Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Simulado I - Cálculo em uma Variável
Duration: 01h40min

Exercício 1 - Cálculo de Limites

Dê o valor dos limites abaixo (se existirem...):

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{2x^2 - 18}$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3 + \sqrt[3]{x^3 + 1}}{x^2 + \sqrt{x + 1}}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{|x - \pi|}{(x - \pi)(x - 3.14)}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x}$

Exercício 2 - Limites Laterais

Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação à um observador, onde L_0 é um comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim\limits_{x \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

Exercício 3 - Assíntotas Verticais e Horizontais

Ache assíntotas verticais e horizontais (se existirem) para as funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x^5 - x^3}\right)$

c) $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Exercício 4 - O Teorema do Sanduíche

Joãozinho queria fazer um sanduíche. Ele tinha dois pães, um que ele chamava de $f(x)$ e o outro que ele chamava de $h(x)$. Além disso, ele chamou o recheio do seu sanduíche de $g(x)$. Ele observou que no sanduíche, o recheio estava sempre entre os pães, ou seja, se $f(x), g(x)$ e $h(x)$ fossem números, teríamos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Além disso, Joãozinho utilizou sua lupa infinitesimal para conseguir ver um pingo de ketchup que caiu em ambos os pães. Ao ver, ele observou que o pingo de ketchup estava sobre ambos os pães e toda vez que aproximava de um certo ponto do pingo do ketchup, sempre havia um pouco de ketchup sobre os pães simultaneamente, não importa o quão mais perto ele aproximasse. Joãozinho então concluiu que no recheio do seu sanduíche tinha ketchup.

Agora, é sua vez de fazer um sanduíche, mostrando que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} = 0$.

Exercício 5 - A Definição Formal de Limite

Considere a função $f(x) = (x+5)^2 - 3$. Com isso, faça o que se pede:

a) Sem fazer conta, interprete o gráfico de f a partir de translações de $y = x^2$. Logo em seguida, esboçe o gráfico de f. Se quiser, pode fazer as contas para descobrir a expressão de f em termos de x^2, x e do termo independente.

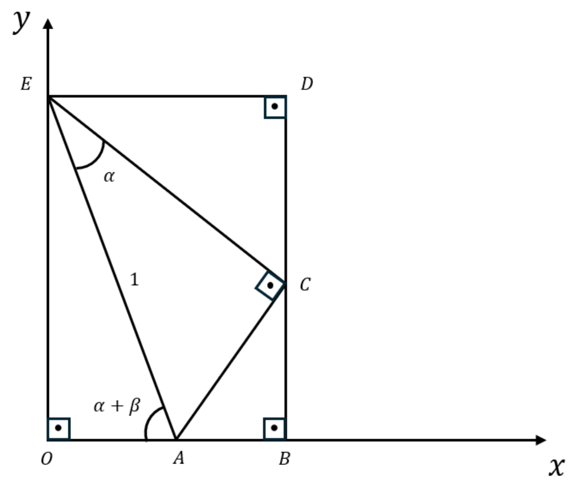
b) Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.

c) Qual é a imagem de f dado que o seu domínio é $\mathbb{R}$.

d) Dê a definição precisa de $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ e ache um $\delta > 0$ (não precisa ser o maior, mas se quiser, fique a vontade!) tal que $|f(x) + 3| < 2$ quando $0 < |x+5| < \delta$ (Sugestão: Faça um desenho!).

Exercício 6 - EXTRA [by Gabriel Matos]

Sejam α e β dois ângulos positivos tais que $\alpha + \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Então, considere a figura abaixo e faça o que se pede:



a) Use conceitos simples de trigonometria para determinar os lados OE, OA, AC e CE em função de α e β.

b) Determine os ângulos BAC e CED.

c) Agora que você "supostamente" fez os itens (a) e (b), use novamente conceitos simples de trigonometria para determinar os lados AB, BC, CD e ED em função de α e β. Ao terminar, compare os lados do retângulo $OBDE$ e descubra duas fórmulas que você talvez tenha visto no Ensino Médio, mas possivelmente nunca chegou a ver uma demonstração para elas.

d) O que acontece com a razão dos segmentos AB e DE quando fazemos $\alpha \to \dfrac{\pi}{4}$ e $\beta \to \dfrac{\pi}{6}$.