Lista 1 - Correção será sobre alguns itens aleatoriamente escolhidos entre 1.(h), 1.(i), 1.(j) e 1.(k), 2(c), 9(c)

Revisão - espaços vetoriais, base e dimensão

1. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais? Em caso afirmativo, se possível, exiba uma base e indique a dimensão deste subespaço.
   (a) Vetores do plano $2x + y - z = 0$
   (b) Combinações lineares de $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$ e $w = (-1, 3, 1)$, ou seja, $ger(u, v, w) = \{z \in R^3 / z = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w\}$
   (c) Vetores de R^n cuja primeira coordenada é igual a 1.
   (d) As sequências (vetores de R^∞) como $(1, 0, 1, 0, ...)$ que contém infinitos zeros.
   (e) As sequências $(x_1, x_2, ...)$ com todos os $x_j = 0$ de um ponto em diante.
   (f) As sequências decrescentes: $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j
   (g) As sequências convergentes: x_j tende a um limite quando $j \to \infty$
   (h) Vetores de R^n cujas coordenadas formam uma progressão aritmética
   (i) Vetores de R^n cujas coordenadas formam uma progressão geométrica
   (j) Matrizes $m \times n$ anti-simétricas (A é anti-simétrica se $A^T = -A$)
   (k) Os polinômios de grau até 3 que têm pelo menos duas raízes $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$

2. Seja A uma matriz $m \times n$. O espaço gerado pelas colunas de A é chamado de espaço coluna de A (óbvio) ou imagem de A, com notação $C(A)$ ou $Im(A)$.
   (a) Explique por que $dim(C(A)) \leq m$
   (b) Determine uma base para $C(B)$, onde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) Explique por que podemos determinar uma base para o espaço coluna de uma matriz A coletando as colunas de A correspondentes às colunas que contém pivôs quando A é escalonada.
   (d) Mostre que $dim(C(A)) = posto(A)$, onde $posto(A)$ é o número de pivôs no processo de eliminação gaussiana.

3. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que o conjunto de $\{u \in R^n / A \cdot u = 0\}$ é um subespaço de R^n. Este subespaço é chamado de espaço nulo de A ou núcleo de A, com notação $null(A)$ ou $N(A)$.
   (a) Explique por que $dim(C(A)) \leq n$
   (b) Determine uma base para $N(B)$, onde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) Explique por que a dimensão de $N(A)$ é igual ao número de variáveis livres de A.
   (d) Mostre que $dim(N(A)) = n - posto(A)$, onde $posto(A)$ é o número de pivôs no processo de eliminação gaussiana.

4. Exiba matrizes 2×2 com os seguintes núcleos (espaço nulo) e imagens (espaço coluna):
   (a) Núcleo: reta $y = x$. Imagem: reta $y = 2x$
   (b) Núcleo: reta $y = 3x$. Imagem: também a reta $y = 3x$.

5. Considere a base de R^2 $\beta = [u, v]$, onde $u = (1, 1)$ e $v = (2, 1)$
   (a) Se w tem coordenadas $(3, 5)$ na base β, quais são as coordenadas de w na base canônica? ($[w]_\beta = (3, 5)$ então $[w]_E = (?, ?)$)

(b) Se z tem coordenadas $(1,2)$ na base canônica, quais são as coordenadas de w na base β? ($[z]_E = (1,2)$ então $[z]_\beta = (?,?)$)

(c) Qual é a matriz de passagem da base β para a canônica? E da base canônica para a base β?

6. Considere o plano $\alpha = \{(x,y,z) \in R^3 / x + y - z = 0\}$. Encontre a matriz de passagem da base $\beta = [(1,1,2),(1,-1,0)]$ para a base $\gamma = [(1,0,1),(0,1,1)]$.

7. Mostre que se E e F são espaços vetoriais com mesma dimensão (finita), então E e F são isomorfos.

8. Exiba um isomorfismo entre $\mathcal{P}_3$ o espaço dos polinômios de grau até 3 e R^4. Qual é o vetor de R^4 correspondente a $p(x) = 1 - x^2$ por este isomorfismo?

9. Considere o espaço das funções $L = \{f : R^3 \to R)/f \text{ é linear}\}$. Tal espaço é chamado espaço dos funcionais lineares de R^3 ou espaço dual de R^3, com notação $L(R^3, R)$

   (a) Mostre que $L(R^3, R)$ é linear.

   (b) Encontre uma base de $L(R^3, R)$

   (c) Exiba um isomorfismo entre $L(R^3, R)$ e R^3. Qual é o vetor de R^3 correspondente ao funcional linear $L(x,y,z) = 2x - 3y + z$?