Fundação Getúlio Vargas

MAp ☐ **CdDIA** ☐

Nome: ____________________

Monitor: Jean^2

---

1. Uma urna contém 3 bolas numeradas $1, 2$ e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola retirada e Y o número da segunda.

   a) Descreva um espaço amostral adequando para o problema e a distribuição conjunta de X e Y.

   b) Calcule $P(X < Y)$.

   c) Determine as distribuições marginais de X e Y.

   d) X e Y são independentes?

2. Em cada lançamento de uma certa moeda a probabilidade de sair cara é igual a p. Suponha que sejam feitos n lançamentos independentes desta moeda.

a) Qual é a probabilidade de se obter k caras, seguidas de $n - k$ coroas?

b) Qual é a probabilidade de se obter k caras e $n-k$ coroas?

c) Qual é a probabilidade de se ter obtido cara no 1º lançamento, dado que o número de caras observado é igual a k?

3. Durante uma feira popular, há um jogo em que visitantes tentam acertar alvos lançando dardos em uma grande parede. Os dardos são lançados continuamente por uma máquina automática a uma taxa de 10 dardos por segundo. Um pequeno alvo circular está fixado em uma das regiões da parede. Suponha que:

- O número de dardos lançados segue um processo de Poisson com taxa de 10 por segundo;
- Cada dardo lançado atinge o pequeno alvo com probabilidade $1/10$, independentemente dos demais;
- Todos os dardos que atingem o pequeno alvo são detectados por um sensor eletrônico de precisão;
- O movimento dos dardos é independente (um não interfere na trajetória de outro).

a) Qual a distribuição de X_t = número de dardos lançados até o tempo t, com $t > 0$?

b) Suponha que o número observado de dardos lançados foi n. Dada essa informação, qual é a distribuição do número de dados que foram detectados pelo sensor?

c) Prove que Y_t tem distribuição de Poisson, onde Y_t é o número de dardos detectados (contados) pelo sensor até o tempo $t > 0$. Qual o parâmetro? (Sugestão: Aplique a Lei da Probabilidade Total, condicionando Y_t a cada evento $X_t = n$ possível e use os resultados obtidos nos itens anteriores)

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

a) Mostre que f é uma função de densidade de probabilidade.

b) Se X tem densidade f, calcule $E[e^X]$.

5. Há 20 bolas em uma caixa, sendo 12 delas vermelhas e 8 azuis. As bolas são retiradas uma por uma da caixa sem reposição. Seja X o número de bolas azuis obtidas nas 5 primeiras retiradas e Y o número de bolas vermelhas nas 4 últimas retiradas.

a) Identifique as distribuições de X e Y, com os respectivos parâmetros.

b) Seja Z o número de mudanças de cor observadas nas retiradas. Por exemplo, se as bolas saem na ordem $v, v, a, a, a, v, v, v, v, v, v, a, a, v, v, a, a, a, v, v$, o valor de Z é 6. Calcule EZ.

6. (extra) Uma urna contém n bolas numeradas por $1, 2, ..., n$. Uma pessoa tira uma bola e a devolve, tira outra e a devolve, continuando até tirar uma bola pela segunda vez. Seja X o número total de retiradas necessárias para obter essa repetição.

a) Ache a função de massa de probabilidade de X. (Sugestão: Calcule $P(X > k)$)

b) Mostre que

$$EX = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Gabarito

1.

a) $\Omega = \{(x, y) | x \neq y, x, y \in \{1, 2, 3\}\}$ e $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $P(X = x) = P(Y = y) = \frac{1}{3}$

d) X e Y não são independentes

2.

a) $p^k(1-p)^{n-k}$

b) $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

c) $\frac{k}{n}$

3.

a) $X_t \sim \text{Poisson}(10t)$

b) $Y_t | X_t = n \sim \text{Binomial}(n, 1/10)$

c) $Y_t \sim \text{Poisson}(t)$

4.

a) Mostrar que $f \geq 0$ e $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

b) ∞

5.

a) $X \sim \text{HGeom}(5, 8, 20)$ e $Y \sim \text{HGeom}(4, 12, 20)$.

b) $\frac{48}{5}$