Probabilidade

Jeann Rocha

April 2024

4 Lista de Exercícios

Exercício 4.1. a)

$$P(T > t + s|T > t) = \frac{P(T > t|T > t + s)P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{1 \cdot P(T > t + s)}{P(T > t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(T > s)$$

b) i) $P(T < 1) = 1 - e^{-3\cdot 1} = 1 - e^{-3}$

ii)

$$P\left(X \leq 1 + \frac{1}{3}|X > 1\right) = 1 - P\left(X > 1 + \frac{1}{3}|X > 1\right) = 1 - P\left(X > \frac{1}{3}\right)$$
$$= P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = 1 - e^{-3(1/3)} = 1 - e^{-1}$$

Exercício 4.2. a) Do enunciado, temos que $X_t \sim \text{Poisson}(10t)$.

b)

$$P(Y_t = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(Y_t = k|X_t = n)P(X_t = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{(10t)^n}{n!} e^{-10t}$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{(10t)^n}{n!} e^{-10t} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{0.1^k 0.9^{n-k} (10t)^n e^{-10t}}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{\frac{0.1^k}{0.9^k} e^{-10t}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{0.9^n (10t)^n}{(n-k)!} = \frac{\left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-10t}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(9t)^n}{(n-k)!}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-10t}}{k!} (9t)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(9t)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\frac{1^k}{9^k}}{k!} e^{-10t} \cdot 9^k \cdot t^k e^{9t} = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

Logo, $Y_t \sim \text{Poisson}(t)$. Para

Exercício 4.3. a) Dado que o equipamento continua operando até $t > 0$, queremos saber a probabilidade de que ele falhe após Δt (i.e., $P(X \leq t + \Delta t | X > t)$) e escalar o resultado sobre a unidade de tempo incrementada (Δt) (i.e., dividir o resultado por Δt). Para saber a probabilidade do equipamento falhar após $t > 0$, fazemos $\Delta t \to 0$ e temos a expressão (desde que o limite exista).

b)

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X \leq t + \Delta t | X > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X \leq t + \Delta t)}{\Delta t P(X > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X \leq t + \Delta t) - P(X \leq t)}{\Delta t P(X > t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} F'(x) dx}{\Delta t (1 - F(t))} \end{aligned}$$

Como $\int_t^{t+\Delta t} F'(x) dx \to 0$ e $\Delta t(1 - F(t)) \to 0$ quando $\Delta t \to 0$, pela Regra de L'Hôspital, temos

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

c) $h(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$

d)

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F(t)) &\Leftrightarrow \int_0^x h(t) dt = \int_0^x -\frac{d}{dt} \ln(1 - F(t)) dt \\ &\Leftrightarrow -\int_0^x h(t) dt = \ln(1 - F(x)) \Leftrightarrow F(x) = 1 - e^{-\int_0^x h(t) dt} \end{aligned}$$

e) Como $h(t) = at$, temos $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x at dt} = 1 - e^{-(ax^2)/2}$. Assim, a densidade será

$$f(x) = F'(x) = axe^{-(ax^2)/2}$$

Exercício 4.4. a) Se F fosse uma função de distribuição de um vetor aleatório, digamos (X, Y), teríamos

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) &= F(0,0) + F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) \\ &= (1 - e^{-2}) + 0 - (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-1}) \\ &= -1 - e^{-2} + 2e^{-1} = -1 + \frac{2e - 1}{e^2} < -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

que é um absurdo. Portanto, F não é distribuição de um vetor aleatório.

b) Claramente, F é contínua à direita em cada variável (pois é contínua). Além disso, temos $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x.y) = \lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$ (analogamente, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x.y) = 0$) e também $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x.y) = \lim\limits_{x\to+\infty, y\to+\infty} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) = (1-0)\cdot(1-0) = 1$. Agora, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$, com $a \le b$ e $c \le d$, temos

$$\begin{aligned}
P(a < X \le b, c < Y \le d) &= F(a,c) + F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) \\
&= (1-e^{-a})(1-e^{-c}) + (1-e^{-b})(1-e^{-d}) \\
&\qquad - (1-e^{-a})(1-e^{-d}) - (1-e^{-b})(1-e^{-c}) \\
&= (1-e^{-a}-e^{-c}+e^{-(a+c)}) + (1-e^{-b}-e^{-d}+e^{-(b+d)}) \\
&\quad - (1-e^{-a}-e^{-d}+e^{-(a+d)}) - (1-e^{-b}-e^{-c}+e^{-(b+c)}) \\
&= e^{-(a+c)} + e^{-(b+d)} - e^{-(a+d)} - e^{-(b+c)} \\
&= e^{-a}(e^{-c}-e^{d}) + e^{-b}(e^{-c}-e^{-d}) = (e^{-a}-e^{-b})(e^{-c}-e^{-d})
\end{aligned}$$

Como $a \le b \Rightarrow e^{-a} - e^{-b} \ge 0$ e, analogamente, $c \le d \Rightarrow e^{-c} - e^{-d} \ge 0$, temos que o valor acima é ≥ 0 e, portanto, F é distribuição de algum vetor aleatório (X, Y).

Exercício 4.5.

$$\begin{aligned}
F_{(X,X)}(x,y) &= P(X \le x, X \le y) = P(X \le \min\{x,y\}) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } \min\{x,y\} \le 0 \\ \min\{x,y\} & \text{se } 0 \le \min\{x,y\} \le 1 \\ 1 & \text{se } \min\{x,y\} \ge 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \text{ ou } y \le 0 \\ \min\{x,y\} & \text{se } 0 \le x \le 1 \text{ ou } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \text{ e } y \ge 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercício 4.6.

- **18.** Considere como espaço amostral o conjunto

$$\Omega = \{(x,y) | x \ne y \text{ e } x, y = 1, 2, 3\}$$

a) $p_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x, Y = y) = \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}$

b)

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- **25.**

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= \sum_{y=1}^{3} P(X = x, Y = y) \\
&= P(X = x, Y = 1) + P(X = x, Y = 2) + P(X = x, Y = 3) \\
&= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ se } x = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos $p_Y(y) = \dfrac{1}{3}$ para $y = 1, 2, 3$.
Temos que X e Y não são independentes, pois

$$P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{9} = P(X = 1)P(Y = 1)$$