Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - Extensão Contínua nos Extremos

Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com derivada limitada. Mostre que f pode ser extendida a uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Conclua o mesmo resultado para a função $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, onde $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada.

Exercício 2 - Equações Funcionais

Ache, para cada caso abaixo, todas as funções f deriváveis tais que

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(xy) = f(x) + f(y)$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $e^{-2x} f'(x) = 2e^{-2x} f(x) + 1$

(c) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $\int\limits_1^{x^m y^n} f(t)dt = m \int\limits_1^x f(t)dt + n \int\limits_1^y f(t)dt, \forall m, n \in \mathbb{N}$

(d) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \int\limits_1^x f(t)dt$

Exercício 3 - Construção de Derivadas

Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo.

Use-o para construir funções deriváveis cujas derivadas não sejam deriváveis. Construa também funções deriváveis cujas derivadas não sejam contínuas.

Comentário: Você pode supor que as derivadas sejam integráveis.

Exercício 4 - Integral por Partição

Severo, conhecido como um ser vero, isto é, uma pessoa verossímel, pois tinha muito cuidado em não omitir detalhes ou afirmar resultados não-verdadeiros em suas soluções de Análise, aprendeu a definição e propriedades básicas de integrais de funções em uma variável. Em um dado momento, ele se deparou com a seguinte integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt$$

a qual ele deveria mostrar que era > 0. Seus amigos, Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros e Beatriza recoreram a você para ajudá-lo.

Exercício 5 - Comportamento Integral

Ao aprender como ocorre o crescimento, decrescimento e pontos críticos de funções deriváveis, Jeã e Luka, estavam estudando uma certa função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Jeã descobriu que existia um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(x) < 0, \forall x \in [a, c)$ e Luka discobriu que $f(x) > 0, \forall x \in (c, b]$ para o mesmo ponto c. O problema é que eles queriam informações a respeito da função integral $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Ajude-os fornecendo o comportamento da função em $[a, c)$, em $(c, b]$ e, consequentemente, no ponto c.

Comentário: Acho que você já deve saber, mas Jeã e Luka são amigos de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros, Beatriza e Severo.

Exercício 1 - Solução

No Exercício 1 da Lista 5 vimos que se f tem a derivada limitada, então ela satisfaz a existência de um valor $\lambda > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$. Disto segue que f é limitada, pois $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y| \leq \lambda(b - a), \forall x, y \in [a, b)$. Assim, dada (x_n) sequência em $[a, b)$ tal que $x_n \to b$, temos que $(f(x_n))_n$ é limitada e, portanto, admite uma subsequência convergente $f(y_n) = (f(x_{n_k}))$ para algum valor $L > 0$. Agora, dada (z_n) outra sequência tal que $z_n \to b$, temos que $|y_n - z_n| \to 0$ e, portanto, $|f(y_n) - f(z_n)| \leq \lambda|x_n - y_n| \to 0$, ou seja, $f(z_n) \to L$. Logo, basta estender f para $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ pondo $F(x) = f(x)$ se $x \in [a, b)$ e $F(b) = L$.

Para $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$ o resultado continua verdadeiro, uma vez que G é derivável pelo Teorema Fundamental do Cálculo, com derivada $G' = g$, que é limitada.

Exercício 2 - Solução

(a) Pelo mesmo raciocínio dos Exercícios 2 e 3 da Lista 4, temos que $f(x) = a\ln(x)$, com $a \in \mathbb{R}$.

(b) Basta notar que

$$\begin{aligned} e^{-2x}f'(x) = 2e^{-2x}f(x) + 1 \Leftrightarrow (e^{-2x}f(x))' = 1 \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) = x + C \\ \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x} + Ce^{2x} \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$.

(c) Seja $F(x) = \int\limits_1^x f(t)dt$. Então, temos $F(x^m y^n) = mF(x) + nF(y)$. Tomando $m = n = 1$, temos $F(xy) = F(x) + F(y)$. Do item a), segue que $F(x) = a\ln x$, com $a \in \mathbb{R}$. Ou seja, $f(x) = F'(x) = \frac{a}{x}$, com $a \in \mathbb{R}$.

(d) Temos que $x(f(x) - 1) = \int\limits_1^x f(t)dt$. Derivando ambos os lados, obtemos $xf'(x) + f(x) - 1 = f(x)$, ou seja, $f'(x) = \frac{1}{x}$. Portanto, $f(x) = \ln x + C$, onde $f(1) = 1 \Rightarrow C = 1$. Logo, $f(x) = \ln x + 1$.

Exercício 3 - Solução

Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então, a função $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ é derivável, com derivada $F'(x) = f(x)$. Além disso, se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada $g' = G$, então $\int\limits_c^d g'(t)dt = G(d) - G(c)$, com $[c, d] \subset [a, b]$.

Basta considerar uma função integrável, porém não derivável ou descontínua. Por exemplo, considere $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.
Então, as funções $F(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)dt$ e $G(x) = \int\limits_{-1}^x g(t)dt$ são deriváveis, mas $F' = f$ não é derivável (em 0) e $G' = g$ não é contínua (em 0).

Exercício 4 - Solução

A ideia consiste em notar que $\sin t > 0$ em $(0, \pi)$ e $\sin t < 0$ em $(\pi, 2\pi)$, sedo que o denominador $1 + t$ torna-se-a cada vez maior em $(\pi, 2\pi)$ do que em $(0, \pi)$, contribuindo assim para um valor negativo menor em $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt$ do que o valor positivo em $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt$, fazendo com que a integral fique positiva.

Em termos mais explícitos, considere a partição $P = \ldots$ (Adicionar uma partição adequada e mostrar que a soma inferior é > 0).

Outra Solução: Notando que $\sin t + \pi = -\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin t + \pi}{1+t+\pi} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t+\pi} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin t \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+\pi} \right) dt > 0
\end{aligned}$$

Exercício 5 - Solução

Do Teorema Fundamental do Cálculo, F é derivável, com derivada $F' = f$. Assim, como f é negativa em $[a, c)$, temos que F é estritamente decrescente em $[a, c)$. Analogamente, como f é positiva em $(c, b]$, temos que F é estritamente crescente em $(c, b]$. Como F é contínua, concluímos que c é ponto de mínimo.