Probabilidade

Jeann Rocha

March 2024

2 Lista de Exercícios

Exercício 2.1. a)

$$\begin{aligned}P(B|\cup A_n) &= \frac{P(\cup A_n|B)P(B)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum[P(A_n|B)]P(B)}{\sum[P(A_n)]} = \frac{\sum[P(B|A_n)P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} \\ &\geq \frac{\sum[c\cdot P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} = c\cdot\frac{\sum[P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} = c.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}P(B|\cup A_n) &= \frac{P(\cup A_n|B)P(B)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum[P(A_n|B)]P(B)}{\sum[P(A_n)]} = \frac{\sum[P(B|A_n)P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} \\ &= \frac{\sum[c\cdot P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} = c\cdot\frac{\sum[P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} = c.\end{aligned}$$

c) De $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, temos $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) \leq \frac{P(A_n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Daí, recursivamente, é fácil ver que $P(A_n) \leq \frac{P(A_1)}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite de ambos os lados, temos $P(A_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

d)

$$\begin{aligned}P(B|\cup A_n) &= \frac{P(\cup A_n|B)P(B)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum[P(A_n|B)]P(B)}{\sum[P(A_n)]} = \frac{\sum[P(B|A_n)P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} \\ &= \frac{\sum[P(C|A_n)P(A_n)]}{\sum[P(A_n)]} = \frac{\sum[P(A_n|C)]P(C)}{\sum[P(A_n)]} = \frac{P(\cup A_n|C)P(C)}{P(\cup A_n)} \\ &= P(C|\cup A_n).\end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
P(B|C) &= \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(B\cap(\Omega\cap C))}{P(C)} = \frac{P(B\cap((\cup A_n)\cap C))}{P(C)}\\
&= \frac{P(B\cap(\cup(A_n\cap C)))}{P(C)} = \frac{P(\cup(B\cap(A_n\cap C))))}{P(C)}\\
&= \sum_n\left[P((B\cap(A_n\cap C)))\cdot\frac{1}{P(C)}\right] = \sum_n\left[P((B\cap(A_n\cap C)))\cdot\frac{P(A_n|C)}{P(A_n\cap C)}\right]\\
&= \sum_n\left[\frac{P((B\cap(A_n\cap C)))}{P(A_n\cap C)}\cdot P(A_n|C)\right] = \sum_n\left[P(B|A_n\cap C)P(A_n|C)\right]
\end{aligned}
$$

Exercício 2.2. Seja K o evento em que ele sabe a resposta e R o evento em que ele acerta a questão. Então, temos

$$
P(K|R) = \frac{P(R|K)P(K)}{P(R|K)P(K)+P(R|K^C)P(K^C)} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p+\dfrac{1}{m}\cdot(1-p)} = \frac{mp}{(m-1)p+1}
$$

Quando

(i) $m\to\infty$, com p fixo, temos $P(K|R)\to 1$ (basta aplicar a Regra de L'Hôspital)

(ii) $p\to 0$, com m fixo, temos $P(K|R)\to 0$ (basta substituir)

Exercício 2.3. Seja E o evento em que Pedro escreva a carta e R o evento em que Marina não receba a carta. Então, temos

$$
P(E^C|R) = \frac{P(R|E^C)P(E^C)}{P(R)} = \frac{1\cdot P(E^C)}{1-P(R^C)} = \frac{1-0.8}{1-0.8\cdot 0.9\cdot 0.9} = \frac{0.2}{0.352} = 0.56\overline{81}
$$

Exercício 2.4. a) Para cada um dos k primeiros lançamentos temos probabilidade p para o resultado ser cara e, para cada um dos $n-k$ restantes, temos probabilidade $1-p$ de que seja coroa. Logo, a probabilidade de se obter k caras, seguidas de n–k coroas é $p^k(1-p)^{n-k}$

b) Cada uma das k caras tem probabilidade p de ocorrer e cada uma das $n-k$ coroas tem probabilidade $1-p$ de ocorrer. Dos n possíveis lançamentos, há $\binom{n}{k}$ possibilidades para as k caras ocorrerem e, automaticamente, as $n-k$ coroas terão ocorrido nos lançamentos restantes, dado que ocorreram. Assim, a probabilidade de se obter k caras e n–k coroas é $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

c) • **SOLUÇÃO 1:** Seja A o evento de ocorrer cara no 1º lançamento e B o evento ocorrer k caras. Então, temos

$$
P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\cdot p}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}
$$

- **SOLUÇÃO 2:** Dado que ocorreram k caras, temos $\binom{n}{k}$ formas de escolher os k lançamentos em que ocorreram caras. Mas, se sabemos que ocorreu uma cara no 1º lançamento, então, temos apenas $\binom{n-1}{k-1}$ formas de escolher os $k-1$ lançamentos restantes em que ocorreram cara. Então, a probabilidade de se ter obtido cara no 1º lançamento, dado que o número de caras observado é igual a k é $\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$

Exercício 2.5. a) $P(\cap(A_k^C)) = \prod_k P(A_k^C) = \prod_k (1-p_k)$

b) $P(\cup A_k) = 1 - P(\cap(A_k^C)) = 1 - \prod_k (1-p_k)$ (pelo item a)

c)

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k \cap \left(\bigcup_{j\neq k} A_j\right)^C\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left[P\left(A_k \cap \left(\bigcap_{j\neq k} A_j^C\right)\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[P(A_k)P\left(\bigcap_{j\neq k} A_j^C\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[p_k \prod_{j\neq k} P(A_j^C)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[p_k \prod_{j\neq k}(1-P(A_j))\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[p_k \prod_{j\neq k}(1-p_j)\right]
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&P\left(\bigcup_{1\leq k\leq j\leq n}\left((A_k\cap A_j)\cap\left(\bigcup_{l\neq k, l\neq j} A_l\right)^C\right)\right) \\
&= \sum_{1\leq k\leq j\leq n}\left[P\left((A_k\cap A_j)\cap\left(\bigcap_{l\neq k, l\neq j} A_l^C\right)\right)\right] \\
&= \sum_{1\leq k\leq j\leq n}\left[P(A_k\cap A_j)P\left(\bigcap_{l\neq k, l\neq j} A_l^C\right)\right] = \sum_{1\leq k\leq j\leq n}\left[p_k p_j \prod_{l\neq k, l\neq j} P(A_l^C)\right] \\
&= \sum_{1\leq k\leq j\leq n}\left[p_k p_j \prod_{l\neq k, l\neq j}(1-P(A_l))\right] = \sum_{1\leq k\leq j\leq n}\left[p_k p_j \prod_{l\neq k, l\neq j}(1-p_l)\right]
\end{aligned}
$$

e) $P(\cap(A_k)) = \prod_k P(A_k) = \prod_k p_k$

f) $1 - P(\cap(A_k)) = 1 - \prod_k p_k$ (pelo item e)

Exercício 2.6. a) Se $P(B|A) = P(B|A^C)$, então

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C) = P(B|A)P(A) + P(B|A)P(A^C) \\
&= P(B|A)[P(A) + P(A^C)] = P(B|A)P(\Omega) = P(B|A)
\end{aligned}
$$

Logo, A e B são independentes. Reciprocamente, se A e B são independentes, então $P(B|A) = P(B)$, donde

$$\begin{aligned} P(B|A) = P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C) \\ &\Leftrightarrow P(B|A)(1 - P(A)) = P(B|A^C)P(A^C) \\ &\Leftrightarrow P(B|A)P(A^C) = P(B|A^C)P(A^C) \\ &\Leftrightarrow P(B|A) = P(B|A^C) \end{aligned}$$

b)
- $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{p^3 + (1-p)^3}{p^2 + (1-p)^2} = \dfrac{3p^2 - 3p + 1}{2p^2 - 2p + 1}$
- $P(B|A^C) = \dfrac{P(B \cap A^C)}{P(A^C)} = \dfrac{p^2(1-p) + (1-p)^2 p}{1 - (2p^2 - 2p + 1)} = \dfrac{p - p^2}{2p - 2p^2} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(B|A) \geq P(B|A^C) \Leftrightarrow \dfrac{3p^2 - 3p + 1}{2p^2 - 2p + 1} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4p^2 - 4p + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2p-1)^2 \geq 0$, que sempre é verdade. Logo, temos sempre $P(B|A) \geq P(B|A^C)$, valendo a igualdade quando $2p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$ (portanto, A e B só são independentes neste caso).