Probabilidade

Jeann Rocha

April 2024

3 Lista de Exercícios

Exercício 3.1. a) Sejam Y e Z as variáveis aleatórias que descrevem o valor retirado na roleta e o valor retirado no dado, respectivamente. Então, $X = Y$ se $Z \neq 6$ (isto é, se $Z = 1, 2, 3, 4, 5$) e $X = Y + 500$ se $Z = 6$. Além disso, temos que $Y \sim \mathrm{U}([0, 1000])$. Portanto

$$\begin{aligned}
F_X(x) \leq P(X \leq x) &= P(X \leq x | Z \neq 6)P(Z \neq 6) + P(X \leq x | Z = 6)P(Z = 6) \\
&= P(Y \leq x)P(Z \neq 6) + P(Y + 500 \leq x)P(Z = 6) \\
&= P(Y \leq x)P(Z \neq 6) + P(Y \leq x - 500)P(Z = 6) \\
&= P(Y \leq x) \cdot \frac{5}{6} + P(Y \leq x - 500) \cdot \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Daí,

$$F_X(x) = \begin{cases}
0 \cdot (5/6) + 0 \cdot (1/6) = 0 & \text{se } x < 0 \\
\dfrac{x}{1000} \cdot (5/6) + 0 \cdot (1/6) = \dfrac{5x}{6000} & \text{se } 0 \leq x < 500 \\
\dfrac{x}{1000} \cdot (5/6) + \dfrac{x - 500}{1000} \cdot (1/6) = \dfrac{6x - 500}{6000} & \text{se } 500 \leq x \leq 1000 \\
1 \cdot (5/6) + \dfrac{x - 500}{1000} \cdot (1/6) = \dfrac{x + 4500}{6000} & \text{se } 1000 < x \leq 1500 \\
1 \cdot (5/6) + 1 \cdot (1/6) = 1 & \text{se } x > 1500
\end{cases}$$

Graficamente, temos

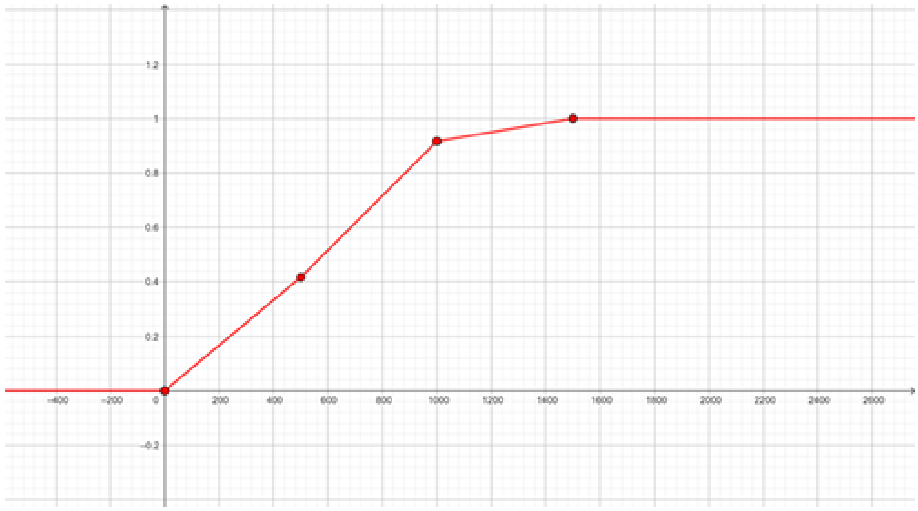

Figura 1: Função de Distribuição Acumulada de X

Como se observa, a função é (absolutamente) contínua e, de fato, observa-se que $\lim_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0^-} = F(0)$ e, analogamente o mesmo em $x \to 500, x \to 1000$ e $x \to 1500$.

b) Considere as mesmas variáveis aleatórias Y e Z do item anterior. Então, neste caso, temos $X = 0$ se $Z = 1$, $X = Y$ se $Z = 2, 3, 4, 5$ e $X = 1000$ se $Z = 6$. Portanto,

$$\begin{aligned}
F_X(x) &\leq P(X \leq x) \\
&= P(X \leq x | Z = 1)P(Z = 1) + P(X \leq x | 2 \leq Z \leq 5)P(2 \leq Z \leq 5) \\
&\qquad + P(X \leq x | Z = 6)P(Z = 6) \\
&= P(0 \leq x)P(Z \neq 1) + P(Y \leq x)P(2 \leq Z \leq 5) + P(1000 \leq x)P(Z = 6) \\
&= P(0 \leq x)\frac{1}{6} + P(Y \leq x)\frac{4}{6} + P(1000 \leq x)\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Daí,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \cdot (1/6) + 0 \cdot (4/6) + 0 \cdot (1/6) = 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 \cdot (1/6) + \dfrac{x}{1000} \cdot (4/6) + 0 \cdot (1/6) = \dfrac{x + 250}{1500} & \text{se } 0 \leq x < 1000 \\ 1 \cdot (1/6) + 1 \cdot (4/6) + 1 \cdot (1/6) = 1 & \text{se } x \geq 1000 \end{cases}$$

Graficamente, temos

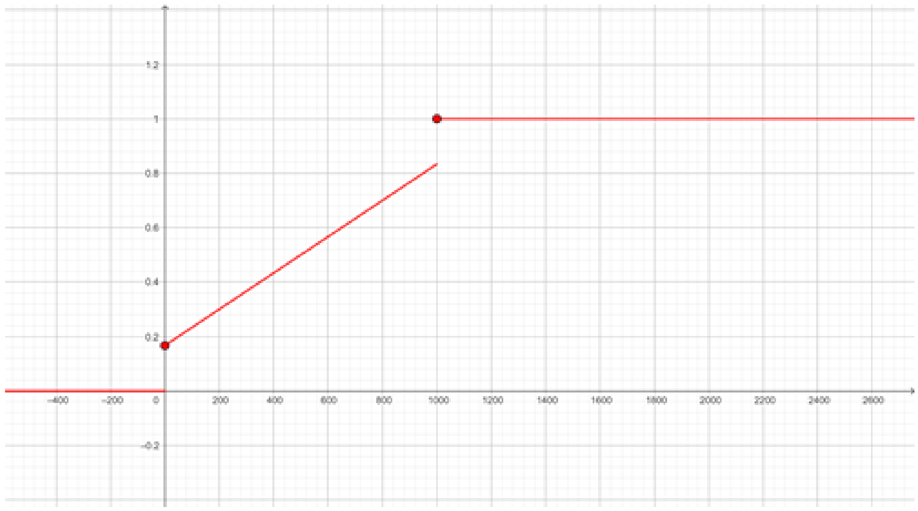

Figura 2: Função de Distribuição Acumulada de X

Como se observa, a função é uma mistura dos dois tipos (absolutamente contínua e discreta), sendo soma das funções F_d e F_{ac} dadas abaixo:

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } 0 \le x < 1000 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x \ge 1000 \end{cases}, \qquad F_{ac}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{1500} & \text{se } 0 \le x < 1000 \\ \frac{2}{3} & \text{se } x \ge 1000 \end{cases}$$

Exercício 3.2. f é uma função de densidade, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{u^2}du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\infty} = 1$$

a) Temos $F_X(x) = f'(x)$ (exceto em $x = 0$). Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{x+1} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\max\{X, c\} \leq x) = P(X \leq x, c \leq x) = P(X \leq x)P(c \leq x) \\
&= \begin{cases} F_X(x) \cdot 0 = 0 & \text{se } x < c \\ F_X(x) \cdot 1 = F_X(x) & \text{se } x \geq c \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{se } x \geq c \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Temos $F_Y = F_{ac} + F_d$, onde

$$
F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \dfrac{c}{c+1} & \text{se } x \geq c \end{cases}, \qquad F_{ac}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{c}{c+1} & \text{se } x \geq c \end{cases}
$$

Exercício 3.3. 1. $P(X < 0.6) = \frac{1}{2}$, já que $F_X(x) = \frac{1}{2}$ em $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (etapa 1)

2. $P(X < 0.05) = \frac{1}{8}$, já que $F_X(x) = \frac{1}{8}$ em $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$ (etapa 3)

Exercício 3.4. Seja X_k a variável aleatória que representa o tempo de espera até o k-ésimo sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade p de sucesso. Veja que, $X_1 \sim \text{Geom}(p)$. Assim, a fim de calcular $P(X_2 = t)$, note que devemos contabilizar em t lançamentos, dois sucessos (p^2) e $t-2$ fracassos $(1-p)^{t-2}$. Mas, está fixado que o último dos t lançamentos deve corresponder ao segundo sucesso. Logo, devemos escolher dentre os $t-1$ primeiros lançamentos, em qual ocorreu o primeiro sucesso, que é feito de $\binom{t-1}{1} = t-1$ formas. Logo, temos:

$$
P(X_2 = t) = (t-1)p^2(1-p)^{t-2}
$$

A fim de generalizar o cálculo acima para $n = k$, basta trocar 2 por k e a combinação $\binom{t-1}{1}$ por $\binom{t-1}{k-1}$ e, com isso, ficamos com

$$
P(X_k = t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}
$$

Exercício 3.5. Sendo X e Y as variáveis aleatórias que descrevem os resultados obtidos para os valores x e y, respectivamente, temos $X, Y \sim \text{U}([0,1])$. Portanto,

$$
F_Z(a) = P(Z \leq a) = P(X \leq a, Y \leq a) = P(X \leq a)P(Y \leq a)
$$

Daí,

$$
F_z(a) = \begin{cases} 0 \cdot 0 = 0 & \text{se } a < 0 \\ a \cdot a = a^2 & \text{se } 0 \leq a \leq 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}
$$

Uma função de densidade de Z é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = F'_Z(x)$ (exceto num conjunto de medida Lebesgue nula). Assim, temos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \text{ ou } a > 1 \\ 2a & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e pomos, por exemplo, $f(0) = f(1) = 0$.
Os gráficos de ambas as funções estão descritos abaixo

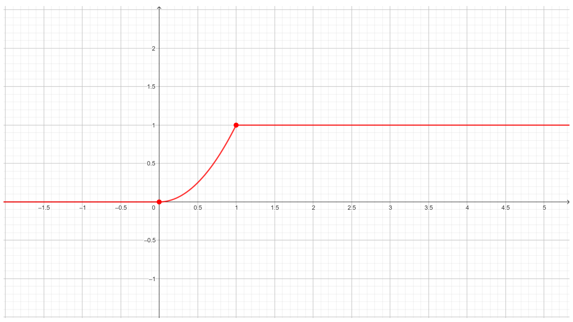

Figura 3: Função de Distribuição Acumulada de Z

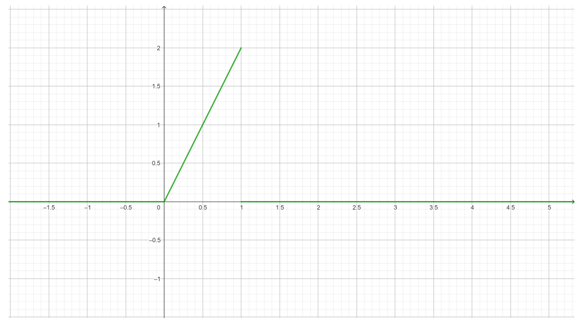

Figura 4: Função de Densidade de Z

Exercício 3.6. a) Seja D o número de itens defeituosos. Então, a distribuição do número N de itens defeituosos entre os 100 retirados não é binomial, mas sim hipergeométrica $\text{HG}(100, 100000, D)$. Entretanto, esta distribuição pode ser aproximada por uma binomial $\text{Bin}\left(100, \dfrac{D}{100000}\right)$, uma vez que a amostra é muito menor que o número de itens ($100 \ll 100000$).

b) A probabilidade de aceitação indevida é máxima quando o percentual de itens defeituosos é exatamente igual a 6% (pois este evento contém qualquer outro no qual a porcentagem é inferior a 6% e, portanto, dentro das especificações). Assim, usando o modelo binomial, temos $p = \dfrac{6000}{100000} = 0.06$, donde

$$\begin{aligned} P(N < 3) &= P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} \cdot 0.06^k \cdot 0.94^{100-k} \\ &= 1 \cdot 0.94^{100} + 100 \cdot 0.06 \cdot 0.94^{99} + 5050 \cdot 0.06^2 \cdot 0.94^{98} \\ &= 0.94^{100} + 6 \cdot 0.94^{99} + 18.18 \cdot 0.94^{98} \\ &= 0.94^{98}(1 + 6 \cdot 0.94 + 18.18 \cdot 0.94^2) = 7.5236 \cdot 0.94^{98} \end{aligned}$$

c) Sendo $\lambda = np = 100 \cdot 0.06 = 6$, temos

$$P(N < 3) \lesssim \sum_{k=0}^{2} \frac{6^k}{k!} e^{-6} = e^{-6}\,(1 + 6 + 18) = 25e^{-6} \lesssim 0.062$$

Exercício 3.7. Seja Y_j a variável aleatória para o número de pontos, dentre j distríbuidos, que estão no intervalo de comprimento y e não estão no intervalo de comprimento x. Então, $Y_j \sim \text{Bin}\left(j, \dfrac{y}{N-x}\right)$. Assim, dado que exatamente m dos N pontos distribuídos estão no intervalo de comprimento x, para calcular $P(Y = n|X = m)$, devemos calcular a probabilidade de exatamente n dos $N - m$ pontos restantes estarem no intervalo de comprimento y, ou seja, $P(Y_{N-m} = n)$. Logo,

$$P(Y = n|X = m) = P(Y_{N-m} = n) = \binom{N-m}{n} \left(\frac{y}{N-x}\right)^n \left(1 - \frac{y}{N-x}\right)^{N-m-n}$$

Além disso, $Y \sim \text{Bin}\left(N, \dfrac{y}{N}\right)$, ou seja

$$P(Y = n) = \binom{N}{n} \left(\frac{y}{N}\right)^n \left(1 - \frac{y}{N}\right)^{N-n}$$

Logo, analisando ambas as expressões, vemos que ao fazer $N \to +\infty$, elas se tornam iguais.