Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Lógica Computacional — 2025-2

Tarea 04

Docentes:
Noé Hernández   Santiago Escamilla   Ricardo López

Autores:
Fernanda Ramírez Juárez   Ianluck Rojo Peña

Fecha de entrega: Martes 1 de abril de 2025

Notas sobre la resolución.

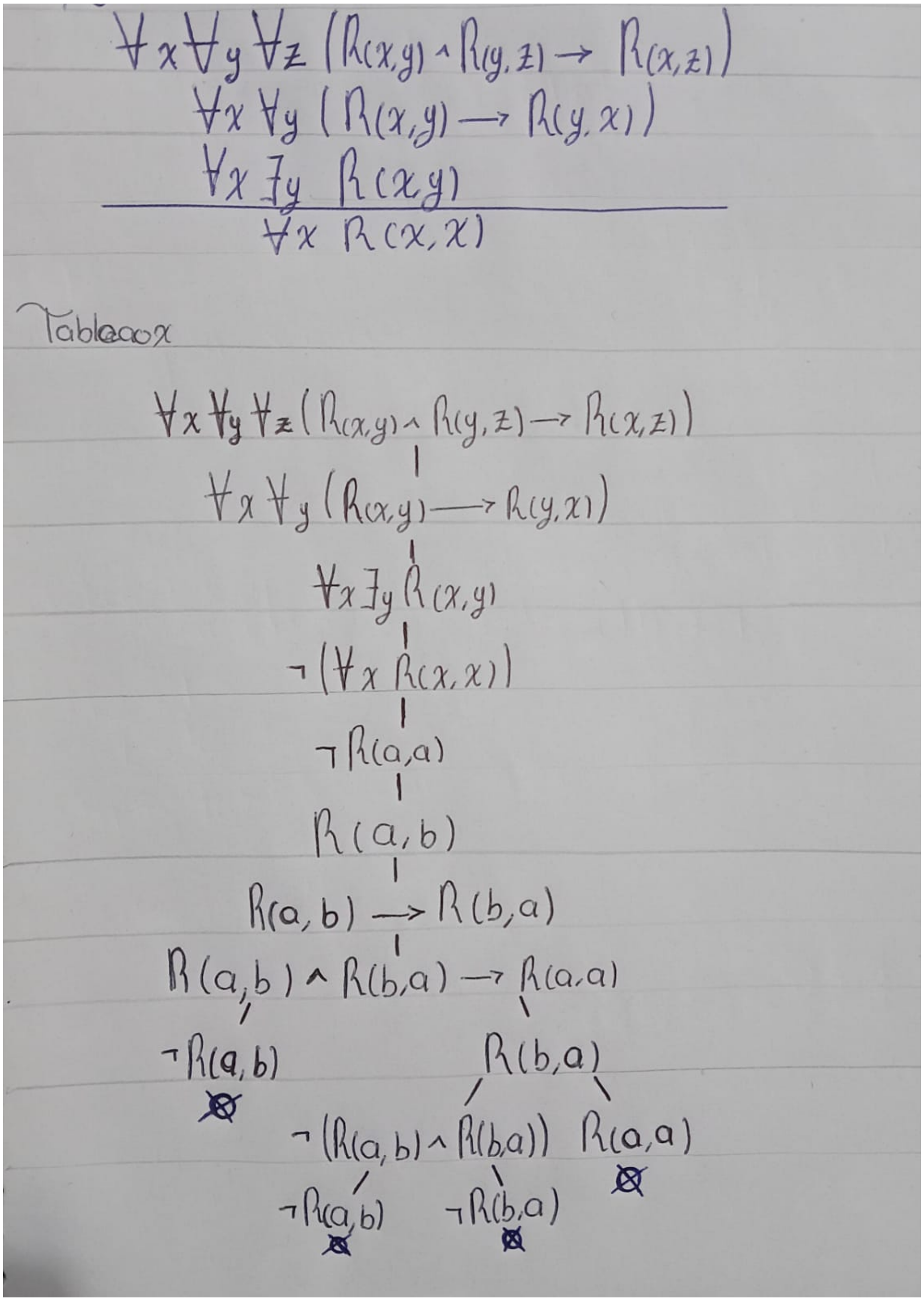
Nota general: Cada ejercicio fue resuelto en base, y tomando como referencia, las notas de clase lcNota9.pdf, lcNota10.pdf, y lcNota11.pdf.

Además de las clases presenciales impartidas por el profesor y ayudantes, tanto para resolver dudas como las pistas y consejos dados

Resolución de Ejercicios.

1. (1.5 pts.) Muestre mediante tableaux semánticos que

$$\{\forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge R(y,z)\to R(x,z)), \forall x\forall y(R(x,y)\to R(y,x)), \forall x\exists y R(x,y)\}\models \forall x R(x,x)$$



$\therefore$ Se cumple $\forall x R(x,x)$

2. (2 pts.) Transforme cada una de las siguientes fórmulas en forma normal clausular. Escriba cada uno de los pasos que utilizó.

   - $\forall x \forall y(\exists z P(z) \wedge \exists u(Q(x,u) \to \exists v Q(y,v)))$
   - $\forall x \forall y\,(Q(x,y) \leftrightarrow \forall z(P(z,x) \leftrightarrow P(z,y)))$

   Utilizamos el Algoritmo de Skolem para transformar cada fórmula en su forma clausular:

   Input: $\forall x \forall y \Big(\exists z P(z) \wedge \exists u \big(Q(x,u) \to \exists v Q(y,v)\big)\Big)$

   (L) Limpiamos la fórmula: ✓

   ➤ $\forall x \forall y \Big(\exists z P(z) \wedge \exists u \big(Q(x,u) \to \exists v Q(y,v)\big)\Big)$

   (I) Eliminamos las implicaciones y bi-condicionales empleando las equivalencias, para este caso tenemos:

   $$Q(x,y) \to \exists v Q(y,v) \equiv \neg Q(x,y) \vee \exists v Q(y,v)$$

   ➤ $\forall x \forall y \Big(\exists z P(z) \wedge \exists u \big(\neg Q(x,y) \vee \exists v Q(y,v)\big)\Big)$

   (N) Manipulamos la negación para permitir su efecto únicamente en fórmulas atómicas además de quitar las doble negaciones: ✓

   ➤ $\forall x \forall y \Big(\exists z P(z) \wedge \exists u \big(\neg Q(x,y) \vee \exists v Q(y,v)\big)\Big)$

   (R) Renombramos variables ligadas para que ninguna variable se repita en los cuantificadores: ✓

   ➤ $\forall x \forall y \Big(\exists z P(z) \wedge \exists u \big(\neg Q(x,y) \vee \exists v Q(y,v)\big)\Big)$

   (E) Extraemos cuantificadores de la matriz:

   ➤ $\forall x \forall y \exists z \exists u \exists v \Big(P(z) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee Q(y,v)\big)\Big)$

   (D) Usamos las leyes distributivas para transformar la matriz a FNC. La fórmula está ahora en FNCP: ✓

   ➤ $\forall x \forall y \exists z \exists u \exists v \Big(P(z) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee Q(y,v)\big)\Big)$

   (S) Recorremos el prefijo de izquierda a derecha y aplicamos las respectivas *funciones de Skolem*:

   ➤ $\forall x \forall y \Bigg(P\big(f(x,y)\big) \wedge \Big(\neg Q\big(x,\ h(x,y)\big) \vee Q\big(y,\ g(x,y)\big)\Big)\Bigg)$

   $\therefore$ La Forma Normal Clausular de la fórmula es:

   Output: $\big\{\ \{P\big(f(x,y)\big)\},\ \{\neg Q\big(x,\ h(x,y)\big),\ Q\big(y,\ g(x,y)\big)\}\ \big\}$

Input: $\forall x \forall y \Big(Q(x,y) \leftrightarrow \forall z \big(P(z,x) \leftrightarrow P(z,y) \big) \Big)$

(L) Limpiamos la fórmula: ✓

➤ $\forall x \forall y \Big(Q(x,y) \leftrightarrow \forall z \big(P(z,x) \leftrightarrow P(z,y) \big) \Big)$

(I) Eliminamos las implicaciones y bi-condicionales empleando las equivalencias, para este caso tenemos:

$$P(z,x) \leftrightarrow P(z,y) \equiv \big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big)$$

➤ $\forall x \forall y \Bigg(Q(x,y) \leftrightarrow \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$

$$Q(x,y) \leftrightarrow \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big)$$

$$\equiv$$

$$\Bigg(\neg Q(x,y) \ \vee \ \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$$

$$\wedge$$

$$\Bigg(Q(x,y) \ \vee \ \neg \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$$

➤ $\forall x \forall y \Bigg(\Bigg(\neg Q(x,y) \ \vee \ \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$

$$\wedge \Bigg(Q(x,y) \ \vee \ \neg \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg) \Bigg)$$

(N) Manipulamos la negación para permitir su efecto únicamente en fórmulas atómicas además de quitar las doble negaciones:

$$\Bigg(Q(x,y) \ \vee \ \neg \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg) \Bigg)$$

$$\equiv$$

$$\Bigg(Q(x,y) \ \vee \ \exists z \neg \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$$

$$\equiv$$

$$\Bigg(Q(x,y) \ \vee \ \exists z \Big(\neg \big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \vee \neg \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$$

$$\equiv$$

$$\Bigg(Q(x,y) \ \vee \ \exists z \Big(\big(P(z,x) \wedge \neg P(z,y)\big) \vee \big(\neg P(z,x) \wedge P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$$

➤ $\forall x \forall y \Bigg(\Bigg(\neg Q(x,y) \ \vee \ \forall z \Big(\big(\neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big) \Big) \Bigg)$

$$\wedge\Bigg(Q(x,y)\ \vee\ \exists z\Big(\big(P(z,x)\wedge\neg P(z,y)\big)\vee\big(\neg P(z,x)\wedge P(z,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg)$$

(R) Renombramos variables ligadas para que ninguna variable se repita en los cuantificadores:

$$➤\ \forall x\forall y\Bigg(\Bigg(\neg Q(x,y)\ \vee\ \forall z\Big(\big(\neg P(z,x)\vee P(z,y)\big)\wedge\big(P(z,x)\vee\neg P(z,y)\big)\Big)\Bigg)$$

$$\wedge\Bigg(Q(x,y)\ \vee\ \exists w\Big(\big(P(w,x)\wedge\neg P(w,y)\big)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg)$$

(E) Extraemos cuantificadores de la matriz:

$$➤\ \forall x\forall y\forall z\exists w\Bigg(\Bigg(\neg Q(x,y)\ \vee\ \Big(\big(\neg P(z,x)\vee P(z,y)\big)\wedge\big(P(z,x)\vee\neg P(z,y)\big)\Big)\Bigg)$$

$$\wedge\Bigg(Q(x,y)\ \vee\ \Big(\big(P(w,x)\wedge\neg P(w,y)\big)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg)$$

(D) Usamos las leyes distributivas para transformar la matriz a FNC. La fórmula está ahora en FNCP: ✓

$$(1)\ \neg Q(x,y)\ \vee\ \Big(\big(\neg P(z,x)\vee P(z,y)\big)\wedge\big(P(z,x)\vee\neg P(z,y)\big)\Big)$$

$$\equiv$$

$$(1)\ \big(\neg Q(x,y)\vee\neg P(z,x)\vee P(z,y)\big)\wedge\big(\neg Q(x,y)\vee P(z,x)\vee\neg P(z,y)\big)$$

$$(2)\ Q(x,y)\ \vee\ \Big(\big(P(w,x)\wedge\neg P(w,y)\big)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)$$

$$\equiv$$

$$(2)\ Q(x,y)\ \vee\ \Bigg(\Big(P(w,x)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)\wedge\Big(\neg P(w,y)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)\Bigg)$$

Tomemos $\Big(P(w,x)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)\wedge\Big(\neg P(w,y)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)$ como (2.1):

$$(2.1)\ \Big(P(w,x)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)\wedge\Big(\neg P(w,y)\vee\big(\neg P(w,x)\wedge P(w,y)\big)\Big)$$

$$\equiv$$

$$(2.1)\ \Big(\big(P(w,x)\vee\neg P(w,x)\big)\wedge\big(P(w,x)\vee P(w,y)\big)\Big)\wedge\Big(\big(\neg P(w,y)\vee\neg P(w,x)\big)\wedge\big(\neg P(w,y)\vee P(w,y)\big)\Big)$$

Notemos que $P(w,x)\vee\neg P(w,x)$ y $\neg P(w,y)\vee P(w,y)$ nos dan la cláusula trivial, por lo que la fórmula (2.1) se reduce a:

$$(2.1)\ \Big(\big(P(w,x)\vee\neg P(w,x)\big)\wedge\big(P(w,x)\vee P(w,y)\big)\Big)\wedge\Big(\big(\neg P(w,y)\vee\neg P(w,x)\big)\wedge\big(\neg P(w,y)\vee P(w,y)\big)\Big)$$

$$\equiv$$

$$(2.1)\ \big(P(w,x)\vee P(w,y)\big)\wedge\big(\neg P(w,y)\vee\neg P(w,x)\big)$$

Retomando en (2):

$$(2)\ Q(x,y)\ \vee\ \Big(\big(P(w,x) \vee (\neg P(w,x) \wedge P(w,y))\big) \wedge \big(\neg P(w,y) \vee (\neg P(w,x) \wedge P(w,y))\big)\Big)$$

$$\equiv$$

$$(2)\ Q(x,y)\ \vee\ \Big(\big(P(w,x) \vee P(w,y)\big) \wedge \big(\neg P(w,y) \vee \neg P(w,x)\big)\Big)$$

$$\equiv$$

$$(2)\ \big(Q(x,y) \vee P(w,x) \vee P(w,y)\big) \wedge \big(Q(x,y) \vee \neg P(w,y) \vee \neg P(w,x)\big)$$

➤ $\forall x \forall y \forall z \exists w \Big(\big(\neg Q(x,y) \vee \neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big)$

$\wedge\Big(\big(Q(x,y) \vee P(w,x) \vee P(w,y)\big) \wedge \big(Q(x,y) \vee \neg P(w,y) \vee \neg P(w,x)\big)\Big)\Big)$

(S) Recorremos el prefijo de izquierda a derecha y aplicamos las respectivas *funciones de Skolem*:

➤ $\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\neg Q(x,y) \vee \neg P(z,x) \vee P(z,y)\big) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee P(z,x) \vee \neg P(z,y)\big)$

$\wedge\Big(Q(x,y) \vee P\big(f(x,y,z),x\big) \vee P\big(h(x,y,z),y\big)\Big)$

$\wedge\Big(Q(x,y) \vee \neg P\big(g(x,y,z),y\big) \vee \neg P\big(j(x,y,z),x\big)\Big)\Big)$

$\therefore$ La Forma Normal Clausular de la fórmula es:

Output: $\big\{\ \{\neg Q(x,y),\ \neg P(z,x),\ P(z,y)\},\ \{\neg Q(x,y),\ P(z,x),\ \neg P(z,y)\},$
$\{Q(x,y),\ P\big(f(x,y,z),x\big),\ P\big(h(x,y,z),y\big)\},$
$\{Q(x,y),\ \neg P\big(g(x,y,z),y\big),\ \neg P\big(j(x,y,z),x\big)\}\ \big\}$

3. (1.5 pts.) Considere el reemplazo de una variable cuantificada existencialmente por una función de Skolem. Suponga que existe un modelo $\mathcal{M}'$ tal que

$$\mathcal{M}' \models \forall x_1 \ldots \forall x_n P(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

con f un símbolo de función de n-argumentos. Demuestre que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y P(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Tenemos un modelo $\mathcal{M}'$ tal que

$\mathcal{M}' \models \forall x_1 \ldots \forall x_n P(x_1, \ldots x_n, F(x_1, \ldots x_n))$

donde F es un símbolo de Función de n argumentos

Queremos demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que

$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y P(x_1, \ldots, x_n, y)$

Es decir, si existe un modelo donde la propiedad se satisface para un valor especifico dado por $F(x_1 \ldots x_n)$ entonces también existe un modelo donde se garantiza la existencia de algún y.

Tenemos que

El enunciado $\forall x_1 \ldots \forall x_n P(x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n))$ significa que para cualquier elección de $x_1, \ldots x_n$. $P(x_1, \ldots x_n, F(x_1, \ldots, x_n))$ es siempre verdadera en el modelo $\mathcal{M}'$

Por demostrar que se cumple: $\forall x_1, \ldots \forall x_n \exists y P(x_1, \ldots, x_n, y)$
Es decir que para cualquier elección de $x_1, \ldots, x_n$, existe al menos, un valor de y tal que $P(x_1, \ldots, x_n, y)$ es verdadera.

La existencia de una función $F(x_1, \ldots, x_n)$ que siempre satisface $P(x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n))$ implica que al menos un valor de y hace verdadera la propiedad para cada conjunto de valores $x_1, \ldots, x_n$

Esto significa que la formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y P(x_1, \ldots, x_n, y)$ debe ser válida en algún ~~modelo~~ modelo.

Entonces tomando en cuenta lo anterior, el problema se reduce a mostrar que si un modelo M' valida la forma con la función de Skolem, podemos construir un modelo M donde se satisface la forma con el cuantificador existencial

Dado que M' ya es un modelo donde $P(x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero para cualquier conjunto de valores $x_1, \ldots, x_n$ definimos un modelo M tal que.

Tomamos el mismo dominio de M'

Utilizamos la misma interpretación de P que en M'

En M, para cada elección de $x_1, \ldots, x_n$, existe al menos un y que satisface $P(x_1, \ldots, x_n, y)$

Dado que M' es un modelo valido de la formula skolemizada y en M estamos asegurando la existencia de al menos un y que satisface la relación, podemos concluir que M es un modelo de la formula con cuantificación existencial.

4. (1.5 pts.) Ejecute el algoritmo de Martelli y Montanari sobre las siguientes ecuaciones de términos. En cada caso muestre el unificador más general o la razón por la cual los términos no pueden ser unificados.

$$x = f(a), \qquad b = b,$$
$$g(f(a)) = y, \qquad x = g(y),$$
$$f(x) = y. \qquad x = g(g(z)),$$
$$y = g(a).$$

Aplicamos el Algoritmo de Martelli y Monatanari para encontrar el posble umg:

Input:

$$x = f(a),$$
$$g(f(a)) = y,$$
$$f(x) = y.$$

1) Transformamos $t = x$, donde t no sea una variable, en $x = t$:

$$x = f(a),$$
$$y = g(f(a)),$$
$$y = f(x).$$

2) ✓No se necesita aplicar la regla dos:

$$x = f(a),$$
$$y = g(f(a)),$$
$$y = f(x).$$

3) ✓No es necesario aplicar la regla tres:

$$x = f(a),$$
$$y = g(f(a)),$$
$$y = f(x).$$

4) Reemplazamos todas las presencias de x por $f(a)$ en las demás ecuaciones donde x figura.

$$x = f(a),$$
$$y = g(f(a)),$$
$$y = f(f(a)).$$

Notemos que tenemos $y = g(f(a)),\ y = f(f(a))$, entonces podemos decir que $g(f(a)) = f(f(a))$, una ecuación donde ambos lado de la igualdad no son varibales.

Por la regla 3. *Si el símbolo de función más externo de t y s no es el mismo, el algoritmo termina reportando no unificable..* Para este caso $t = g(f(a)),\ s = f(f(a))$, de modo que el conjunto de ecuaciones de términos dado no se le puede asignar un unificador.

Output: *No unificable*

Input:

$$b = b,$$
$$x = g(y),$$
$$x = g(g(z)),$$
$$y = g(a).$$

1) ✓No se necesita aplicar la regla uno:

$$b = b,$$
$$x = g(y),$$
$$x = g(g(z)),$$
$$y = g(a).$$

2) Eliminamos la ecuaciones de la forma $x = x$, por lo que quitamos $b = b$:

$$x = g(y),$$
$$x = g(g(z)),$$
$$y = g(a).$$

4) Reemplazamos todas las presencias de y por $g(a)$ en las demás ecuaciones donde y figura:

$$x = g(g(a)),$$
$$x = g(g(z)),$$
$$y = g(a).$$

3) Notemos que podemos aplicar la regla 3 a las ecuaciones $x = g(g(a))$, $x = g(g(z))$:

$$x = g(g(a)),$$
$$x = g(g(z)),$$
$$g(g(a)) = g(g(z)),$$
$$g(a) = g(z),$$
$$a = z,$$

$$y = g(a).$$

Por lo que al simplemente tenemos:

$$x = g(g(a)),$$

$$x = g(g(z)),$$

$$a = z,$$

$$y = g(a).$$

4) Reemplazamos todas las presencias de a por z en las demás ecuaciones donde a figura:

$$x = g(g(z)),$$

$$x = g(g(z)),$$

$$a = z,$$

$$y = g(z).$$

Dado que $x = g(g(z))$ se repite, podemos simplificar y tenemos:

$$x = g(g(z)),$$

$$a = z,$$

$$y = g(z).$$

Así terminamos exitosamente el algoritmo, y afirmamos que:

$$\textbf{Output: } \mu = [x := g(g(z)),\ a := z,\ y := g(z)]$$

Comprobamos aplicando el umg:

$$b = b, \quad \Rightarrow \quad b = b,$$

$$x = g(y), \quad \Rightarrow \quad g(g(z)) = g(g(z)),$$

$$x = g(g(z)), \quad \Rightarrow \quad g(g(z)) = g(g(z)),$$

$$y = g(a). \quad \Rightarrow \quad g(z) = g(z).$$

Podemos verificar también que el unificador:

$$\theta = [x := g(g(h(b))),\ a := h(b),\ y := g(h(b)),\ z := h(b)]$$

puede expresarse como $\theta = \mu[z := h(b)]$

5. (1.5 pts.) Unifique los siguientes pares de fórmulas atómicas, si es posible. En caso afirmativo, emplee el algoritmo de Robinson. En caso contrario, dé la razón por la que no pueden ser unificados.

✦ $Q(g(a,x), g(u,b)),\ Q(z, g(u,x))$.   ✦ $P(x, g(z), g(z)),\ P(h(y), y, g(h(x)))$.

$Q(g(a,x), g(u,b))$, $Q(z, g(u,x))$

① $Q_0(g(a,x), g(u,b))$ $Q_0'(z, g(u,x))$

El conjunto en desacuerdo $\{g(a,x), z\}$

El cual define una sustitución $\sigma_1 = [z := g(a,x)]$

② $Q_1(g(a,x), g(u,b))$ $Q_1'(g(a,x), g(u,x))$

El conjunto en desacuerdo $\{b, x\}$

El cual define una sustitución $\sigma_2 = [x := b]$

③ $Q_2(g(a,b), g(u,b))$ $Q_2'(g(a,b), g(u,b))$

Como $Q_2 = Q_2'$ termina el algoritmo

tenemos la unificación $\mu = \sigma_1\sigma_2 = [z := g(a,b),\ x := b]$

$P(x, g(z), g(z))$ $P(h(y), y, g(h(x)))$

① $P_0(x, g(z), g(z))$ $P_0'(h(y), y, g(h(x)))$

El conjunto en desacuerdo $\{x, h(y)\}$

El cual define una sustitución $\sigma_1 = [x := h(y)]$

② $P_1(h(y), g(z), g(z))$ $P_1'(h(y), y, g(h(h(y))))$

El conjunto en desacuerdo $\{g(z), y\}$

El cual define una sustitución $\sigma_2 = [y := g(z)]$

③ $P_2(h(g(z)), g(z), g(z))$ $P_2'(h(g(z)), g(z), g(h(h(g(z)))))$

El conjunto en desacuerdo $\{z, h(h(g(z)))\}$

Ocurre un problema ya que la variable z aparece dentro del termino $h(h(g(z)))$, por lo que la unificacion falla.

6. (1 pt.) ¿Qué es lo que sucede al tratar de unificar las siguientes ecuaciones de términos:

$$x = f(y), \quad y = g(x)?$$

6 Tenemos que encontrar la unificación de $x = F(y)$ y $y = g(x)$, entonces debemos encontrar una sustitución σ que haga iguales ambos términos

Queremos encontrar una sustitución σ tal que:

$\sigma(x) = \sigma(F(y))$

$\sigma(y) = \sigma(g(x))$

Reemplazamos la primera ecuación en la segunda y nos queda:

$$y = gF(y)$$

Usando el algoritmo de Martelli y Montanari:

Escribimos el conjunto de ecuaciones: $S = \{x = F(y), y = g(x)\}$

Eliminamos la segunda ecuación sustituyendolo por $F(y)$

$S = \{y = g(F(y))\}$

Si observamos la ecuación, nos percatamos que y aparece dentro de su propia definición $g(F(y))$, lo que proboca un ciclo infinito ya que siempre habrá una y que se tiene que sustituir:

$$y = g(F(y)) = g(f(g(F(y)))) = \dots$$

7. (2 pts.) Dado $\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \vee P(y,z) \rightarrow P(x,z))$, $\forall x P(x,a)$, y $\forall y P(a,y)$, use resolución para demostrar $\forall x \forall y P(x,y)$.

Convertimos cada fórmula en su forma normal clausular:

- $\forall x \forall y \forall z \Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \rightarrow P(x,z) \Big)$
$$\Rightarrow \big(P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \rightarrow P(x,z) \equiv \neg \big(P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \vee P(x,z)$$
$$\equiv \neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee P(x,z)$$
$$\Rightarrow \{ \ \neg P(x,y), \ \neg P(y,z), \ P(x,z) \ \}$$
- $\forall x P(x,a) \Rightarrow \{ \ P(x,a) \ \}$
- $\forall y P(a,y) \Rightarrow \{ \ P(a,y) \ \}$
- Tenemos el consecuente $\forall x \forall y P(x,y)$, por lo que lo negamos y tenemos: $\neg \big(\forall x \forall y P(x,y) \big) \equiv \neg \forall x \neg \forall y \neg P(x,y) \equiv \exists x \exists y \neg P(x,y)$
Aplicando la *Skolemización*, dado que no hay algún cuantificador universal antes de ambos cuantificadores existenciales, entonces los argumentos de P son constantes:
$$\Rightarrow \{ \ \neg P(b,c) \ \}$$

Dado el conjunto $S = \Big\{ \{ \neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z) \}, \ \{ P(x,a) \}, \ \{ P(a,y) \}, \ \{ \neg P(b,c) \} \Big\}$
Realizamos el Procedimiento de Resolución General:

1. $\{ \ \neg P(x,y), \ \neg P(y,z), \ P(x,z) \ \}$ *Prem*
2. $\{ \ P(x,a) \ \}$ *Prem*
3. $\{ \ P(a,y) \ \}$ *Prem*
4. $\{ \ \neg P(b,c) \ \}$ *Prem*
5. $\{ \ \neg P(a,z), \ P(x,z) \ \}$ $[y := a]$ *Res* (1, 2)
6. $\{ \ P(x,z) \ \}$ $[z := y]$ *Res* (3, 5)
7. $\square$ $[x := b, \ y := c]$ *Res* (4, 6)

Llegamos a la cláusula vacía, $\square$, por lo que el conjunto S es insatisfacible.

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall x \forall y P(x,y)$$