Prova Análise Real - 2023

1) Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e $l \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq l|x - y|, \forall x, y \in [a, b)$. Mostre que

(a) Existe uma sequência (x_n) em $[a, b)$ tal que $x_n \to b$ e $\lim f(x_n)$ existe.

(b) Se (y_n) e (z_n) são sequências em $[a, b)$ tais que $y_n, z_n \to b$, então $\lim f(y_n) = \lim f(z_n)$.

Escolha duas das questões abaixo:

2) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g(c) > 0$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

3) Seja X um conjunto limitado superiormente, com $s = \sup X$. Se $s \notin X$, mostre que existe uma sequência estritamente crescente (x_n) em X tal que $x_n \to s$.

4) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$$

Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) \leq h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.