Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1

Seja (x_n) sequência limitada com um único valor de aderência. Mostre que (x_n) é convergente.

Solução

Seja p o (único) valor de aderência de (x_n). Então, suponha que (x_n) não converge para p. Ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que há infinitos pontos $x_n \notin (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Como (x_n) é limitada, temos que o conjunto dos pontos x_n tais que $x_n \notin (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ é limitado e, consequentemente, por Bolzano-Weierstrass, admite uma subsequência convergente para um ponto q. Mas, desde que este pontos são tais que $|x_n - p| \geq \varepsilon$, segue que $|p - q| \geq \varepsilon$ e, portanto, $p \neq q$, o que nos daria ao menos dois valores de aderência para (x_n) (absurdo!). Portanto, concluímos o resultado.

Exercício 2

Considere $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a,c) \cup (c,b) \quad (a < c < b)$. Se $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = A$, então f é derivável em c e $f'(c) = A$.

Solução

Sejam (a_n) e (b_n) sequências em (a,b) tais que $a_n, b_n \to c$ e $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $c_n \in (a_n, c)$ e $d_n \in (c, b_n)$ tais que

$$f'(c_n) = \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \quad \text{e} \quad f'(d_n) = \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ em ambas as igualdades, obtemos a expressão dos limites laterais à esquerda e à direita de um lado e a definição das derivadas laterais em c do outro. Ou seja,

$$A = \lim_{n \to \infty} f'(c_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n}$$
$$A = \lim_{n \to \infty} f'(d_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$$

Segue, portanto, do fato de que isto vale para todas as sequências laterais (a_n) e (b_n) em (a,b) que convergem para c, que f é derivável em c, com $f'(c) = A$

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável 3 vezes com derivadas contínuas. Mostre que

$$f(x) - f(0) - xf'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(t)dt - \frac{x^2}{2}f''(x)$$

Solução

Basta aplicar a integração por partes duas vezes:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(t)dt &= \frac{1}{2}\left(\left[t^2 f''(t)\right]_0^x - \int_0^x 2tf''(t)dt\right) = \frac{x^2}{2}f''(x) - \frac{1}{2}\int_0^x 2tf''(t)dt \\ &= \frac{x^2}{2}f''(x) - \int_0^x tf''(t)dt\end{aligned}$$

$$\int_0^x tf''(t)dt = [tf'(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)dt = xf'(x) - \int_0^x f'(t)dt$$

Como $\int\limits_0^x f'(t) = f(x) - f(0)$, segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(t)dt = \frac{x^2}{2}f''(x) - xf'(x) + f(x) - f(0)$$

Reorganizando os termos na igualdade, chegamos na igualdade proposta.

Comentário: Esta é a fórmula de Taylor com Resto Integral para a terceira derivada da f.

Exercício 4

Considere funções contínuas $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ de modo que $h_n \to h$ uniformemente. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 h_n(t)dt = \int\limits_0^1 f(t)dt$.

($h_n \to h$ uniformemente quando, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe algum $N \in \mathbb{N}$ de modo que se $n \geq N$, então $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$).

Solução

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in N$ tal que $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$. Portanto, temos

$$\left|\int_0^1 h_n(t)dt - \int_0^1 h(t)dt\right| = \left|\int_0^1 h_n(t) - h(t)dt\right| \leq \int_0^1 |h_n(t) - h(t)|dt < \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon$$

Logo, $\int\limits_0^1 h_n(t)dt \to \int\limits_0^1 h(t)dt$ quando $n \to \infty$.