Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Lógica Computacional — 2025-2

Tarea 05

Docentes:
Noé Hernández   Santiago Escamilla   Ricardo López

Autores:
Fernanda Ramírez Juárez   Ianluck Rojo Peña

Fecha de entrega: Domingo 25 de mayo de 2025

Notas sobre la resolución.

Nota general: Cada ejercicio fue resuelto en base, y tomando como referencia, las notas de clase lcNota12.pdf.

Además de las clases presenciales impartidas por el profesor y ayudantes, tanto para resolver dudas como las pistas y consejos dados

Resolución de Ejercicios.

1. (1.5 pts.) Sea $\mathbb{P}$ el programa $P(a) \leftarrow$ y G la cláusula meta $\leftarrow P(X)$. ¿Es la sustitución vacía una sustitución de respuesta correcta? Justifique su respuesta.

   Recordemos que por la **Definición 1.4** *(en resumen)***:**

   "Dado un programa lógico P y una cláusula meta G, una sustitución θ es una sustitución de respuesta correcta si: $P \vDash \forall(\neg G\theta)$ donde la cuantificación universal aplica sobre todas las variables libres de $\neg G\theta$."

   Tenemos al programa $\mathbb{P}$ con el único hecho $P(a) \leftarrow$, y a G la cláusula meta $\leftarrow P(X)$. Por lo que, aplicar θ a G dado que θ es vacía, no cambia nada, y nos queda $G\theta = \leftarrow P(X)$.

   Luego, consideremos que su negación $(\neg G\theta)$ se cumple: $\neg G\theta = \neg(\leftarrow P(X)) = P(X)$, por ende tendriamos $\mathbb{P} \vDash \forall P(X)$. Sin embargo en el programa $\mathbb{P}$, solo sabemos que $P(a)$ es verdadero.

   Por otro lado, sabemos que, para ser una sustitución de respuesta correcta bajo la sustitución vacía, necesitaríamos que $P(X)$ fuera verdadero para todo X, *i.e.* para cualquier valor que le asociemos a X. Pero si tenemos por ejemplo, $P(X)$ con $X = b$, entonces $P(b)$ no es derivables de $\mathbb{P}$ porque $\mathbb{P}$ solo afirma $P(a)$ y nada más.

   Por lo tanto, la sustitución vacía no es una sustitución de respuesta correcta, porque como ya mostramos $P \nvDash \forall P(X)$.

2. (2 pts.)

   - Considere el siguiente programa lógico

     $$P(X) \leftarrow P(f(X))$$

     junto con la cláusula meta $\leftarrow P(a)$. ¿Qué pasará al usar la resolución SLD?
   - Ahora, suponga que agregamos el hecho $P(f(f(a)))$. Conteste la misma pregunta.

   Usamos resolución SLD para el primer caso:

1. $P(X) \leftarrow P(f(X))$			
2. $\leftarrow P(a)$			cláusula meta
3. $\leftarrow P(f(a))$	$[X := a]$	tomando $P(X)$	*Res* (1, 2)
4. $\leftarrow P(f(f(a)))$	$[X := f(a)]$	tomando $P(X)$	*Res* (1, 3)
5. $\leftarrow P(f(f(f(a))))$	$[X := f(f(a))]$	tomando $P(X)$	*Res* (1, 4)

   .
   .
   .

Notemos que esto se sigue infinitamente:

$$\leftarrow P(f(f(f(f(a)))))$$

$$\leftarrow P(f(f(f(f(f(a))))))$$

Nunca podremos llegar a la cláusula vacía dado que la única variable a la que podemos aplicar sustitución es X en $P(X) \leftarrow P(f(X))$ y como $P(X)$ es un hecho *(clásula de Horn unitaria positiva)* tras la aplicar resolución con $\leftarrow P(a)$ (una cláusula meta), nos queda $\leftarrow P(f(X))$ (otra cláusula meta) con el valor que se le haya dado a X en la sustitución. Y al volver a intentar resolución SLD sucede lo mismo, no podemos unificar $\leftarrow P(f(X))$ con algun $\leftarrow P(a)$, $\leftarrow P(f(a))$, $\leftarrow P(f(f(a)))$, $\cdots$, por lo que entramos en un bucle infinito sin llegar a la cláusula vacía.

Por lo tanto, no se puede resolver la consulta.

Ahora continuamos con el segundo caso, agregando el hecho $P(f(f(a)))$, usamos resolución SLD:

1. $P(X) \leftarrow P(f(X))$				
2. $P(f(f(a)))$				
3. $\leftarrow P(a)$				cláusula meta
4. $\leftarrow P(f(a))$	$[X := a]$	tomando $P(X)$	*Res* (1, 3)	
5. $\leftarrow P(f(f(a)))$	$[X := f(a)]$	tomando $P(X)$	*Res* (1, 4)	
6. $\square$		tomando $P(f(f(a)))$	*Res* (2, 5)	

Al agregar el hecho $P(f(f(a)))$, llegamos a la cláusula vacía y obtuvimos una refutación SLD exitosamente.

3. (1.5 pts.) Considere el siguiente programa lógico:

$$\begin{aligned} A(x) &\leftarrow B(x) \\ B(x) &\leftarrow E(x) \\ L(karl,x) &\leftarrow A(x) \\ B(franz)& \\ E(hansi)& \end{aligned}$$

Dé una derivación SLD para la consulta $\leftarrow E(y), L(karl, y)$ que use la regla de cómputo que tome la literal más a la derecha, y la regla de búsqueda que analice las cláusulas de arriba a abajo.

Sea P el programa lógico:

$$\begin{aligned} A(x) &\leftarrow B(x) \\ B(x) &\leftarrow E(x) \\ L(karl,x) &\leftarrow A(x) \\ B(franz)& \\ E(hansi)& \end{aligned}$$

Damos la siguiente derivación SLD para la consulta $\leftarrow E(y), L(karl, y)$:

1.	$A(x) \leftarrow B(x)$			
2.	$B(x) \leftarrow E(x)$			
3.	$L(karl, x) \leftarrow A(x)$			
4.	$B(franz)$			
5.	$E(hansi)$			
6.	$\leftarrow E(y), L(karl, y)$			consulta
7.	$\leftarrow E(y), A(y)$	$[x := y]$	tomando $L(karl, y)$	*Res* (3, 6)
8.	$\leftarrow E(y), B(y)$	$[x := y]$	tomando $A(y)$	*Res* (1, 7)
9.	$\leftarrow E(y)$	$[x := y]$	tomando $B(y)$	*Res* (2, 8)
10.	$\square$	$[y := hansi]$	tomando $E(hansi)$	*Res* (5, 9)

Dado que llegamos a la cláusula vacía la resolución fue exitosa y por lo tanto, tenemos una refutación para $\leftarrow E(y), Q(karl, y)$ bajo la sustitución $\theta = [x := y, y := hansi]$.

Como la resolución es correcta, concluimos que:

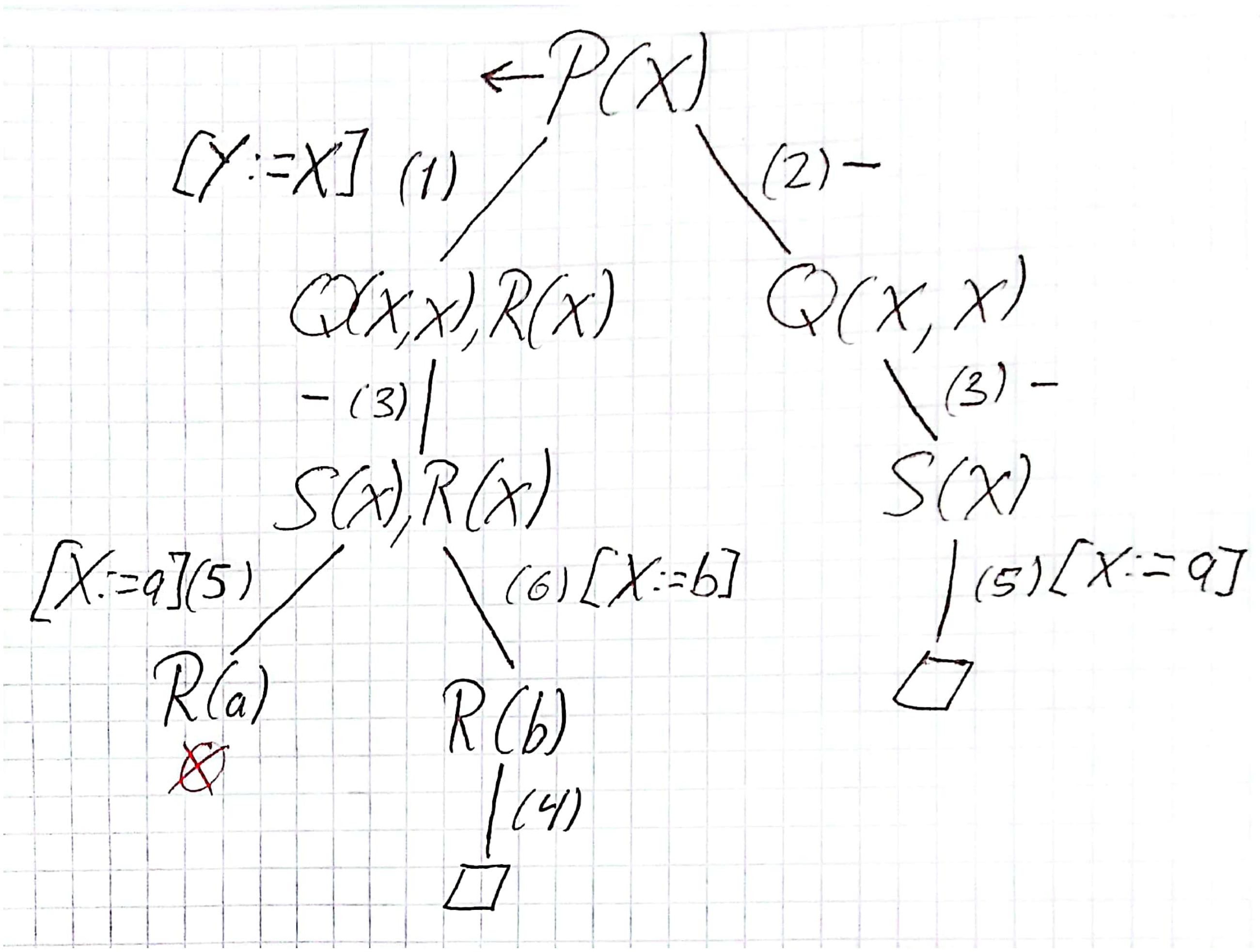
$$P \models \forall \neg(\neg E(y) \vee \neg L(karl, y))\theta$$

de manera que θ es una sustitución de respuesta correcta y $E(y) \wedge L(karl, y)$ es verdadera para cualquier modelo de P.

4. (2 pts.) Considere el siguiente programa lógico:

$$\begin{array}{lcl} P(Y) & \leftarrow & Q(X,Y), R(Y). \\ P(X) & \leftarrow & Q(X,X). \\ Q(X,X) & \leftarrow & S(X). \\ R(b). & & \\ S(a). & & \\ S(b). & & \end{array}$$

Dibuje el árbol SLD para la cláusula meta $\leftarrow P(X)$ si la regla de cómputo de Prolog es usada. ¿Cuál es la sustitución de respuesta correcta?



Como podemos ver, el árbol SLD obtenido a partir de la meta $\leftarrow P(X)$ bajo la regla de cómputo de Prolog nos da dos refutaciones posibles:

1) En la primer cláusula vacía obtenida, para la rama tenemos la sustitución: $\theta_1 = [Y := X, X := b]$
2) En la segunda cláusula vacía, para la rama tenemos la sustitución: $\theta_2 = [X := a]$

Por lo tanto $[Y := X, X := a]$ y $[X := a]$ son sustituciones de respuesta correcta para el programa con cláusula meta $\leftarrow P(X)$.

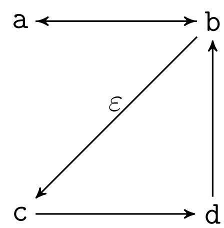
5. (2 pts.) Cónsidere el siguiente programa lógico $\mathcal{P}$:

```
path(X,X,Y).
path(X,Y, s(Z)):-
        edge(X,A), path(A,Y,Z).
path(X,Y,Z):-
        eps(X,A),path(A,Y,Z).

edge(a,b).
edge(b,a).
edge(c,d).
edge(d,b).

eps(b,c).
```

El predicado `edge` y `eps` definen la siguiente gráfica $\mathcal{G}$:



Además, `path(X,Y,Z)` es verdadero syss existe una trayectoria de `X` a `Y` en $\mathcal{G}$ donde a lo más `Z` aristas no etiquetadas con ϵ fueron usadas a lo largo de la trayectoria. Por ejemplo, `?-path(a,X,s(0))` da como soluciones `X=a`, `X=b` y `X=c`. Los números naturales los estamos representando por los símbolos de función `0` y `s`.

Dé un árbol SLD para la consulta `?-path(b,b,s(s(0)))`. Los subárboles que PROLOG explora después de haber encontrado la segunda solución pueden ser abreviados con (...).