Técnicas de Integração

Capítulo 7

7.4
Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nessa seção, vamos aprender como integrar funções racionais reduzindo-as a uma soma de frações mais simples.

INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

- Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas *frações parciais*, que já sabemos como integrar.

INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

- Para ilustrar o método, observe que, levando as frações $2/(x-1)$ e $1/(x-2)$ a um denominador comum, obtemos:

$$\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

- Se revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

- Para ver como esse método de frações parciais funciona em geral, consideramos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde *P* e *Q* são polinômios.

FUNÇÃO PRÓPRIA

- É possível expressar *f* como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de *P* seja menor que o grau de *Q*.
- Essa função racional é denominada *própria*.
- Lembre-se de que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  - No qual $a_n \neq 0$, então o grau de *P* é *n*, e escrevemos gr(*P*) = *n*.

CENGAGE Learning™

FRAÇÕES PARCIAIS

- Se f é imprópria, isto é, $\text{gr}(P) \geq \text{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q (por divisão de polinômios).
    - Até o resto $R(x)$ ser obtido, com $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$.

FRAÇÕES PARCIAIS

Equação 1

- O resultado da divisão é

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde *S* e *R* são polinômios também.

FRAÇÕES PARCIAIS

- Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo de que precisamos.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 1

- Encontre $\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$

  - Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos fazer a divisão.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 1

- Isso nos permite escrever:

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

FRAÇÕES PARCIAIS

- A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível.
- É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$).

FATORANDO *Q*(*x*)

- Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorá-lo como:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x-2)(x+2)(x^2+4) \end{aligned}$$

FATORANDO *Q*(*x*)

- A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma de **frações parciais** da forma:

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

FATORANDO *Q*(*x*)

- Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso.
    - Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

CASO 1

- O denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.
- Isso significa que podemos escrever
  - $Q(x) = (a_1x + b_1)\,(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro).

CASO 1 **Equação 2**

- Nesse caso o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tal que:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_k x + b_k}$$

- Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 2

- Calcule $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

  - Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir.

- Fatoramos o denominador como:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

  - Como o denominador tem três fatores lineares distintos.

FRAÇÕES PARCIAIS

Ex.: 2 – Equação 3

- A decomposição em frações parciais do integrando (2) tem a forma:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Ex.: 2 – Equação 4

- Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, obtendo:

$$x^2 + 2x + 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Ex.: 2 – Equação 5

- Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma-padrão para os polinômios, temos:

$$x^2 + 2x + 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C) - 2A$$

Exemplo 2

- Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais.
- O coeficiente de x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1.
  - Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também.

Exemplo 2

- Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$2A + B + 2C = 1$$

$$3A + 2B - C = 2$$

$$-2A = -1$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 2

- Resolvendo, obtemos:
  - $A = \frac{1}{2}$
  - $B = 1/5$
  - $C = -1/10$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 2

- E assim,

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}|x+2| + K$$

Exemplo 2

- Ao integrar o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x – 1$, que resulta em $du = 2\,dx$ e $dx = du/2$.

OBSERVAÇÃO

- Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes *A*, *B* e *C* no Exemplo 2.
- A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de *x*.
- Vamos escolher valores de *x* que simplificam a equação.

OBSERVAÇÃO

- Se pusermos $x = 0$ na Equação 4, o segundo e o terceiro membros do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$.
  - Ou $A = \frac{1}{2}$.

OBSERVAÇÃO

- Da mesma maneira, $x = ½$ dá $5B/4 = 1/4$ e $x = –2$ dá $10C = –1$.
  - Assim, $B = 1/5$ e $C = –1/10$.

OBSERVAÇÃO

- Você pode argumentar que a Equação 3 não é válida para $x = 0$, ½, ou –2.
  - Então, por que a Equação 4 deveria ser válida para aqueles valores?
- De fato, a Equação 4 é válida para todos os valores de x, até para $x = 0$, ½, e –2 .
  - Veja o Exercício 69 para uma explicação.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 3

- Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, onde $a \neq 0$.

    - O método das frações parciais dá:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} - \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

    - E portanto, $A(x+a) + B(x-a) = 1$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 3

- Usando o método da observação anterior.
  - Colocamos $x = a$ nesta equação e obtemos $A(2a) = 1$.
    Assim, $A = 1/(2a)$.
  - Se pusermos $x = –a$, obteremos $B(–2a) = 1$.
    E dessa forma, $B = –1/(2a)$.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 3

- Então,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Ex.: 3 – Fórmula 6

- Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escrever a integral como:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

  - Veja os Exercícios 55-56 para maneiras de usar a Fórmula 6.

CASO 2

- $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.
- Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes.
    - Isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$.

CASO 2

Equação 7

- Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

CASO 2

- Para ilustrar, poderíamos escrever:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

- Mas é preferível detalhar um exemplo mais simples.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 4

- Encontre $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

  - A primeira etapa é dividir.

  - O resultado da divisão de polinômios é:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$= x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 4

- A segunda etapa é fatorar o denominador

  $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$

  - Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 4

- Como o fator linear x – 1 ocorre duas vezes.
- A decomposição em frações parciais é:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Ex.: 4 – Equação 8

- Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x - 1)^2 (x + 1)$, temos:

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

$$= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 4

- Agora igualamos os coeficientes:

$$A + C = 0$$

$$B - 2C = 4$$

$$-A + B + C = 0$$

- Resolvendo, obtemos:

$$A = 1$$

$$B = 2$$

$$C = -1$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 4

- Assim,

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

$$= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K$$

CASO 3

- $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.
- Se $Q(x)$ tem o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

em que A e B são as constantes a serem determinadas.

CASO 3

- Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

CASO 3 **Fórmula 10**

- O termo dado em (9) pode ser integrado completando o quadrado e usando a fórmula

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 5

- Calcule $$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

  - Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ não pode ser mais fatorado, escrevemos:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Exemplo 5

- Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos:

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$
$$= (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 5

- Igualando os coeficientes, obtemos:

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

  - Então, $A = 1$, $B = 1$, e $C = -1$.

- Então,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4} \right) dx$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 5

- Para integrar o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 5

- Fazemos a substituição $u = x^2 + 4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$.

- Calculamos a segunda integral usando a Fórmula 10 com $a = 2$:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(x/2) + K$$

CENGAGE Learning™

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 6

- Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$

  - Como o grau do denominador *não é menor que* o do numerador, primeiro dividimos e obtemos.

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}$$

$$= 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 6

- Observe que o termo quadrático $4x^2 – 4x + 3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2 – 4ac = –32 < 0$.
  - Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica da frações parciais.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 6

- Para integrar a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

  - Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$.
  - Então, $du = 2\, dx$, e $x = \frac{1}{2}(u + 1)$.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 6

- Assim,

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right)dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\tfrac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

OBSERVAÇÃO

- O Exemplo 6 ilustra o procedimento geral para se integrar uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \quad \text{onde} \quad b^2-4ac<0$$

OBSERVAÇÃO

- Completamos o quadrado no denominador e então fazemos a substituição que traz a integral para a forma

$$\int \frac{Cu+D}{u^2+a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2+a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2+a^2}\,du$$

  - Então, a primeira integral é um logaritmo, e a segunda é expressa em termos de tg^{-1}.

CASO 4

- $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.
- Se $Q(x)$ tem um fator $(ax^2 + bx + c)^r$ onde $b^2 - 4ac < 0$.

CASO 4 **Fórmula 11**

- Então, em vez de uma única fração parcial (9), a soma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$.

- Cada um dos termos de (11) pode ser integrado primeiro completando o quadrado.

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 7

- Escreva a forma da decomposição em frações parciais da função

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

FRAÇÕES PARCIAIS Exemplo 7

- Temos:

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$+\frac{Gx+h}{(x^2+1)^2}+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 7

- Calcule $$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

- A forma da decomposição em frações parciais é:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

CENGAGE Learning™

- Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos:

$$
\begin{aligned}
&-x^3 + 2x^2 - x + 1 \\
&= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\
&= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A
\end{aligned}
$$

FRAÇÕES PARCIAIS

Exemplo 8

- Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ C&=-1 \\ 2A+B+D&=2 \\ C+E&=-1 \\ A&=1 \end{aligned}$$

  - Que tem a solução $A = 1$, $B = –1$, $C = –1$, $D = 1$, $E = 0$.

Exemplo 8

- Então,

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{tg}^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K$$

EVITANDO FRAÇÕES PARCIAIS

- Observamos que algumas vezes as frações parciais podem ser evitadas na integração de funções racionais.

- Por exemplo, embora a integral $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx$ possa ser calculada pelo método do Caso III.

EVITANDO FRAÇÕES PARCIAIS

- É muito mais fácil observar que se $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, então $du = (3x^2 + 3)\,dx$ e assim

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3+3x| + C$$

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES

- Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas.

  - Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz.

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES Exemplo 9

- Calcule $$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$$

  - Seja $u = \sqrt{x+4}$
  - Então, $u^2 = x + 4$
  - De modo que, $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES Exemplo 9

- Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du$$

$$= 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= 2\int \left(1+\frac{4}{u^2}-4\right)du$$

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES Exemplo 9

- Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$.

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES   Exemplo 9

- E usando as frações parciais ou a Fórmula 6 com *a* = 2:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$$

$$= 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}$$

$$= 2u + 8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$