



Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada

Nome:

Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - Ínfimo Fora do Conjunto

Seja $X \neq \emptyset$ limitado inferiormente, com $a = \inf X$. Suponha que $a \notin X$. Mostre que

- (a) existe sequência (x_n) em X tal que $x_n \rightarrow a$.
- (b) descreva uma forma de extrair uma subsequência (y_n) estritamente decrescente de (x_n) .

Exercício 2 - Intervalos Encaixados

Sejam $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ intervalos limitados tais que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Mostre que

$$\sup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \inf \sup_n A_n$$

Exercício 3 - A Propriedade Arquimediana

Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) \mathbb{N} é ilimitado superiormente
- (ii) $\forall a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$
- (iii) $\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$.

Agora, use o Axioma do Supremo para provar alguma destas 3 propriedades e, consequentemente, obter as demais.

Exercício 4 - Radicais Aninhados

Robertinha estava analisando propriedades dos números reais. Ela sabia que $\sqrt{2}$ era um único número em \mathbb{R}_+ tal que o seu quadrado é igual a 2. Porém, ela pensou se poderia obter o 2 de outro modo a partir do $\sqrt{2}$. Ela então considerou o conjunto

$$X = \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots \right\}$$

Ajude Robertinha mostrando que X é limitado superiormente e que $\sup X = 2$. Ou seja, podemos escrever $2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$

Exercício 1 - Solução

- (a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha $x_k \in X \cap \left(a, a + \frac{1}{n}\right)$, que deve existir pois $a = \inf X$ e $a \notin X$. Assim

$$|x_k - a| = x_k - a < \left(a + \frac{1}{n}\right) - a = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

- (b) Defina $n_1 = 1$ e $y_1 = x_1$. Agora, supondo já obtidos $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, com $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, e $y_i = x_{n_i}$ ($i = 1, \dots, k$) tais que $y_1 > y_2 > \dots > y_k$, tome $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n < y_i, \forall i = 1, \dots, k\}$, que existe pelo Princípio da Boa Ordenação (observe, que $\{n \in \mathbb{N} | x_n < y_i, \forall i = 1, \dots, k\} \neq \emptyset$, pois se fosse vazio, teríamos $x_n \geq y_k, \forall n \in \mathbb{N}$, que no limite implicaria $a \geq y_k$, que é um absurdo). Fazendo, então $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$, obtemos, por construção, uma subsequência $(y_k) = (x_{n_k})$ de (x_n) que é estritamente decrescente e tal que $y_k \rightarrow a$ (já que $x_n \rightarrow a$).

Exercício 2 - Solução

Sendo $a_k = \inf A_k$, $b_k = \sup A_k$, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ e $c = \sup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset A_2 \subset A_1$, vem que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq c \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

donde $c \leq \inf B$.

Além disso, deve ser $c = \inf B$, caso contrário se fosse $c < \inf B$, todo ponto $x \in (c, \inf B)$ (que existiria, pois nesse caso o intervalo é não-degenerado) seria tal que $x < \inf B \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $x > c \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $x \in (a_n, b_n) \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, o que contradiria o fato de c ser supremo.

Exercício 3 - Solução

Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Se existem $a, b > 0$ tais que nenhum $n \in \mathbb{N}$ é tal que $an > b$, então $an \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $n \leq \frac{b}{a}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\frac{b}{a}$ seria uma cota superior de \mathbb{N} e, consequentemente, \mathbb{N} seria limitado superiormente, que é um absurdo.

$(b) \Rightarrow (c)$: Tomando $a = 1$ e $b = \frac{1}{r}$, temos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$an > b \Leftrightarrow n > \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < r$$

$(c) \Rightarrow (a)$: Se \mathbb{N} fosse limitado superiormente, deveria existir $c = \sup \mathbb{N}$. Portanto, $c \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, que é um absurdo.

Agora, mostraremos que o Axioma do Supremo implica em (a).

Se \mathbb{N} fosse limitado superiormente, deveria existir $c = \sup \mathbb{N}$. Assim, deve existir $n \in \mathbb{N} \cap (c - 1, c]$, donde $c - 1 < n \leq c$, ou seja, $c < n + 1$. Mas, $n + 1 \in \mathbb{N}$, o que contradiz o fato de c ser o supremo de \mathbb{N} . Portanto, \mathbb{N} é ilimitado superiormente.

Exercício 4 - Solução

1º Solução)

Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e, recursivamente, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Então, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Note que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, se $x_k \leq 2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$, donde segue por indução que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, 2 é cota superior de X e, portanto, X é limitado superiormente. Sendo $y = \sup X$, temos $\sqrt{2} = x_1 \leq y < 2 \Rightarrow y^2 < 2y \Rightarrow y < \sqrt{2y}$. Suponha que $y < 2$. Então, teríamos $x_n \leq y < 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Mas, $y < 2 \Rightarrow 2y - 2 < y$, donde existiria algum $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2y - 2 < x_k \Leftrightarrow 2y < x_k + 2 = x_{k+1}^2 \Leftrightarrow y < \sqrt{2y} < x_{k+1}$$

que é um absurdo. Logo, $y = 2$.

2º Solução)

Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e, recursivamente, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Então, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Note que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, se $x_k \leq 2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$, donde segue por indução que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Agora, vamos mostrar por indução que $x_n > 2 - \frac{1}{n}, \forall n > 1$. Com efeito, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > 2 - \frac{1}{2}$. Agora, supondo que $x_n > 2 - \frac{1}{n}$, temos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2 + 2 - \frac{1}{n}} = \sqrt{4 - \frac{1}{n}} \geq 2 - \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow 4 - \frac{1}{n} \geq 4 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n - 1}{n(n+1)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1 \end{aligned}$$

Assim, 2 é a menor das cotas superiores (caso contrário, se $r < 2$ fosse cota superior, então $\exists n > 1$ tal que $r < 2 - \frac{1}{n}$, donde $x_n > r$, que não poderia ocorrer). Logo, $\sup X = 2$.

3º Solução)

Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e, recursivamente, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Então, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Note que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, se $x_k \leq 2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$, donde segue por indução que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, (x_n) é crescente. Com efeito,

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \geq x_n \Leftrightarrow 2 + x_n \geq x_n^2 \Leftrightarrow -1 \leq x_n \leq 2$$

que é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe o limite $L = \lim x_n$. Portanto

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \Rightarrow L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow L = -1 \text{ ou } L = 2$$

Como $x_n \geq x_1 = \sqrt{2}$, segue que $\sup X = L = 2$.