Teoria da Probabilidade

Monitor:

- Jeann da Rocha Silva

Descrição:

Solução do Teste 1 de Probabilidade

Data:

11 de agosto de 2025

Teste 1

1. Um dado equilibrado, que possui duas faces com o número 1, três com o número 2 e uma com o número 3, é lançado duas vezes. Seja X o maior número observado e Y o lançamento em que esse valor foi observado pela primeira vez. Por exemplo, se a sequência de resultados é $(2, 2)$, temos $X = 2$ e $Y = 1$; já se a sequência é $(1, 3)$, temos $X = 3$ e $Y = 2$.

a) Faça a tabela da função de massa de probabilidade conjunta de X e Y.

b) X e Y são independentes? Justifique.

a) Temos abaixo cada par de resultados com sua respectiva probabilidade

$$\begin{array}{lll}
(1,1) \mapsto \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} & (1,2) \mapsto \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6} & (1,3) \mapsto \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \\
(2,1) \mapsto \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} & (2,2) \mapsto \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} & (2,3) \mapsto \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \\
(3,1) \mapsto \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18} & (3,2) \mapsto \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12} & (3,3) \mapsto \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}
\end{array}$$

Logo, a tabela da função de massa de probabilidade conjunta de X e Y é

Y↓ X→	1	2	3
1	1/9	5/12	1/6
2	0	1/6	5/6

b) X e Y não são independentes. Com efeito, temos

$$P(X = 1, Y = 2) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 2)$$

pois $P(X = 1) > 0$ e $P(Y = 2) > 0$.

2. Cinco sorvetes de chocolate, três de flocos e dois de morango são distribuídos ao acaso para dez pessoas, das quais duas só gostam de sorvete de chocolate e uma só de sorvete de flocos; as demais gostam dos três sabores.

a) Qual é a probabilidade de que uma pessoa que só goste de chocolate fique satisfeita com o sabor recebido?

b) Qual é a probabilidade de que nenhuma das três pessoas que têm preferência por um sabor fique satisfeita com o sabor recebido?

c) Qual é o número esperado de pessoas insatisfeitas com o sabor recebido?

a) Há três interpretações para esse enunciado:

pelo menos uma pessoa que só goste de chocolate fique satisfeita: Isto é igual a 1 menos a probabilidade de que as duas pessoas que só gostam de chocolate não fiquem satisfeitas, ou seja, elas recebam 2 dos outros 5 sorvetes, que é ocorre de $\binom{5}{2}$ formas diferentes. Como temos $\binom{10}{2}$ formas diferentes de distribuir dois sorvetes quaisquer para estas pessoas. A probabilidade será

$$1 - \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

exatamente uma pessoa que só goste de chocolate fique satisfeita: Sejam P_1 e P_2 as duas pessoas que gostam só de chocolate. A probabilidade de P_1 ganhar sorvete de chocolate é $\frac{5}{10}$ e, dada essa informação a probabilidade de P_2 não ganhar é $\frac{5}{9}$. Analogamente, a probabilidade de P_1 não ganhar sorvete de chocolate é $\frac{5}{10}$ e, dada essa informação, a probabilidade de P_2 ganhar é $\frac{5}{9}$. Logo, a probabilidade pedida será

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$$

uma pessoa específica que só goste de chocolate fique satisfeita: Ora, basta que ela receba um sorvete de chocolate. Como há 5 dos 10 possíveis, a probabilidade é $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

b) Vamos supor que sorvetes de um mesmo sabor tenham alguma distinção entre si. Então, temos $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas diferentes de distribuir três sorvetes quaisquer entre estas pessoas. Mas, queremos que as duas que gostam de chocolate não recebam desse sorvete. A fim de que a pessoa que gosta de flocos também não receba tal sorvete, vamos considerar os seguintes casos:

1) As pessoas que gostam de chocolate recebem ambas sorvete de flocos, o que é possivel de $3 \cdot 2 = 6$ formas distintas. Nesse caso, a pessoa que gosta de sorvete de flocos, tem 7 formas de receber um sorvete que não é de flocos.

2) As pessoas que gostam de chocolate recebem uma sorvete de flocos e a outra sorvete de morango, o que é possível de $2! \cdot 3 \cdot 2 = 12$ formas distintas. Nesse caso, a pessoa que gosta de sorvete de flocos, tem 6 formas de receber um sorvete que não é de flocos.

3) As pessoas que gostam de chocolate recebem ambas sorvete de morango, o que é possível de $2 \cdot 1 = 2$ formas. Nesse caso, a pessoa que gosta de sorvete de chocolate, tem 5 formas de receber um sorvete que não é de flocos.

Logo, a probabilidade é

$$\frac{6 \cdot 7 + 12 \cdot 6 + 2 \cdot 5}{720} = \frac{42 + 72 + 10}{720} = \frac{124}{720} = \frac{31}{180}$$

c) Sejam P_1 e P_2 as pessoas que gostam só de sorvete de chocolate e P_3 a pessoa que gosta de sorvete de flocos. Assim, seja I_j a variável indicadora da pessoa j ficar insatisfeita com o sabor recebido (ou seja, $I_j = 1$ se a pessoa j fica insatisfeita e 0 caso contrário). Então $P(I_1 = 1) = P(I_2 = 1) = \frac{5}{10}$ e $P(I_3 = 1) = \frac{7}{10}$. Portanto, se X é o número de pessoas insatisfeitas, então $X = I_1 + I_2 + I_3$ e, portanto

$$EX = EI_1 + EI_2 + EI_3 = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} + \frac{7}{10} = \frac{17}{10} = 1.7$$

3. Para um certo casal, a probabilidade de que cada uma de suas crianças tenha olhos azuis é 1/2 e a probabilidade de que seja do sexo masculino também é 1/2, independentemente da cor dos olhos. Além disso, o sexo e a cor dos olhos de cada criança são independentes do sexo e cor dos olhos das demais. Suponha que esse casal tenha duas crianças.

a) Qual é a probabilidade de que pelo menos uma das duas crianças tenha olhos azuis?

b) Dado que pelo menos uma das duas crianças tem olhos azuis, qual é a probabilidade de que ambas as crianças tenham olhos azuis?

c) Dado que pelo menos uma das duas crianças é um menino com olhos azuis, qual é a probabilidade de que ambas as crianças tenham olhos azuis?

a) Isto é igual a 1 menos a probabilidade de ambas as crianças não terem olhos azuis, ou seja

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = 3 = \frac{3}{4}$$

b) Isto é igual a probabilidade de ambas as crianças terem olhos azuis dividido pela probabilidade de pelo menos uma criança ter olhos azuis, que pelo item anterior, será

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

c) Dada essa informação, considerando uma ordem de informação, os possíveis casos são:

- 2 meninos com olhos azuis
- 1 menino com olhos azuis e 1 menino sem olhos azuis
- 1 menino com olhos azuis e 1 menina com olhos azuis
- 1 menino com olhos azuis e 1 menina sem olhos azuis
- 1 menino sem olhos azuis e 1 menino com olhos azuis
- 1 menina com olhos azuis e 1 menina com olhos azuis
- 1 menina sem olhos azuis e 1 menino com olhos azuis

Cada um destes 7 casos são igualmente prováveis e como em apenas 3 temos apenas 3 com 2 crinaças de olhos azuis, a probabilidade pedida é

$$\frac{3}{7}$$

4. As variáveis aleatórias X_1, X_2, X_3, X_4 são independentes e cada uma delas tem valor esperado igual a 2 e variância igual a 6. Seja $Y = X_1X_2X_3 + X_3X_4$.

a) Calcule o valor esperado de Y.

b) Calcule a variância de Y.

a) Temos

$$\begin{aligned} EY &= E[X_1X_2X_3 + X_3X_4] = EX_1EX_2EX_3 + EX_3EX_4 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12 \end{aligned}$$

b) Note que $6 = \mathrm{Var}(X_i) = EX_i^2 - (EX_i)^2 = EX_i^2 - 2^2 \Rightarrow EX_i^2 = 10$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Logo

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= EY^2 - (EY)^2 = E[X_1^2X_2^2X_3^2 + 2X_1X_2X_3^2X_4 + X_3^2X_4^2] - 12^2 \\ &= EX_1^2EX_2^2EX_3^2 + 2EX_1EX_2EX_3^2EX_4 + EX_3^2EX_4^2 - 144 \\ &= 10 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 + 10 \cdot 10 - 144 \\ &= 1000 + 160 + 100 - 144 = 1116 \end{aligned}$$