Álgebra Linear

Jeann Rocha

April 2024

1 Lista de Exercícios

Exercício 1.1. h) Trata-se do conjunto

$$A = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_k = (k-1)R + x_1, \forall k \in \{1, ..., n\}, x_1, R \in \mathbb{R}\}$$

Note que $0 = (0, ..., 0)$ é tal que a k-ésima coordenada é $(k-1) \cdot 0 + 0$ (P.A. de razão 0 e termo inicial 1). Além disso, dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ em A e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\exists R, S > 0$ tal que $x_k = (k-1)R + x_1$ e $y_k = (k-1)S + y_1$, donde $x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1, ..., x_n + \lambda y_n)$ e

$$x_k + \lambda y_k = [(k-1)R + x_1] + \lambda[(k-1)S + y_1] = (k-1)(R + \lambda S) + (x_1 + \lambda y_1)$$

Logo, $x + \lambda y \in A$. Assim, A é um subespaço vetorial. Uma base para A é

$$\mathcal{B}_A = \{(1, 1, 1, ..., 1), (0, 1, 2, 3, ..., n-1)\}$$

consequentemente, $\dim(A) = 2$. Com efeito, todo número $x = (x_1, ..., x_n) \in A$ é da forma

$$\begin{gathered}(x_1, x_1 + R, x_1 + 2R, ..., x_1 + (n-1)R) = \\ (x_1, x_1, ..., x_1) + R(0, 1, 2, 3, ..., n-1) \in \text{ger}(\mathcal{B}_A)\end{gathered}$$

e, claramente $(1, 1, 1, ..., 1)$ e $(0, 1, 2, 3, ..., n-1)$ são linearmente independentes, pois a primeira coordenada de um é $1 \neq 0$ enquanto a do outro é 0. Portanto, $\mathcal{B}_A$ é, de fato, uma base para A.

i) Trata-se do conjunto

$$G = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_k = x_1 r^{k-1}, \forall k \in \{1, ..., n\}, x_1, r \in \mathbb{R}\}$$

Note que $(1,1,...,1),(2,4,...,2^n) \in G$, mas $(3,5,9,2^4+1,...,2^n+1) \notin G$, pois $\frac{5}{3} \neq \frac{9}{5}$, isto é, a razão entre termos consecutivos não é constante. Logo, G não é um subespaço vetorial.

j) Trata-se do conjunto

$$AS = \{A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) | A^T = -A\}$$

Claramente, $AS = \emptyset$ se $m \neq n$, pois nesse caso A^T e $-A$ tem dimensões diferentes e, portanto, $A^T \neq -A, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Assim, o caso $m \neq n$ implica que AS não é subespaço vetorial. Para o caso $m = n$, temos $0 = [0_{ij}]_{m\times n} \in AS$, pois $0^T = 0 = -0$. Além disso, dadas $A, B \in AS$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $A + \lambda B \in AS$, pois $(A+\lambda B)^T = A^T + \lambda B^T = -A + \lambda(-B) = -(A+\lambda B)$. Logo, se $m = n$, então AS é um subespaço vetorial. Note que todo elemento de AS tem a diagonal preenchida de zeros, pois devemos ter $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j \in \{1,...,n\}$, em particular, $a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0, \forall i \in \{1,...,n\}$. Uma base para AS é

$$\mathcal{B}_{AS} = \{(as)_{ij} | i > j, i, j \in \{1,2,...,n\}\}$$

onde $(as)_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz com 1 na posição ij e -1 na posição ji. Claramente, isto constitui uma base para AS, pois dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in AS$, basta escrever $A = \sum_{i>j}^{n} a_{ij}(as)_{ij}$ e não há outra forma de escrever matrizes de AS como combinação linear de vetores desse conjunto, já que dois quaisquer vetores desse conjunto não possuem termos diferentes de 0 em uma mesma posição. Resumindo, já que é gerador e a combinação linear que gera é única, temos uma base. A dimensão é $\#\mathcal{B}_{AS} = (n-1) + (n-2) + ... + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

k) Trata-se do conjunto

$$\mathcal{P}_3^{(1,2)} = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 | \exists r(x) \in \mathcal{P}_1 \text{ tal que } p(x) = (x-1)(x-2)r(x)\}$$

Claramente $0 = (x-1)(x-2)\cdot 0 \in \mathcal{P}_3^{(1,2)}$. Além disso, dados $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3^{(1,2)}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, deve existir $r(x), s(x) \in \mathcal{P}_1$ tais que

$$p(x) = (x-1)(x-2)r(x) \text{ e } q(x) = (x-1)(x-2)s(x)$$

Daí,

$$\begin{aligned} p(x) + \lambda q(x) &= [(x-1)(x-2)r(x)] + \lambda[(x-1)(x-2)s(x)] \\ &= (x-1)(x-2)(r(x) - \lambda s(x)) \in \mathcal{P}_3^{(1,2)} \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{P}_3^{(1,2)}$ é um subespaço vetorial. Uma base para $\mathcal{P}_3^{(1,2)}$ é

$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}_3^{(1,2)}} = \{(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)x\}$$

consequentemente, $\dim(\mathcal{P}_3^{(1,2)}) = 2$. Com efeito, $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_3^{(1,2)}}$ é L.I., pois são apenas dois polinômios e eles tem dimensões diferentes. Além disso, dado um polinômio $p(x) = (x-1)(x-2)r(x) \in \mathcal{P}_3^{(1,2)}$, com $r(x) = ax + b$, temos

$$p(x) = b[(x-1)(x-2)] + a[(x-1)(x-2)x]$$

Logo, $\mathcal{P}_3^{(1,2)}$ é, de fato, uma base.

Exercício 1.2. c) Sendo o espaço coluna de uma matriz A o espaço gerado pelos vetores colunas da matriz A, podemos reduzir esse conjunto (se necessário) de modo a obter vetores L.I. que ainda gerem o espaço, isto é, uma base. Assim, basta mostrar que se $v_1, ..., v_k$ são tais vetores, então os vetores $w_1, ..., w_k$ (o indíce indica que o vetor w_i é o vetor correspondente ao v_i no processo de eliminação) também formam uma base do espaço coluna da matriz após esse processo de escalonamento. Então, sendo $v_i = (a_{1i}, ..., a_{mi})$ e $w_i = (b_{1_i}, ..., b_{mi})$, vamos analisar cada tipo de processo que pode ser aplicado na eliminação.

- **Permutar duas linhas L_α e L_β de A:** Estamos então trocando os vetores $v_i = (..., a_{\alpha i}, ..., a_{\beta i}, ...)$ por $w_i = (..., a_{\beta i}, ..., a_{\alpha i}, ...)$. Como o produto por escalar de vetores em $\mathbb{R}^n$ é feito coordenada a coordenada, se o conjunto de vetores w_i não fosse L.I., teríamos alguma combinação linear $\lambda_1 w_1 + ... \lambda_k w_k = 0$ ($\lambda_i \neq 0$, para algum i), mas isto implica numa combinação linear $\lambda_1 v_1 + ... \lambda_k v_k = 0$, que contradiria o fato de $\{v_1, ..., v_k\}$ ser L.I.. Portanto, $\{w_1, ..., w_k\}$, nesse caso, é L.I..

- **Somar à linha L_α um múltiplo γ da linha L_β:** Estamos então trocando os vetores $v_i = (..., a_{\alpha i}, ...)$ por $w_i = (..., a_{\alpha i} + \gamma a_{\beta i}, ...)$. Então, se os vetores w_i não fossem L.I. teríamos alguma combinação linear $\lambda_1 w_1 + ... \lambda_k w_k = 0$ ($\lambda_i \neq 0$, para algum i), com $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, ..., k$, isto é

  $$\lambda_1 a_{i1} + ... + \lambda_k a_{ik} = 0, \forall i \neq \alpha \text{ e } \lambda_1(a_{\alpha 1} + \gamma a_{\beta 1}) + ... + \lambda_k(a_{\alpha k} + \gamma a_{\beta k}) = 0$$

  Daí, se $\alpha \neq \beta$, então $\lambda_1 a_{\beta 1} + ... + \lambda_k a_{\beta k} = 0$, isto é, $\lambda_1 \gamma a_{\beta 1} + ... \lambda_k \gamma a_{\beta k} = 0$ e, portanto, $\lambda_1(a_{\alpha 1} + \gamma a_{\beta 1}) + ... + \lambda_k(a_{\alpha k} + \gamma a_{\beta k}) = 0$ se reduz a

  $$\lambda_1 a_{\alpha 1} + ... + \lambda_k a_{\alpha k} = 0$$

  Além disso, se $\alpha = \beta$, então $\lambda_1(a_{\alpha 1} + \gamma a_{\beta 1}) + ... + \lambda_k(a_{\alpha k} + \gamma a_{\beta k}) = 0$ se reduz a $\lambda_1(\gamma + 1)a_{\alpha 1} + ... + \lambda_k \gamma a_{\alpha k} = 0$, isto é, novamente, $\lambda_1 a_{\alpha 1} + ... + \lambda_k a_{\alpha k} = 0$. Ou seja, $\lambda_1 a_{i1} + ... + \lambda_k a_{ik} = 0, \forall i$ e, portanto, temos que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = 0$, o que contradiria o fato de $\{v_1, ..., v_m\}$ ser L.I.. Portanto, $\{w_1, ..., w_m\}$, nesse caso, é L.I..

Assim, os vetores L.I. continuam L.I. e, veja que a dimensão do espaço coluna se mantém durante o escalonamento, já que este é igual ao do espaço linha. Portanto, se $\{v_1, ..., v_k\}$ é base para o espaço coluna de A, então $\{w_1, ..., w_k\}$ é base para o espaço coluna da matriz obtida pelo processo de escalonamento que foi efetuado sobre A para obter os w_i's. Como o processo de eliminação não altera a posição dos vetores colunas que são base do espaço coluna da matriz inicial e transforma ainda os mesmos em base do espaço coluna da matriz de cada processo de escalonamento, temos que os vetores colunas que são base do espaço coluna da matriz inicial são os mesmos vetores colunas que são base do espaço coluna da matriz final (ao término do escalonamento) que, pela forma como são escritos (com 0's abaixo dos pivôs ou uma linha de 0's caso a linha não contenha pivô), são os vetores colunas que contém pivôs.

Exercício 1.9. c) Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Para cada $e_i \in \mathcal{B}$, associe o funcional linear $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f_i(e_i) = 1$ e $f_i(e_j) = 0$ se $j \neq i$ (como se sabe, isto define uma transformação linear, pois está definida em uma base do espaço). Mais precisamente,

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = f_i(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1f_i(e_1) + x_2f_i(e_2) + x_3f_i(e_3) = x_i$$

O conjunto $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base em $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Com efeito, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ são tais que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, então

$$\lambda_1 f_1(e_i) + \lambda_2 f_2(e_i) + \lambda_3 f_3(e_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$$

Logo, tal conjunto é L.I.. Além disso, dado $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, seja como temos que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3) \\ &= f_1(x)f(e_1) + f_2(x)f(e_2) + f_3(x)f(e_3) \\ &\Rightarrow f = f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + f(e_3)f_3 \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{B}'$ gera $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Logo, como se sabe, toda transformação entre espaços vetoriais que leva uma base do domínio em uma base do contradomínio é um isomorfismo.
Pelo exposto acima, a transformação citada leva $(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ no funcional $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3$, isto é, no funcional f tal que $f(e_1) = x_1, f(e_2) = x_2$ e $f(e_3) = x_2$, ou seja, para obter o vetor de $\mathbb{R}^3$ correspondente ao funcional linear $L(x, y, z) = 2x - 3y + z$, basta aplicar L em e_1, e_2 e e_3 e montar o vetor. Como $L(e_1) = 2, L(e_2) = -3$ e $L(e_3) = 1$, temos que o vetor correspondente é $(2, -3, 1)$.