Análise Real

Teste 2

(1) Sejam $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ limitada e $c\in(a,b)$. Se não existe $\lim_{x\to c} f(x)$, mostre que podemos encontrar duas sequências $x_n\to c$, $y_n\to c$ (com $x_n\neq c$ e $y_n\neq c$ para todo $n\in\mathbb{N}$) de modo que $(f(x_n))$ e $(g(y_n))$ sejam convergentes com limites distintos.

Mostre que a afirmativa é falsa se f não é limitada.

(2) Sejam $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $c\in(a,b)$ tais que $f(a)=g(a)=0$ e f,g deriváveis em c, com $g'(c)\neq 0$.

Mostre que $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

(3) Sejam $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ e $g:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ funções tais que $g(f(x))=x$ para todo $x\in(a,b)$. Se ambas as funções são duas vezes diferenciáveis, mostre que ce^x

$$g''(f(x))=\frac{-g'(f(x))\,f''(x)}{f'(x)^2}$$

(4) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b). Se $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,b)$, e $f'(x)=0$ somente em um número finito de pontos, mostre que f é estritamente crescente.

(5) Seja $u:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ função contínua t.q. $u(x.y)=u(x)+u(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}_{>0}$. Mostre que $u(x)=c\log x$ para alguma constante $c\in\mathbb{R}$.