Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Simulado I - Cálculo em uma Variável
Duration: 01h40min

Exercício 1 - Continuidade Removível

As funções abaixo são contínuas? Se desejar, utilize algum software para esboçar as funções.

a) $f(x) = \alpha(x)x^2 + \beta(x)^3 + \sin\gamma(x)$, onde α, β, γ são funções contínuas definidas no mesmo domínio de f.

b) $g(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ = menor inteiro maior ou igual a x)

c) $j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 2 \text{ ou } x = 3 \\ 0 & \text{se } x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{\sin(x)(x^2 - 5x + 6)} & \text{caso contrário} \end{cases}$

d) $l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

EXTRA: Foi-te dado a liberdade de alterar os valores dos pontos onde as funções acima são descontínuas (mas, apenas esses pontos). Você consegue tornar-las contínuas agora?

Exercício 2 - Continuidade

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Então

a) Mostre que $h(x) = \dfrac{f(x) + g(x)}{2} + \dfrac{|f(x) - g(x)|}{2}$.

b) h é contínua?

c) Descreva $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $l(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ por operações elementares de soma, diferença, módulo e multiplicação por escalar.

Exercício 3 - Um Limite Fundamental

Seja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ se $x \neq 0$. Que valor você deve fornecer a f em $x = 0$ para que ela fique contínua em $\mathbb{R}$. Aproveite que você entendeu a ideia dessa questão e ache o valor do limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \tan x}{\sqrt{x+4} - 2}$.

Exercício 4 - O Teorema do Valor Intermediário

Certo dia, 2 jogadores: Saulo e Edgard, apostaram corrida em uma pista de 5km. Em um dado instante t_0, Saulo estava na frente e Edgard estava em segundo. Entretanto, em um novo momento t_1, Edgard estava na frente e Saulo em segundo.

a) Supondo que as funções S e E que descrevem as posições de Saulo e Edgard no decorrer do tempo sejam contínuas, dê um argumento para o fato de que em (t_0, t_1), Edgard tenha ultrapassado Saulo.
(OBS.: Veja que não é simplesmente afirmar que Edgard estava a frente do Saulo em t_1 (vide enunciado), pois apenas essa afirmação não impede que Edgard tenha usado sua arma de teletransporte e aparecido na frente do Saulo neste momento exato (ou seja, estamos preocupados em garantir a ultrapassagem em algum instante $t_0 < t < t_1$, embora saibamos que ela ocorreu em $t = t_1$).

b) Sejam $S(x) = x + \sin x$ e $E(x) = x + x^3$ as funções indicadas no item (a). Mostre que em $t_0 = \frac{\pi}{6}$ e em $t_1 = \pi$, temos a situação descrita no enunciado e utilize o Teorema do Valor Intermediário (que você "supostamente" usou para justificar o item (a)) para justificar que se $E(t_0) < S(t_0)$ e $E(t_1) > S(t_1)$, então existe $t \in [t_0, t_1]$ (neste caso, $t \in (t_0, t_1)$) tal que $E(t) = S(t)$. (Dica: Considere a função $F(x) = E(t) - S(t)$).

Exercício 5 - Cálculo de Derivadas

Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $y = \frac{\sin x}{x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $y = \frac{\sin x^2 + \cos x^2}{x}$

d) $\frac{d}{dx} f(g(10))$, sabendo que $f(5) = 1, g(10) = 5, f'(5) = 9$ e $g'(10) = 3$.