Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - A Integral Imprópria

Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, com $a > 0$, tal que $\int\limits_a^{\infty} f(t)dt$ existe. Mostre que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > a$ tal que se $x, y > \alpha$, então

$$\left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$$

Exercício 2 - O Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ deriváveis, com I sendo um intervalo aberto. Pondo $g : I \to \mathbb{R}$ como $g(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, mostre que g é derivável e calcule sua derivada.

Seja agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva. Mostre que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^{g(y)} f(t)dt = y$$

Exercício 3 - A Integração por Partes

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com derivada integrável. Então, mostre que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)dx$$

Exercício 4 - Funções Periódicas

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $a > 0$ tal que $f(x+a) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\int_c^d f(t)dt = \int_{c+a}^{d+a} f(t)dt$$

Exercício 5 - Euler-Mascaroni

Alexor, amigo de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-Vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros, Beatriza, Severo, Jeã e Luka, estava estudando integrais e foi-lhe apresentado a definição da função logaritmo de base e $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ele sabia que $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = +\infty$ e sabia também que a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (que representa a área de blocos retangulares que fornecem uma aproximação por cima do gráfico de $f(x) = 1/x$) também era $+\infty$. Mas, ele se perguntou se ao subtrair esses dois infinitos, o resultado poderia ser um número finito. Ele considerou então a sequência

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n$$

Mostre que (x_n) converge.

Comentário: Este número é conhecido como *a constante* γ *de Euler-Mascaroni*, que tem valor aproximado em 0.5772. Não se sabe se este número é racional ou irracional, sendo portanto um problema em aberto.

Exercício 1 - Solução

Seja $L = \int\limits_a^\infty f(t)dt$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > a$ tal que se $x > \alpha$, então $\left|\int\limits_a^x f(t)dt - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_x^y f(t)dt\right| &= \left|\int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_a^y f(t)dt - L + L - \int_a^x f(t)dt\right| \\ &\leq \left|\int_a^y f(t)dt - L\right| + \left|\int_a^x f(t)dt - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Exercício 2 - Solução

Do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que g é derivável e

$$g(x) = -\int_0^{\alpha(x)} f(t)dt + \int_0^{\beta(x)} f(t)dt \Rightarrow g'(x) = -f(\alpha(x))\alpha'(x) + f(\beta(x))\beta'(x)$$

Sendo $h(x) = \int_0^x f(t)dt$, temos $h(g(y)) = \int_0^{g(y)} f(t)dt$. Assim, desde que h seja inversível, basta tomar $g(x) = h^{-1}(x)$ que teremos o que é exigido do enunciado. Ora, como f é positiva, temos que h é crescente e, além disso, como h é contínua, temos que h bijetiva (lembre-se que função contínua e monótona é bijetiva). O resultado, portanto, segue.

Exercício 3 - Solução

Por Integração por Partes, temos

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)dx = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\bigg]_a^b - \int_a^b f(x)dx$$

Logo

$$\int_a^b f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\bigg]_a^b = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

Portanto

$$f(a)+f(b) = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)$$

Outra Solução: Note que $f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) = \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\right]'$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\bigg]_a^b$$

E o mesmo resultado segue.

Exercício 4 - Solução

Fazendo $u(t) = t + a$, temos $du = dt, u(c) = c + a, u(d) = d + a$. Logo, da Regra da Substituição e do fato de que $f(t) = f(t + a), \forall t \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_c^d f(t)dt = \int_c^d f(t + a)dt = \int_{u(c)}^{u(d)} f(u)du = \int_{c+a}^{d+a} f(t)dt$$

Exercício 5 - Solução

Por definição, temos $\log x = \int\limits_1^x \frac{1}{x}dx, \forall x \in [1, +\infty)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, considerando a partição $P = \{1, 2, ..., n\}$, temos

$$\log n = \int_0^n \frac{1}{x}dx \leq S(\log, P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

donde

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n \geq 0$$

Além disso, (x_n) é decrescente. Com efeito

$$\begin{aligned} x_{n+1} \leq x_n &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \log(n+1) \leq -\log n \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ora, mas isto é verdade para todo $x > 0$, pois sendo $f(x) = \frac{1}{x+1} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2+x} \\ &= \frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

donde f é crescente para $x > 0$. E, como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x+1} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 0$, vem que $f(x) \leq 0, \forall x > 0$, isto é, que $\frac{1}{x+1} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 0$, ou seja, obtemos $\frac{1}{x+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, como queríamos.

Como (x_n) é monótona decrescente e limitada inferiormente, concluímos sua convergência.