Probabilidade

Jeann Rocha

May 2024

7 Lista de Exercícios

Exercício 7.1. Se $X \in [a, b]$, então $a \leq X \leq b$, donde $a = Ea \leq EX \leq Eb = b$.
Além disso, pelo Exercício 6 da Lista 6, temos que a função $f(c) = E(X - c)^2$ atinge seu mínimo em $c = EX$. Logo, temos, por exemplo, $f(c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ e, observe que $f(EX) = \text{Var}X$, donde temos

$$\text{Var}X \leq E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq E\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = E\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$$

Para que $\text{Var}X = \frac{(b-a)^2}{4}$, devemos ter $f(c) = \text{Var}X$ para $c = EX$ e $c = \frac{a+b}{2}$. Ora, vimos no Exercício 6 da Lista 6 que $f(c) = c^2 + 2EX \cdot c + E(X^2)$, isto é, f é quadrática. Como $c = EX$ é seu ponto de mínimo e uma função quadrática possui, no máximo, um ponto de mínimo, devemos ter $EX = \frac{a+b}{2} = a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2}$. Então, considere X uma variável aleatória tal que $P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}$. Para esta variável aleatória, temos claramente $EX = \frac{a+b}{2}$ e $E(X^2) = a^2 \cdot \frac{1}{2} + b^2 \cdot \frac{1}{2}$, pois $P(X^2 = a^2) = P(X = a) = \frac{1}{2}$ e $P(X^2 = b^2) = P(X = b) = \frac{1}{2}$, donde

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$P(X_{(1)}X_{(2)} \leq x) = P(XY \leq x) = \int_0^1 P\left(X \leq \frac{x}{y}\right) P(Y \leq y)dy$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{y} \cdot ydy = x$$

Exercício 7.2. a) Desde que X e Y só assumem valores 0 e 1, temos que XY também assume apenas valores 0 e 1, donde

- $EX = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = P(X = 1)$
- $EY = 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) = P(Y = 1)$
- $E(XY) = 0 \cdot P(XY = 0) + 1 \cdot P(XY = 1) = P(XY = 1)$

Como $EX = EXEY$, segue que

$$P(X = 1, Y = 1) = P(XY = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$$

Além disso, como $P(X = 0) + P(X = 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 1$, temos também, por exemplo, que

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 1) &= P(X = 0|Y = 1)P(Y = 1) = (1 - P(X = 1|Y = 1))P(Y = 1) \\ &= P(Y = 1) - P(Y = 1)P(X = 1|Y = 1) \\ &= P(Y = 1) - P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1) - P(X = 1)P(Y = 1) \\ &= P(Y = 1)(1 - P(X = 1)) = P(Y = 1)P(X = 0) \end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que $P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0)$ e que $P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0)$. Portanto, X e Y são independentes.

b) Neste caso, podemos escrever $X = (b - a)U + a$ e $Y = (d - c)V + c$, onde U e V são variáveis discretas que assumem apenas valores 0 e 1. Assim, como

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow EXY = EXEY \Leftrightarrow\ & E(((b - a)U + a)((d - c)V + c)) \\ &= E((b - a)U + a)E((d - c)V + c) \Leftrightarrow EUV = EUEV \end{aligned}$$

Pelo item anterior, temos U e V independentes e, portanto, X e Y independentes.

Exercício 7.3.

$$
\begin{aligned}
Var(XY) &= E(XY)^2 - (E(XY))^2 = E(X^2Y^2) - ((EX)(EY))^2 \\
&= EX^2EY^2 - (EX)^2(EY)^2 \\
&= [EX^2EY^2 - EX^2(EY)^2 - EY^2(EX)^2 + (EX)^2(EY)^2] \\
&\qquad\qquad + [EY^2(EX)^2 - (EX)^2(EY)^2] + [EX^2(EY)^2 - (EX)^2(EY)^2] \\
&= (EX^2 - (EX)^2)(EY^2 - (EY)^2) + (EX)^2(EY^2 - (EY)^2) \\
&\qquad\qquad + (EY)^2(EX^2 - (EX)^2) \\
&= \mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y) + (EX)^2\mathsf{Var}(Y) + (EY)^2\mathsf{Var}(X)
\end{aligned}
$$

Exercício 7.4. Pela simetria, temos $EX = 0$, donde $\text{Cov}(X, Y) = E(XY)$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
EXY &= \int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{1} xyf_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{1} xy \cdot \frac{1}{3}dydx \\
&= \frac{1}{3}\cdot\int_{-1}^{1} x\left(\frac{1}{2} - \frac{(|x|-1)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{6}\cdot\int_{-1}^{1} x - x^3 + 2x|x| - xdx \\
&= \frac{1}{6}\left(\int_{-1}^{0} -x^3 - 2x^2dx + \int_{0}^{1} -x^3 + 2x^2dx\right) = \frac{1}{6}\left(\int_{-1}^{1} -2x^3dx\right) = 0
\end{aligned}$$

pois a função dentro da integral é ímpar. Portanto, $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercício 7.5. Dado $0 \leq x \leq 1$, temos

- $$\begin{aligned} P(X_{(1)} > x) &= P(\min(X, Y) > x) = P(X > x, Y > x) = P(X > x)P(Y > x) \\ &= (1-x)(1-x) = (1-x)^2 \Rightarrow P(X_{(1)} \leq x) = 1 - (1-x)^2 \end{aligned}$$

  Daí, temos

  $$P(X_{(1)}^2 \leq x) = P(X_{(1)} \leq \sqrt{x}) = 1 - (1 - \sqrt{x})^2$$

- $$\begin{aligned} P(X_{(2)} \leq x) &= P(\max(X, Y) \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) \\ & P(X \leq x)P(Y \leq x) = x^2 \end{aligned}$$

  Daí, temos

  $$P(X_{(2)}^2 \leq x) = P(X_{(2)} \leq \sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Portanto,

- $$EX_{(1)} = \int_0^1 (1 - [1 - (1-x)^2] dx = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}$$

- $$EX_{(2)} = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}$$

- $$E(X_{(1)}^2) = \int_0^1 (1 - [1 - (1-\sqrt{x})^2] dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{6}$$

- $$E(X_{(2)}^2) = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

- $$E(X_{(1)}X_{(2)}) = E(XY) = EXEY = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} \rho(X_{(1)}, X_{(2)}) &= \frac{\mathsf{Cov}(X_{(1)}, Y_{(1)})}{\sqrt{\mathsf{Var}(X_{(1)})}\sqrt{\mathsf{Var}(Y_{(1)})}} = \frac{EX_{(1)}X_{(2)} - EX_{(1)}EX_{(2)}}{\sqrt{E(X_{(1)}^2) - (EX_{(1)})^2}\sqrt{E(X_{(2)}^2) - (EX_{(2)})^2}} \\ &= \frac{(1/4) - (1/3)(2/3)}{\sqrt{(1/6) - (1/3)^2}\sqrt{(1/2) - (2/3)^2}} = \frac{1/36}{\sqrt{1/18}\sqrt{1/18}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício 7.6. Podemos descrever $X = X_1 + ... + X_n$, onde $X_n \sim$ Bernoulli$\left(\frac{b}{N}\right)$. Daí, segue que Cov$(X_i, X_j) =$ Cov$(X_k, X_l), \forall i \neq j, k \neq l$. Além disso, como Cov$(X_1, X_2) = EX_1X_2 - EX_1EX_2$ e $EX_1 = EX_2 = \frac{b}{N}$ e $EX_1X_2 = \frac{b(b-1)}{N(N-1)}$, temos

$$
\begin{aligned}
\text{Var}X = \text{Cov}(X, X) &= \sum_{k=1}^{n} \text{Var}X_i + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \frac{nb}{N}\left(1 - \frac{b}{N}\right) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2) \\
&= \frac{nb}{N}\left(1 - \frac{b}{N}\right) + n(n-1)\left[\frac{b(b-1)}{N(N-1)} - \frac{b^2}{N^2}\right] \\
&= \frac{nb}{N}\left[\left(1 - \frac{b}{N}\right) + \frac{(n-1)(b-1)}{N-1} - \frac{(n-1)b}{N}\right] \\
&= \frac{nb}{N}\left[\frac{(N-1)(N-b) + N(n-1)(b-1) - (N-1)(n-1)b}{N(N-1)}\right] \\
&= \frac{nb}{N}\left[\frac{N^2 - Nn - Nb + nb}{N(N-1)}\right] = \frac{nb}{N}\frac{(N-n)(N-b)}{N(N-1)}
\end{aligned}
$$