Probabilidade

Jeann Rocha

April 2024

5 Lista de Exercícios

Exercício 5.1. a) Como a escolha da máquina é feita ao acaso, temos

$$P(T = T_1) = P(T = T_2) = \frac{1}{2}$$

Daí, a função de distribuição de T é dada por

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(T \leq t | T = T_1) P(T = T_1) + P(T \leq t | T = T_2) P(T = T_2) \\ &= P(T_1 \leq t) P(T = T_1) + P(T_2 \leq t) P(T = T_2) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) \frac{1}{2} + \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}(e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}) \end{aligned}$$

Logo, a densidade de T é

$$f_T(x) = F_T'(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} P(T = T_1 | T > 100) &= \frac{P(T > 100 | T = T_1) P(T = T_1)}{P(T > 100)} = \frac{P(T_1 > 100) P(T = T_1)}{P(T > 100)} \\ &= \frac{e^{-100\lambda_1} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(e^{-100\lambda_1} + e^{-100\lambda_2})} = \frac{e^{-100\lambda_1}}{e^{-100\lambda_1} + e^{-100\lambda_2}} \end{aligned}$$

c) Pelo item a), temos

$$F_T(t) = 1 - \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{\lambda t}) = 1 - e^{\lambda t}$$

Logo, $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

Exercício 5.2. a) a)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P\left(\min_{1\le i\le n} X_i > y\right) \\ &= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, ..., X_n > y) = 1 - e^{-\alpha_1 y} ... e^{-\alpha_n y} \\ &= 1 - e^{-(\alpha_1 + ... + \alpha_n)y} \end{aligned}$$

Logo, $Y \sim \text{Exp}(\alpha_1 + ... + \alpha_n)$.

b) Do item a), temos que $Y = \min_{i\neq k} X_i \Rightarrow Y \sim \text{Exp}\left(\sum_{i\neq k} \alpha_i\right)$. Assim, sendo $\alpha = \sum_{i\neq k} \alpha_i$, vem

$$\begin{aligned} P\left(X_k = \min_{1\le i\le n} X_i\right) = P\left(X_k < \min_{i\neq k} X_i\right) &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_{(X,Y)}(x,y)dydx \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(x) f_Y(y) dydx \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty (\alpha_k e^{-\alpha_k x})(\alpha e^{-\alpha y}) dydx \\ &= \alpha_k \alpha \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-\alpha_k x} e^{-\alpha y} dydx \\ &= \alpha_k \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha_k x} \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y}\right]_x^\infty dx \\ &= -\alpha_k \int_0^\infty e^{-\alpha_k x} e^{-\alpha x} dx = -\alpha_k \int_0^\infty e^{-(\alpha + \alpha_k)x} dx \\ &= -\alpha_k \left[-\frac{1}{\alpha + \alpha_k} e^{-(\alpha+\alpha_k)x}\right]_0^\infty = \frac{\alpha_k}{\alpha + \alpha_k} = \frac{\alpha_k}{\alpha + ... + \alpha_n} \end{aligned}$$

b) a) Temos $X_t = A + B$, donde $A \sim \text{Poisson}(15), B \sim \text{Poisson}(10)$ e A e B independentes $\Rightarrow X_t \sim \text{Poisson}(15 + 10) = \text{Poisson}(25)$.

b) Temos $T_1 \sim \text{Exp}(15)$ e $V_1 \sim \text{Exp}(10)$, donde pelo item (a) do Exercício 36, segue que $\min(T_1, V_1) \sim \text{Exp}(15 + 10) = \text{Exp}(25)$.

c) Isto é feito calculando-se $P(T_1 < V_1)$ que, segundo o item (b) do Exercício 36 é $\dfrac{15}{15+10} = \dfrac{3}{5}$.

Exercício 5.3. a) Como $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ é função de distribuição, temos F não decrescente, donde $F^{-1}(y)$ é um intervalo, $\forall y \in [0, 1]$. Além disso, como F é contínua,

$F^{-1}(y)$ é um intervalo fechado, $\forall y \in [0,1]$. Assim, $\max(F^{-1}(y)) \in F^{-1}(y), \forall y \in [0,1]$, donde $F^{-1}(\max(F^{-1}(y))) = y$. Logo

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq \max(F^{-1}(y))) \\ &= F_X(\max(F^{-1}(y))) = F(\max(F^{-1}(y))) = y, \forall y \in [0,1] \end{aligned}$$

Logo, $Y \sim U[0,1]$

b) Segue do item anterior que dada $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ contínua não decrescente, para gerar X variável aleatórial tal que F seja sua função de distribuição, basta gerar $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ e fazer $X(\omega) = \max F^{-1}(U(\omega))$, pois neste caso,

$$P(X \leq x) = P(\max F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Quando F for estritamente crescente, isto se reduz a tomar $X = F^{-1}(U)$.

Exercício 5.4. a)

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) &= P(X \leq y) - P(X < -y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = (F_X(y) - F_X(-y))' \\ &= f_X(-y) + f_X(y) \text{ se } y \neq 0 \end{aligned}$$

b) Sendo $\varphi(x) = |x|$, temos $\varphi(x) = y \Leftrightarrow |x| = y \Leftrightarrow x = \pm y$. Além disso, $\varphi'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } > 0 \end{cases}$, donde $|\varphi'(x)| = 1$ se $x \neq 0$. Portanto, pelo método do jacobiano, temos

$$f_Y(y) = \sum_{x:|x|=y} \frac{f(x)}{|\varphi'(x)|} = \sum_{x=\pm y} \frac{f(x)}{1} = f(-y) + f(y) \text{ se } y \neq 0$$

Exercício 5.5. a) A região onde f_{XY} é não-nula é a seguinte

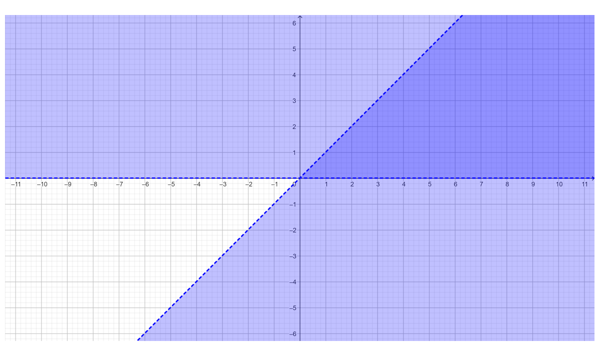

Figura 1: Região $0 < y < x$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dydx = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x} f_{XY}(x,y)dydx = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x} e^{-x}dydx = \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = 1$$

temos que f_{XY} é uma função de densidade de probabilidade.

b) Temos $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{x} e^{-x}dy = xe^{-x}$ se $x > 0$ e $f_x(x) = 0$ se $x \leq 0$. Da mesma forma, $f_Y(y) = \int_{y}^{\infty} e^{-x}dx = e^{-y}$ se $y > 0$ e $f_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$. Se X e Y fossem independentes, teríamos $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, o que não é verdade, pois para $0 < x < y$, temos $f_{XY}(x,y) = e^{-x} \neq xe^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(y)$. Logo, X e Y não são independentes.

c) Calculamos $f_X(x)$ no item b). Temos, $X \sim$ Gama$(2,1)$ (de fato, temos $\dfrac{1}{\Gamma(2)} = 1$).

Exercício 5.6. Sendo $\varphi(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$, temos

$$\varphi(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{2}u \\ x-y = \sqrt{2}v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Além disso, $J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1$, donde $|J_\varphi(x,y)| = 1$. Portanto, pelo método do jacobiano e, como

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2 = u^2 + v^2$$

temos

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(y) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{|J_\varphi(x,y)|} = f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-(1/2)(x^2+y^2)} = \frac{1}{2\pi}e^{-(1/2)(u^2+v^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)u^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)v^2} \end{aligned}$$

Logo, U e V são independentes, já que temos a fatoração de $f_{(U,V)}(u,v)$ nas funções $f_U(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)u^2}$ e $f_V(v) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)v^2}$. Além disso, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_U(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv = 1$$

temos que estas funções são as densidades de U e V, respectivamente. Ou seja, $U, V \sim N(0,1)$.

Exercício 5.7. a) Sendo $\varphi(r,\theta) = \left(\sqrt{2\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \pi(2\theta-1)\right)$, temos

$$\varphi(r,\theta) = (x,y) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \pi(2\theta-1)\right) = (x,y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2\log\left(\frac{1}{1-r}\right)} = x \\ \pi(2\theta-1) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 - e^{-x^2/2} \\ \theta = \frac{y}{2\pi} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Além disso, $J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} re^{-r^2/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}$, donde $|J_\varphi(r,\theta)| = \frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}$. Portanto, pelo método do jacobiano, temos

$$f_{(R,\Theta)}(r,\theta) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{|J_\varphi(r,\theta)|} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}} = 2\pi e^{-r^2/2}$$

Observe que

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2\log\left(\frac{1}{1-r}\right)} \le 1 \Leftrightarrow r \in [0,+\infty)$$

e que

$$0 \le y \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \pi(2\theta-1) \le 1 \Leftrightarrow -\pi \le \theta \le \pi$$

Tomando $f_R(r) = e^{-r^2/2}$ e $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, obtemos uma fatoração de $f_{(R,\Theta)}$ em $f_R(r)f_\Theta(\theta)$. Logo, R e Θ são independentes e, como $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}d\theta = \int\limits_0^\infty e^{-r^2/2}dr = 1$, temos que f_R e f_Θ são as densidades de R e Θ, isto é, temos $\Theta \sim \mathrm{U}[-\pi,\pi]$ e $R \sim \text{Rayleigh}(1)$.

b) Sendo $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, temos

$$\varphi(r,\theta) = (z,w) \Leftrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta) = (z,w) \Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\theta = z \\ r\sin\theta = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{z^2+w^2} \\ \theta = \arctan\frac{w}{z} \end{cases}$$

Além disso, $J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r = \sqrt{z^2+w^2}$, donde $|J_\varphi(r,\theta)| = r$.

Portanto, pelo método do jacobiano, temos

$$
\begin{aligned}
f_{(Z,W)}(z,w) &= \frac{f_{(R,\Theta)}(r,\theta)}{|J_\varphi(z,w)|} = \frac{f_R(r)f_\Theta(\theta)}{\sqrt{z^2+w^2}} = \frac{re^{-r^2/2}\cdot\dfrac{1}{2\pi}}{\sqrt{z^2+w^2}} \\
&= \frac{\sqrt{z^2+w^2}e^{-(z^2+w^2)/2}\cdot\dfrac{1}{2\pi}}{\sqrt{z^2+w^2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-(z^2+w^2)/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2}
\end{aligned}
$$

Tomando $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ e $f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2}$, obtemos uma fatoração de $f_{(Z,W)}$ em $f_Z(z)f_W(w)$. Logo, Z e W são independentes e, como

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2}dw = 1
$$

temos que f_Z e f_W são as densidades de Z e W, respectivamente. Portanto, segue que $Z, W \sim N(0,1)$.

Exercício 5.8. • **Método Básico:**

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= \int_0^w\int_0^{w-x}\int_0^{w-x-y} 6(1+x+y+z)^{-4}dzdydx \\
&= \int_0^w\int_0^{w-x} -2[(1+w)^{-3}-(1+x+y)^{-3}]dydx \\
&= \int_0^w [-2(1+\omega)^{-3}(w-x)-(1+w)^{-2}+(1+x)^{-2}]dx \\
&= -w^2(1+w)^{-3}-w(1+w)^{-2}-(1+w)^{-1}+1 = w^3(1+w)^{-3}
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$
f_W(w) = F'_W(w) = 3w^2(1+w)^{-3}+(-3)w^3(1+w)^{-4} = 3w^2(1+w)^{-4}
$$

• **Método do Jacobiano:** Sendo $\varphi(x,y,z) = (x+y+z,y,z)$, temos

$$
\varphi(x,y,z) = (w,u,v) \Leftrightarrow (x+y+z,y,z) = (w,u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = w \\ y = u \\ z = v \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} x = w-u-v \\ y = u \\ z = v \end{cases}
$$

Além disso, $J_\varphi(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, donde $|J_\varphi(x,y,z)| = 1$. Portanto, pelo método do Jacobiano, temos

$$f_{(W,Y,Z)}(w,y,z) = \frac{f(x,y,z)}{|J_\varphi(x,y,z)|} = \frac{6}{(1+x+y+z)^4} = \frac{6}{(1+w)^4}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_0^w \int_0^{w-u} 6(1+w)^{-4} dv du = \int_0^w 6(1+w)^{-4}(w-u) du \\ &= 3w^2(1+w)^{-4} \end{aligned}$$