Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Organización y Arquitectura de Computadoras
2025-2

Tarea 03

Docentes:
José Galaviz   Ricardo Pérez   Ximena Lezama

Autores:
Fernanda Ramírez Juárez   Ianluck Rojo Peña

No. de cuenta:
321204747   118005762

Fecha de entrega: Viernes 11 de abril de 2025

Preguntas.

1. Demuestra que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
   Dem. Demostracion por tabla de verdad:

x	y	z	$y \cdot z$	$x \cdot (y \cdot z)$	$x \cdot y$	$(x \cdot y) \cdot z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

   Como las columnas $x \cdot (y \cdot z)$ y $(x \cdot y) \cdot z$ son idénticas para todas las combinaciones posibles de x, y, z, queda demostrada la igualdad.

2. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $x(\overline{x} + y) = xy$
   Dem.

   Aplicamos la propiedad de distributividad:

$$x(\overline{x} + y) = x\overline{x} + xy$$

Por el complemento, tenemos que $x\overline{x} = 0$, así:

$$x\overline{x} + xy = 0 + xy$$

Y por último por Identidad $0 + xy = xy + 0 = xy$:

$$0 + xy = xy$$

Por lo tanto se cumple la igualdad.

Alternativamente con la tabla de verdad:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} + y$	$x(\overline{x} + y)$	xy
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Las columnas $x(\overline{x} + y)$ y xy son iguales, confirmando la igualdad.

3. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$
Dem.

Tomemos el lado izquierdo $(x + y)(\overline{x} + z)(y + z)$ y desarrollemos el producto de los dos primeros términos $(x + y)(\overline{x} + z)$:

$$(x + y)(\overline{x} + z) = x\overline{x} + xz + y\overline{x} + yz$$

Sabemos que por propiedad del complemento $x\overline{x} = 0$:

$$x\overline{x} + xz + y\overline{x} + yz = 0xz + y\overline{x} + yz = xz + \overline{x}y + yz$$

Es decir:

$$(x + y)(\overline{x} + z) = xz + \overline{x}y + yz$$

Retomando en el lado izquierdo:

$$(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (xz + \overline{x}y + yz)(y + z)$$

Desarrollando el producto:

$$\begin{aligned}(xz + y\overline{x} + yz)(y + z) &= xzy + y\overline{x}y + yzy + xzz + y\overline{x}z + yzz \\ &= xyz + \overline{x}yy + yyz + xzz + \overline{x}yz + yzz \quad \text{Conmutatividad}\end{aligned}$$

Aplicando idempotencia, $yy = y$ y $zz = z$:

$$xyz + \overline{x}yy + yyz + xzz + \overline{x}yz + yzz = xyz + \overline{x}y + yz + xz + \overline{x}yz + yz$$

De igual forma por idempotencia sobre $yz + yz = yz$

$$\begin{aligned} xyz + \overline{x}y + yz + xz + \overline{x}yz + yz &= xyz + \overline{x}y + xz + \overline{x}yz + yz + yz && \text{Conmutatividad} \\ &= xyz + \overline{x}y + xz + \overline{x}yz + yz \end{aligned}$$

Observemos que $xyz + \overline{x}yz = yz(x + \overline{x}) = yz(1) = yz$

$$\begin{aligned} xyz + \overline{x}y + xz + \overline{x}yz + yz &= xyz + \overline{x}yz + \overline{x}y + xz + yz && \text{Conmutatividad} \\ &= \overline{x}y + xz + yz + yz = \overline{x}y + xz + yz && \text{Idempotencia} \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $\overline{x}y + xz + yz = xz + \overline{x}y + yz$, que es lo que obtuvimos al desarrollar el producto $(x + y)(\overline{x} + z)$, es decir:

$$\overline{x}y + xz + yz = xz + \overline{x}y + yz = (x + y)(\overline{x} + z)$$

Por lo que podemos concluir que el factor $(y + z)$ está de más, y de esta forma la igualdad es válida.

$$\therefore \quad \text{Se cumple que } (x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$$

4. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
   Dem. Demostracion por contra-ejemplo:

   Sea $x = 1$ y $y = 1$, sustituyendo en la igualdad:

   $$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

   $$\overline{1 \cdot 0} = \overline{1} \cdot \overline{0}$$

   Sabemos que $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, y $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$:

   $$\overline{0} = 0 \cdot 1$$

   $$1 = 0 \qquad !!!$$

   Pero esto es una contradicción, pues $1 \neq 0$. Por lo que la igualdad no es válida.

   $$\therefore \quad \overline{x \cdot y} \neq \overline{x} \cdot \overline{y}$$

5. Verifica la siguiente igualdad usando los postulados de Huntington.

   $$F(x, y, z) = x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y$$

   Resolvemos la igualdad en base a los postulados de Huntington tomados como referencia del archivo pdf de las notas de clase *Lógica digital y diseño de circuitos digitales*.

Aplicamos la distributividad para $x(\overline{x}\ +\ y) = x\overline{x}\ +\ xy$:

$$F(x, y, z) = x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + x\overline{x} + xy + \overline{x}y$$

Notemos que, por el postulado Complemento, $x\overline{x} = 0$:

$$F(x, y, z) = x + x\overline{x} + xy + \overline{x}y = x + 0 + xy + \overline{x}y$$

Y por Identidad $x + 0 = 0 + x = x$:

$$F(x, y, z) = x + 0 + xy + \overline{x}y = x + xy + \overline{x}y$$

Ahora, podemos factorizar y de $(xy + \overline{x}y) = y(x + \overline{x})$:

$$F(x, y, z) = x + xy + \overline{x}y = x + y(x + \overline{x})$$

Reexpresamos $x + \overline{x} = 1$ por el postulado del Complemento:

$$F(x, y, z) = x + y(x + \overline{x}) = x + y(1) = x + y \cdot 1$$

Simplificamos $y \cdot 1 = y$ por el postulado de Identidad:

$$F(x, y, z) = x + y(1) = x + y \cdot 1 = x + y$$

De este modo quedó demostrado que $x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y$

$$\therefore\ F(x, y, z) = x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y$$

6. Obtén los mintérminos y reduce la siguiente función.

$$F(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z}$$

Antes de obtener los mintérminos y reducir la función dada, primero la simplificamos en base, de nuevo, a las notas de clase *Lógica digital y diseño de circuitos digitales*.

1) Simplificamos la función.
Notemos que por Conmutatividad $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x = \overline{x} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
Por Complemento $\overline{x} \cdot x = 0$, así $\overline{x} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = 0 \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
Y por el **Teorema 2** (Aniquilación) $0 \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = 0$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= \overline{x} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= 0 \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= 0 + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \quad \text{Identidad: } 0 + x = x \end{aligned}$$

Factorizamos los términos comunes, observando que $\overline{z} \cdot x + z \cdot x = x(\overline{z} + z)$
Recordando que por el Complemento $\overline{z} + z = 1$, así $x(\overline{z} + z) = x(1) = x$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= x(\overline{z} + z) + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= x(1) + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \end{aligned}$$

Por último aplicamos el **Teorema 3** (Absorción) $x + x \cdot y = x$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x + x \cdot \overline{y} + \overline{z} \\ &= x + \overline{z} \end{aligned}$$

Por lo que la función simplificada es $F(x, y, z) = x + \overline{z}$.

2) Obtenemos los mintérminos.
Construimos la tabla de verdad para la función $F(x, y, z) = x + \overline{z}$:

x	y	z	$\overline{z}$	$F(x, y, z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Los mintérminos donde $F = 1$ corresponden a las siguientes combinaciones:

$$m_0, m_2, m_4, m_5, m_6, m_7$$

Y de este modo, la forma canónica es:

$$F(x, y, z) = m_0, m_2, m_4, m_5, m_6, m_7 = \sum m(0, 2, 4, 5, 6, 7)$$

$\therefore$ La función reducida es $F(x, y, z) = x + \overline{z}$
Los mintérminos son $F(x, y, z) = m_0, m_2, m_4, m_5, m_6, m_7 = \sum m(0, 2, 4, 5, 6, 7)$

7. Simplifica la siguiente función usando su tabla de verdad asociada y mapas de Karnaugh.

$$F(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xyz$$

Tabla de verdad:

x	y	z	xyz
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Mapa de Karnaugh:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	0	1

Función simplificada: $\overline{x} + \overline{y} + z$

8. Reduce la siguiente función y da su maxitérminos.

$$F(x,y,z) = (x + \overline{x}z) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot z$$

Aplicamos la ley de absorción y la ley distributiva:

$$x + \overline{x}z = (x + \overline{x})(x + z) = 1 \cdot (x + z) = x + z$$

Sustituimos:

$$F(x,y,z) = (x + z)(\overline{y} + \overline{z})z$$

Aplicamos la ley distributiva entre los tres factores:

$$F(x,y,z) = [(x + z)(\overline{y} + \overline{z})]z$$

Distribuimos los primeros términos:

$$(x + z)(\overline{y} + \overline{z}) = x\overline{y} + x\overline{z} + z\overline{y} + z\overline{z}$$

Pero $z\overline{z} = 0$, entonces obtenemos: $x\overline{y} + x\overline{z} + z\overline{y}$

Multiplicamos por z:

$$F(x,y,z) = (x\overline{y} + x\overline{z} + z\overline{y})z = x\overline{y}z + x\overline{z}z + z\overline{y}z$$

Como ya sabemos $x\overline{z}z = 0$ y $z\overline{y}z = z\overline{y}$:

$$F(x, y, z) = x\overline{y}z + z\overline{y}$$

Factorizando:

$$F(x, y, z) = z\overline{y}(x + 1) = z\overline{y}$$

Así tenemos la **Función reducida:** $z\overline{y}$

Escribimos cada maxitérmino:

$$\begin{array}{lll}
M_0 & 000 & (x + y + z) \\
M_1 & 001 & (x + y + \overline{z}) \\
M_2 & 010 & (x + \overline{y} + z) \\
M_3 & 011 & (x + \overline{y} + \overline{z}) \\
M_4 & 100 & (\overline{x} + y + z) \\
M_6 & 110 & (\overline{x} + \overline{y} + z) \\
M_7 & 111 & (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})
\end{array}$$

$$F(x, y, z) = \prod(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_6, M_7)$$

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + y + z)(\overline{x} + \overline{y} + z)(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$$

$$\boxed{F(x, y, z) = (000)(010)(011)(100)(110)(111)}$$

9. Utilizando Mapas de Karnaugh simplifica la función.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \overline{x_0x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2}x_3 + \overline{x_0x_1}x_2x_3 + x_0\overline{x_1}x_2x_3 + x_0x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3} + x_0x_1x_2x_3$$

Mapa de Karnaugh:

x_0x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$\therefore$ La **Función simplificada** es:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2} + \overline{x_0x_1}x_2x_3 + x_0x_2x_3$$

10. Para realizar una Mapa de Karnaugh con más de 5 variables se mencionó que existe más de una forma de representarlo.

    Investiga ambos métodos y utiliza el que más se te acomode para reducir la siguiente función.

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} \;+\; \overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4} \;+\; \overline{x_0x_1}x_2x_3\overline{x_4} \;+\; x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 \;+$$
$$x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4 \;+\; \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3x_4} \;+\; x_0x_1x_2x_3x_4$$

Mapa de Karnaugh:

x_0x_1 \ $x_2x_3x_4$	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1	0	0	1	1	0	0	0
001	0	1	0	0	0	0	0	0
011	0	1	0	0	0	1	0	0
010	0	0	0	0	0	1	0	0

$\therefore$ La **Función simplificada** es:

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2} + \overline{x_0x_1}x_2x_3 + x_0x_2x_3$$

11. Utilizando el algoritmo de Quine–McCluskey realiza la siguiente reducción.

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} \;+\; \overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4} \;+\; \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} \;+\; \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \;+$$
$$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 \;+\; x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4 \;+\; \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4 \;+\; x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4 \;+\; x_0x_1x_2x_3x_4$$

    1) Paso 1: Hacer la tabla y organizar según su índice.

Número	$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	Índice
0	00000	0
2	00010	1
9	01001	2
10	01010	2
14	01110	3
25	11001	3
23	10111	4
29	11101	4
31	11111	5

    2) Paso 2: Identificar cuáles cambian en un solo bit.

Combinación	$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	Índice	Solución
0−2	000−0	0	S_1
2−10	0−010	1	S_2
9−25	−1001	2	S_3
10−14	01−10	2	S_4
25−29	11−01	3	S_5
23−31	1−111	4	S_6
29−31	111−1	4	S_7

3) Paso 3: Omitimos este paso ya que con los resultados que tenemos no es posible hacer la comparación porque cambian en más de un bit.

4) Hacemos la tabla para marcar lo que tenemos:

	0	2	9	10	14	25	23	29	31
S_1	✗	✗							
S_2		✗		✗					
S_3			✗			✗			
S_4				✗	✗				
S_5						✗		✗	
S_6							✗		✗
S_7								✗	✗

Elegimos soluciones: $S_1,\ S_3,\ S_4,\ S_6,\ S_7$

$\therefore$ La **Función simplificada** es:

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_4} + x_1\overline{x_2x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_4} + x_0x_2x_3x_4 + x_0x_1x_2x_4$$

12. Utilizando el algoritmo de Quine–McCluskey realiza la siguiente reducción.

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} \ + \ \overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4} \ + \ \overline{x_0x_1}x_2x_3\overline{x_4} \ + \ \overline{x_0x_1}x_2x_3x_4 \ +$$

$$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} \ + \ \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \ + \ x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 \ + \ x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4 \ + \ \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4 \ +$$

$$x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4 \ + \ x_0x_1x_2x_3x_4$$

1) Paso 1: Hacer la tabla y organizar según su índice.

Número	$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	Índice
0	00000	0
2	00010	1
6	00110	2
9	01001	2
10	01010	2
7	00111	3
14	01110	3
25	11001	3
23	10111	4
29	11101	4
31	11111	5

2) Paso 2: Identificar cuáles cambian en un solo bit.

Combinación	$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	Índice	Solución
$0{-}2$	$000{-}0$	0	S_1
$2{-}6$	$00{-}10$	1	X
$2{-}10$	$0{-}010$	1	X
$6{-}7$	$0011{-}$	2	S_2
$6{-}14$	$0{-}110$	2	X
$9{-}25$	${-}1001$	2	S_3
$10{-}14$	$01{-}10$	2	X
$7{-}23$	${-}0111$	3	S_4
$25{-}29$	$11{-}01$	3	S_5
$23{-}31$	$1{-}111$	4	S_6
$29{-}31$	$111{-}1$	4	S_7

3) Paso 3: Comparamos de nuevo los bits pero si el guión está en la misma posición.

Combinación	$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	Índice	Solución
$2, 6{-}10, 14$	$0{-}{-}10$	1	S_8
$2, 10{-}6, 14$	$0{-}{-}10$	1	S_8

4) Hacemos la tabla para marcar lo que tenemos:

	0	2	6	7	9	10	14	23	25	29	31
S_1	✗	✗									
S_2			✗	✗							
S_3					✗				✗		
S_4				✗				✗			
S_5									✗	✗	
S_6								✗			✗
S_7										✗	✗
S_8		✗	✗			✗	✗				

Elegimos soluciones: $S_1,\ S_3,\ S_4,\ S_7,\ S_8$

$\therefore$ La **Función simplificada** es:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0x_1x_2x_4 + \overline{x_0}x_3\overline{x_4}$$

Referencias

[1] Galaviz, C. **(s. f.)**. *Lógica digital y diseño de circuitos digitales.* [Facultad de Ciencias, UNAM]. PDF. Disponible en:

`https://drive.google.com/file/d/1BdCwuwFcSar5W5nPxA98FVNfTxZfd6yg/view`