Probabilidade

Jeann Rocha

March 2024

1 Lista de Exercícios

Exercício 1.1. Vamos inicialmente demonstrar que dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \tag{1}$$

Para isto, utilizaremos a fórmula de Stifel, que afirma que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \forall k, n \in \mathbb{N}$$

Ora, (1) é obviamente verdade para $n = 0$ ou $n = 1$. Agora, seja $m \in \mathbb{N}$ tal que (1) seja verdade para $n = k$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} \\
&= \binom{n}{-1} + (-1)^{n+1} \binom{n}{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Portanto, por indução, está demonstrado e, uma vez que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (Teorema das Linhas), segue da fórmula (1), que se n é ímpar (digamos $n = 2j+1$), então temos que $\sum\limits_{k=0}^{j} \binom{n}{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{j} \binom{n}{2k} = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 2^{2j}$ e, se n é par (digamos $n = 2j$), então temos que $\sum\limits_{k=0}^{j} \binom{n}{2k} = \sum\limits_{k=0}^{j} \binom{n-1}{2k+1} = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 2^{2j-1}$.
Desse modo, em 3 lançamentos, o número total de caras é ímpar se, e somente se, for 1 ou

3. Logo, dado que ocorreram 3 lançamentos, temos

$$\begin{aligned}
P(\text{nº caras ser ímpar}) &= P((\text{nº caras} = 1) \cup (\text{nº caras} = 3)) \\
&= P(\text{nº caras} = 1) + P(\text{nº caras} = 3) \\
&= \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio, em 4 lançamentos, temos

$$\begin{aligned}
P(\text{nº caras ser ímpar}) &= P((\text{nº caras} = 1) \cup (\text{nº caras} = 3)) \\
&= P(\text{nº caras} = 1) + P(\text{nº caras} = 3) \\
&= \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Em 5 lançamentos, temos

$$\begin{aligned}
P(\text{nº caras ser ímpar}) &= P((\text{nº caras} = 1) \cup (\text{nº caras} = 3) \cup (\text{nº caras} = 5)) \\
&= P(\text{nº caras} = 1) + P(\text{nº caras} = 3) + P(\text{nº caras} = 5) \\
&= \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mais geralmente, para $2n$ lançamento(s), com $n = 1, 2, ...$, temos

$$\begin{aligned}
P(\text{nº caras ser ímpar}) &= P((\text{nº caras} = 1) \cup (\text{nº caras} = 3) \cup ... \cup (\text{nº caras} = 2n)) \\
&= P(\text{nº caras} = 1) + P(\text{nº caras} = 3) + ... + P(\text{nº caras} = 2n) \\
&= \frac{\binom{2n}{1}}{2^{2n}} + \frac{\binom{2n}{3}}{2^{2n}} + ... + \frac{\binom{2n}{2n}}{2^{2n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i}}{2^{2n}} = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De modo análogo, para $2n + 1$ lançamento(s), com $n = 0, 1, 2, ...,$, temos uma expressão similar dada por

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i+1}}{2^{2n+1}} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, concluímos que a probabilidade de um número ímpar de caras em qualquer número de lançamentos é $\frac{1}{2}$.

Exercício 1.2. Temos $\binom{2n}{n}$ formas de escolher as pessoas que receberão o sorvete do sabor A e, para cada uma destas, as pessoas que receberão o sorvete do sabor B estarão determinadas (serão as restantes). Supondo que as a pessoas que preferem o sorvete do sabor A receberam sorvetes desse sabor e, analogamente, as b pessoas que preferem o sorvete do sabor B receberam sorvetes desse sabor, restarão $2n - a - b$ pessoas, $n - a$ sorvetes do sabor A e $n - b$ sorvetes do sabor B. Uma vez escolhidas as $n - a$ pessoas das $2n-a-b$ que receberão os sorvetes do sabor A restantes, as pessoas que receberão o sorvete do sabor B estarão determinadas. Logo, o número de modos de organizar os $2n-a-b$ sorvetes ($n-a$ do tipo A e $n-b$ do tipo B) para as $2n-a-b$ pessoas restantes é $\binom{2n-a-b}{n-a}$. Portanto, a probabilidade de que a preferência de todas as pessoas seja respeitada é $\frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$.

Exercício 1.3. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e considere $A_0 = \emptyset$. Note que os conjuntos $B_1, B_2, ...$ dados por $B_n = A_n - \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ são dois a dois disjuntos e tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$. Então,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(A_n - \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n).$$

Exercício 1.4. Como $A \cup B \subset \Omega, \forall A, B \subset \Omega$, temos

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$$

Além disso, $P(A \cap B) \leq P(B)$ já que $A \cap B \subset B$, e está provado.
Em particular, temos que se $A_1, A_2, ...$ e $B_1, B_2, ...$ são eventos aleatórios do mesmo espaço de probabilidade tais que $P(A_n) \to 1$ e $P(B_n) \to$ quando $n \to +\infty$, então como vale que $P(A_n) + P(B_n) - 1 \leq P(A_n \cap B_n) \leq P(B_n)$ e $P(A_n) + P(B_n) - 1 \to 1 + p - 1 = p$ e $P(B_n) \to p$, quando $n \to +\infty$, pelo Teorema do Sanduíche, segue que $P(A_n \cap B_n) \to p$.

Exercício 1.5. a) $A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = 0,6$. Mas, supondo $A \subset B$, temos $P(A \cap B) = P(A) = 0,6$. Além disso, pelo exercício anterior, temos que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0,6 + 0,7 - 1 = 0,3$, valendo a igualdade se $A \cup B = \Omega$. Logo, $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.
A fim de mostrar diretamente a existência dessas cotas, considere os números de 1 a 10, dos quais deve ser escolhido um deles e seja A o evento do escolhido ser $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 e B o evento do escolhido ser $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ou 7. Então, naturalmente, tem-se $P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$ e $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$. Além disso, $A \subset B$ e, portanto, uma das cotas é atingida. Agora, considere o mesmo evento A e o evento B de escolher um número dentre $4, 5, 6, 7, 8, 9$ ou 10. Então, novamente, $P(B) = 0,7$ e $A \cup B = \{1, 2, ..., 10\}$, logo, a outra cota é atingida.

b) $A \cap B \cap C \subset A \Rightarrow P(A \cap B \cap C) \leq P(A) = 0,6$. Mas, supondo $A \subset B \subset C$, temos $P(A \cap B \cap C) = P(A) = 0,6$. Além disso, pelo exercício anterior, temos que $P(A \cap B \cap C) \geq P(A) + P(B \cap C) - 1 \geq P(A) + P(B) + P(C) - 2 = 0,6 + 0,7 + 0,8 - 2 = 0,1$, valendo a igualdade se $A \cup (B \cap C) = \Omega = B \cup C$. Logo, $0,1 \leq P(A \cap B \cap C) \leq 0,6$.
A fim de mostrar diretamente a existência dessas cotas, considere o mesmo espaço de probabilidade do item anterior, com $A = \{1, 2, ..., 6\}, B = A \cup \{7\}$ e $C = B \cup \{8\}$. Então, tem-se $P(A) = 0,6, P(B) = 0,7$ e $P(C) = 0,8$. Além disso,

$A \subset B \subset C$ e, portanto, uma das cotas é atingida. Agora, considere o mesmo evento A, $B = \{4, 5, ..., 10\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$. Então, novamente, $P(B) = 0,7$ e $P(C) = 0,8$ e $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, ..., 10\} = B \cup C$, logo, a outra cota é atingida.

Exercício 1.6. a) Como $P([x, y]) = y - x, \forall x, y \in [0, 1]$, com $x \leq y$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} P([a_n, b_n]) = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} b_n - \lim_{n \to +\infty} a_n = b - a = P([a, b]).$$

b) Seja $I \in \mathcal{B}_{[0,1]}$. Se $\frac{1}{2} \in I$, então, defina $P(I) = 1$, caso contrário, defina $P(I) = 0$. Claramente, vê-se que isso define uma probabilidade em $\mathcal{B}_{[0,1]}$. Agora, considere os intervalos $I_n = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2n}\right]$. Observe que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$ e que $\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$. Mas, $P([a_n, b_n]) = P\left(\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right\}\right) = 0$ se n é ímpar e $P([a_n, b_n]) = P\left(\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right]\right) = 1$ se n é par. Logo, $\lim_{n \to +\infty} P([a_n, b_n])$ não existe, já que $P([a_{2n}, b_{2n}]) \to 1$ e $P([a_{2n-1}, b_{2n-1}]) \to 0$, isto é, estas subsequências convergem para limites distintos.

c) Se (a_n) é não-decrescente e (b_n) é não-crescente, então $[a_n, b_n] \downarrow [a, b]$, donde $P([a_n, b_n]) \downarrow [a, b]$.