Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - Derivada por Sequências

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável, $c \in \mathbb{R}$ e $(x_n), (y_n)$ sequências em $\mathbb{R}$ tais que $x_n, y_n \to c$, com $x_n < c < y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

Exercício 2 - Funções Constantes

Mostre que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3 - O Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, mostre que $\exists M \in (a, b)$ tal que

$$f(M)(b - a) = \int_a^b f(t)dt$$

Interprete isto geometricamente.

Definindo $G(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$, onde $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e crescente. Mostre que

$$G(1) \geq 2G(1/2)$$

Exercício 4 - O Discreto Contínuo

Os feiticeiros Daviros e Beatriza, amigos de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues e Benzo, utilizaram seus proderes que aprenderam em Matemática Discreta, para mostrar que uma certa função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva e decrescente satisfazia

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$$

Utilize seus poderes de Análise Real para mostrar que $\int\limits_1^{\infty} f(t)dt < +\infty$, isto é, que o limite

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt$$

existe.

Exercício 1 - Solução

Temos $f(x_n) = f(c) + f'(c)(x_n - c) + r(x_n)$ e $f(y_n) = f(c) + f'(c)(y_n - c) + s(y_n)$, onde $\lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{x_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(y_n)}{y_n - c} = 0$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(y_n) &= f'(c)(x_n - y_n) + r(x_n) - s(y_n) \\ &\Rightarrow f'(c) = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} + \frac{r(x_n)}{y_n - x_n} - \frac{s(y_n)}{y_n - x_n} \end{aligned}$$

Mas, desde que $\frac{|r(x_n)|}{|y_n - x_n|} \leq \frac{|r(x_n)|}{|x_n - c|}$ e $\frac{|s(y_n)|}{|y_n - x_n|} \leq \frac{|s(y_n)|}{|y_n - c|}$, temos que $\frac{|r(x_n)|}{|x_n - c|} \to 0$ e $\frac{|s(y_n)|}{|y_n - c|} \to 0$ e, portanto, que $\lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{y_n - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(y_n)}{t_n - x_n} = 0$. Passando o limite quando $n \to \infty$ na expressão obtida acima segue o resultado.

Exercício 2 - Solução

Temos $(\sin^2 x + \cos^2 x)' = 2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv c$. Fazendo $x = 0$, obtemos $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 1$.

Exercício 3 - Solução

Do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável, com derivada $F'(x) = f(x)$. Pelo Teorema do Valor Médio, segue que existe $M \in (a, b)$ tal que

$$f(M) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \Rightarrow f(M)(b - a) = \int_a^b f(t)dt$$

Geometricamente, isto significa que a área determinada pela função f é equivalente a área de um retângulo com altura $f(M)$ e largura $b - a$.

Para mostrar que $G(1) \geq 2G(1/2)$, note que isto é equivalente a mostrar que $\int\limits_0^{1/2} g(t)dt \geq \int\limits_0^{1/2} g(t)dt$. Mas, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existem, $M \in (0, 1/2)$ e $N \in (1/2, 1)$ tais que $g(M) = \frac{\int\limits_0^{1/2} g(t)dt}{1/2}$ e $g(N) = \frac{\int\limits_0^{1/2} g(t)dt}{1/2}$. Ora, como g é crescente, temos $g(M) \leq g(N)$ e segue o resultado.

Exercício 4 - Solução

Desde que f é contínua e positiva, é suficiente mostrar que existe $K > 0$ tal que $\int\limits_1^x f(t)dt \leq K, \forall x \geq 1$. Ora, sabemos também que $\int\limits_1^x f(t)dt = \int\limits_1^{\bar{x}} f(t)dt \leq S(f; P_x)$, para qualquer partição P_x de $[1, x]$. Considere, portanto, a partição $P = \{1, 2, 3, ...\}$ e suponha $x \in \mathbb{N}$. Como a função é decrescente, temos no intervalo $[i, i+1]$ que $m_i = f(i)$. Assim,

$$S(f; P_x) = \sum_{i=0}^{x} f(i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} f(i) < +\infty$$

Logo, basta tomar $K = \sum\limits_{i=0}^{x} f(i)$. Para o caso em que $x \notin \mathbb{N}$, basta observar que

$$\int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{\lceil x \rceil} f(t)dt \leq \sum_{i=0}^{x} f(i)$$

onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que é maior ou igual a x.