

En route vers la réduction de Jordan

Jean Pierre Mansour

28 Octobre 2021

Théorème de Cayley-Hamilton

Lemme 0.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors ${}^t\text{com}(A).A = \det(A).I_n$

Preuve. Soit $A = (a_{ij})$, ${}^t\text{com}(A) = (b_{ij}) = (A_{ij})$. Avec $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ et Δ_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij} .
Alors ${}^t\text{com}(A) = A_{ji}$, ${}^t\text{com}(A).A = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \Delta_{jk} a_{ik}$$

On Remarque que $c_{jj} = \det(A)$. Raisonnons sur le terme c_{ij} :

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \Delta_{jk} a_{ik}$. C'est précisément le développement suivant la j-ème colonne d'une autre matrice A' .

$$\text{Prêts? } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & \dots & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$c_{ij} = \det(A')$. Mais i varie de 1 à n . Donc on aura deux colonnes égaux. En remplaçant les termes de la matrice (c_{ij}) , on obtient l'identité.

Remarque. $\det(A) = \pm 1 \implies A$ est inversible.

Théorème 0.2 (Cayley-Hamilton). Soit $u \in \text{End}(E)$, E de dimension finie n et χ_u son polynôme caractéristique. Alors $\chi_u(u) = 0$

Preuve. Soit A la matrice associée à l'endomorphisme u dans une base B que

l'on fixe. On aura $A = \mathcal{M}(u, \mathcal{B})$.

On notera B_λ la comatrice de $A - \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Ainsi,

$${}^t B_\lambda(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) \cdot I_n.$$

Il est facile de remarquer que les coefficients de B_λ sont des polynômes de degré $n - 1$. Par conséquent, il existe des matrices B_0, \dots, B_{n-1} à coefficients dans \mathbb{K} , tel que:

$${}^t B_\lambda = B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1}.$$

Par développement puis factorisation, on obtient:

$$(B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1})(A - \lambda I_n) = B_0 A + \lambda(B_1 A - B_0) + \dots + \lambda^{n-1}(B_{n-1} A - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1}.$$

En écrivant χ_u comme polynôme de degré n : $\chi_u(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$, on obtient:

$$B_0 A + \lambda(B_1 A - B_0) + \dots + \lambda^{n-1}(B_{n-1} A - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1} = a_0 I_n + a_1 \lambda I_n + \dots + a_n \lambda^n I_n$$

$$\text{En identifiant, il en résulte le système suivant: } \begin{cases} B_0 A = a_0 I_n \\ B_1 A - B_0 = a_1 I_n \\ \vdots \\ B_{n-1} A - B_{n-2} = a_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} = a_n I_n \end{cases}$$

En multipliant l' i -ème ligne par A^{i-1} , $i=1, \dots, n$ puis additionnant toutes les lignes, on obtiendra $\chi_u(A) = 0$.

Références

Un grand merci à Dr. Peter Haissinsky. La démonstration du théorème 0.2 est entièrement inspirée par sa méthode.