Fundação Getúlio Vargas

MAp ☐ **CdDIA** ☐
Nome: ____
Monitor: Jean^2

---

1. (2.5) Em um parque de diversões, três crianças decidem brincar em um brinquedo que tem quatro diferentes circuitos disponíveis. Cada uma delas escolhe um circuito de forma totalmente aleatória e independente das demais.

    a) (0.5) Qual é a probabilidade de todas escolherem o mesmo circuito?

    b) (1.0) Qual é a probabilidade de alguém escolher o primeiro circuito?

    c) (1.0) Qual é a probabilidade de que as crianças escolham os três primeiros ou os três últimos circuitos?

2. (2.5) Uma civilização antiga deixou para trás uma máquina misteriosa chamada Fênix Dourada, que promete conceder uma recompensa mágica para qualquer um que ousar ativá-la.

Você pressiona um botão e a máquina gera um número aleatório entre 1 e 1000. Se sair 1, a máquina se autodestrói e você não recebe nada. Caso contrário, você recebe 1 moeda de ouro. Em seguida, você escolhe se quer efetuar o mesmo processo para tentar receber mais uma moeda, com o risco de perder tudo que já ganhou se a máquina gerar o número 1.

a) (1.0) Calcule o lucro esperado que você pode obter com a máquina se você está disposto a utilizá-la n vezes.

b) (1.5) Quantas vezes você deve utilizar a máquina para maximizar o lucro esperado? Argumente porquê isso faz sentido.

Para o item b), considere $\ln(0.999) \approx \frac{1}{999}$.

3. (2.5) Em um experimento, um cientista coloca um gato dentro de uma caixa fechada com um mecanismo quântico que pode liberar veneno dependendo do decaimento de uma partícula radioativa, que decai com probabilidade de 50%.

Suponha que se a partícula decai, o veneno é liberado com certeza. Se a partícula não decai, o veneno é liberado com 10% de certeza. Se o veneno é liberado, o gato morre com probabilidade de 90% e se o veneno não é liberado, o gato sobrevive com certeza. Considere os eventos

$$\begin{aligned} D &= \text{a partícula decai} \\ V &= \text{o veneno é liberado} \\ G &= \text{o gato morre} \end{aligned}$$

a) (0.5) Calcule $P(V)$.

b) (1.0) V e G são ou não independentes?

c) (1.0) O cientista abre a caixa e percebe que o gato morreu. Qual é a probabilidade da partícula ter decaído?

OBS.: Nenhum animal foi ferido durante a produção dessa questão ($\odot$ _ $\odot$);.

4. (2.5) Seis agentes secretos, um dos quais é Paulo Cezar, recebem uma senha cada um para uma missão especial. Quando o sistema dispara um alerta, cada agente precisa, de forma totalmente aleatória e independente dos demais, enviar sua senha para um dos outros cinco agentes.

a) (1.5) Qual é a probabilidade de que Paulo Cezar receba ao menos 3 senhas após um alerta do sistema.

b) (0.5) Qual é a distribuição do número de senhas recebidas por Paulo Cezar?

c) (0.5) Quantas senhas Paulo Cezar espera receber caso o sistema dispare um alerta?

5. (extra) Pascal quer enviar uma carta a Fermat. A probabilidade de que Pascal escreva a carta é 0.8. A probabilidade de que o sistema postal não a perca é de 0.9. A probabilidade de que o mensageiro a entregue é de 0.9. Dado que Fermat não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pascal não a tenha escrito?

Comentário: As cartas trocadas entre Pascal e Fermat foram fundamentais para o nascimento da teoria da probabilidade moderna.

Gabarito

1.

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{37}{64}$

c) $\frac{3}{16}$

2.

a) $0.999^n n$

b) 999 vezes. Em 1000 tentativas, pode-se imaginar que cada número apareceria em uma proporção aproximadamente igual de vezes (nesse caso, igual a $\frac{1000}{1000} = 1$) e, portanto, muito provavelmente o valor 1 apareceria. Assim, até 999, temos um lucro esperado crescente e, a partir daí, o lucro esperado passa a decair.

3.

a) $\frac{11}{20}$

b) Note que $P(G) = P(G|V)P(V) + P(G|V^{\complement})P(V^{\complement}) = \frac{90}{100} \cdot \frac{11}{20} + 0 \cdot \frac{9}{20} = \frac{99}{200}$. Logo, como $P(G|V) = \frac{9}{10} \neq \frac{99}{200} = P(G)$, temos que G e V não são independentes.

c) $\frac{10}{11}$

4.

a) $\frac{181}{5^5}$

b) Bernoulli$(5, 1/5)$

c) 1