Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - A Série de Taylor

Dê a Série de Taylor (centrada em 0) de

(a) e^x

(b) $\log 1 + x$

Seja $f(x) = e^{-x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}\right)$. Mostre que f é um polinômio. Qual o seu grau?

Exercício 2 - Somas de Riemann

Mostre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k}\right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x^k} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k}\right) - \frac{1}{n^k}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 3 - Série de Potências

Seja $a \neq 0$ tal que $\sum a_n a^n < +\infty$. Determine o raio de convergência R_a no qual esta série é absolutamente convergente para $x \in R_a$.

Em particular, conclua que se $\sum a_n < \infty$, então $\sum |a_n x^n| < \infty, \forall x \in R_1$.

Exercício 4 - Derivadas por Sequências II

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ e tal que o $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$ existe. Mostre então que f é derivável também em c e $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} f'(x)$.

Exercício 5 - Integrais Iteradas

Seja $F(x) = \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^y f(t)dt \right] dy$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Mostre que F é duas vezes derivável e determine $F''(x)$.

Exercício 6 - Equações Funcionais II

Determine todas as funções f deriváveis tais que

(a) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $f(x)^2 = \int_0^x f(t)dt$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f'(x) = -f(x)$.

Exercício 7 - D'Alembert e Cauchy

Eriki, amigo de várias pessoas, incluíndo Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros, Beatriza, Severo, Jeã, Luka e Alexor, estava assistindo a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \ldots$, que é convergente quando $0 < a < b < 1$. Utilize os Testes de D'Alembert (Razão) e Cauchy (Raiz) para verificar em qual destes este resultado ocorre e em qual o resultado é inconclusivo.

Exercício 8 - The Last Question

Os monitores Klainton e Jean^2 proporam aos alunos um problema de séries, que consistia num problema feito por etapas, considerando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$:

1. Jean^2 os desafiou que mostrassem que a série divergia para $0 < r \leq 1$.

2. Klainton os desafiou que mostrassem que a série convergia para $r > 1$.

3. Jean^2 e Klainton juntos, supondo agora que $r \in \mathbb{C}$, os desafiaram que mostrassem que os únicos números $r = a + bi$ nos quais a série assumia valor 0, com $a > 0$, são apenas aqueles (não necessariamente todos) nos quais $a = \frac{1}{2}$.