Probabilidade

Jeann Rocha

April 2024

6 Lista de Exercícios

Exercício 6.1. a) Vamos calcular $P(X > k)$, ou seja, vamos calcular a probabilidade de k bolas serem retiradas consecutivamente e todas estas terem valores distintos. A primeira bola tem probabilidade $\frac{n}{n}$. A segunda bola deve ser distinta da primeira, donde a probabilidade é $\frac{n-1}{n}$. A terceira deve ser distinta da segunda e da primeira, donde a probabilidade é $\frac{n-2}{n}$, e assim por diante, até a k-ésima, que deve ser diferente das $k-1$ anteriores, que ocorre com probabilidade $\frac{n-k+1}{n}$. Logo,

$$P(X > k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k}$$

Desse modo,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}$$

b)

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \\ &= P(X > 0) + P(X > 1) + P(X > 2) + P(X > 3) + ... + P(X > n-1) \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Exercício 6.2. Em cada lancamento, a probabilidade dele tirar 1 ou 6 é de $\frac{2}{4} = \frac{1}{3}$. Logo, sendo X a variável aleatória que mede a 1º ocorrência de 1 ou 6 no dado, temos

$X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{3}\right)$. Além disso, seja Y a variável aleatória que mede o lucro do jogador. Temos que $Y(1) = 50 - 25 = 25$ e $Y(n) = 50 - 25 - 15(n-1) = 40 - 15n$ para $n \geq 2$, ou seja, $Y = 40 - 15X$. Para que o jogador tenha lucro (positivo), devemos ter $Y > 0 \Leftrightarrow 40 - 15X > 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 2$. Observe que

$$P(X = 1 \cup X = 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} > 50\%$$

Logo, ele tem mais chance de ter lucro do que de ter prejuízo. Além disso, como $Y = f(X)$, onde $f(x) = 40 - 15x$, por LOTUS, temos

$$\begin{aligned} EY &= \sum_{k=1}^{\infty} (40 - 15k) P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (40 - 15k) \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \\ &= 40 \cdot \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 15 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} = 40 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1/3} - 15 \cdot \frac{1}{1/3} = -5 \end{aligned}$$

Portanto, o lucro esperado é negativo.

Exercício 6.3. Observe que o jogo só termina em um número par de lançamentos, pois ambos os jogadores saem de $(200, 200)$ para $(300, 100)$ ou $(100, 300)$ e, com isso um deles ganha no próximo lançamento (portanto, uma quantidade par) ou eles retornam para $(200, 200)$ (mantendo a paridade dos lançamentos). Assim, para $N = 2k$, em cada 2 lançamentos, deve ocorrer a transição $(200, 200) \to (100, 300) \to (200, 200)$ ou $(200, 200) \to (300, 100) \to (200, 200)$, exceto nos últimos dois lançamentos, onde é $(200, 200) \to (100, 300) \to (0, 400)$ ou $(200, 200) \to (300, 100) \to (400, 0)$. Para os dois últimos lançamentos, a probabilidade é $p^2 + (1-p)^2$. Para quaisquer outros dois lançamentos, temos uma probabilidade de $p(1-p) + (1-p)p = 2(1-p)p$. Logo,

$$P(N = 2k) = (2(1-p)p)^{k-1}[p^2 + (1-p)^2] = (2p - 2p^2)^{k-1}(2p^2 - 2p + 1)$$

Sendo $q = 2p^2 - 2p + 1$, temos $P(N = 2k) = (1-q)^{k-1}q$ e $P(N = 2k+1) = 0$, donde

$$EN = \sum_{k=0}^{\infty} kP(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kP(N = 2k) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k(1-q)^{k-1}q = \frac{2}{q} = \frac{2}{2p^2 - 2p + 1}$$

A probabilidade de que o jogador I seja o vencedor é obtida ao considerar que os últimos dois lançamentos foram da forma $(200, 200) \to (300, 100) \to (400, 0)$. Isto equivale a manter apenas o p^2 em vez de $p^2 + (1-p)^2$ em $P(N = 2k)$, com $k = 1, 2, 3, \ldots$. Assim, a probabilidade do jogador I ganhar é

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-q)^{k-1} p^2 = \frac{p^2}{q} = \frac{p^2}{2p^2 - 2p + 1}$$

Exercício 6.4. Por LOTUS, temos

$$\begin{aligned}
E(e^X) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{u(1+u)^2}du = \int_0^{\infty} \frac{1}{u(1+u)^2}du \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}du = \left[\ln(u) - \ln(1+u) - \frac{1}{1+u}\right]_0^{\infty} \\
&= \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right) - \frac{1}{1+u}\right]_0^{\infty} = \left[\ln\left(\frac{1}{(1/u)+1}\right) - \frac{1}{1+u}\right]_0^{\infty} \\
&= \left(\ln\left(\frac{1}{(1/\infty)+1}\right) - \frac{1}{1+\infty}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{(1/0)+1}\right) - \frac{1}{1+0}\right) \\
&= (0-0) - (-\infty - 1) = \infty
\end{aligned}$$

Exercício 6.5. a) Pela Lista 3, temos que a função de distribuição para este caso é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{5x}{6000} & \text{se } 0 \leq x < 500 \\ \dfrac{6x-500}{6000} & \text{se } 500 \leq x \leq 1000 \\ \dfrac{x+4500}{6000} & \text{se } 1000 < x \leq 1500 \\ 1 & \text{se } x > 1500 \end{cases}$$

Logo, o valor esperado será

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x)dx \\
&= \int_0^{500} 1 - \frac{5x}{6000}dx + \int_{500}^{1000} 1 - \frac{6x-500}{6000}dx + \int_{1000}^{1500} 1 - \frac{x+4500}{6000}dx \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2400}\right]_0^{500} + \left[\frac{13x}{12} - \frac{x^2}{2000}\right]_{500}^{1000} + \left[\frac{x}{4} - \frac{x^2}{12000}\right]_{1000}^{1500} = \frac{1750}{3}
\end{aligned}$$

b) Pela Lista 3, temos que a função de distribuição para este caso é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \\ \dfrac{x+250}{1500} & \text{se } 0 \leq x < 1000 \\ \\ 1 & \text{se } x \geq 1000 \end{cases}$$

Logo, o valor esperado será

$$EX = \int\limits_0^{\infty} 1 - F_X(x)dx = \int\limits_0^{1000} 1 - \frac{x+250}{1500}dx = \left[\frac{5x}{6} - \frac{x^2}{3000}\right]_0^{1000} = 500$$

Exercício 6.6. Como

$$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2Xc + c^2) = E(X^2) - 2cEX + c^2$$

temos que o valor de c escolhido para minimizar $E(X-c)^2$ deve ser tal que minimize o valor da expressão quadrática em c acima, ou seja, $c = -\dfrac{-2EX}{2 \cdot 1} = EX$. Observe que isto é geral para qualquer variável aleatória X integrável. Para o caso de $X \sim \text{U}[a,b]$ a expressão quadrática obtida seria $c^2 - (a+b)c + \dfrac{a^2 - ab + b^2}{3}$, pois $EX = \dfrac{a+b}{2}$ e $EX^2 = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{3}$.