Probabilidade

Jeann Rocha

May 2024

8 Lista de Exercícios

Exercício 8.1. a) Temos que

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 = n | X_2 = n) P(X_2 = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 = n) P(X_2 = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n \cdot p(1-p)^n = p^2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{2n} = p^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

Além disso, por simetria, temos que $P(X_1 < X_2) = P(X_2 < X_1)$ e também, como $P(X_1 < X_2) + P(X_1 = X_2) + P(X_2 < X_1) = 1$, segue que

$$P(X_1 < X_2) = \frac{1 - P(X_1 = X_2)}{2} = \frac{1 - \frac{p}{2-p}}{2} = \frac{2-2p}{2(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}$$

b) Vamos primeiramente, calcular $P(X_1 + X_2 = k)$

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 + X_2 = k | X_1 = i) P(X_1 = i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} P(X_2 = k - i | X_1 = i) P(X_1 = i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} P(X_2 = k - i) P(X_1 = i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} p(1-p)^{k-i} \cdot p(1-p)^i = \sum_{i=0}^{k} p^2 (1-p)^k$$
$$= (k+1) p^2 (1-p)^k$$

Agora, calculemos a distribuição de $X_1|X_1+X_2=k$

$$\begin{aligned}
P(X_1=n|X_1+X_2=k) &= \frac{P(X_1+X_2=k|X_1=n)P(X_1=n)}{P(X_1+X_2=k)} \\
&= \frac{P(X_2=k-n|X_1=n)P(X_1=n)}{(k+1)p^2(1-p)^k} \\
&= \frac{P(X_2=k-n)P(X_1=n)}{(k+1)p^2(1-p)^k} \\
&= \frac{p(1-p)^{k-n}\cdot p(1-p)^n}{(k+1)p^2(1-p)^k} = \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

com $n=0,1,2,...,k$. Ou seja, $X_1|X_1+X_2=k \sim \mathrm{U}(\{0,1,...,k\})$.

Exercício 8.2. Seja N a variável aleatória que descreve o número de partículas que chegam no contador até o tempo t. Então $N \sim$ Poisson(λt). Além disso, seja X a variável aleatória do fator mencionado. A probabilidade da voltagem produzida ser menor que 1 é dada por

$$\begin{aligned}
P(NX<1) &= P(N=0)\sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor} P\left(X<\frac{1}{n}|N=n\right)P(N=n) \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor} P\left(X<\frac{1}{n}\right)P(N=n) \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor} \int_0^{1/n} \frac{1}{(1+x)^2}dx \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor} \int_1^{1+1/n} \frac{1}{u^2}du \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor} \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1+1/n} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor} \left(-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+1\right)\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{\lambda t} = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor}\frac{(\lambda t)^n}{(n+1)!}e^{\lambda t} = \frac{1}{\lambda t}\left(\lambda e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda t}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda t}\sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor+1}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{\lambda t} = \frac{P(0<N\le\lfloor t\rfloor+1)}{\lambda t}
\end{aligned}$$

Exercício 8.3. a) Sendo A_t e B_t o número de impulsos gerados pelas fontes A e B, respectivamente, temos $A_t \sim$ Poisson(λt) e $B_t \sim$ Poisson(ξt). Assim, temos que

$X_t = A_t + B_t$, isto é, X_t é uma soma de variáveis aleatórias identicamente distribuídas (com distribuição de Poisson) e independentes. Portanto, obtemos que $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t + \xi t) = \text{Poisson}((\lambda + \xi)t)$.

b) Seja Y_1, Z_1 o tempo até a ocorrência do primeiro impulso registrado pelo contador das fontes A e B, respectivamente. Então, $Y_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Z_1 = \text{Exp}(\xi)$. Queremos então calcular $P(Y_1 < Z_1)$, cuja conta foi feita no Exercício 2 da Lista 5, donde temos $P(Y_1 < Z_1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \xi}$

c) Queremos achar a distribuição de $A_1 | X_1 = 100$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
P(A_1 = n | X_1 = 100) &= \frac{P(X_1 = 100 | A_1 = n) P(A_1 = n)}{P(X_1 = 100)} \\
&= \frac{P(A_1 + B_1 = 100 | A_1 = n) P(A_1 = n)}{P(X_1 = 100)} \\
&= \frac{P(B_1 = 100 - n) P(A_1 = n)}{P(X_1 = 100)} \\
&= \frac{\dfrac{(\xi t)^{100-n}}{(100-n)!} e^{-\xi t} \cdot \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}{\dfrac{((\lambda + \xi)t)^{100}}{100!} e^{-(\lambda + \xi)}} \\
&= \frac{100!}{(100-n)! n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + \xi} \right)^n \cdot \left(\frac{\xi}{\lambda + \xi} \right)^{100-n}
\end{aligned}$$

Logo, $A_1 | X_1 = 100 \sim \text{Bin}\left(100, \dfrac{\lambda}{\lambda + \xi}\right)$

Exercício 8.4. Seja N_T o número de visitantes que chegam à exposição no período em que ela funciona (T). Então, $N_T \sim \text{Poisson}(\lambda T)$. Além disso, seja T_i o tempo gasto pelo i-ésimo vitante da exposição, com $i = 1, ..., N_T$. Então, $T_i \sim \text{U}[0, T]$. Sendo $X = \sum\limits_{n=1}^{N_T} T_i$, temos que

$$E(X | N_T = n) = E(T_1 + ... + T_n) = \frac{nT}{2} \Rightarrow E(X | N_T) = \frac{N_T T}{2}$$

Assim, pela Lei da Esperança Total, segue que

$$E(X) = E(E(X | N_T)) = E\left(\frac{N_T T}{2} \right) = \frac{T}{2} E(N_T) = \frac{\lambda T}{2}$$

Exercício 8.5. Sabemos que $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$. Então

$$\begin{aligned}
P(X = k | X + Y = b) &= \frac{P(X + Y = b | X = k) P(X = k)}{P(X + Y = b)} = \frac{P(Y = k - k) P(X = k)}{P(X + Y = b)} \\
&= \frac{\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \cdot \binom{n}{b-k} p^{b-k} (1-p)^{n-b+k}}{\binom{m+n}{b} p^b (1-p)^{m+n-b}} = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{b-k}}{\binom{m+n}{b}}
\end{aligned}$$

Assim, $X|X+Y=b \sim \text{HG}(m, m+n, b)$

Exercício 8.6. a)

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{m=0}^{n} P(X=k|N=m)P(N=m) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \left[\binom{m}{k} p_2^k (1-p_2)^{m-k} \cdot \binom{n}{m} p_1^m (1-p_1)^{n-m}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{n} \left[\frac{m!}{k!(m-k)!} p_2^k (1-p_2)^{m-k} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} p_1^m (1-p_1)^{n-m}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k p_2^k \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} (1-p_2)^{m-k} \cdot p_1^{m-k} (1-p_1)^{n-m}\right] \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k p_2^k \cdot \sum_{m=0}^{n} \left[\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} (1-p_2)^{m-k} \cdot p_1^{m-k} (1-p_1)^{n-m}\right]
\end{aligned}$$

Este último somatório consiste no expansão do Binômio de Newton de

$$((1-p_1) + p_1(1-p_2))^{n-k} = (1-p_1p_2)^{n-k}$$

basta fazer a substituição $j = m-k$ e observar que o somatório é 0 para $j < 0$, pois teremos $m-k < 0$ e, portanto, $\binom{n-k}{m-k} = \dfrac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = 0$, donde o somatório vai de $j = 0$ até $n-k$ e os valores se adaptam ao binômio de Newton mencionado. Segue, portanto, que $P(X=k) = \binom{n}{k}(p_1p_2)^k(1-p_1p_2)^{n-k}$, isto é, que $X \sim \text{Bin}(n, p_1p_2)$.

b) Dado uma ocorrência de bernoulli com probabilidade p_1 de sucesso (e $1-p_1$ de fracasso) em N (pois, sendo $N \sim \text{Bin}(n, p_1)$, ele pode ser escrito como soma de n bernoullis independentes de parâmetro p_1). Para esta ocorrência, temos uma probabilidade p_2 de sucesso (e $1-p_2$ de fracasso) em X. Assim, em X, esta ocorrêcia deve estar caracterizada por uma probabilidade de sucesso p_1p_2 e de fracasso $1-p_1p_2$ (pois ou fracassa em N, com probabilidade $1-p_1$, ou fracassa em X - mas não em N -, com probabilidade $p_1(1-p_2)$, cuja soma final é $(1-p_1)+p_1(1-p_2) = 1-p_1p_2$). Logo, $X \sim \text{Bin}(n, p_1p_2)$.