## Fundação Getúlio Vargas

**Matemática Aplicada**
Nome: ____________________
Monitor: Jeann

---

# Exercício 1 - Ínfimo

Seja $X \neq \emptyset$ limitado inferiormente, com $a = \inf X$. Suponha que $a \notin X$. Mostre que

(a) existe sequência $(x_n)$ em $X$ tal que $x_n \to a$.

(b) descreva uma forma de extrair uma subsequência $(y_n)$ estritamente decrescente de $(x_n)$.

# Exercício 2 - Intervalos Encaixados

Sejam $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ intervalos limitados tais que $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Mostre que

$$\sup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \inf \{\sup A_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Analogamente,

$$\inf \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \sup \{\inf A_n | n \in \mathbb{N}\}$$

# Exercício 3 - A Propriedade Arquimediana

Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

(i) $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente

(ii) $\forall a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$

(iii) $\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$.

Agora, use o Axioma do Supremo para provar alguma destas 3 propriedades e, consequentemente, obter as demais.

# Exercício 4 - Radicais Aninhados

Robertinha estava analisando propriedades dos números reais. Ela sabia que $\sqrt{2}$ era um único número em $\mathbb{R}_+$ tal que o seu quadrado é igual a 2. Porém, ela pensou se poderia obter o 2 de outro modo a partir do $\sqrt{2}$. Ela então considerou o conjunto

$$X = \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, ... \right\}$$

Ajude Robertinha mostrando que $X$ é limitado superiormente e que $\sup X = 2$. Ou seja, podemos escrever $2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$

## Exercício 1 - Solução

(a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha $x_k \in X \cap \left(a, a + \dfrac{1}{n}\right)$, que deve existir pois $a = \inf X$ e $a \notin X$. Assim

$$|x_k - a| = x_k - a < \left(a + \frac{1}{n}\right) - a = \frac{1}{n} \to 0$$

(b) Defina $n_1 = 1$ e $y_1 = x_1$. Agora, supondo já obtidos $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$, com $n_1 < n_2 < ... < n_k$, e $y_i = x_{n_i}$ $(i = 1, ..., k)$ tais que $y_1 > y_2 > ... > y_k$, tome $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n < y_i, \forall i = 1, ..., k\}$, que existe pelo Princípio da Boa Ordenação (observe, que $\{n \in \mathbb{N} | x_n < y_i, \forall i = 1, ..., k\} \neq \emptyset$, pois se fosse vazio, teríamos $x_n \geq y_k, \forall n \in \mathbb{N}$, que no limite implicaria $a \geq y_k$, que é um absurdo). Fazendo, então $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$, obtemos, por cosntrução, uma subsequência $(y_k) = (x_{n_k})$ de $(x_n)$ que é estritamente decrescente e tal que $y_k \to a$ (já que $x_n \to a$).

# Exercício 2 - Solução

Sendo $a_k = \inf A_k, b_k = \sup A_k, A = \{a_1, a_2, ...\}, B = \{b_1, b_2, ...\}$ e $c = \sup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset ... \subset A_n \subset ... \subset A_2 \subset A_1$, vem que

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq c \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$$

donde $c \leq \inf B$.

Além disso, deve ser $c = \inf B$, caso contrário se fosse $c < \inf B$, todo ponto $x \in (c, \inf B)$ (que existiria, pois nesse caso o intervalo é não-degenerado) seria tal que $x < \inf B \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $x > c \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $x \in (a_n, b_n) \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, o que contradiria o fato de $c$ ser supremo.
Analogamente, mostra-se a outra igualdade.

# Exercício 3 - Solução

Vamos mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): Se existem $a, b > 0$ tais que nenhum $n \in \mathbb{N}$ é tal que $an > b$, então $an \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $n \leq \frac{b}{a}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\frac{b}{a}$ seria uma cota superior de $\mathbb{N}$ e, consequentemente, $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente, que é um absurdo.

(b) $\Rightarrow$ (c): Tomando $a = 1$ e $b = \frac{1}{r}$, temos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$an > b \Leftrightarrow n > \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < r$$

(c) $\Rightarrow$ (a): Se $\mathbb{N}$ fosse limitado superiormente, deveria existir $c = \sup \mathbb{N}$. Portanto, $c \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, que é um absurdo.

Agora, mostraremos que o Axioma do Supremo implica em (a).

Se $\mathbb{N}$ fosse limitado superiormente, deveria existir $c = \sup \mathbb{N}$. Assim, deve existir $n \in \mathbb{N} \cap (c-1, c]$, donde $c - 1 < n \leq c$, ou seja, $c < n + 1$. Mas, $n + 1 \in \mathbb{N}$, o que contradiz o fato de $c$ ser o supremo de $\mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

# Exercício 4 - Solução

1º Solução)

Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e, recursivamente, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Então, $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Note que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, se $x_k \leq 2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2+2} = 2$, donde segue por indução que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, 2 é cota superior de $X$ e, portanto, $X$ é limitado superiormente. Sendo $y = \sup X$, temos $\sqrt{2} = x_1 \leq y < 2 \Rightarrow y^2 < 2y \Rightarrow y < \sqrt{2y}$. Suponha que $y < 2$. Então, teríamos $x_n \leq y < 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Mas, $y < 2 \Rightarrow 2y - 2 < y$, donde existiria algum $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2y - 2 < x_k \Leftrightarrow 2y < x_k + 2 = x_{k+1}^2 \Leftrightarrow y < \sqrt{2y} < x_{k+1}$$

que é um absurdo. Logo, $y = 2$.

2º Solução)

Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e, recursivamente, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Então, $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Note que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, se $x_k \leq 2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2+2} = 2$, donde segue por indução que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Agora, vamos mostrar por indução que $x_n > 2 - \frac{1}{n}, \forall n > 1$. Com efeito, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > 2 - \frac{1}{2}$. Agora, supondo que $x_n > 2 - \frac{1}{n}$, temos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2 + 2 - \frac{1}{n}} = \sqrt{4 - \frac{1}{n}} \geq 2 - \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{n} \geq 4 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n - 1}{n(n+1)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1 \end{aligned}$$

Assim, 2 é a menor das cotas superiores (caso contrário, se $r < 2$ fosse cota superior, então $\exists n > 1$ tal que $r < 2 - \frac{1}{n}$, donde $x_n > r$, que não poderia ocorrer). Logo, $\sup X = 2$.

3º Solução)

Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e, recursivamente, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Então, $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Note que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, se $x_k \leq 2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2+2} = 2$, donde segue por indução que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, $(x_n)$ é crescente. Com efeito,

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \geq x_n \Leftrightarrow 2 + x_n \geq x_n^2 \Leftrightarrow -1 \leq x_n \leq 2$$

que é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe o limite $L = \lim x_n$. Portanto

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \Rightarrow L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow L = -1 \text{ ou } L = 2$$

Como $x_n \geq x_1 = \sqrt{2}$, segue que $\sup X = L = 2$.