Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Lógica Computacional — 2025-2

Tarea 01

Docentes:
Noé Hernández Santiago Escamilla Ricardo López

Autores:
Fernanda Ramírez Juárez Ianluck Rojo Peña

Fecha de entrega: Miércoles 12 de febrero de 2025

Notas sobre la resolución

Nota general: Los ejercicios fueron resueltos en base a las notas de clase (IcNota2.pdf) y a los comentarios dados en las sesiones del curso. Se tomaron en cuenta los siguientes puntos específicos:

- **Ejercicios 1 y 2:** Se basan en las notas del profesor y los comentarios del 30 de enero y 6 de febrero.
- **Ejercicio 4:** Resuelto con base en la sección '7. Conceptos semánticos básicos' en IcNota2.pdf y explicaciones del ayudante Santiago el 7 de febrero.
- **Ejercicio 5:** Derivado de un ejercicio resuelto en clase el 30 de enero.
- **Ejercicio 6:** Link a la página de apoyo para realizar el ejercicio: https://sites.google.com/ciencias.unam.mx/estr discretas-2024-2/clases/notas-de-clase?authuser=0
- **Ejercicio 6 y 7:** Se basan en las clases y notas del profesor además las clases del ayudante Santiago los días 6, 7, 10, 11 y 12 de febrero.

Resolución de Ejercicios

1. (1.5 pt.) Usando las siguientes claves:
   - p := María está contenta.
   - q := María pide una bicicleta por su cumpleaños.
   - r := María recibe una bicicleta por su cumpleaños.
   - s := María odia a Juan.
   - t := Juan va a la playa.
   - u := Juan está de vacaciones.
   - v := El sol brilla.

Exprese en español las siguientes fórmulas llenando el cuadro que está abajo.

(a) Siempre que María está contenta y el sol brilla, deja de odiar a Juan.

(b) Cuando brilla el sol, Juan va a la playa, si está de vacaciones.

(c) María está contenta siempre que Juan está de vacaciones y se va a la playa.

(d) Aunque María está contenta porque pidió una bicicleta para su cumpleaños y la ha recibido, odia a Juan.

(e) María recibirá una bicicleta en su cumpleaños sólo si la pide.

	$(u \land t) \to p$	$\neg(r \land \neg q)$	$(p \land v) \to \neg s$	$(p \land (q \land r)) \land s$	$v \to u \to t$
1			✓		
2					✓
3	✓				
4				✓	
5		✓			

2. (1 pt.) Desarrolle las siguientes sustituciones, además elimine los paréntesis que sean redundantes según el orden de precedencia de los operadores lógicos visto en clase:

a) $((\neg(p \land q) \leftrightarrow ((\neg q) \to (p \to s))) \quad [p := (q \to s)][s := (\neg p)]$

Sustituímos a la variable atómica p con la fórmula $(q \to s)$ en la proposición:

$$((\neg((q \to s) \land q)) \leftrightarrow ((\neg q) \to ((q \to s) \to s))) \quad [s := (\neg p)]$$

Ahora continuamos con la sustitución de s:

$$((\neg((q \to s) \land q)) \leftrightarrow ((\neg q) \to ((q \to (\neg p)) \to (\neg p))))$$

Por jerarquía de operadores eliminamos los paréntesis innecesarios:

$$((\neg((q \to s) \land q)) \leftrightarrow ((\neg q) \to ((q \to (\neg p)) \to (\neg p))))$$

$$= \neg((q \to s) \land q) \leftrightarrow \neg q \to (q \to \neg p) \to \neg p$$

Resultado final:

$$\neg((q \to s) \land q) \leftrightarrow \neg q \to (q \to \neg p) \to \neg p$$

b) $((p \lor q) \to ((\neg r) \leftrightarrow p)) \quad [r, p, q := p, q, r]$

Dado que es una única sustitución, se reemplazan las variables una vez:

$$((q \lor r) \to ((\neg p) \leftrightarrow q))$$

Eliminamos los paréntesis:

$$((q \lor r) \to ((\neg p) \leftrightarrow q))$$

Resultado final:

$$q \lor r \to (\neg p \leftrightarrow q)$$

3. (1 pt.) Tomando en cuenta la sintaxis para las fórmulas de la lógica proposicional definida en la Nota 01, reinserte tantos paréntesis como sea posible a la fórmula: $(q \to p \to \neg r \land s) \lor \neg p$

$$(q \to p \to \neg r \land s) \lor \neg p = ((q \to (p \to ((\neg r) \land s))) \lor (\neg p))$$

Resultado final:

$$((q \to (p \to ((\neg r) \land s))) \lor (\neg p))$$

4. (2 pts.) Sean Γ y Δ dos conjuntos de oraciones de la lógica proposicional, y sean φ y ψ fórmulas de la lógica proposicional. Determine para cada una de las siguientes afirmaciones si es verdadera, con una demostración, o si es falsa, con un contraejemplo.

- Si $\Gamma \vdash \varphi \land \Delta \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Demostración

P.D. $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$ significa que para toda interpretación I que satisface a $\Gamma \cup \Delta$, $I(\Gamma \cup \Delta) = 1$, entonces también satisface a φ, $I(\varphi) = 1$. De este modo, consideramos los siguientes casos:

Caso 1: $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible

Usaremos una de las propiedades de la Proposición 7.5 del archivo PDF *IC-Nota02.pdf* para demostrar este caso. Debemos probar lo siguiente:

Sea Γ' un conjunto de fórmulas y φ' una fórmula.
P.D. Si Γ' es insatisfacible, entonces $\Gamma' \vDash \varphi'$.
Recordemos que la relación de consecuencia lógica se entiende a través de una implicación del siguiente modo:

$$\text{Para toda interpretación } I, I(\Gamma') = 1 \to I(\varphi') = 1.$$

(Fragmento obtenido de las Notas 02)
Supongamos ahora que Γ' es insatisfacible, entonces $I(\Gamma)' = 0$ para toda interpretación I.
En particular, si suponemos que se cumple $I(\Gamma') = 0 \to I(\varphi') = 1$.
Tenemos que, en la lógica proposicional, si el antecedente es falso, la implicación es verdadera sin importar la veracidad de la conclusión.
Así, si Γ' es insatisfacible, entonces $\Gamma' \vDash \varphi$.

Y $\therefore$ Si $\Gamma \vdash \varphi \land \Delta$ es insatisfacible, entonces $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$

Caso 2: $\Gamma \cup \Delta$ es satisfacible

Subcaso 2.1: $\varphi \in \Gamma$ o $\varphi \in \Delta$
Es trivial, ya que como φ pertenece a alguno de los dos conjuntos, éste sigue perteneciendo a la unión, es decir, $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$.
Dado que $\Gamma \cup \Delta$ es satisfacible, significa que $I(\Gamma \cup \Delta) = 1$.
Por lo tanto, $\forall \psi \in \Gamma \cup \Delta, I(\psi) = 1$, lo que implica que φ es satisfacible.
Así, concluimos que $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$.

Subcaso 2.2: $\varphi \notin \Gamma$ y $\varphi \notin \Delta$

Es trivial, ya que nuestro supuesto es que $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Delta \vDash \varphi$.

Y cómo $\Gamma \cup \Delta$ es satisfacible, la interpretación I que hace satisfacible a $\Gamma \cup \Delta$ también hace satisfacible a φ.

Por lo tanto, se concluye que: $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$.

Conclusión: Si $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Delta \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$.

- Si $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Delta \nvDash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$.

Demostración

Por nuestro supuesto, para toda interpretación I tal que $I(\Gamma) = 1$, se tiene que $I(\varphi) = 1$.

Además, existe I' tal que I'(Δ) = 1, pero I'(φ) = 0.

Notemos que $\Gamma \cup \Delta$ es el conjunto con los elementos tanto de Γ como de Δ, por lo que cualquier interpretación I^* debe satisfacer las fórmulas de Γ como de Δ).

Pero por nuestro supuesto, existe $\psi \in \Gamma$ tal que $I^*(\psi) = 1$, y esta interpretación de la fórmula ψ es necesaria para que φ sea consecuencia lógica de Γ.

Sin embargo, existe al menos $\psi' \in \Delta$ tal que cualquier interpretación $I^*(\psi') = 0$ pues ψ' es la fórmula que, al aplicarle alguna interpretación en Δ, hace que φ no sea consecuencia lógica de Δ.

De este modo, no hay interpretaciones que hagan a $\Gamma \cup \Delta$ satisfacible, pues de lo contrario, se contradicen a nuestro supuesto.

Por lo tanto, $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible, y por una propiedad usada en el ejercicio anterior: Si $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible, entonces $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$.

$$\therefore \quad Si \quad \Gamma \vDash \varphi \quad y \quad \Delta \nvDash \varphi, \quad entonces \quad \Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$$

- Si $\Gamma \nvDash \psi$, entonces $\Gamma \vDash \neg\varphi$.

Contraejemplo

Por el Lema 7.2 de las notas (ICNota 02.pdf), $\varnothing$ es un conjunto vacío de fórmulas válidas.

Por lo que definimos a $\psi = p \to q$ y $\Gamma = \varnothing$.

Por definición, $p \to q$ no es tautología, entonces $\Gamma \nvDash \psi$, es decir: $\varnothing \nvDash p \to q$.

Pues recordemos que toda interpretación satisface a $\varnothing$, pero no toda interpretación satisface $p \to q$.

Así, $\Gamma \nvDash \neg\psi$, es decir: $\varnothing \nvDash \neg(p \to q)$ y ya que $\neg(p \to q)$ sigue sin ser tautología.

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

5. (1.5 pts.) Mediante interpretaciones decida si los siguientes conjuntos de proposiciones son satisfacibles:

a) $\{p \to q, (s \vee p) \wedge \neg q, \neg s\}$

Definimos el conjunto de fórmulas:

$$\Gamma = \{p \to q, (s \vee p) \wedge \neg q, \neg s\}$$

donde:

$$\varphi_1 = p \to q, \quad \varphi_2 = (s \vee p) \wedge \neg q, \quad \varphi_3 = \neg s$$

Tenemos que Γ es satisfacible si existe una interpretación I tal que $I(\varphi) = 1$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

Así, evaluamos $I(\varphi_1) = 1$, es decir, $I(p \to q) = 1$, lo que implica que $I(p) = 0$ o $I(q) = 1$.

Si $I(p) = 0$, entonces $I(q)$ puede tomar cualquier valor. Supongamos que $I(q) = 0$.

Ahora, evaluamos $I(\varphi_2) = 1$, es decir, $I((s \vee p) \wedge \neg q) = 1$.

Para que esto se cumpla, se debe cumplir que $I(s \vee p) = 1$ y $I(\neg q) = 1$.

Dado que $I(\neg q) = 1$, se tiene que $I(q) = 0$ como habíamos supuesto.

Por otro lado, $I(s \vee p) = 1$ implica que $I(s) = 1$ o $I(p) = 1$.

Como habíamos supuesto que $I(p) = 0$, entonces necesariamente $I(s) = 1$.

Sin embargo, evaluando $I(\varphi_3) = 1$, es decir, $I(\neg s) = 1$, se deduce que $I(s) = 0$, lo cual contradice la evaluación anterior de $I(s) = 1$.

Dado que llegamos a una contradicción, se concluye que no existe una interpretación que satisfaga todas las fórmulas de Γ.

$$\therefore \Gamma \text{ es insatisfacible.}$$

b) $\{p \to q, q \leftrightarrow s, \neg p, \neg s\}$

Definimos el conjunto de fórmulas:

$$\Gamma = \{p \to q, q \leftrightarrow s, \neg p, \neg s\}$$

donde:

$$\varphi_1 = p \to q, \quad \varphi_2 = q \leftrightarrow s, \quad \varphi_3 = \neg p, \quad \varphi_4 = \neg s$$

Analizamos la satisfacibilidad del conjunto, evaluando si cada fórmula es satisfacible.

Si $I(\varphi_1) = 1$, es decir, $I(p \to q) = 1$, entonces debe cumplirse que $I(p) = 0$ o $I(q) = 1$.

Dado que $I(\varphi_3) = 1$, es decir, $I(\neg p) = 1$, se tiene que $I(p) = 0$.

Por lo tanto, $I(p \to q) = 1$ se cumple para cualquier valor de $I(q)$.

Ahora evaluamos $I(\varphi_2) = 1$, es decir, $I(q \leftrightarrow s) = 1$, lo que implica que $I(q) = I(s)$.

Si $I(q) = 0$, entonces $I(s) = 0$.

Por otro lado, $I(\varphi_4) = 1$, es decir, $I(\neg s) = 1$, lo que implica que $I(s) = 0$.

Esto es consistente con la evaluación anterior de $I(s) = 0$.

Sin embargo, si asumimos que $I(q) = 1$, entonces $I(s) = 1$ por la equivalencia $q \leftrightarrow s$.

Esto contradice la evaluación de $I(\neg s) = 1$, lo que significa que nuestra suposición de $I(q) = 1$ es incorrecta.

Así, tenemos que $I(p) = I(q) = I(s) = 0$, lo cual es consistente con todas las fórmulas.

De este modo, hemos encontrado una interpretación que satisface todas las fórmulas en Γ

$$\therefore \Gamma \text{ es satisfacible.}$$

6. (2 pts.) Usando deducción natural pruebe la validez de los siguientes:

- $p \to q, q \to r \vee s, \neg s, p \vdash r$
- $\neg p \vee q \vdash p \to q$

- $p \to q,\ q \to r \vee s,\ \neg s,\ p \vdash r$

1	$p \to q$	Premisa
2	$q \to r \vee s$	Premisa
3	$\neg s$	Premisa
4	p	Premisa
5	q	MP (1,4)
6	$r \vee s$	MP (2,5)
7	r	Silogismo Disyuntivo (6,3)

- $\neg p \vee q \vdash p \to q$

1	$\neg p \vee q$	Premisa
2	p	Suponiendo
3	$\neg p \vee q$	Recordando Premisa
4	$\neg p$	Suponiendo
5	$p \wedge \neg p$	Contradicción (2,3)
6	q	E $\vee$ (1,4,5)
7	$p \to q$	I $\to$ (2,6)

Nota: Para este ejercicio se usaron las reglas vistas en clase y además usamos material visto en la asignatura Estructuras Discretas.

Dejamos link de la pagina: Presentación "Lógica proposicional V

7. (2 pts.) Considere el siguiente argumento lógico:

Si Sarah Connor destruye a Skynet en 1994, entonces no habrá Día del Juicio Final. Si no hay Día del Juicio Final, John Connor no enviará a su padre a 1984. Es condición necesaria que John Connor envíe a su padre a 1984, para que el mismo John nazca. Sarah Connor no destruye a Skynet en 1994, si John no nace. Por lo tanto, Sarah Connor no destruirá a Skynet en 1994.

Tradúzcalo a lógica proposicional y a través de tableaux semánticos determine si es correcto o no.

Tenemos:

p: Sarah Connor destruye a Skynet en 1994.

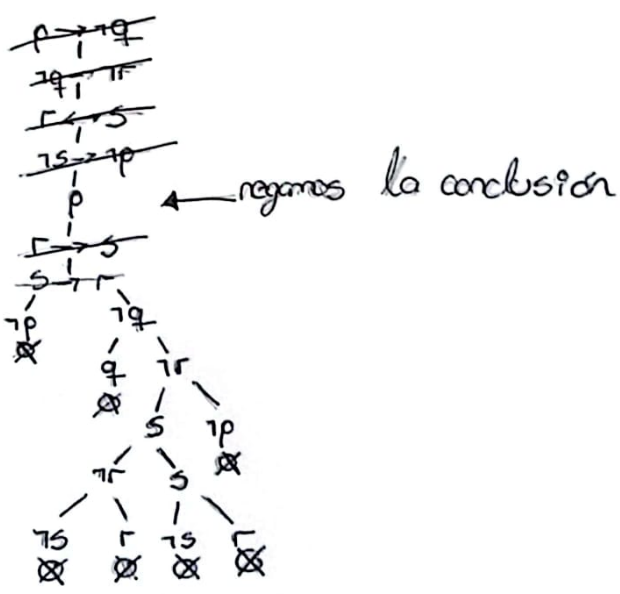
q: Habrá Día del Juicio Final

r: John Connor envía a su padre a 1984.

s: John nace

Traducción:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q \\ \neg q \rightarrow \neg r \\ r \leftrightarrow s \\ \neg s \rightarrow \neg p \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$



∴ El argumento es correcto