Semana 8 - Material de Apoio

Texto editado da apostila Geometria Analítica e Vetorial, de Miranda et al. O texto completo pode ser baixado no site da UFABC ou em nossa biblioteca do Moodle.

5 ÂNGULOS

5.1 ÂNGULOS

No capítulo anterior nos concentramos no estudo da posição relativa entre dois objetos no espaço. Tal estudo nos permitiu determinar se dois objetos são ou não paralelos, e neste capítulo vamos aprofundar um pouco mais o estudo de posição relativa, definindo e estudando uma "medida de posição relativa" entre estes, o que denominaremos por medida angular ou ângulo entre dois objetos no espaço.

5.1.1 Ângulo entre duas Retas

O ângulo entre duas retas é definido como o ângulo entre seus vetores diretores.

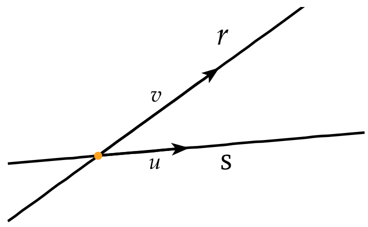


Figura 5.1: Ângulo entre as retas r e s.

Assim se $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}t$ então o ângulo θ entre r e s será dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \tag{5.1}$$

e consequentemente

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Lembramos que a função $\arccos(x)$, retorna um ângulo x tal que $0 \leq x < \pi$. Como $\cos(x) = \cos(-x)$, o ângulo que obtemos acima é não orientado, ou seja obtemos apenas o valor absoluto do ângulo. Em outras palavras, nesta definição, o ângulo entre a reta r e a reta s é o mesmo que o ângulo entre a reta s e a reta r.

Observamos também que entre duas retas não paralelas sempre existem dois ângulos possíveis, e o ângulo que encontramos não é necessariamente o menor deles, ou seja, o ângulo agudo. Em algumas situações é desejável conhecermos o ângulo agudo entre as retas r e a reta s. Para isto, observe que se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ então $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \geq 0$. Portanto

$$\arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\pi}{2},$$

e o objetivo foi alcançado.

Caso contrário, se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, temos que

$$\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} < \pi,$$

e estamos interessados portanto no ângulo suplementar $\pi - \theta$.

Mas note que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$, e portanto, substituindo em (5.1) obtemos que se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, então

$$\cos(\pi - \theta) = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \tag{5.2}$$

Desta forma se, denotarmos por α o ângulo agudo entre as retas r e s temos que

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \qquad \text{com } 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Exemplo 5.1 Encontre o ângulo entre as reta $r : X = (1, 2, 1) + (1, 1, 0)t$ e $s : \dfrac{x-2}{1/2} = \dfrac{y+3}{1/2} = \dfrac{z+7}{1/\sqrt{2}}$.

Solução: A reta r tem vetor diretor $(1, 1, 0)$ e a reta s tem vetor direto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. E assim

$$\cos \theta = \frac{(1, 1, 0)(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})}{\|(1, 1, 0)\| \|(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. □

É importante observar que para medir o ângulo entre duas retas não é necessário que estas se interceptem, já que a nossa definição de ângulos entre retas é, na verdade, o ângulo entre os vetores diretores das retas. Observamos também que o ângulo entre duas retas paralelas (coincidentes ou não) é sempre 0.

Também neste sentido, duas retas são ditas **ortogonais** se seus vetores diretores são perpendiculares. E duas retas são ditas **perpendiculares** se elas se interceptam e são ortogonais.

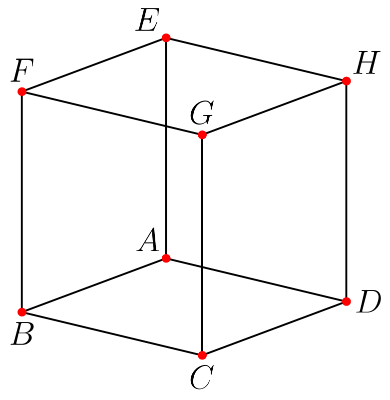


Figura 5.2: As retas AB e FG são ortogonais mas não perpendiculares.

Exemplo 5.2 Verifique se as retas $r : (1, 2, 1) + (1, 1, 0)t$ e $s : (1, 3, 4) + (1, -1, 3)t$ são ortogonais e/ou se são perpendiculares.

Solução: Como $(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 3) = 0$ elas são ortogonais.

Para verificar se elas se interceptam, basta resolvemos o sistema linear:

$$(1, 2, 1) + (1, 1, 0)t_1 = (1, 3, 4) + (1, -1, 3)t_2$$

Como o sistema acima, não possui soluções, as retas não se interceptam e assim elas não são perpendiculares.

□

No caso bidimensional, lançando mão da representação por equações lineares, podemos redefinir as fórmulas para o ângulo entre duas retas, e colocá-las em função da inclinação das retas estudadas.

Tome então duas retas $r : y = m_1x + d$ e $s : y = m_2x + d$ e lembre-se que podemos expressar seus vetores diretores respectivamente por $\mathbf{v} = \mathbf{i} + m_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{i} + m_2\mathbf{j}$. Assim obtemos que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|u\|\|v\|} = \frac{1 + m_1m_2}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}}$$

A expressão acima, assim como no caso tridimensional, nos permite calcular o ângulo θ não orientado entre as retas. Esse ângulo está entre 0 e $\pi/2$ se $1 + m_1m_2$ é positivo, e entre $\pi/2$ e pi se $1 + m_1m_2$ é negativo. Se $1 + m_1m_2 = 0$ o ângulo é igual a $\pi/2$ e assim as retas são perpendiculares.

De modo análogo, podemos encontrar

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$

ou equivalentemente

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}.$$

Neste caso, como $0 \leq \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}} \leq 1$, temos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Outro modo de determinar o ângulo entre duas retas no plano é lembrando que o coeficiente angular é a tangente do ângulo orientado (no sentido anti-horário) entre a reta é a parte positiva do eixo x. Assim dadas duas retas de coeficiente angulares $m_1 = \operatorname{tg}\phi_1$ e $m_2 = \operatorname{tg}\phi_2$. Pela figura 5.3 temos que $\theta = \phi_2 - \phi_1$ e logo:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\operatorname{tg}\phi_2 - \operatorname{tg}\phi_1}{1 + \operatorname{tg}\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

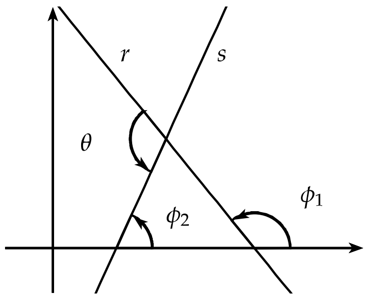


Figura 5.3

Uma vantagem da expressão

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

é que o ângulo determinado por esta é o ângulo orientado entre as retas r_1 e r_2.

Dadas duas retas de coeficientes angulares m_1, m_2, então o ângulo entre elas é dado por:

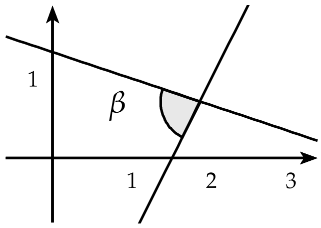
$$\cos\theta = \frac{1 + m_1 m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Exemplo 5.3 Ache o ângulo entre as retas $2x - y = 3$ e $x + 3y = 4$.

Solução: Neste caso temos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)2} = -7$$

E assim $\theta = \operatorname{arctg}(-7) \approx -81.8699°$.



□

Exemplo 5.4 Ache duas retas que passe pelo ponto $(2, 2)$ e que faça um angulo de $45°$com

a reta $2x - 3y = 4$

Solução: Inicialmente vamos encontrar o coeficiente angular dessas retas. Para isso, observamos que:

$$\operatorname{tg} 45° = 1 = \frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma $1 + \frac{2}{3}m = \frac{2}{3} - m$ e logo $\frac{5}{3}m = -\frac{1}{3}$ e assim $m = -\frac{1}{5}$. Logo a equação da reta é $y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 2)$

No caso

$$\operatorname{tg} 45° = 1 = \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma $m = 5$. Logo a equação da reta é $y - 2 = 5(x - 2)$ □

5.1.2 Ângulo entre uma Reta e um Plano

O ângulo θ entre uma reta r e um plano π é definido como o ângulo complementar ao ângulo agudo entre o vetor diretor a essa reta e o vetor normal ao plano (ver figura 5.4).

Se $\mathbf{v}$ é um vetor diretor da reta r e $\mathbf{n}$ é um vetor normal ao plano π então

$$\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

e logo

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{n}\|}$$

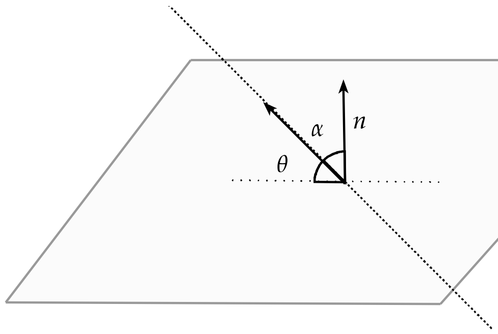


Figura 5.4: Ângulo θ entre uma reta e um plano.

Dizemos que um plano π com vetor normal $\mathbf{n}$ e uma reta r com vetor diretor $\mathbf{v}$, são ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$, ou equivalentemente se os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ são paralelos.

Exemplo 5.5 Determine o ângulo entre a reta $X = (6,7,0) + (1,1,0)t$ e o plano de equação

vetorial $X = (8,-4,2) + (-1,0,2)t + (1,-2,0)s$.

Solução: Vamos encontrar inicialmente um vetor normal a esse plano:

$$\mathbf{n} = (-1,0,2) \times (1,-2,0) = (4,2,2)$$

Logo o angulo entre a reta é o plano é dado por:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{(1,1,0)\cdot(4,2,2)}{\sqrt{2}\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e assim $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\square$

Exemplo 5.6 Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto $(1,2,1)$ e que é perpendicular a reta $X = (1,0,0) + (1,3,-1)t$

Solução: O vetor normal ao plano pode ser escolhido como $(1,3,-1$ e assim a equação geral desse plano é: $x + 3y - z = d$. Como o ponto $(1,2,1)$ pertence ao plano, ele satisfaz a equação do plano, i.e, $1 + 3 \cdot 2 - 1 = d$. Logo $d = 6$ e a equação geral do plano é $x + 3y - z = 6$. □

5.1.3 Ângulo entre dois Planos

O ângulo entre dois planos π_1 e π_2 é definido como o ângulo agudo entre os vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$

$$\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}|}{\|\mathbf{n_1}\| \, \|\mathbf{n_2}\|}$$

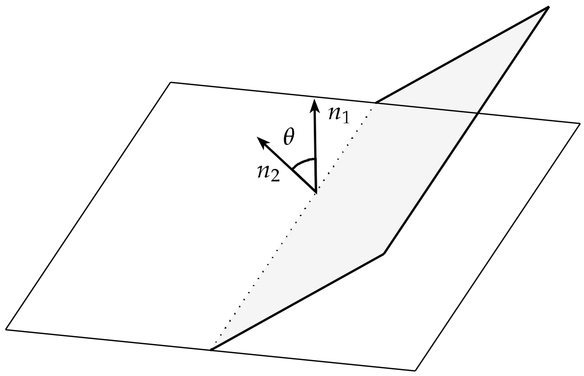


Figura 5.5

Dois planos π_1 e π_2 com vetores normais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ respectivamente, são ditos ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$, o que implica que seus vetores diretores são perpendiculares, i.e,

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

Exemplo 5.7 Determine a equação do plano que contém o ponto $(1,0,1)$ e que é perpendicular aos planos $2x + y + z = 2$ e $-x + z = 7$.

Solução: O vetor $\mathbf{n}$ normal ao plano, será ortogonal aos vetores $(2,1,1)$ e $(-1,0,1)$. E assim

$$\mathbf{n} = (2,1,1) \times (-1,0,1) = (1,-3,1)$$

Logo a equação geral do plano é da forma $x - 3y + z = d$. Como o ponto $(1, 0, 1)$ pertence ao plano:

$$d = 1 + 3 \cdot 0 + 1 = 2$$

E a equação geral é $x - 3y + z = 2$. □

O texto da semana é baseado no capítulo 4 do livro digital Matrizes, Vetores e Geometria Analítica, de R.J. Santos. O texto completo pode ser baixado na página pessoal de R.J. Santos ou na biblioteca do Moodle.

4.2.2 Distâncias

Distância de Um Ponto a Um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi \;:\; ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é definida como sendo a distância de P_0 até o ponto de π mais próximo de P_0.

Dado um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de π, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de π, $N = (a, b, c)$ e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor N é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em N. Como vemos na Figura 4.26, a distância de P_0 a π é igual à norma da projeção, ou seja,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,||\,.$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 192, temos que

$$||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \left\|\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot N}{||N||^2}\right) N\right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot N|}{||N||}\,.$$

O que prova o resultado seguinte.

Proposição 4.4. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi:\ ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é dada por*

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot N|}{||N||}\,,$$

em que $N = (a, b, c)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de π (isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).

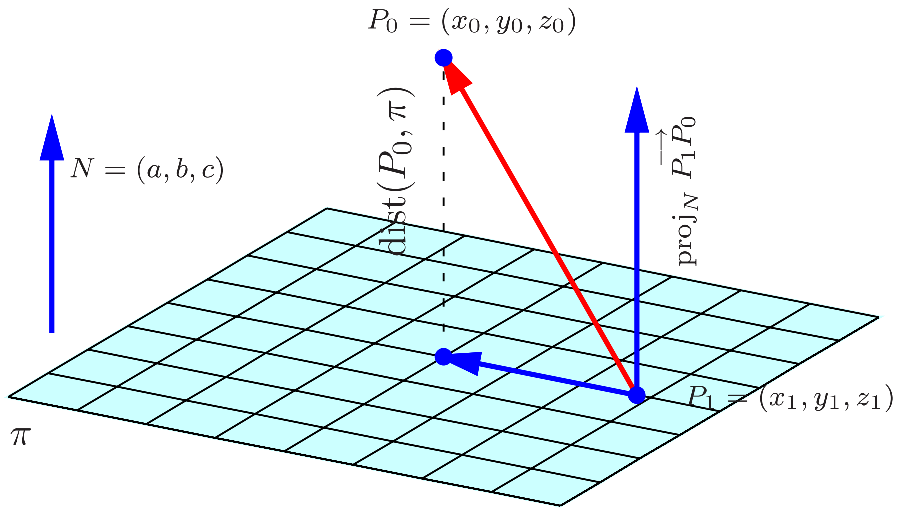


Figura 4.26: Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano π

Exemplo 4.11. Calcular a distância entre o ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ ao plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0.$$

Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ na equação de π, obtemos $x = 1$. Assim, o ponto $P_1 = (1, 0, 0)$ pertence a π.

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, 2 - 0, 3 - 0) = (0, 2, 3)$$

e

$$N = (1, -2, 1)\,.$$

Assim,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} = \frac{|0 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta. A distância de P_0 a r é definida como a distância de P_0 ao ponto de r mais próximo de P_0.

Dado um ponto qualquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de r podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor V de r e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor V é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em V. Como vemos na Figura 4.27,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 + ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}||^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2,$$

ou seja,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 - ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}||^2 . \tag{4.10}$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 192, temos que

$$||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}||^2 = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V}{||V||^2} \right) V \right\|^2 = \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} .$$

Substituindo esta expressão em (4.10) e usando a definição do produto escalar na página 184 e da norma do produto vetorial na página 193 obtemos

$$\begin{aligned}
(\text{dist}(P_0, r))^2 &= ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 - \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 ||V||^2 - (\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} \\
&= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 ||V||^2 - ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 ||V||^2 \cos^2\theta}{||V||^2} \\
&= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 ||V||^2 \operatorname{sen}^2\theta}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||^2}{||V||^2} .
\end{aligned}$$

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.5. *Sejam* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *um ponto qualquer e*

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_1 + t\,a \\ y & = & y_1 + t\,b \\ z & = & z_1 + t\,c \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

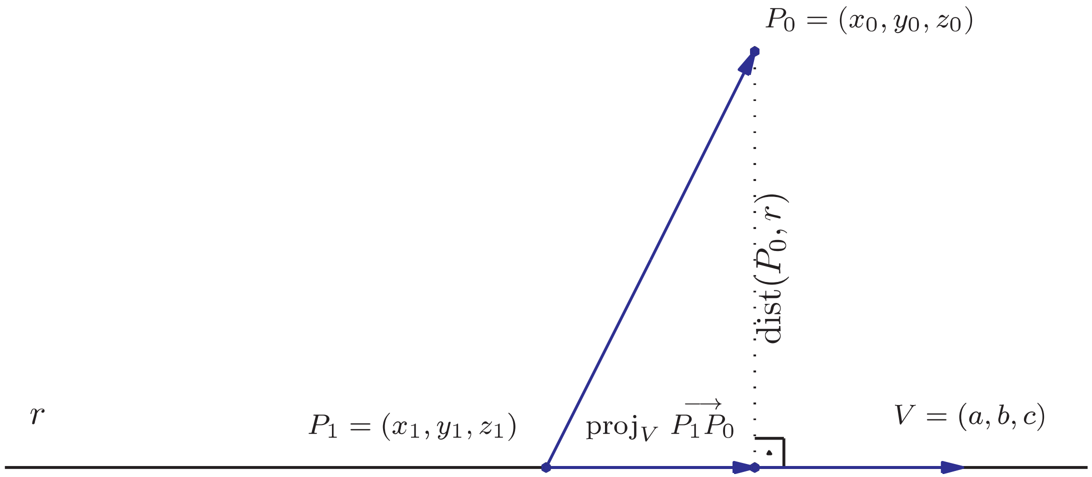


Figura 4.27: Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a uma reta r

uma reta. A distância de P_0 a r é dada por

$$\operatorname{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||}.$$

em que $V = (a, b, c)$ é um vetor diretor e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto da reta r.

Exemplo 4.12. Calcular a distância do ponto $P_0 = (1, -1, 2)$ à reta

$$r : \begin{cases} x &= 1 + 2\,t \\ y &= -t \\ z &= 2 - 3\,t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um vetor diretor da reta r é $V = (2, -1, -3)$ e um ponto de r é $P_1 = (1, 0, 2)$. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, -1 - 0, 2 - 2) = (0, -1, 0)\,,$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times V = (3, 0, 2)\,,$$

$$||\overrightarrow{P_1P_0} \times V|| = \sqrt{13} \text{ e } ||V|| = \sqrt{14}\,.$$

Portanto,

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

Distância entre Dois Planos

Sejam dois planos π_1 e π_2 quaisquer. A distância entre π_1 e π_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de π_1 e outro de π_2.

Se os seus vetores normais **não** são paralelos, então os planos são concorrentes e neste caso a distância entre eles é igual a zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual à distância entre um ponto de um deles,

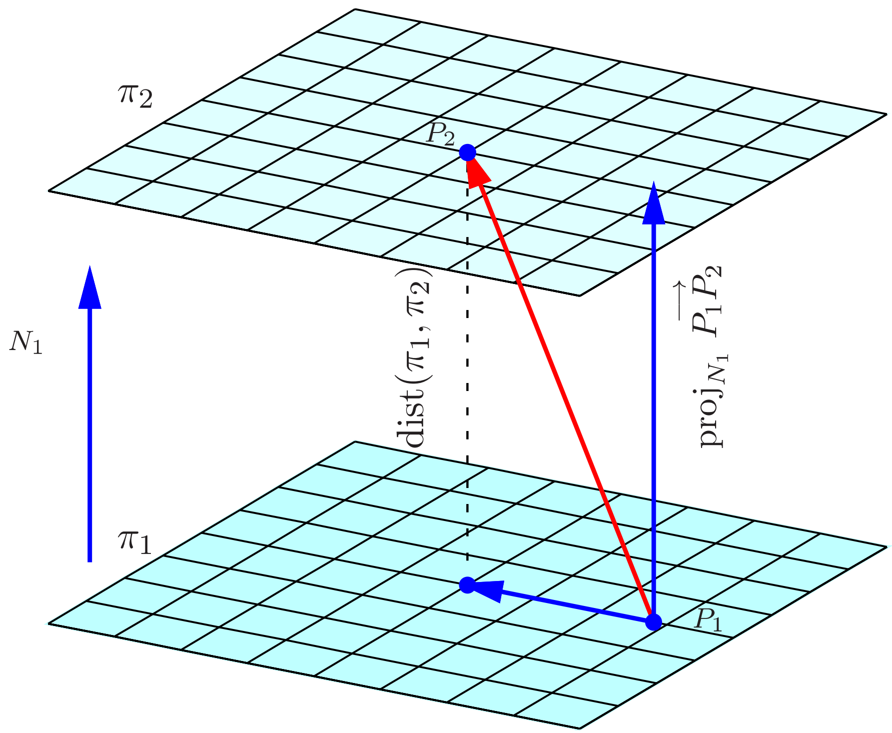


Figura 4.28: Distância entre dois planos

por exemplo P_2 de π_2, e o ponto de π_1, mais próximo de P_2 (Figura 4.28). Mas, esta distância é igual à distância de P_2 a π_1. Vamos ver isto em um exemplo.

Exemplo 4.13. Os planos $\pi_1 : x + 2y - 2z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ são paralelos, pois os seus vetores normais $N_1 = (1, 2, -2)$ e $N_2 = (2, 4, -4)$ são paralelos (um é múltiplo escalar do outro). Vamos encontrar a distância entre eles.

Vamos encontrar dois pontos quaisquer de cada um deles. Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ em ambas as equações obtemos $x_1 = 3$ e $x_2 = 7/2$. Assim, $P_1 = (3, 0, 0)$ pertence a π_1 e $P_2 = (7/2, 0, 0)$ pertence a π_2. Portanto, pela Proposição 4.4 temos que

$$\begin{aligned}
\text{dist}(\pi_1, \pi_2) &= \text{dist}(\pi_1, P_2) = ||\text{proj}_{N_1} \overrightarrow{P_1P_2}\,|| = \frac{|\,\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N_1|}{||N_1||} \\
&= \frac{|(7/2 - 3, 0 - 0, 0 - 0) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(1/2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0(-2)|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Distância entre Duas Retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.

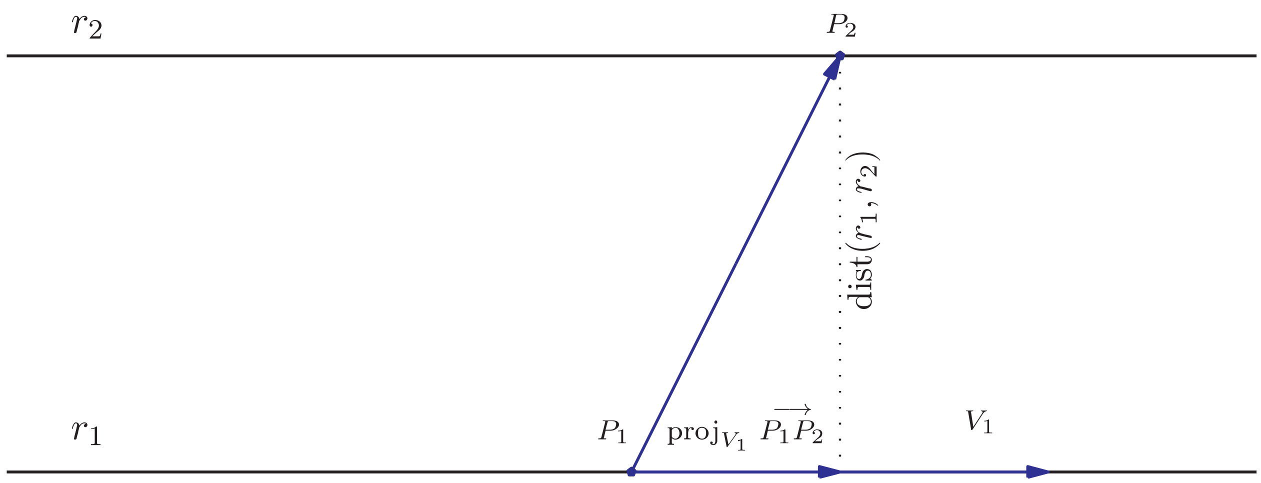


Figura 4.29: Distância entre duas retas paralelas

Para calcular a distância entre duas retas, vamos dividir em dois casos:

(a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas r_1 e r_2 são paralelas (ou coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1, ou vice-versa, entre um ponto de r_1 e a reta r_2 (Figura 4.29). Assim, pela Proposição 4.5 na página 279, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||}, \tag{4.11}$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente.

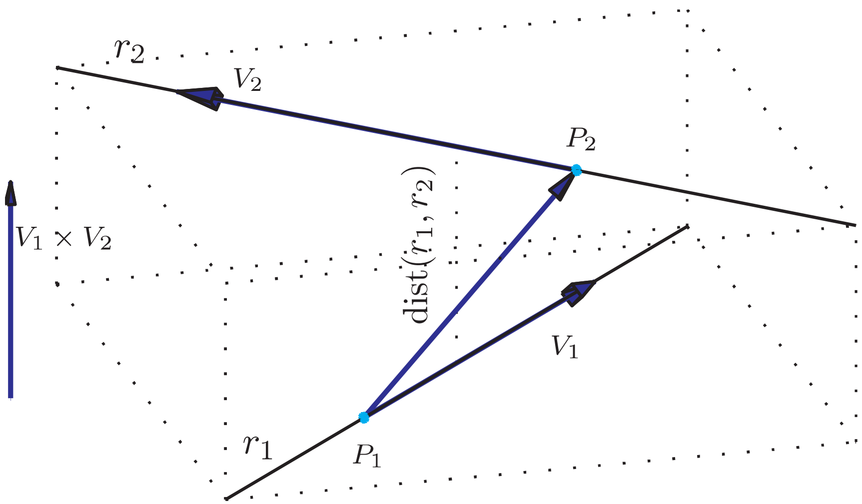


Figura 4.30: Distância entre duas retas reversas

(b) Se **os vetores diretores não são paralelos**, então elas são reversas ou concorrentes. Os dois casos podem ser resolvidos da mesma forma. Estas retas definem dois planos paralelos (que podem ser coincidentes, no caso em que elas são concorrentes). Um é o plano que contém r_1 e é paralelo a r_2, vamos chamá-lo de π_1. O outro, contém r_2 e é paralelo a r_1, π_2. O vetor $N = V_1 \times V_2$, é normal (ou perpendicular) a ambos os planos, em que V_1 e V_2 são os vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente. Assim, a distância entre as retas é igual à distância entre estes dois planos (Figura 4.30), ou seja,

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \operatorname{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2)|}{||V_1 \times V_2||} \tag{4.12}$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente. Observe que se as retas são concorrentes a distância entre elas é zero, pois os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são coplanares e $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ (Corolário 3.9 na página 204).

Exemplo 4.14. Vamos determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-6}.$$

e

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + 2\,t \\ y & = & -t \\ z & = & 2 - 3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas são paralelas, pois seus vetores diretores $V_1 = (4, -2, -6)$ e $V_2 = (2, -1, -3)$ (Exemplo 4.5 na página 241) são paralelos (um é um múltiplo escalar do outro, ou ainda as componentes correspondentes são proporcionais). Além disso, o ponto $P_1 = (1, -1, 2)$ pertence à reta r_1. Como dissemos acima, a distância de r_1 a r_2 é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1 (Figura 4.29). Assim, pela Proposição 4.5 na página 279, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

As contas são as mesmas do Exemplo 4.12 na página 282.

Exemplo 4.15. Determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z\,.$$

e

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2\,t \\ z & = & 1-t \end{array} \right. \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}.$$

As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores $V_1 = (3, 2, 1)$ e $V_2 = (1, 2, -1)$ e passam pelos pontos $P_1 = (-1, 1, 0)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$, respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos (observe que a 1ª componente de V_1 é 3 vezes a 1ª componente de V_2, mas as 2ª's componentes são iguais). Logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-(-1), 0-1, 1-0) = (1, -1, 1)\,.$$

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$N = V_1 \times V_2 = (-4, 4, 4)\,.$$

Este vetor é normal aos planos π_1 (que contém r_1 e é paralelo a r_2) e π_2 (que contém r_2 e é paralelo a r_1) (veja a Figura 4.30). Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(r_1, r_2) &= \mathrm{dist}(\pi_1, \pi_2) = \mathrm{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} \\
&= \frac{|1(-4) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$