## Fundação Getúlio Vargas

**Matemática Aplicada**
Nome:
Monitor: Jeann

---

# Exercício 1 - Limite de Subsequências

(a) Se uma sequência é convergente para $L$, toda subsequência também é convergente para $L$? A recíproca é verdadeira?

(b) Se alguma subsequência de uma sequência converge para $L$, então a sequência converge para $L$?

(c) Se $(x_n)$ é uma sequência tal que a subsequência formada pelos índices pares $x_{2n}$ e a formada pelos índices ímpares $x_{2n-1}$ de $(x_n)$ são convergentes para um mesmo limite $L$, então $(x_n)$ é convergente e $x_n \to L$?

(d) Uma sequência limitada é convergente se, e somente se, existe um único valor $L$ que é limite de alguma subsequência? E se a sequência não for limitada?

## Exercício 2 - Cálculo de Limites

(a) Sejam $(a_n)$ e $(b_n)$ duas sequências convergentes, com $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Mostre que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |b_k - a| < r < |a_k - b|, \forall k > k_0 \Rightarrow |a - b| = r$$

(b) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, com $|\mu| > 1$, calcule (se existir) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda^n(\mu^{n+1}-1)}{n!}$.

(c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n}$.

**Dica:** Você pode utilizar que $\lim a^{1/n} = 1, \forall a > 0$ e que $\log x \leq x, \forall x \geq 0$.

## Exercício 3 - Frações Contínuas

Nati, amiga de Robertinha, soube que sua amiga conseguiu escrever 2 com a construção de radicais aninhados, ou seja

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$$

Mas, Nati queria uma forma iterada de obter $\sqrt{2}$ (e não, ela não tomou simplesmente a raiz quadrada de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$). Então, ela considerou o conjunto

$$X = \left\{ 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}... \right\}$$

(a) Deduza a sequência $(x_n)$ que descreve esse conjunto e, em seguida, descreva as subsequências $(y_n) = (x_{2n})$ e $(z_n) = (x_{2n-1})$.

(b) Mostre que $y_n < \sqrt{2} < z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Mostre que $y_n$ é crescente e $z_n$ é decrescente e, portanto, conclua a existência dos limites $\lim y_n$ e $\lim z_n$.

(d) Quais são os limites $\lim y_n$ e $\lim z_n$?

(e) Conclua que $(x_n)$ é convergente. Qual é o valor de $\lim x_n$?

# Exercício 4 - O Número de Euler

Analise a convergência das sequências $(x_n)$ e $(y_n)$ dadas por

(a) $x_0 = 1, x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$

(b) $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

O limite destas sequências é igual?
**Dica:** Talvez seja necessário utilizar a Desigualdade de Bernoulli, que afirma o seguinte:

"se $x > -1$, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, vale que $(1+x)^n \geq 1 + nx$"

# Exercício 5 - Aproximação Racional

Seja $A > 0$ um número irracional e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números racionais tais que $p_n, q_n > 0$ e $\lim \frac{p_n}{q_n} = A$. Mostre que $\lim q_n = +\infty$.

# Exercício 1 - Solução

(a) Seja $(x_n)$ tal que $x_n \to L$. Dada $(x_{n_k})$ subsequência de $x_n$, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon, \forall n > m$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > m$. Então, $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$, donde $x_{n_k} \to L$. A recíproca é claramente verdadeira, uma vez que a própria sequência é uma subsequência de si mesma.

(b) Isto é falso. Basta considerar a sequência $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, que claramente não é convergente, mas $x_{2n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_{2n} \to 1$.

(c) Como $x_{2n}, x_{2n-1} \to L$. Dado $\varepsilon > 0$, devem existir $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_{2n} - L| < \varepsilon, \forall n > m_1 \text{ e } |x_{2n-1} - L| < \varepsilon, \forall n > m_2$$

Tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, obtemos que $|x_n - L| < \varepsilon, \forall n > m$. (Corrigir)

(d) Se $(x_n)$ é convergente (para $L$), então toda subsequência converge para $L$ (pelo item (a)).

Reciprocamente, se $(x_n)$ é limitado e alguma subsequência de $(y_n)$ de $(x_n)$ converge para algum valor $L$, então $x_n \to L$. Com efeito, se não o fosse, existiria algum $\varepsilon > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, existiria $n > m$ tal que $|x_n - L| \geq \varepsilon$. Assim, existe $n_1 > 1$ tal que $|x_{n_1} - L| \geq \varepsilon$. Além disso, existe $n_2 > n_1$ tal que $|x_{n_2} - L| \geq \varepsilon$. Ademais, existe $n_3 > n_2$ tal que $|x_{n_3} - L| \geq \varepsilon$. Prosseguindo com o raciocínio, construímos uma subequência $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ tal que $|x_{n_k} - L| \geq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}$. Mas, como $(x_n)$ é limitada, temos $(x_{n_k})$ limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, segue que $(x_{n_k})$ admite uma subsequência $(z_n)$ convergente, que não pode ter limite em $L$, já que $|z_n - L| \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Ora, sendo uma subsequência de uma subsequência de $(x_n)$, é ainda uma subsequência de $(x_n)$, mas com limite distinto de $(y_n)$, o que contraria a hipótese. Logo, deve ser $x_n \to L$.

**Comentário do item (d):** Como $(x_n)$ é limitada, deve necessariamente existir alguma subsequência convergente para algum valor $L$, por Bolzano-Weierstrass.

# Exercício 2 - Solução

(a) Tomando o limite quando $k \to \infty$, temos

$$|b-a| \leq r \leq |b-a|$$

Logo, $|b-a| = r$.

(b) Se $a_n = \frac{\lambda^n(\mu^{n+1}-1)}{n!}$, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\lambda^{n+1}(\mu^{n+2}-1)}{(n+1)!}}{\frac{\lambda^n(\mu^{n+1}-1)}{n!}} = \frac{\lambda}{n+1} \cdot \frac{\mu^{n+2}-1}{\mu^{n+1}-1} = \frac{\lambda}{n+1} \cdot \frac{\mu - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{1 - \frac{1}{\mu^{n+1}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Logo, $a_n \to 0$.

(c)
- Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $n > k$. Assim

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{k! \cdot (k+1)(k+2)...n} \geq \sqrt[n]{k! \cdot k^{n-k}} = \sqrt[n]{k!} \cdot \sqrt[n]{k^{n-k}} \geq \sqrt[n]{k^{n-k}}$$
$$= k^{(n-k)/n} = \frac{k}{k^{k/n}} = \frac{k}{(k^{k/n})}$$

  Como $\lim\,(k^k)^{1/n} = 1$, temos que $(k^k)^{1/n} < 2$ para $n$ suficientemente grande e, consequentemente, $\sqrt[n]{n!} > \dfrac{k}{2}$ para $n$ suficientemente grande. Ou seja, obtemos que $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

- Desde que $\log x \leq x, \forall x > 0$, temos

$$\log\sqrt{n} = \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log n \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow \log n \leq 2\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{\log n}{n} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n}$$

  Mas, como $\dfrac{2\sqrt{n}}{n} \to 0$ e $\dfrac{\log n}{n} \geq 0$, temos pelo Teorema do Sanduíche que $\dfrac{\log n}{n} \to 0$.

# Exercício 3 - Solução

(a) Considere a sequência $(a_n)$ dada por $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $x_n = 1 + a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Agora, temos

$$x_{2n+2} = 1 + a_{2n+2} = 1 + \frac{1}{2 + a_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + a_{2n}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + x_{2n}}}$$

$$x_{2n+1} = 1 + a_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2 + a_{2n}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + a_{2n-1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + x_{2n-1}}}$$

Logo, temos $y_1 = \frac{7}{5}$ e $z_1 = \frac{3}{2}$ e

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + y_n}} \text{ e } z_{n+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + z_n}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Provaremos por indução para $(y_n)$ e para $(z_n)$ será análogo. Temos, por hipótese, que $y_n < \sqrt{2}$. Assim

$$y_{n+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + y_n}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow y_n < \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Além disso, é claro que $y_1 = \frac{7}{5} < \sqrt{2}$.

(c) Provaremos para $(y_n)$ e para $(z_n)$ será análogo. Com efeito, temos

$$y_{n+1} > y_n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + y_n}} > y_n \Leftrightarrow y_n^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < y_n < \sqrt{2}$$

que já foi provado no item anterior.

(d) Passando ao limite, temos em $(y_n)$

$$L = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + L}} \Leftrightarrow L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{2}$$

Como $L$ deve ser $\geq 0$, temos $L = \sqrt{2}$. Análogamente, pela mesma definição da sequência $(z_n)$, encontramos o mesmo limite $L$.

(e) Como $(x_{2n})$ e $(x_{2n-1})$ convergem para o mesmo limite, pelo item c) do Exercício 1, temos que $x_n$ é convergente e converge para esse limite. Logo, $x_n \to \sqrt{2}$.

# Exercício 4 - Solução

(a) $(x_n)$ é claramente crescente (pois $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{n!} \geq x_{n-1}$). Além disso, $(x_n)$ é limitada superiormente (por 3). Com efeito,

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Logo, $(x_n)$ é convergente.

**Comentário:** É necessário provar que $2^n \leq (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}$, mas isto é feito por indução e é deixado para o leitor :)

(b) $(y_n)$ é crescente. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{(1 + 1/(n+1))^{n+1}}{(1+1/n)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1 + 1/(n+1)}{1 + 1/n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

Além disso, $(y_n)$ é limitada superiormente (por 3), já que

$$\begin{aligned} y_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = x_n \leq 3 \end{aligned}$$

Portanto, $(y_n)$ é convergente.

**Comentário:** Utilizou-se a Desigualdade de Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$.

É possível mostrar que $\lim x_n = \lim y_n$, basta observar que para n suficientemente grande

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = x_n \Rightarrow \lim y_n \leq \lim x_n$$
$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right) y_n \Rightarrow \lim x_n \leq \lim y_n$$

Os detalhes são feitos por indução e fica a cargo do leitor :)

# Exercício 5 - Solução

Se $(q_n)$ fosse limitada, então pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existiria $(q_{n_k})$ subsequência convergente de $(q_n)$ para algum valor $L \in \mathbb{Z}_+^*$. Em particular, teríamos $\lim \dfrac{p_{n_k}}{q_{n_k}} = A$. Se alguma subsequência $(p_{n_{k_j}})$ de $(p_{n_k})$ fosse tal que $p_{n_{k_j}} \to \infty$, teríamos $\lim \dfrac{p_{n_{k_j}}}{q_{n_{k_j}}} = \infty$, o que não pode ocorrer. Logo, $(p_{n_k})$ é limitada e, portanto, admite subsequência $(p_{n_{k_j}})$ convergente para algum valor $M \in \mathbb{Z}_+^*$. Daí, $\lim \dfrac{p_{n_{k_j}}}{q_{n_{k_j}}} = \dfrac{M}{L} \in \mathbb{Q}$, que é um absurdo. Portanto, $(q_n)$ é ilimitada. Se $(q_n)$ admitir alguma subsequência convergente, então podemos aplicar o mesmo raciocínio acima sobre esta subsequência. Assim, segue que $q_n \to +\infty$.