Análise Real

Exemplo de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua nos irracionais e descontínua nos racionais.

1) Escreva $\mathbb{Q} = \{q_k \, ; \, k \in \mathbb{N}\}$ (uma enumeração qualquer de $\mathbb{Q}$)

2) Defina $f(t) = \sum_{q_k \leq t} \frac{1}{2^k}$

Esta função está bem definida pois a série é dominada por $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, a qual é convergente.

3) f é estritamente crescente: Tomemos $x < y$. Então $f(x) = \sum_{q_k \leq x} \frac{1}{2^k}$ e $f(y) = \sum_{q_k \leq y} \frac{1}{2^k}$. Considere algum $q_m \in (x, y)$ segue-se que $f(y) \geq f(x) + \frac{1}{2^m} \Rightarrow f(x) < f(y)$

4) Fixemos $t_0 \in \mathbb{R}$ e consideremos $t > t_0$. Então $f(t) = \sum_{q_k \leq t} \frac{1}{2^k}$ e $f(t_0) = \sum_{q_k \leq t_0} \frac{1}{2^k}$, de modo que

$f(t) - f(t_0) = \sum_{t_0 < q_k \leq t} \frac{1}{2^k}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{k \geq k_0} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$; se t é suficientemente próximo de t_0, então $q_1, \dots, q_{k_0}$ não pertencem a $(t_0, t]$, de modo que $\sum_{t_0 < q_k \leq t} \frac{1}{2^k} < \sum_{k > k_0} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Conclusão:

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0)$$

5) Consideremos agora $t < t_0$. Então $f(t_0) - f(t) = \sum_{t < q_k \leq t_0} \frac{1}{2^k}$
Se t_0 é irracional, $f(t_0) - f(t) = \sum_{t < q_k < t_0} \frac{1}{2^k}$, e como acima, $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = f(t_0)$.

Mas se $t_0 \in \mathbb{Q}$, isto é, $t_0 = q_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, vemos que $f(t_0) - f(t) \geq \frac{1}{2^m}$, de modo que f é descontínua em t_0.