Lista 2

Para correção serão considerados os exercícios computacionais 1 e 2 e algum escolhido da parte "exercício (papel e lápis)" entre os itens 1,9 ou 10.

1 Verificação de conceitos

1. Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $u = (3, 4)$ e $v = (12, 9)$
2. Se $||u|| = 5$, $||v|| = 8$ e o ângulo entre os vetores u e v é $\theta = \pi/3$, calcule $||u - v||$
3. Verifique que os vetores pertencentes à reta $y = x$ são ortogonais ao vetor $v = (1, -1)$
4. O que é uma base ortonormal β de um espaço E? Qual é a relação entre as matrizez de passagem P_e^β e P_β^e?
5. Construa uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vetor $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
6. O conjunto F é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vetor $u = (1, -1, 2)$. Determine $F^\perp$.
7. O conjuto F é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém apenas o vetor nulo, $F = \{0\}$. Determine $F^\perp$.
8. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = 0$?

2 Exercícios papel e lápis

1. Seja $E = C(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defina o operador linear $A : E \to E$ pondo para cada $f \in E$, $A(f) = \phi$, onde $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt$. Determine o núcleo e a imagem do operador A.
2. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

   (   ) Uma transformação linear $A : E \to F$ é sobrejetiva se, e somente se, $dim(N(A)) = dim(E) - dim(F)$

   (   ) Dada a transformação linear $A : E \to F$, para todo b fixado em F, o conjunto $G = \{x \in E/Ax = b\}$ é um subespaço vetorial de E.

   (   ) Para todo operador linear $A : E \to E$, se $u \in N(A)$ e $v \in Im(A)$ então $\langle u, v\rangle = 0$

   (   ) Todo operador linear injetivo no espaço $C^0(\mathbb{R})$ das funções contínuas na reta é também sobrejetivo.

   (   ) O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão ≥ 3

   (   ) Se a transformação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$é injetiva então $dim(Im(A)) = m$.
3. Determine uma base para a imagem e para o núcleo, quando possível, de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

   (a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (x - y, x - y)$

   (b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $B(x, y, z) = (x + y/2, y + z/2, z + x/2)$

   (c) $C : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $C(X) = A \cdot X$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($M_{2\times2}$ é o espaço das matrizes 2×2)

   (d) $D : P_n \to P_{n+1}$, $D(p(x)) = x \cdot p(x)$ (P_n é o espaço dos polinômios de grau até n)
4. (Elon) Dadas as transformações lineares $A : E \to F$, $B : F \to G$, assinale Verdadeiro ou Falso nas seguintes implicações

   (a) se BA é sobrejetiva então B é sobrejetiva

   (b) se BA é sobrejetiva então A é sobrejetiva

   (c) se BA é sobrejetiva então B é injetiva

(d) se BA é sobrejetiva então A é injetiva

Mostre ainda que se $E = F = G$ então as quatro implicações são verdadeiras.

5. Seja $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \; e \; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ou seja, D é o disco unitário contido no plano $z = 0$. Determine $D^\perp$ e $(D^\perp)^\perp$

6. Mostre que F e G são subespaços ortogonais de E então $F \cap G = \{0\}$

7. Seja F um subespaço de E de dimensão finita. Mostre que

   (a) Todo vetor w de E pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^\perp$

   (b) $(F^\perp)^\perp = F$

8. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

   ( ) Se $u \neq 0$ e $< u, v >=< u, u >$ então $v = u$

   ( ) Uma transformação linear $A : E \to F$ é sobrejetiva se, e somente se, $dim(N(A)) = dim(E) - dim(F)$

   ( ) Para todo operador linear $A : E \to E$, tem-se $N(A) = Im(A)^\perp$

   ( ) O posto de uma matriz A é igual ao posto de $A^T A$

   ( ) Se u e v são ortogonais e P é uma projeção ortogonal então Pu e Pv são ortogonais

   ( ) O complemento ortogonal de um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$ é uma reta

   ( ) Se F é um subespaço de E então $(F^\perp)^\perp = F$

9. O espaço F é o plano gerado pelos vetores $u = (2, -2, 0)$ e $v = (1, 1, 2)$.

   (a) Exiba uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenha u e v.

   (b) Calcule a projeção ortogonal de $w = (-1, -1, 1)$ sobre u e sobre v

   (c) Escreva a matriz da projeção ortogonal de $z = (x, y, z)$ sobre F na base obtida na letra (a) e também na base canônica.

10. Aplique o processo de Gram-Schimidt nos vetores $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou seja, encontre uma decomposição QR da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Computacionais

1. Seja $\mathcal{P}^2$ o espaço vetorial dos polinômios de grau até dois. Considere operação $< p, q >$ entre dois polinômios definida por $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

   (a) Mostre que esta operação é um produto interno em $\mathcal{P}^2$

   (b) Encontre uma base ortonormal (segundo este produto interno) de $\mathcal{P}^2$ (que tal usar Gram-Schmidt? Talvez você prefira usar o computador para lhe auxiliar nas contas...)

2. O arquivo MatrizIncidencia.csv que acompanha esta lista contém a matriz de incidência de uma rede direcionada (grafo), onde cada linha representa uma aresta e cada coluna um vértice. Se $B_{ij} = 1$ então a aresta i se inicia no vértice j. Se $B_{ij} = -1$ então a aresta i termina no vértice j. Deste modo em cada linha i há apenas uma entrada igual a 1 e uma entrada igual a -1 e todos demais elementos desta linha são iguais a zero.

   (a) Encontre uma base para o núcleo da matriz de incidência. Você pode usar um pacote computacional, claro!

   Funções úteis - Matlab: null(M) ou null(M, 'rational'). R: nullspace(M) ou null(M). Python: scipy.linalg.nullspace(M).

(b) Descreva quantas componentes conexas esta rede possui e quais são os vértices que pertencem a cada componente.