Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

---

1 Derivadas

Exercício 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = kf(c)$.

Sugestão: Considere a função $p(x) = f(x)e^{-kx}$.

Exercício 2

Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, com $g(a) = g(b) = 0$ e g' estritamente decrescente. Mostre que $g(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

Exercício 3

Seja $h : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, com $\lim_{x\to\infty} h(x) = h(a)$. Mostre que existe $x \in [a, +\infty)$ tal que $h''(x) = 0$.

2 Integrais

Exercício 4

Seja $f \geq 0$ integrável. Se $\int\limits_a^b f(x)\ dx = 0$, mostre que para toda função h integrável temos

$$\int_a^b f(x)h(x)\ dx = 0$$

Exercício 5

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Determine f.

Exercício 6

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Prove que $\left| \int\limits_a^{\bar{b}} f(x)\ dx \right| \leq \int\limits_a^{\bar{b}} |f(x)|\ dx$. Dê um exemplo mostrando que uma desigualdade análoga não vale para integrais inferiores.