## Fundação Getúlio Vargas

**Matemática Aplicada**
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

---

# Exercício 1 - Lipschitz e Hölder

Seja $A, \lambda > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|^A, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Mostre que

(a) Se $A = 1$, então se $f$ é derivável, possui derivada limitada.

(b) Se $A > 1$, então $f$ é constante.

Seja agora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável com derivada limitada. Mostre que existe $\lambda > 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

# Exercício 2 - Taxas de Variação

Se $g$ é derivável, mostre que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}$$

# Exercício 3 - O Teorema do Valor Médio

(a) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} | x^3 + x^2 + x + 1 < 0\}$. Mostre que $A$ é limitado superiormente e encontre o supremo de $A$.

(b) Mostre que $f(x) = -x \cos x + \sin x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

## Exercício 4 - O Polinômio de Taylor

Qual é o polinômio de Taylor de $\sin x$ centrado em 0?

# Exercício 5 - A Regra de L'Hôspital

Sejam $f$ e $g$ duas funções deriváveis em $a$, com $g'(a) \neq 0$. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x \to a} g(x)$. Prove que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

# Exercício 6 - A Fórmula de Taylor com Resto Integral

Borges e Rodrigues, amigos de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-Vanato e Cardineiro, aprenderam a Fórmula de Taylor com Resto Integral de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivável, que afirma que

$$f(x) = [T(f)](a) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

onde $T(f)$ é o polinômio de Taylor de $f$, isto é

$$[T(f)](a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

Sabendo disso, o monitor lhes desafiou propondo uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2)$ e com $f''$ estritamente decrescente e perguntou: “Em torno de $x = 1$, qual é o comportamento da função?”. Responda essa pergunta

# Exercício 1 - Solução

(a) Basta notar que

$$|f'(y)| = \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \to y} \lambda = \lambda$$

(b) Basta notar que

$$0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lambda |x - y|^{A-1} \to 0$$

Se $g$ é derivável e tem derivada limitada, então sendo $\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)|$, vem do Teorema do Valor Médio que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} = |g'(c)| \leq \lambda \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

## Exercício 2 - Solução

Temos $g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x) - g(x-h)}{h}$. Logo

$$g'(x) = \frac{g'(x) + g'(x)}{2} = \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x) - g(x-h)}{h}}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}$$

# Exercício 3 - Solução

(a) Seja $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Veja que $-1$ é raiz de $f$. Além disso, como $f'(x) = 3x^2+2x+1$, que não possui raiz real, temos que $-1$ é a única raiz real de $f$ (já que se houvesse outra - $x_0$ digamos -, teríamos do Teorema do Valor Médio, algum valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 = \dfrac{f(x_0) - f(-1)}{x_0 - (-1)} = f'(c)$, que não pode ocorrer). Assim, desde que $f$ é contínua, com $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, f(-2) = -5 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$, segue que $f(x) < 0, \forall x < -1$ e $f(x) > 0, \forall x > -1$, donde $A = (-\infty, -1)$ e, portanto, $\sup A = -1$.

(b) Claramente $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Agora, como $f'(x) = x \sin x - x$, donde $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, em $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, temos $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Daí, não pode existir uma outra raiz de $f$ além de 0 em $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, caso contrário, se existisse $x_0 \neq 0$ neste intervalo tal que $f(x_0) = 0$, teríamos pelo Teorema do Valor Médio, $f'(c) = 0$, com $c$ entre $x_0$ e 0 (exclusive), o que não pode ocorrer. Como $\sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que $f'(x) \leq 0$ se $x \geq 0$ e $f'(x) \geq 0$ se $x \leq 0$, donde $f$ é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$. Mas, como $f(x) \neq 0$ em $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ se $x \neq 0$, segue que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

# Exercício 4 - Solução

Sabemos que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, temos

- $\sin(0) = \sin''(0) = \ldots = \sin^{(2k)}(0)$
- $\sin'(0) = \sin^{(5)}(0) = \ldots = \sin^{(1+4k)}(0) = 1$
- $\sin^{(3)}(0) = \sin^{(7)}(0) = \ldots = \sin^{(3+4k)}(0) = -1$

Logo, o polinômio de Taylor de grau $n$ de $\sin x$ centrado em 0 é

$$[T(\sin)](x) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

# Exercício 5 - Solução

Basta notar que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)/(x-a)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)/(x-a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

# Exercício 6 - Solução

Da Fórmula de Taylor com Resto Integral, temos

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1) - f'(1) + \frac{f''(1)}{2!} + \int_1^0 \frac{f'''(t)}{2!}(-t)^2 dt \\ f(2) &= f(1) + f'(1) + \frac{f''(1)}{2!} + \int_1^2 \frac{f'''(t)}{2!}(2-t)^2 dt \end{aligned}$$

Como $f(0) = f(2)$ e $f'''(t) < 0, \forall t \in \mathbb{R}$, subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$\begin{aligned} 2f'(1) &= \int_1^0 \frac{f'''(t)}{2!}(-t)^2 dt - \int_1^2 \frac{f'''(t)}{2!}(2-t)^2 dt \\ &= -\int_0^1 \frac{f'''(t)}{2!}(-t)^2 dt - \int_1^2 \frac{f'''(t)}{2!}(2-t)^2 dt > 0 \end{aligned}$$

Como $f'(1) > 0$ temos que a função é estritamente crescente em torno de $x = 1$.