Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Simulado III - Cálculo em uma Variável
Duration: 01h40min

Exercício 1 - Taxas Relacionadas

O monitor de Modelagem Matemática, Yure, em seu trabalho de Álgebra Linear Numérica, estudou o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899 a 1922, a partir do Modelo de Produção de Cobb-Douglas, que relaciona o valor total da produção total (P) com o número de pessoas-horas trabalhadas no ano (L) e a quantidade de capital investido (K) da seguinte forma

$$P = \beta L^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

onde α e β são constantes reais. Sabendo que em 1899, o valor total da produção, o número de pessoas-horas trabalhadas e a quantidade de capital investido foram todos numericamente iguais a 100 e que, neste mesmo ano, a taxa de crescimento do valor total da produção foi de $\$7660,00$/ano, a taxa de do número de pessoas-horas trabalhadas foi crescente de 1000 pessoas-horas/ano e o capital investido é crescente a uma taxa de $\$10.000,00$/ano

a) determine as constantes α e β.

b) determine a taxa do valor total de produção em 1922, sabendo que neste ano, $L = 161, K = 431$ e $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{100}{74}, \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{100}{26}$. A taxa é crescente ou decrescente?

Exercício 2 - Valores Máximo e Mínimo

Dado $p \geq 1$, seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = (1-z)^p + z^p - 1$.

a) Calcule os máximos e mínimos de f.

b) Sejam $x \geq y \geq 0$. Use o fato obtido acima para mostrar que $(x-y)^p \leq x^p - y^p$.

c) Use o item b) para mostrar que se $x, y \geq 0$, então $(x+y)^p \geq x^p + y^p$.

Exercício 3 - O Teorema do Valor Médio

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$. Dizemos também que f preserva todas as distâncias se $|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ e que não preserva nenhuma se $|f(x) - f(y)| \neq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$. Mostre que

a) Ache a tal que $f(x) = ax + b$ preserve todas as distâncias e determine os pontos fixos de f.

b) Se f é derivável, mas $f'(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, mostre que f não preserva nenhuma distância.

c) Se f é derivável, mas $f'(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, mostre que f tem, no máximo 1 ponto fixo.

Exercício 4 - Esboço de Gráficos

Use os seus conhecimentos de Cálculo para esboçar o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

Exercício 5 - A Regra de L'Hôspital

Considere a figura abaixo, onde $S(\theta)$ é a área em amarelo e $T(\theta)$ é a área em verde.

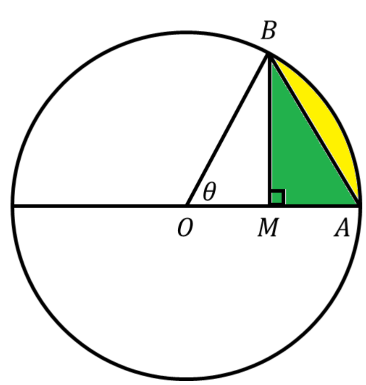

Figura 1: Circunferência

Calcule $\lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{S(\theta)}{T(\theta)}$

Solução - Exercício 1

a) Do enunciado, temos que $P = K = L = 100$ satisfazem o modelo apresentado. Ou seja, $100 = \beta \cdot 100^{\alpha} \cdot 100^{1-\alpha} = 100\beta \Rightarrow \beta = 1$. Ainda do enunciado, derivando o modelo em relação à t em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\frac{dP}{dt} = \alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} \frac{dL}{dt} + (1-\alpha) L^{\alpha} K^{-\alpha} \frac{dK}{dt}$$

Como $\frac{dP}{dt} = 7660$, $\frac{dK}{dt} = 1000$ e $\frac{dL}{dt} = 10000$, ainda com $K = L = 100$, obtemos

$$7660 = 10000\alpha + 1000(1-\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \frac{74}{100}$$

b) Como $\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d(L^{\alpha}K^{1-\alpha})} \frac{d(L^{\alpha}K^{1-\alpha})}{dt}$ e, justificando e utilizando a mesma expressão do item (a), $\frac{d(L^{\alpha}K^{1-\alpha})}{dt} = \alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} \frac{dL}{dt} + (1-\alpha) L^{\alpha} K^{-\alpha} \frac{dK}{dt}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{74}{100} \cdot 161^{-26/100} \cdot 431^{26/100} \cdot \frac{100}{74} + \frac{26}{100} \cdot 161^{74/100} \cdot 431^{-74/100} \cdot \frac{100}{26} \\ &= 161^{-26/100} \cdot 431^{26/100} + 161^{74/100} \cdot 431^{-74/100}\end{aligned}$$

Observação: Não era necessário utilizar taxas relacionadas para resolver este problema, pois na prática, isto é equivalente a derivar ambos os lados em relação à t.

Solução - Exercício 2

a) Fazendo $f'(z) = 0$, temos $p(1-z)^{p-1} + pz^{p-1} = 0 \Leftrightarrow (1-z)^{p-1} = z^{p-1} \Leftrightarrow 1-z = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$. Para $z = \frac{1}{2}$, temos $f(z) = \frac{1}{2^{p-1}} - 1$. Nos extremos do intervalo, temos $f(0) = f(1) = 0$. Logo, o mínimo de f é em $x = \frac{1}{2}$ e o máximo ocorre nos pontos 0 e 1.

b) Suponha que $x \neq 0$. Dividindo a expressão por x em ambos os lados, temos

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)^p \leq 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^p$$

Fazendo $z = \frac{y}{x}$, temos que $0 < z \leq 1$, já que $0 > y \leq x$. Assim, $(1-z)^p + z^p - 1 \leq 0$, que é verdade para todo $z \in (0,1]$ (pelo item a)). Se $x = 0$, a expressão é óbvia.

c) Como $x, y \geq 0$, temos que $x + y \geq x \geq 0$, donde $((x+y)-x)^p \leq (x+y)^p - x^p \Leftrightarrow x^p + y^p \leq (x+y)^p$.

Solução - Exercício 3

a) Para que $f(x) = ax + b$ preserve todas as distâncias, devemos ter $|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Como $|f(x) - f(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |ax - ay| = |a||x - y|$, é necessário e suficiente tomar $|a| = 1$, ou seja $a = \pm 1$. Seja A um ponto fixo de f, então $f(A) = aA + b$ e $f(A) = A$, donde $A = aA + b \Leftrightarrow A = \dfrac{b}{1-a}$, desde que $a \neq 1$. Caso $a = 1$, devemos ter $b = 0$ e, nesse caso, f tem pontos fixos em todos os pontos do seu domínio.

b) Pelo Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$ (sem perda de generalidade, suponha $x < y$), temos que $\exists c \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \neq 1 \Rightarrow f(x) - f(y) \neq x - y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \neq |x - y|$$

c) Se supormos que existem pelo menos dois pontos distintos $x, y \in \mathbb{R}$ (digamos, com $x < y$) que sejam pontos fixos (isto é, $f(x) = x$ e $f(y) = y$), pelo Teorema do Valor Médio, teriamos a existência de um $c \in (x, y)$ tal que

$$1 = \frac{x - y}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \neq 1$$

que é um absurdo. Logo, existe, no máximo, 1 ponto fixo.

Solução - Exercício 4

- O domínio de f é $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ e a imagem é $\mathbb{R}$.
- Pontos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

- Assíntotas de f:
  - **Verticais:** $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty \Leftrightarrow x = 1$
  - **Horizontais:** $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 - (1/x)} \pm \infty$ (não existe)
  - **Inclinadas:**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - (1/x)} = 1 = a$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 = b$$

- Intervalos de crescimento e decrescimento de f:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ e } x > 2 \qquad\qquad f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

- Concavidades e/ou Pontos de Inflexão:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(6x-2)(x-1)^2 - 2(3x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x+2}{(x-1)^3} > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

- Pontos de Máximo e/ou Mínimo: Aplicando o Teste da Primeira Derivada, temos que 0 é ponto de máximo e 2 é ponto de mínimo. Esboçando o gráfico de f, obtemos

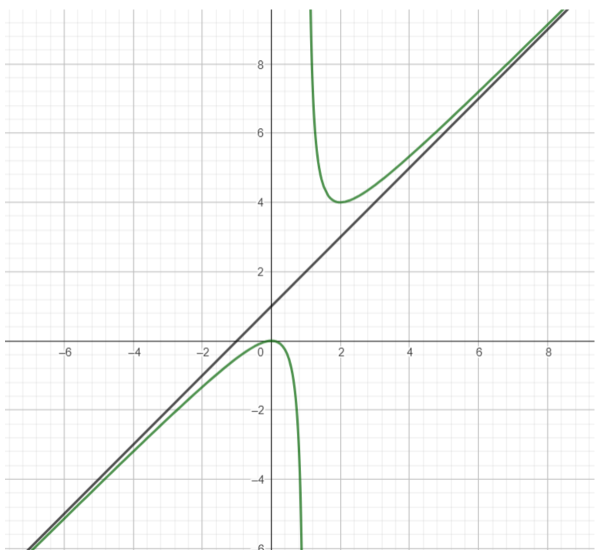

Figura 2: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Solução - Exercício 5

Sendo r o raio do círculo, temos que o setor circular tem área $\dfrac{r^2\theta}{2}$. Daí, a área do triângulo ABM (área verde) é $\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{MB}}{2} = \dfrac{(r-\overline{OM})\cdot\overline{MB}}{2} = \dfrac{(r - r\cos\theta)(r\sin\theta)}{2}$.

Além disso, a área da parte em amarelo é a área do setor menos a área do triângulo OAB, que é

$$S(\theta) = \frac{r^2\theta}{2} - \frac{r^2 \sin\theta}{2} = \frac{r^2(\theta - \sin\theta)}{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)} &= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{r^2(\theta - \sin\theta)}{(r - r\cos\theta)(r\sin\theta)} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\theta - \sin\theta}{(1-\cos\theta)(\sin\theta)} \\ &= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta\sin\theta}\end{aligned}$$

Pela Regra de L'Hôspital, o limite acima é igual a

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

Novamente, pela Regra de L'Hôspital, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{-\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta} &= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{-\sin\theta + 4\sin\theta\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{-1+4\cos\theta} = \frac{1}{-1+4\cdot 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Comentário: Em vez de utilizar L'Hôspital, divida ambos os termos da fração por θ para obter $\frac{\sin\theta}{\theta}$ e, com isso, o limite fundamental $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ e veja se funciona!