Teste

① Considere a sequência definida indutivamente por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$. Seja $c > 0$ t.q. $c = \frac{1}{1+c}$

(a) mostre que $|x_{n+1} - c| < \frac{1}{2}|x_{n-1} - c|$.

(b) conclua daí que $|x_{2k+1} - c| < \frac{1}{2^k}|x_1 - c|$

$|x_{2k} - c| < \frac{1}{2^k}|x_2 - c|$

para $k \in \mathbb{N}$.

(c) conclua que $x_n \to c$.

② Seja $a \in \mathbb{R}$ número irracional positivo e $\frac{p_n}{q_n} \to a$, onde $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$. Mostre que $q_n \to \infty$ (suponha $p_n > 0$, $q_n > 0$).

③ Considere dados $0 < a_1 < a_2$, e a partir daí defina $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ para $n \geq 3$.

(a) mostre que a sequência é convergente

(b) prove que $2a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e conclua que $2a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_2 + a_1$.

(c) calcule $\lim a_n$.