Álgebra Linear

Jeann Rocha

April 2024

2 Lista de Exercícios

2.2 Exercícios Papel e Lápis

Exercício 2.1. Temos

$$A(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f \equiv 0$$

Logo, o Núcleo de A é $\{0\}$. Além disso,

$$\phi = \text{Im}(A) \Leftrightarrow \exists f \in E \text{ tal que } A(f) = \phi \Leftrightarrow \phi(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que ϕ é derivável e $\phi' = f$, donde ϕ' tem que ser contínua (já que $f \in E$). Portanto, a Imagem de A é $\{\phi \in E | \phi \text{ é } C^2\}$.
OBS.: C^2 = de classe C^2 = derivável e com derivada contínua.

Exercício 2.9. a) Como $\langle u, v\rangle = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$, basta achar w ortogonal a u e v e, em seguida, normalizar os três vetores (se necessário). Para isso, tomemos $w = u \times v = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Normalizando u, v e w, obtemos a base ortonormal $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Basta notar que $\langle w, u\rangle = \langle w, v\rangle = 0$, donde $w \in F^\perp$ e, portanto, $\text{proj}_F(w) = 0$.

Mas, no espírito de fazer conta: sendo $u' = \dfrac{u}{||u||}$ e $v' = \dfrac{v}{||v||}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_F(w) &= \mathrm{proj}_{u'}(w) + \mathrm{proj}_{v'}(w) \\
&= \frac{\left\langle \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}\right\rangle} \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\right\rangle} \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) Seja P a matriz de projeção em F paralelamente a $F^{\perp}$. Então, relativamente à base $\{l, m, n\}$, com $l = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$, encontrada no item (a), devemos ter

$$P = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Com efeito, como $l, m \in F$ e $n \in F^{\perp}$, temos que

$$\begin{aligned}
Al = l &= \mathbf{1}\cdot l + \mathbf{0}\cdot m + \mathbf{0}\cdot n \\
Am = m &= \mathbf{0}\cdot l + \mathbf{1}\cdot m + \mathbf{0}\cdot n \\
An = 0 &= \mathbf{0}\cdot l + \mathbf{0}\cdot m + \mathbf{0}\cdot n
\end{aligned}$$

Agora, sendo P' a mesma matriz de projeção, porém relativamente à base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$, devemos ter

$$P' = \begin{bmatrix}2/3 & -1/3 & 1/3\\ -1/3 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

pois

$$\mathrm{proj}_F(e_1) = \langle e_1, l\rangle l + \langle e_1, m\rangle m = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/6\\1/6\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{bmatrix} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$$

$$\mathrm{proj}_F(e_2) = \langle e_2, l\rangle l + \langle e_2, m\rangle m = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/6\\1/6\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$$

$$\mathrm{proj}_F(e_3) = \langle e_3, l\rangle l + \langle e_3, m\rangle m = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix} = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$$

Exercício 2.10. Sendo w_1, w_2, w_3 os vetores gerados (sem necessariamente estarem normalizados), temos

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{w_1}(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{w_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{w_2}(v_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como w_1, w_2, w_3 já tem norma 1, estes são os vetores gerados pelo Processo de Gram-Schimidt. A decomposição QR de A, portanto, é

$$A = QR = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle w_1, v_1 \rangle & \langle w_1, v_2 \rangle & \langle w_1, v_3 \rangle \\ 0 & \langle w_2, v_2 \rangle & \langle w_2, v_3 \rangle \\ 0 & 0 & \langle w_3, v_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Exercícios Computacionais

Exercício 2.11. a) •

$$\begin{aligned}\langle p+\lambda q, r\rangle &= \int_{-1}^{1}(p+\lambda q)(x)r(x)dx = \int_{-1}^{1}p(x)r(x)+\lambda q(x)r(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}p(x)r(x)dx+\lambda\int_{-1}1q(x)r(x)dx = \langle p, r\rangle+\lambda\langle q, r\rangle\end{aligned}$$

- $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1}q(x)p(x)dx = \langle q, p\rangle$
- $\langle p, p\rangle = \int_{-1}^{1}p(x)p(x)dx = \int_{-1}^{1}(p(x))^2dx \geq \int_{-1}^{1}0dx = 0$, sendo que é $= 0 \Leftrightarrow (p(x))^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p \equiv 0$.

Portanto, esta operação define um produto interno em $\mathcal{P}^2$.

b) Sabemos que $\{1, x, x^2\}$ constitui uma base para $\mathcal{P}^2$. Então, aplicaremos o Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathcal{P}^2$.

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = x - \text{proj}_{w_1}(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 = x - \frac{\int_{-1}^{1}x\cdot 1dx}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1dx} = x - \frac{0}{2} = x$$

$$\begin{aligned}w_3 &= x^2 - \text{proj}_{w_1}(x^2) - \text{proj}_{w_2}(x^2) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x\\ &= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1}x^2\cdot 1dx}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1dx} - \frac{\int_{-1}^{1}x^2\cdot xdx}{\int_{-1}^{1}x\cdot xdx}x = x^2 - \frac{2/3}{2} - \frac{0}{2/3}x = x^2 - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Como $||w_1|| = \sqrt{\int_{-1}^{1}1^2dx} = \sqrt{2}$, $||w_2|| = \sqrt{\int_{-1}^{1}x^2dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e $||w_3|| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx} = \sqrt{\frac{8}{45}}$

Logo, uma base ortonormal para $\mathcal{P}^2$ é $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Exercício 2.12. a) Utilizando a função *kernel* do ambiente *Scilab*, obtemos 3 vetores que constituem uma base para o núcleo, como segue abaixo:

```
--> kernel(M)
 ans  =

   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
   0.0022235  -0.0271446  -0.174666
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
  -0.009829    0.2468246  -0.0384838
   0.4995738   0.0203915   0.0031905
   0.4995738   0.0203915   0.0031905
   0.4995738   0.0203915   0.0031905
   0.4995738   0.0203915   0.0031905
```

b) Como há somente 3 vetores no núcleo, segue que o grafo possui 3 componentes conexas. Os vértices de 1 a 32 pertencem a uma componente, os vértices de 33 a 48 pertencem a outra e, os vértices de 49 a 52 pertencem a outra, basta notar que as 32 primeiras coordenadas dos vetores da base do item anterior são iguais, as próximas 16 coordenadas são iguais (porém diferentes das 32 primeiras) e, por fim, as últimas 4 coordenadas são iguais (porém diferentes das 32 primeiras e das 16 seguintes as 32 primeiras).