inciso *a*) se afirma que existe al menos un par de clubes con un solo socio en común sin tomar en cuenta todos los pares posibles.
   En el inciso *b*) se afirma que, *para todos los pares posibles de clubes hay un socio común.* En el inciso *c*) nos dice que *para cualquier par de clubes distintos existe un socio de al menos uno de ellos.*
   Y el inciso *d*) afirma que *para cualquier par de clubes distintos, existe un socio de ambos*, lo que coincide con el enunciado original.