Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - Zeros Infinitos

Seja $a > 0$ e $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $p(x)p(x+a) \leq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$. Mostre que p é um polinômio se, e somente se, $p \equiv 0$.

Dê um exemplo de função contínua p que satisfaz a condição dada para algum $a > 0$ e não é constante.

Exercício 2 - Os Hiperbólicos

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que

$$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 0, g(0) = 1 \text{ e } g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Mostre que $f(x)\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$

(b) Mostre que $f(x)\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Conclua que $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercício 3 - Convexidade

Seja f uma função duas vezes derivável, com f'' contínua, definida no intervalo $[0, 1]$. Sabe-se que

- $f(0) > 0$
- $f(1) < 0$
- f é côncava para cima (ou convexa), isto é, $f''(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$

Mostre que f cruza o eixo x exatamente uma vez no intervalo $[0, 1]$.

Exercício 4 - Raízes de Polinômios

Todo polinômio de grau n com coeficientes reais tem, no máximo, n raízes complexas. Sei que você viu isso em aula. Mas sabe refazer a demonstração?

Exercício 5 - L'Hôspital e Taylor

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável tal que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Mostre que $f''(0) = 0$.

Exercício 6 - Taxas de Variação II

Benzo, um estudante exemplar, em suas primeiras aulas de Análise já estava um pouco adiantado na matéria e estudava sobre a derivada de uma função. Ele sabia que se f é derivável, então

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Mas, querendo dar um passo além, supôs que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável, então

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges e Rodrigues, seus amigos, querem saber se ele está certo. Ajude-os.

Sugestão: Utilize a Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal, que afirma que se f é n vezes derivável, então

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x)$$

onde $\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

Exercício 1 - Solução

Pelo Teorema do Valor Intermediário, devemos ter ao menos uma raiz em p para cada intervalo $[0, a], [2a, 3a], [4a, 5a], \ldots$. Se p for um polinômio, ele deverá ter infinitas raízes e, consequentemente, deverá ser $p \equiv 0$.

Um exemplo de função p não constante tal que $p(x)p(x + a) \leq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ é o $\sin x$, com $a = \pi$.

Exercício 2 - Solução

(a) Veja que

$$\begin{aligned}
&\left[f(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)-g(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right]' \\
&= f'(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)+f(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)-g'(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)-g(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) \\
&= g(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)+f(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)-f(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)-g(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) \\
&= 0, \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Logo, $f(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)-g(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ é constante. Substituindo em $x=0$, temos

$$f(x)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)-g(x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=f(0)\left(\frac{e^0-e^{-0}}{2}\right)-g(0)\left(\frac{e^0+e^{-0}}{2}\right)=-1$$

(b) Contas e raciocínio análogos ao item a).

Para concluir que $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, basta resolver o sistema obtido das equações funcionais dos itens (a) e (b), isto é, resolver

$$\begin{bmatrix} \frac{e^x-e^{-x}}{2} & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \frac{e^x+e^{-x}}{2} & \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 3 - Solução

Queremos mostrar que f cruza o eixo x exatamente uma vez no intervalo $[0,1]$.

Dado que $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$ e f é contínua (pois é derivável), pelo Teorema do Valor Intermediário, existe pelo menos um $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

Suponha, por contradição, que f tenha duas raízes distintas c_1 e c_2 em $(0,1)$, com $c_1 < c_2$. Então, teríamos $f(c_1) = 0$ e $f(c_2) = 0$.

Pelo Teorema de Rolle, existe $d_1 \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(d_1) = 0$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $d_2 \in (c_2, 1)$ tal que:

$$f'(d_2) = \frac{f(1) - f(c_2)}{1 - c_2} = \frac{f(1)}{1 - c_2} < 0$$

Então, novamente pelo Teorema do Valor Médio, existe $t \in (d_1, d_2)$ tal que:

$$f''(t) = \frac{f'(d_2) - f'(d_1)}{d_2 - d_1} = \frac{f'(d_2)}{d_2 - d_1} < 0$$

No entanto, isso é um absurdo, pois sabemos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$. Concluímos que a suposição de que existem duas raízes distintas c_1 e c_2 é falsa. Logo, f cruza o eixo x exatamente uma vez no intervalo $[0,1]$.

Exercício 4 - Solução

Se o polinômio é de grau 1 ele tem exatamente uma raiz, pois é da forma $p(x) = ax + b$, donde $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. Prosseguindo por indução, se todo polinômio de grau k tem, no máximo, k raízes. Então, se considerarmos algum polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{k+1} x^{k+1}$ de grau $k + 1$, então $p'(x)$ vai ser um polinômio de grau k que, por hipótese, tem exatamente k raízes, donde segue do Teorema de Rolle que $p(x)$ poderá ter, no máximo, $k + 1$ raízes, já que entre duas raízes de $p(x)$, deve existir ao menos uma raíz de $p'(x)$.

Exercício 5 - Solução

Devemos ter $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, caso contrário, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$ não existe ou diverge para $+\infty$ ou $-\infty$. Assim, pela Regra de L'Hôspital, segue que

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x}$$

Aplicando o mesmo raciocínio a $f'(x)$, temos novamente $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Como f e f' são contínuas, já que são deriváveis, vem que $f(0) = f'(0) = 0$. Assim, da Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal, temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + r(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + r(x)$$

onde $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^2} = 0$. Daí, temos que

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2!} + \frac{r(x)}{x^2}$$

E, portanto

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2!}$$

Logo, $f''(0) = 0$.

Outra solução: Não era necessário utilizar a Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal, bastava notar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = 0 \Rightarrow f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0$$

Exercício 6 - Solução

Da Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal, temos

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + r(h)$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + s(h)$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h^2} = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \\
&= \left[f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + r(h)\right] - 2f(x) + \left[f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + s(h)\right] \\
&= f''(x)h^2 + r(h) + s(h)
\end{aligned}$$

Portanto

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{r(h)}{h^2} - \frac{s(h)}{h^2}$$

Fazendo $h \to 0$, obtemos a expressão desejada.

Outra solução: Ao invés de utilizar a Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal, podemos utilizar também a Regra de L'Hôspital, como segue

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Pelo Exercício 2 da Lista 5, isto é igual a $f''(x)$.