《概率论与数理统计》习题解答

王学民　编

第一章

1.1　(1) $\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\cdots,(1,6)\\(2,1),(2,2),\cdots,(2,6)\\\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\end{matrix}\right\}$；

(2)A={(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)},

B={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1)},

C={(1,2), (2,1), (2,4), (3,6), (4,2), (6,3)},

$B-A$={(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (5,1)},

BC={(1,2), (2,1), (2,4), (4,2)},

$\bar{B}\cup C$={(1,2), (2,1), (2,4), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}。

1.2　(1)$A\bar{B}\bar{C}$;(2)$AB\bar{C}$;(3)$A\cup B\cup C$;(4)ABC;(5)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;(6)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$。

1.4　(1)$(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})=\left[(A\cup B)A\right]\cup\left[(A\cup B)\bar{B}\right]=A\cup(A\bar{B})=A$；

(2)$(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup B)=A(\bar{A}\cup B)=A\bar{A}\cup AB=AB$；

(3)$(A\cup B)\cap(B\cup C)=\left[(A\cup B)B\right]\cup\left[(A\cup B)C\right]=B\cup\left[AC\cup BC\right]=AC\cup B$。

1.5　(1) AC 表示“购买甲种和丙种股票”；(2) $A\cup B$ 表示“购买甲种或乙种股票”；(3) $\bar{A}$ 表示“不购买甲种股票”；(4) $B\bar{C}$ 表示“购买乙种但不购买丙种股票”；(5) $A\cup B\cup D$ 表示“购买甲种或乙种或丁种股票”。

1.6　$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P\left[(A\cup B)C\right]$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\text{。}$$

1.7　(1) $P=\dfrac{100}{500}=0.2$；(2)　$P=\dfrac{120}{500}=0.24$；(3)　$P=\dfrac{280}{500}=0.56$。

1.8　取 Ω={五卷文集的所有排列次序}，令 A={各卷自左向右或自右向左的卷号恰好是 1, 2, 3, 4, 5 的顺序}，则

$$P(A)=\frac{2}{P_5}=\frac{2}{5!}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$$

1.9　将各球看成互不相同，取 Ω={从甲袋和乙袋中取球的各种组合}，令 A={所得两球的颜色不同}，于是

A={从甲袋中取出白球并从乙袋中取出黑球，或从甲袋中取出黑球并从乙袋中取出白球}，故

$$P(A)=\frac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}$$

1.10　取 Ω={从 10 人中任取 3 人的号码的所有组合}。

(1) 令 A={3 人中的最小的号码为 5}={3 人中有 1 人的号码为 5，另两人的号码为 6, 7, 8, 9, 10 中的两个}，于是

$$P(A)=\binom{5}{2}\Big/\binom{10}{3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

(2) 令 A={3 人中的最大的号码为 5}={3 人中有 1 人的号码为 5，另两人的号码为 1, 2, 3, 4 中的两个}，于是

$$P(A)=\binom{4}{2}\Big/\binom{10}{3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

1.11　取 Ω={在整数 0 至 9 中任取 4 个数的所有排列}，令 A={所取的 4 个数能构成一个 4 位偶数}={所取的 4 个数末位数为偶数} $-$ {所取的 4 个数末位数为偶数，而首位数为 0}，则

$$P(A)=\frac{5A_9^3-4A_8^2}{A_{10}^4}$$

1.12　不妨把编号“10000”当作“00000”，00000 至 09999 中没有数字 7 的编号有 9^4 个，所以事件“偶然遇到的一辆自行车，其牌照号码中没有数字 7”的概率为 $\dfrac{9^4}{10^4}=0.9^4$。

1.13　设最强的两队分别为甲队和乙队，两组各有 10 个比赛位置，取 Ω={甲队所占位置之外的所有比赛位置}，Ω 中共有 19 个样本点，显然是一个古典概型。令 A={最强的两队分在不同组内}={乙队不占据甲队所在组的比赛位置，而占据另一组的比赛位置}，A 中有 10 个样本点，从而

$$P(A)=\frac{10}{19}$$

1.14　设一张圆桌周围共有 10 只位置，取 Ω={该丈夫之外的所有位置}，Ω 中共有 9 个样本点，显然是一个古典概型。令 A={该妻子正好坐在他丈夫的旁边}，A 中有 2 个样本点，从而

$$P(A)=\frac{2}{9}$$

1.15　由例 1.2.2 知，

P(至少有 3 件次品)=1−P(有 0 件次品)−P(有 1 件次品)−P(有 2 件次品)

$$=1-\binom{900}{50}\bigg/\binom{1200}{50}-\binom{300}{1}\binom{900}{49}\bigg/\binom{1200}{50}-\binom{300}{2}\binom{900}{48}\bigg/\binom{1200}{50}$$

$$=1-\left[\binom{900}{50}+\binom{300}{1}\binom{900}{49}+\binom{300}{2}\binom{900}{48}\right]\bigg/\binom{1200}{50}$$

1.16　取 Ω={从 7 名同学中抽取 4 名的所有组合}，令 A={抽到的是 2 名女同学和 2 名男同学}，则由例 1.2.2 知，

$$P(A)=\binom{4}{2}\binom{3}{2}\bigg/\binom{7}{4}=\frac{18}{35}$$

1.17　由例 1.2.2 知，

(1) P(没有一张“A”)=$\binom{48}{13}\bigg/\binom{52}{13}$；

(2) P(至少有一张“A”)=1－P(没有一张“A”)=1－$\binom{48}{13}\bigg/\binom{52}{13}$；

(3)P(有四张“A”)=$\binom{48}{9}\bigg/\binom{52}{13}$。

1.18　令 A={成年人读甲杂志}，B={成年人读乙杂志}，依题意，$P(A)$ =0.2，$P(B)$ =0.16，　$P(AB)$ =0.08，于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.2+0.16-0.08=0.28$$

1.19　$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=p+q-r$

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=p-(p+q-r)=r-q$

$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-r$

$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=p+(1-q)-(r-q)=p-r+1$

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)=1-(p+q-r)=1-p-q+r$

1.20

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+0=\frac{21}{40}\end{aligned}$$

1.21　$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.6=0.4$

1.22　取 Ω={10 人下车的所有可能结果}，Ω 中共有 15^{10} 个样本点。

(1) A 中有 A_{15}^{10} 个样本点，从而 $P(A)=A_{15}^{10}/15^{10}$；

(2)B 中有 1 个样本点，从而 $P(B)=1/15^{10}$；

(3)C 中有 15 个样本点，从而 $P(C)=15/15^{10}=1/15^{9}$；

(4) D 中有 $\binom{10}{3}\times 14^{7}$ 个样本点，从而 $P(D)=\binom{10}{3}\times 14^{7}\Big/15^{10}$ 。

1.23　将所有 16 个球看成各不相同，取 Ω={从 16 个球中取 4 个球的所有组合}，Ω 共有 $\binom{16}{4}$ 个样本点，令 A={取 4 个球恰为两红、一白、一黑}={从 5 个红球中取到了 2 个球，从 8 个白球中取到了 1 个球，从 3 个黑球中取到了 1 个球}，A 中有 $\binom{5}{2}\binom{8}{1}\binom{3}{1}$ 个样本点，从而

$$P(A)=\binom{5}{2}\binom{8}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{16}{4}=\frac{12}{91}$$

1.24　$P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1/10}{7/15}=\dfrac{3}{14}$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/10}{4/15}=\frac{3}{8}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{15}+\frac{7}{15}-\frac{1}{10}=\frac{19}{30}$$

1.25 令 A={报警系统 A 有效}，B={报警系统 B 有效}，依题意，$P(A)=0.90$，$P(B)=0.95$，$P(B|\bar{A})=0.88$，于是

$$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=P(B)-P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.95-0.10\times0.88=0.862$$

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.90+0.95-0.862=0.988$；

(2) $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{0.90-0.862}{1-0.95}=0.76$。

1.26 令 A_i={第 i 次取出白球}，$i=1,2,3$，于是

$$P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1A_2)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}$$
$$=\frac{ab(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}$$

1.27 令 B_i={零件由第 i 个机床加工}，i=1,2,3，A={加工的零件为合格品}，依题意，$P(B_1)=0.3,P(B_2)=0.5,P(B_3)=0.2$，$P(A|B_1)=0.87,P(A|B_2)=0.95,P(A|B_3)=0.9$

故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.3\times0.87+0.5\times0.95+0.2\times0.9=0.916$$

1.28 令 B_i={任选出的是第 i 级射手}，i=1,2,3,4，A={任选出的射手能通过选拔进入比赛}，依题意，$P(B_1)=0.2,P(B_2)=0.4,P(B_3)=0.35,P(B_4)=0.05,P(A|B_1)=0.9$，$P(A|B_2)=0.7,P(A|B_3)=0.5,P(A|B_4)=0.2$，故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.2\times0.9+0.4\times0.7+0.35\times0.5+0.05\times0.2=0.645$$

1.29 (1)令 B_1={某商店收进甲厂生产的产品}，B_2={某商店收进乙厂生产的产品}，A={任取一个为废品}，依题意，$P(B_1)=\frac{4}{7},P(B_2)=\frac{3}{7}$，

$P(A|B_1)=0.05,P(A|B_2)=0.03$，

故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{4}{7}\times 0.05+\frac{4}{7}\times 0.03=0.0414$$

(2) $P=\dfrac{40\times 100\times 0.05+30\times 120\times 0.03}{40\times 100+30\times 120}=0.0405$。

1.30 令 B_1={甲击中飞机}，B_2={乙击中飞机}，B_3={丙击中飞机}，C_i={三人中有 i 人击中飞机}，i=0,1,2,3，A={飞机被击落}，依题意，$P(B_1)=0.4,P(B_2)=0.5,P(B_3)=0.7$，$P(A|C_0)=0,P(A|C_1)=0.2,P(A|C_2)=0.6,P(A|C_3)=1$，于是

$$\begin{aligned}P(C_1)&=P\left(B_1\bar{B}_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1\bar{B}_2B_3\right)\\&=P(B_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3)\\&=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(C_2)&=P\left(B_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2B_3\cup B_1\bar{B}_2B_3\right)\\&=P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3)+P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3)\\&=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7+0.4\times 0.5\times 0.7=0.41\end{aligned}$$

$$P(C_3)=P(B_1B_2B_3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times 0.5\times 0.7=0.14$$

故

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(C_i)P(A|C_i)=P(C_0)\times 0+0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 1=0.458$$

1.31 令 A={甲机首次开火时击落乙机}，B={乙机还击时击落甲机}，C={甲机再次进攻时击落乙机}，按题意，$P(A)=0.2,P(B|\bar{A})=0.3,P(C|\bar{A}\bar{B})=0.4$，于是

(1)P(甲机被击落)=$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.8\times 0.3=0.24$；

(2) P(乙机被击落)=$P(A\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A)+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A}\bar{B})=0.2+0.8\times 0.7\times 0.4=0.424$。

1.32 令 A={第一次取出的是白球}，B={第二次取出的是白球}，于是

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{6}{10}\times\frac{8}{12}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{12}=0.6$$

1.33 令 A={从甲袋中取出的是白球}，B={再从乙袋中取出的是白球}，

⑴ $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$；

⑵ $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{4}\Big/\dfrac{5}{12}=0.8>0.5$，故白球的可能性大。

1.34 令 B_1={甲机床生产的螺丝钉}，B_2={乙机床生产的螺丝钉}，B_3={丙机床生

产的螺丝钉}，A={这批螺丝钉中随机取出的一只是废品}，依题意，

$P(B_1)=0.25, P(B_2)=0.35, P(B_3)=0.40$，

$P(A|B_1)=0.05, P(A|B_2)=0.04, P(A|B_3)=0.02$

故

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.25\times0.05}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02}=\frac{25}{69}$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.35\times0.04}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02}=\frac{28}{69}$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.40\times0.02}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02}=\frac{16}{69}$$

1.35　令 A={新工人能完成生产定额}，B={新工人参加过培训}，依题意，$P(A|B)=0.86, P(A|\bar{B})=0.35, P(B)=0.8$

(1) $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.8\times0.86+0.2\times0.35=0.7580$；

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0.8\times0.86}{0.7580}=0.9077$。

1.36　令 A={产品经简化检查而获准出厂}，B={获准出厂的产品是合格品}，$P(B)=0.96, P(A|B)=0.98, P(A|\bar{B})=0.05$，于是

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.96\times0.98+0.04\times0.05=0.9428$$

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0.96\times0.98}{0.9428}=0.9979$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{0.04\times0.95}{0.0572}=0.6643$$

1.37　令 A_i={第 i 道工序不出废品}，i=1,2,3，依题意，$P(A_1)$=0.9，$P(A_2)$=0.85，$P(A_3)$=0.8，于是

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.9\times0.85\times0.8=0.612$$

1.38　令 A={谈判中男服装成交}，B={谈判中女服装成交}，依题意，$P(A)=0.35$，$P(B)=0.50$。

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.35\times 0.50=0.175$；

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.35+0.50-0.175=0.675$；

(3) $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.35-0.175=0.175$；

(4) $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-0.675=0.325$。

1.39　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=P(A)+2P(A)+4P(A)-0-8P^2(A)-4P^2(A)+0$$
$$=7P(A)-12P^2(A)=5P(A)$$

解得 $P(A)=\dfrac{1}{6}$。

1.40　$P(AB)=P(A)P(B)=pq$

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=q-pq=(1-p)q$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-p)(1-q)$$

$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$$

$$P(\bar{A}\cup B)=1-P(A\bar{B})=1-P(A)P(\bar{B})=1-p(1-q)=1-p+pq$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)=1-pq$$

1.41　设 A, B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)\,P(B)>0$，从而 A, B 相容，所以 A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立。

1.42　用第一种工艺能保证得到一级品的概率为

$$0.9\times 0.8\times 0.7\times 0.9=0.4536$$

用第二种工艺能保证得到一级品的概率为

$$0.7\times 0.7\times 0.8=0.392$$

所以第一种工艺能保证得到一级品的概率较大。

1.43　令 A_1={甲机床需工人照看}，A_2={乙机床需工人照看}，A_3={丙机床需工人照看}，则

(1) $P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)=P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_3\right)=0.05\times0.12\times0.15=0.0009$；

(2) $P\left(A\cup B\cup C\right)=1-P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)=1-0.0009=0.9991$；

(3) $P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\right)$。

$=0.0009+0.95\times0.12\times0.15+0.05\times0.88\times0.15+0.05\times0.12\times0.85=0.0297$

1.44　P(甲获胜)= $p_1+(1-p_1)(1-p_2)p_1+(1-p_1)^2(1-p_2)^2p_1+\cdots$

$$=\frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

P(乙获胜)= $1-P$(甲获胜)=$1-\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}=\dfrac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$

1.45　令 A={A 类元件正常工作}，B={B 类元件正常工作}，C={C 类元件正常工作}，D={D 类元件正常工作}，则

(1) $P\left(ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)=p_Ap_Bp_C$；

(2) $P\left(A\cup B\cup C\right)=1-P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)=1-P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right)P\left(\bar{C}\right)=1-(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)$；

(3) $P\left(A_1B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_3\right)=1-P\left(\overline{A_1B_1}\,\overline{A_2B_2}\,\overline{A_3B_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1B_1}\right)P\left(\overline{A_2B_2}\right)P\left(\overline{A_3B_3}\right)$

$=1-\left[1-P(A_1B_1)\right]\left[1-P(A_2B_2)\right]\left[1-P(A_3B_3)\right]=1-(1-p_Ap_B)^3$

(4) $P\left[\left(A\cup B\cup C\right)\cap\left(D_1\cup D_2\right)\right]=P\left(A\cup B\cup C\right)P\left(D_1\cup D_2\right)$

$=\left[1-(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)\right]\left[1-(1-p_D)^2\right]$

第二章

2.1　(1)是；

(2) 不是，因为$\sum_{x=0}^{3}P\left(X=x\right)=\dfrac{4}{3}\neq1$；

(3) 是；

(4) 不是，因为$P\left(X=0\right)=-\dfrac{1}{2}<0$；

(5) 是。

2.2　取 Ω={(1，1)，(1，2)，…，(1，6)，

(2，1)，(2，2)，…，(2，6)，

……

(6，1)，(6，2)，…，(6，6)}

可见，X_1 和 X_2 的分布律分别为

X_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

X_2	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.3 $P\left(X=k\right)=\binom{k-1}{2}\Big/\binom{5}{2}$， $k=3,4,5$，即有

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

2.4 (1) $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{7}{2}\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$；

(2) $P\left(X>3\right)=P\left(X=4\right)+P\left(X=5\right)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{3}{5}$。

2.5 (1) $1=\sum_{k=1}^{N}P\left(X=k\right)=N\frac{a}{N}=a$，即 $a=1$；

(2) $\sum_{k=0}^{\infty}P\left(X=k\right)=a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=a\mathrm{e}^{\lambda}$，故 $a=\mathrm{e}^{-\lambda}$。

2.6 设命中目标弹数为 X，则

(1) $P\left(X=k\right)=\binom{5}{k}0.8^k0.2^{5-k}$， $k=0,1,2,3,4,5$；

(2) $P\left(X\geq 1\right)=1-P\left(X=0\right)=1-0.2^5=0.99968$。

2.7 设灯泡次品数为 X，则

(1) $P\left(X=k\right)=\binom{20}{k}0.03^k0.97^{20-k}$， $k=0,1,\cdots,20$；

(2) $P\left(X\geq 2\right)=1-P\left(X=0\right)-P\left(X=1\right)=1-0.97^{20}-20\times 0.03\times 0.97^{19}=0.1198$。

2.8　设答对的题数为 X，$X\sim B(15,0.25)$，以下通过查二项分布表或软件来获得所求概率。

(1) $P(5\le X\le 10)=P(X\le 10)-P(X\le 4)=0.9999-0.6865=0.3134$；

(2) $P(X\ge 9)=1-P(X\le 8)=1-0.9958=0.0042$。

2.9　设校队的得胜人数为 X，则

(1) $X\sim B(3,0.6)$，于是

$$P(X\ge 2)=1-P(X\le 1)=1-0.352=0.648$$

(2) $X\sim B(5,0.6)$，于是

$$P(X\ge 3)=1-P(X\le 2)=1-0.3174=0.6826$$

(3) $X\sim B(7,0.6)$，于是

$$P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-0.2898=0.7102$$

所以，对系队来说，第一种方案较有利些。

2.10　设在指定的一月内出现的事故数为 X，则 $X\sim P(5)$。

(1) $P(X\ge 8)=1-P(X\le 7)=1-0.8666=0.1334$；

(2) $P(X\le 2)=0.1247$；

(3) $P(3\le X\le 11)=P(X\le 11)-P(X\le 2)=0.9945-0.1247=0.8698$。

2.11　因为 $P(X=1)=P(X=2)$，从而 $\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$，解得 $\lambda=2$，所以 $X\sim P(2)$，故而

$$P(1.5<X<4)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{2^2}{2}\mathrm{e}^{-2}+\frac{2^3}{6}\mathrm{e}^{-2}=\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-2}$$

2.12　设一小时内进入某公共图书馆的读者数为 X，则 $X\sim P(\lambda)$，依题意，$P(X=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}=0.01$，从而 $\lambda=2\ln 10=4.6052$，所以

$$P(X\ge 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-0.01-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}=0.99-4.6052\times 0.01=0.9439$$

2.13　在月初进货时要库存 a 件这种商品，才能以 99%以上的概率满足顾客的需要，即有 $P(X\le a)\ge 0.99$。据题意，$X\sim P(4)$，查表得，$P(X\le 8)=0.9786, P(X\le 9)=0.9919$，故取 $a=9$。

2.14　设有 X 台设备发生故障，需至少配备 a 名维修工人，才能保证设备发生故障

而不能及时维修的概率小于 0.01，即有 $P(X>a)<0.01$，或写成 $P(X\le a)\ge 0.99$。$X\sim B(150,0.02)\approx P(3)$，查表得，$P(X\le 7)=0.9881$，$P(X\le 8)=0.9962$，故取 $a=8$。

2.15　设取出的 250 件中有 X 件废品，于是 $X\sim B(250,0.01)\approx P(2.5)$，

(1) $P(X\ge 3)=1-P(X\le 2)=1-0.5438=0.4562$；

(2)由于 $P(X\le 4)=0.8912, P(X\le 5)=0.9580$，故能以 95％以上的概率保证废品件数不超过 5 件。

2.16　设在一页上有 X 个错字，则下面用两种方法证明 X 近似服从泊松分布 $P(0.2)$，从而

$$P(X\ge 2)=1-P(X\le 1)=1-0.9825=0.0175$$

方法一　又设一页的字数为 a，则整本书共有字数 $600a$，从书中抽取一页相当于从 $600a$ 个字中随机抽取 a 个字，于是 X 服从超几何分布 $H(120,600a, a)$。由于抽样比 $\frac{a}{600a}=\frac{1}{600}$ 很小，从而 X 近似服从二项分布 $B\left(a,\frac{120}{600a}\right)=B\left(a,\frac{0.2}{a}\right)$，又因 a 很大，而 $\frac{0.2}{a}$ 很小，故 X 近似服从泊松分布 $P\left(a\times\frac{0.2}{a}\right)=P(0.2)$。

方法二　一个错字出现在一页上的概率为 $\frac{1}{600}$，各个错字是否出现在一页上可近似看作是独立的，于是 X 近似服从二项分布 $B\left(120,\frac{1}{600}\right)$，又因 120 很大，而 $\frac{1}{600}$ 很小，所以 X 近似服从泊松分布 $P\left(120\times\frac{1}{600}\right)=P(0.2)$。

2.17　X 的可能取值为 $k=\max(0,r-a),\max(0,r-a)+1,\cdots,\min(b,r)$，参考例 1.2.2 的概率求法，可得 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\binom{b}{k}\binom{a}{r-k}}{\binom{a+b}{r}},\quad k=\max(0,r-a),\max(0,r-a)+1,\cdots,\min(b,r)$$

2.18　(1) X 的分布律为

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\binom{5}{3-k}\Big/\binom{8}{3},\quad k=0,1,2,3$$

(2) $P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{3}\Big/\binom{8}{3}=\frac{23}{28}$。

2.19　设直至取得正品为止所需抽取的次数为 X，

(1)　$P(X=1)=\frac{7}{10}$，　$P(X=2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

$P(X=3)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$，　$P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

(2) $P(X=k)=0.7\times 0.3^{k-1}$，　$k=0,1,2,\cdots$；

(3) $P(X=1)=\frac{7}{10}$，　$P(X=2)=\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{24}{10^2}$

$P(X=3)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{54}{10^3}$，　$P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{6}{10^3}$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{24}{10^2}$	$\frac{54}{10^3}$	$\frac{6}{10^3}$

2.20　X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \frac{x-2}{2}, & 2\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

(1)　$P(-1\le X<3)=F(3)-F(-1)=\frac{1}{2}-0=0.5$；

(2)　$P\left[(X-3)^2<0.25\right]=P(2.5<X<3.5)=F(3.5)-F(2.5)=0.75-0.25=0.5$；

(3)　$P(3X+2<11.6)=P(X<3.2)=F(3.2)=0.6$。

2.21 从 $\varDelta=(4X)^2-16(X+2)=16(X^2-X-2)=16(X-2)(X+1)>0$ 解得，$X>2$ 或

$X<-1$，又据题意，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{7}, & -2\le x\le 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，　所以

$$P(\text{方程 } 4t^2+4tX+X+2=0 \text{ 有实根})=P(\varDelta>0)=P(X>2)+P(X<-1)$$

$$=\int_{2}^{5}\frac{1}{7}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{7}\mathrm{d}x=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

2.22 (1) $1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x\overset{令y=kx}{=}\frac{A}{k^3}\int_{0}^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{A}{k^3}\Gamma(3)=\frac{2}{k^3}A$

故 $A=\frac{k^3}{2}$；

(2) $P\left(0<X<\frac{1}{k}\right)=\int_{0}^{\frac{1}{k}}\frac{k^3}{2}x^2\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x\overset{令y=kx}{=}\frac{1}{2}\int_{0}^{1}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\left(-y^2\mathrm{e}^{-y}\big|_0^1\right)+\int_{0}^{1}y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}-y\mathrm{e}^{-y}\big|_0^1+\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}+1=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}$$

2.23 (1) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$；

(2) $P(X\geq 3)=1-F(3)=4\mathrm{e}^{-3}$。

2.24 (1) $\begin{cases}F(-\infty)=A-B\times\frac{\pi}{2}=0\\ F(\infty)=A+B\times\frac{\pi}{2}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=\frac{1}{\pi}\end{cases}$

(2) $f(x)=F'(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,x\right)'=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$；

(3) $P\left(|X|<\sqrt{3}\right)=P\left(-\sqrt{3}<X<\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}$$

2.25 (1)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \int_{0}^{x}4x^3\mathrm{d}x, & 0<x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ x^4, & 0<x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

(2)由 $P(X>a)=P(X<a)$ 得，$1-F(a)=F(a)$，$F(a)=a^4=0.5$，故 $a=\sqrt[4]{0.5}=0.8409$；

(3)由 $P(X>b)=0.05$ 得，$1-F(b)=0.05, F(b)=b^4=0.95$，故 $b=\sqrt[4]{0.95}=0.9873$。

2.26 P(1 颗炸弹未使敌人铁路交通受到破坏)

$$=P\left(|X|\geq 40\right)=P(X\geq 40)+P(X\leq -40)=\int_{40}^{100}\frac{100-x}{10000}\mathrm{d}x+\int_{-100}^{-40}\frac{100+x}{10000}\mathrm{d}x=0.36$$

P(3 颗炸弹使敌人铁路交通受到破坏)=1 – P(3 颗炸弹都未使敌人铁路交通受到破坏)

$$=1-\left[P\left(|X|\geq 40\right)\right]^3=1-0.36^3=0.9533$$

2.27

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{d}x, & -\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1+\sin x}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

图形略。

2.28 $0.95=P(X>1-2k)=1-P(X\leq 1-2k)=1-P\left(\dfrac{X-1}{2}\leq\dfrac{1-2k-1}{2}\right)$

$$=1-\Phi(-k)=\Phi(k)$$

故查表得 $k=1.645$ 。

2.29 $P(a<X<7)=\Phi\left(\dfrac{7-5}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-5}{2}\right)=0.62$

$$\Phi\left(\frac{5-a}{2}\right)=1-\Phi\left(\frac{a-5}{2}\right)=1+0.62-\Phi(1)=1+0.62-0.8413=0.7787$$

查表得 $\dfrac{5-a}{2}=0.77$，故 $a=3.46$ 。

2.30 (1) P(走第一条路乘上火车)= $P(X\leq 60)=\Phi\left(\dfrac{60-40}{10}\right)=\Phi(2)$

P(走第二条路乘上火车)= $P(X\leq 60)=\Phi\left(\dfrac{60-50}{4}\right)=\Phi(2.5)$

因 $\Phi(2)<\Phi(2.5)$，故应走第二条路；

(2) P(走第一条路乘上火车)= $P(X\leq 45)=\Phi\left(\dfrac{45-40}{10}\right)=\Phi(0.5)$

P(走第二条路乘上火车)= $P(X\leq 45)=\Phi\left(\dfrac{45-50}{4}\right)=\Phi(-1.25)$

由于 $\Phi(0.5)>\Phi(-1.25)$，故应走第一条路。

2.31 $P(170<X<230)=\Phi\left(\dfrac{230-200}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{170-200}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\dfrac{30}{\sigma}\right)-1\geq 0.9$

$$\Phi\left(\frac{30}{\sigma}\right)\ge 0.95,\quad \frac{30}{\sigma}\ge 1.645,\quad \sigma\le 18.237$$

所以应允许σ 最大为 18.237。

2.32　设某厂职工在一次操作测验中所得分数为 X，则 $X\sim N(600,100^2)$。

(1) $P(X<400)=\Phi\left(\dfrac{400-600}{100}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=1-0.97725=0.02275$；

(2) $P(X\ge 850)=1-\Phi\left(\dfrac{850-600}{100}\right)=1-\Phi(2.5)=1-0.99379=0.00621$；

(3) $P(450\le X\le 700)=\Phi\left(\dfrac{700-600}{100}\right)-\Phi\left(\dfrac{450-600}{100}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1.5)$

$$=\Phi(1)+\Phi(1.5)-1=0.8413+0.93319-1=0.77449$$

2.33　$P(10.05-0.10\le X\le 10.05+0.10)=\Phi\left(\dfrac{0.1}{0.04}\right)-\Phi\left(-\dfrac{0.1}{0.04}\right)$

$$=2\Phi(2.5)-1=2\times 0.99379-1=0.98758$$

2.34　(1) $P(|X|\le 150)=P(-150\le X\le 150)=\Phi\left(\dfrac{150-50}{100}\right)-\Phi\left(\dfrac{-150-50}{100}\right)$

$$=\Phi(1)-\Phi(-2)=\Phi(1)+\Phi(2)-1=0.8413+0.97725-1=0.81855$$

(2) P(在三次测量中至少有一次误差的绝对值不超过 150 厘米)

$=1-P$(在三次测量中的误差绝对值都超过了 150 厘米)

$=1-\left[P(|X|>150)\right]^3=1-(1-0.81855)^3=0.99403$

(3) $P(X\ge 0)=1-P(X<0)=1-\Phi\left(\dfrac{0-50}{100}\right)=\Phi(0.5)=0.6915$。

2.35　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1) $P(X>5)=\int_5^{\infty}\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}}$；

(2)由(2.3.12)式知，他继续通话的时间超过 5 分钟的概率仍是 $P(X>5)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}}$。

2.36 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{400}\mathrm{e}^{-\frac{1}{400}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$p=P(X>500)=\int_{500}^{\infty}\frac{1}{400}\mathrm{e}^{-\frac{1}{400}x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1.25}。$$

(1) $Y\sim B\left(4,\mathrm{e}^{-1.25}\right)$，即 Y 的分布律为

$$P(Y=k)=\binom{4}{k}\mathrm{e}^{-1.25k}\left(1-\mathrm{e}^{-1.25}\right)^{4-k},\quad k=0,1,2,3,4$$

(2) $P(Y\ge 3)=P(Y=3)+P(Y=4)=\binom{4}{3}\mathrm{e}^{-1.25\times 3}\left(1-\mathrm{e}^{-1.25}\right)^{4-3}+\mathrm{e}^{-1.25\times 4}=4\mathrm{e}^{-3.75}-3\mathrm{e}^{-5}$

2.37 (1)

$X-2$	-4	-3	-2	0	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(2)

$3-X$	-2	1	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

(3)

$2X^2$	0	2	8	50
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2.38 易见， $Y=2-4X$ 的取值范围为$(-2，2)$，当$-2<y<2$ 时，

$$f_Y(y)=f_X\left(-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}=3\left(-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}y^2-\frac{3}{16}y+\frac{3}{16}$$

即有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{64}y^2-\dfrac{3}{16}y+\dfrac{3}{16}, & -2<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.39 易见，$Y=8X^3-5$ 的取值范围为$(-13，3)$，$x=\frac{1}{2}(y+5)^{\frac{1}{3}}$，当$-13<y<3$ 时，

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{1}{2}(y+5)^{\frac{1}{3}}\right)\left|\left[\frac{1}{2}(y+5)^{\frac{1}{3}}\right]'\right|=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(y+5)^{\frac{1}{3}}+1\right]\cdot\frac{1}{6}(y+5)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{1}{24}(y+5)^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{12}(y+5)^{-\frac{2}{3}}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{24}(y+5)^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{12}(y+5)^{-\frac{2}{3}}, & -13<y<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.40 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=f_X(y^2)\cdot 2y=\lambda e^{-\lambda y^2}\cdot 2y=2\lambda y e^{-\lambda y^2}$$

从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}2\lambda y e^{-\lambda y^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

2.41 设所得球的体积为 Y，于是 $Y=\frac{1}{6}\pi X^3$，$x=\left(\frac{6}{\pi}y\right)^{\frac{1}{3}}$，当 $\frac{\pi}{6}a^3\le y\le\frac{\pi}{6}b^3$ 时，

$$f_Y(y)=f_X\left(\left(\frac{6}{\pi}y\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{1}{3}\frac{6}{\pi}\left(\frac{6}{\pi}y\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$$

从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3(b-a)}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}y^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3\le y\le\frac{\pi}{6}b^3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.42 令 $Y=\ln X$，则

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<y<\infty$$

当 $x>0$ 时，

$$f_X(x)=f_Y(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

故

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

第三章

3.1　$P(Y<3)=P(Y=1)+P(Y=2)=(0.15+0.1+0.1)+(0.05+0.2+0.05)=0.65$

3.2　$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ \int_0^y\int_0^x 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & 0<x<1,0<y<1\\ \int_0^1\int_0^x 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & 0<x<1,y\ge 1\\ \int_0^y\int_0^1 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x\ge 1,0<y<1\\ 1, & x\ge 1,y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ x^2y^2, & 0<x<1,0<y<1\\ x^2, & 0<x<1,y\ge 1\\ y^2, & x\ge 1,0<y<1\\ 1, & x\ge 1,y\ge 1\end{cases}$$

$$P(0.2<X<0.4,0.3<Y<0.7)=F(0.4,0.7)-F(0.2,0.7)-F(0.4,0.3)+F(0.2,0.3)$$
$$=0.4^2\times 0.7^2-0.2^2\times 0.7^2-0.4^2\times 0.3^2+0.2^2\times 0.3^2=0.048$$

3.3　$P(0.004<Y-X<0.036)=\iint\limits_{0.004<y-x<0.036}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}2500\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2500S=2500\times(0.02^2-0.004^2)=0.96$$

其中D为区域：$0.49<x<0.51,0.51<y<0.53,x+0.004<y<x+0.036$，作图（略），它是由两条平行线在正方形内所夹的区域；S为区域D的面积。

3.4　(X, Y)联合分布律为

$$P(X=x,Y=y)=\binom{5}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{3-x-y}\Big/\binom{10}{3},\quad x=0,1,2,3,\ y=0,1,2,\ x+y\le 3$$

联合分布律和边缘分布律的计算结果列于下表。

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{12}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	

3.5 $P(X<Y)=\iint\limits_{x<y} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot 2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$

3.6 作图（略），G 的面积=$\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$，从而

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y=6\left(x-x^2\right),\quad 0\le x\le 1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x=6\left(\sqrt{y}-y\right),\quad 0\le y\le 1$$

3.7 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-x}^{x} 1\,\mathrm{d}y=2x,\quad 0<x<1$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{|y|}^{1} 1\,\mathrm{d}x=1-|y|,\quad |y|<1$

对于 $|y|<1,\ f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{1}{1-|y|},\quad |y|<x<1$；

对于 $0<x<1,\ f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{2x},\quad |y|<x$。

3.8 $P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1\mid X=0)=0.7\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{20}$

其余类似算得，联合分布律列于下表。

X \ Y	1	2	3
0	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{40}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

由于

$$P(Y=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)=\frac{7}{40}+\frac{1}{10}=\frac{11}{40}$$

于是，Y=2 时关于 X 的条件分布律为

$$P(X=0\mid Y=2)=\frac{P(X=0,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{7/40}{11/40}=\frac{7}{11}$$

$$P(X=1\mid Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{1/10}{11/40}=\frac{4}{11}$$

3.9 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6}{\pi^2\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}\mathrm{d}\,y=\frac{2}{\pi^2\left(4+x^2\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(y/3\right)^2}\mathrm{d}\left(y/3\right)$

$$=\frac{2}{\pi^2\left(4+x^2\right)}\operatorname{arct\,g}\frac{y}{3}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{2}{\pi^2\left(4+x^2\right)}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{\pi\left(4+x^2\right)},\quad -\infty<x<\infty$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6}{\pi^2\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}\mathrm{d}\,x=\frac{3}{\pi^2\left(9+y^2\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(x/2\right)^2}\mathrm{d}\left(x/2\right)$$

$$=\frac{3}{\pi^2\left(9+y^2\right)}\operatorname{arct\,g}\frac{y}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{3}{\pi^2\left(9+y^2\right)}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3}{\pi\left(9+y^2\right)},\quad -\infty<y<\infty$$

3.10 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1+\sin x\sin y\right)\mathrm{d}\,y$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y+\sin x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\sin y\,\mathrm{d}\,y\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

故 $X\sim N(0,1)$；同理，$Y\sim N(0,1)$。

3.11 （1） $f_X(x)=\int_x^{\infty}x\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\,y=x\,\mathrm{e}^{-x},\quad x>0$

$$f_Y(y)=\int_0^{y}x\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}y^2\,\mathrm{e}^{-y},\quad y>0$$

（2）对于 $y>0,\ f_{X|Y}\left(x\,|\,y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}=\frac{x\,\mathrm{e}^{-y}}{\frac{y^2}{2}\mathrm{e}^{-y}}=\frac{2x}{y^2},\quad 0<x<y$

对于 $x>0,\ f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}=\frac{x\,\mathrm{e}^{-y}}{x\,\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{x-y},\quad y>x$

（3）作图（略），$P\left(X+Y<2\right)=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_x^{2-x}x\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1x\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x-2}\right)\mathrm{d}\,x=1-2\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$ 。

3.12 （1） $f_X(x)=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}\,y=2x^2+\frac{1}{6}x\times 4=2x^2+\frac{2}{3}x,\quad 0\le x\le 1$

$$f_Y(y)=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{6}y+\frac{1}{3},\quad 0\le y\le 2$$

（2）对于 $0\le y\le 2,\ f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}=\frac{x^2+\frac{1}{3}xy}{\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}}=\frac{6x^2+2xy}{y+2},\quad 0\le x\le 1$

对于 $0<x\le 1$, $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{x^2+\frac{1}{3}xy}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\dfrac{3x+y}{6x+2}$,　$0\le y\le 2$

（3）作图（略），

$$P(X+Y>1)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{65}{72}$$

（4）$P(X>Y)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{7}{6}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{7}{24}$；

（5）$P\left(Y>\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}y=\frac{13}{16}$

$$P\left(X<\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{8}x\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{64}$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\middle|Y>\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X<\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right)}{P\left(Y>\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{13}{16}}=\frac{9}{52}$$

（6）$P\left(X<\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}f_{X|Y}\left(x\middle|\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{6x^2+x}{5/2}\mathrm{d}x=\frac{3}{20}$。

3.13

X \ Y	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	0.08	0.04	0.04	0.04	0.2
2	0.24	0.12	0.12	0.12	0.6
3	0.08	0.04	0.04	0.04	0.2
$p_{\cdot j}$	0.4	0.2	0.2	0.2	

（1）边缘分布律与例 3.2.1 相同；

（2）易验证，X 与 Y 独立。

3.14

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{3}{8}$	a	$\frac{3}{16}$	$a+\frac{9}{16}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	b	$b+\frac{3}{16}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$a+\frac{1}{16}$	$b+\frac{3}{16}$	

$$\frac{3}{8}=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\left(a+\frac{9}{16}\right)\times\frac{1}{2}，解得 a=\frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{8}=P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1)=\left(b+\frac{3}{16}\right)\times\frac{1}{2}，解得 b=\frac{1}{16}$$

可以验证$a=\frac{3}{16}$，$b=\frac{1}{16}$确能使 X 与 Y 独立。

3.15

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	a	$\frac{1}{9}$	c	$a+c+\frac{1}{9}$
x_2	$\frac{1}{9}$	b	$\frac{1}{3}$	$b+\frac{4}{9}$
$p_{\cdot j}$	$a+\frac{1}{9}$	$b+\frac{1}{9}$	$c+\frac{1}{3}$	

可从独立性的定义解得$a=\frac{1}{18},b=\frac{2}{9},c=\frac{1}{6}$，此时 X 与 Y 独立。

3.16 设甲、乙两人分别于时刻 X 和 Y 到达，则 X 和 Y 皆服从均匀分布 $U[1,2]$，且独立，于是

$$P\left(|X-Y|\le\frac{1}{3}\right)==\iint_{|x-y|\le\frac{1}{3}} f_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=D\text{的面积}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

其中 D 为区域：$1\le x\le 2, 1\le y\le 2, x-\frac{1}{3}\le y\le x+\frac{1}{3}$，作图（略），它是由两条平行线在正方形内所夹的区域。

3.17 $f_X(x)=\int_x^1 8xy\,\mathrm{d}y=4x(1-x^2),\quad 0<x<1$

$f_Y(y)=\int_0^y 8xy\,\mathrm{d}x=4y^3,\quad 0<y<1$

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

3.18 （1）$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^{\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{cx^2y}\,\mathrm{d}y=\int_1^{\infty}\frac{1}{cx^2}\left(\ln x-\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{c}\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{c}\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{c}$$

故 c=2；

（2） $f_X(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{2x^2y}\mathrm{d}\,y=\frac{1}{2x^2}\left(\ln x-\ln\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln x}{x^2},\quad x\ge 1$

当 y>0 时，

$$f\left(x,y\right)>0\Leftrightarrow x\ge 1,\frac{1}{x}\le y\le x\Leftrightarrow x\ge 1,x\ge y,x\ge\frac{1}{y}\Leftrightarrow x\ge\max\left(1,y,\frac{1}{y}\right)$$

从而

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,x=\int_{\max\left(1,y,\frac{1}{y}\right)}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2y}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{\max\left(1,y,\frac{1}{y}\right)}^{\infty}\right)=\frac{1}{2y\max\left(1,y,\dfrac{1}{y}\right)}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y^2}, & y>1\\ \dfrac{1}{2}, & 0<y\le 1\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

（3）由于 $f\left(x,y\right)\ne f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$，故 X 与 Y 不独立。

3.19 据题意，X 和 Y 皆服从均匀分布 $U[0,1]$，且独立，于是

$$P\left(\left|X-Y\right|\le\frac{1}{2}\right)==\iint\limits_{|x-y|\le\frac{1}{2}}f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{D}1\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=D\text{的面积}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

其中 D 为区域：$0\le x\le 1,0\le y\le 1,x-\frac{1}{2}\le y\le x+\frac{1}{2}$，作图（略），它是由两条平行线在正方形内所夹的区域。

3.20 $f_{(X,Y)}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}\,z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)\,\mathrm{d}\,z$

$$=\frac{1}{4\pi^2},\quad 0\le x,y\le 2\pi$$

$$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{d}\,y=\frac{1}{2\pi},\quad 0\le x\le 2\pi$$

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2\pi},\quad 0\le y\le 2\pi$$

由于 $f_{(X,Y)}(x,y)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$，故 X 与 Y 独立。同理可证，Y 与 Z 独立，Z 与 X 独立，且

$$f_Z\left(z\right)=\frac{1}{2\pi},\quad 0\le z\le 2\pi$$

由于 $f(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$，故 X,Y,Z 不相互独立。

3.21　必要性。显然。

充分性。设 $f(x,y)=g(x)h(y)$，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)h(y)\mathrm{d}y=g(x)\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)h(y)\mathrm{d}x=h(y)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}f_X(x)f_Y(y)&=\left[g(x)\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\mathrm{d}y\right]\left[h(y)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x\right]=g(x)h(y)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=f(x,y)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x,y)\end{aligned}$$

故 X 与 Y 独立。

3.22　$f(x,y)=\dfrac{6}{\pi^2\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}=\dfrac{6}{\pi^2\left(4+x^2\right)}\cdot\dfrac{1}{9+y^2}$，　$-\infty<x,y<\infty$

故 X 与 Y 独立。

3.23　（1）$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=1\times\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$，　$0\le x\le 1, y\ge 0$

（2）$\Delta=(2X)^2-4Y^2\ge 0$，由于 X,Y 都取非负值，故有 $X\ge Y$，从而

P（a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y^2=0$ 有实根）$=P(X\ge Y)$

$$=\iint_{x\ge y}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-1$$

3.24　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}x=z\mathrm{e}^{-z}$，　$z>0$

3.25　由 $\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le z-x\le 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\le x\le 1\\z-1\le x\le z\end{cases}$，此时 $f_X(x)f_Y(z-x)=z-x$；

由 $\begin{cases}0\le x\le 1\\1<z-x\le 2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\le x\le 1\\z-2\le x<z-1\end{cases}$，此时 $f_X(x)f_Y(z-x)=2-z+x$。

当 $0\le z\le 1$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z(z-x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}z^2$

当 $1<z\le 2$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{z-1}(2-z+x)\mathrm{d}x+\int_{z-1}^1(z-x)\mathrm{d}x=-z^2+3z-\dfrac{3}{2}$

当 $2<z\le 3$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-2}^1(2-z+x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}z^2-3z+\dfrac{9}{2}$

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2, & 0\le z\le 1\\ -z^2+3z-\frac{3}{2}, & 1<z\le 2\\ \frac{1}{2}z^2-3z+\frac{9}{2}, & 2<z\le 3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

3.26　令 $Z=X+Y$，Z 的可能取值为 $1,2,\cdots,n+m$。

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}q^{m-(k-i)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}p^kq^{n+m-k}\\&=\binom{n+m}{k}p^kq^{n+m-k},\quad k=1,2,\cdots,n+m\end{aligned}$$

故 $Z=X+Y\sim B(n+m,p)$。

3.27　$E(Y)=E(3X_1-X_2-4X_3)=3E(X_1)-E(X_2)-4E(X_3)=3\times2-0-4\times(-2)=14$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\mathrm{Var}(3X_1-X_2-4X_3)=9\,\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+16\,\mathrm{Var}(X_3)\\&=9\times4+5+16\times4=105\end{aligned}$$

故 $Y\sim N(14,105)$。

3.28　（1）$P(Z=0)=P(X=0)P(Y=0)=0.2\times0.2=0.04$

$$P(Z=1)=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=0)=0.2\times0.5+0.5\times0.2=0.2$$

$$\begin{aligned}P(Z=2)&=P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)\\&=0.2\times0.3+0.5\times0.5+0.3\times0.2=0.37\end{aligned}$$

$$P(Z=3)=P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)=0.5\times0.3+0.3\times0.5=0.3$$

$$P(Z=4)=P(X=2)P(Y=2)=0.3\times0.3=0.09$$

$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	0	1	2	3	4
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

（2）$P(M=0)=P(X=0)P(Y=0)=0.2\times0.2=0.04$

$$\begin{aligned}P(M=1)&=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)\\&=0.2\times0.5+0.5\times0.2+0.5\times0.5=0.45\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(M=2)&=P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=0)\\
&\quad+P(X=2)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=2)\\
&=0.2\times0.3+0.5\times0.3+0.3\times0.2+0.3\times0.5+0.3\times0.3=0.51
\end{aligned}
$$

M=max(X,Y)的分布律为

M	0	1	2
P	0.04	0.45	0.51

（3）$P(N=0)=P(X=0)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=1)+P(X=0)P(Y=2)$

$$
\begin{aligned}
&+P(X=1)P(Y=0)+P(X=2)P(Y=0)\\
&=0.2\times0.2+0.2\times0.5+0.2\times0.3+0.5\times0.2+0.3\times0.2=0.36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(N=1)&=P(X=1)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)\\
&=0.5\times0.5+0.5\times0.3+0.3\times0.5=0.55
\end{aligned}
$$

$$P(N=2)=P(X=2)P(Y=2)=0.3\times0.3=0.09$$

N=min(X,Y)的分布律为

N	0	1	2
P	0.36	0.55	0.09

3.29　$f(x)=\dfrac{1}{\theta}$，$0\le x\le\theta$；$F(x)=\dfrac{x}{\theta}$，$0\le x\le\theta$

由（3.5.10）式知，

$$f_Y(y)=n\left[F(y)\right]^{n-1}f(y)=n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}，\quad 0\le y\le\theta$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\theta}y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}y=\frac{n}{n+1}\theta$$

3.30　$f(x)=0.1\mathrm{e}^{-0.1x}$，$x>0$；$F(x)=1-\mathrm{e}^{-0.1x}$，$x>0$。

（1）设子系统 L_1 的寿命为 Y_1，子系统 L_2 的寿命为 Y_2，则 $Y_1=\min(X_1,X_2)$，$Y_2=\min(X_3,X_4,X_5)$，于是

$$f_{Y_1}(y_1)=2\left[1-F(y_1)\right]f(y_1)=2\mathrm{e}^{-0.1y_1}\cdot0.1\mathrm{e}^{-0.1y_1}=0.2\mathrm{e}^{-0.2y_1}，\quad y_1>0$$

$$f_{Y_2}(y_2)=3\left[1-F(y_2)\right]^2f(y_2)=3\mathrm{e}^{-0.2y_2}\cdot0.1\mathrm{e}^{-0.1y_2}=0.3\mathrm{e}^{-0.3y_2}，\quad y_2>0$$

（2）设系统 L 的寿命为 Y，则 $Y=\max(Y_1,Y_2)$，于是

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y_1\le y)P(Y_2\le y)=F_{Y_1}(y)F_{Y_2}(y)=\left(1-\mathrm{e}^{-0.2y}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-0.3y}\right)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=0.2\mathrm{e}^{-0.2y}+0.3\mathrm{e}^{-0.3y}-0.5\mathrm{e}^{-0.5y}，\quad y>0$$

第四章

4.1　由例 4.1.3 知，$E(X)=15\times 0.25=3.75$。

4.2　由例 4.1.5 知，$E(X)=3\times\dfrac{3}{8}=1.125$。

4.3　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x\dfrac{k^3}{2}x^2\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x\overset{令y=kx}{=}\dfrac{1}{2k}\int_0^{\infty}y^3\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\dfrac{\Gamma(4)}{2k}=\dfrac{3}{k}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^2\dfrac{k^3}{2}x^2\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x\overset{令y=kx}{=}\dfrac{1}{2k^2}\int_0^{\infty}y^4\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\dfrac{\Gamma(5)}{2k^2}=\dfrac{12}{k^2}$

故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{12}{k^2}-\frac{9}{k^2}=\frac{3}{k^2}$$

4.4　$E(X)=\int_0^{\infty}xx\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2$

$E(X^2)=\int_0^{\infty}x^2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(4)=6$

故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=6-4=2$$

4.5　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$，$-\infty<x<\infty$，于是 $X\sim N\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，故 $E(X)=1$，$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{2}$。

4.6　$E(X)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0$

$E(X^2)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2$

故

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=2-0=2$$

4.7　$E(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\dfrac{2}{\pi}\cos^2x\,\mathrm{d}x=0$

$$E(X^2)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\frac{2}{\pi}\cos^2x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{\pi}\left(x^2\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{\pi}\left(x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$$

从而

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$$

4.8 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=c+\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)f(x)\mathrm{d}x\overset{令y=x-c}{=}c+\int_{-\infty}^{\infty}yf(y+c)\mathrm{d}y=c$。

（$\int_{-\infty}^{\infty}yf(y+c)\mathrm{d}y=0$是因为$yf(y+c)$是奇函数。）

4.9 （1）$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(a+bx^2)\mathrm{d}x=a+\frac{1}{3}b$

$$\frac{3}{5}=E(X)=\int_0^1 x(a+bx^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b$$

从上述两个方程可解得$a=\frac{3}{5},b=\frac{6}{5}$；

（2）$E(X^2)=\int_0^1 x^2\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{25}$

从而

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}$$

4.10 （1）$0=F(-1-0)=F(-1)=a+b\arcsin(-1)=a-\frac{\pi}{2}b$

$$1=F(1)=F(1-0)=\lim_{x\to 1-}(a+b\arcsin x)=a+\frac{\pi}{2}b$$

从上述两个方程解得$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{\pi}$；

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=0$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\overset{令x=\sin\theta}{=}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}\sin 2\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{1}{2}$$

4.11　设塑料制品的断裂强度为 X，于是

$$0.0183=P(X\le 130)=\varPhi\left(\frac{130-\mu}{3.5}\right),\quad \varPhi\left(\frac{\mu-130}{3.5}\right)=1-0.0183=0.9817$$

查表得 $\frac{\mu-130}{3.5}=2.09$，解得 $\mu=137.3$ 千克。

4.12　$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{3a^3}{x^4}, & x\ge a\\ 0, & x<a\end{cases}$

$$E(X)=\int_a^{\infty}x\frac{3a^3}{x^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{3a^3}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_a^{\infty}=\frac{3}{2}a$$

$$E\left(X^2\right)=\int_a^{\infty}x^2\frac{3a^3}{x^4}\,\mathrm{d}x=-3a^3\frac{1}{x}\Big|_a^{\infty}=3a^2$$

从而

$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=3a^2-\frac{9}{4}a^2=\frac{3}{4}a^2$$

$$E\left(\frac{2}{3}X-a\right)=\frac{2}{3}E(X)-a=0$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{2}{3}X-a\right)=\frac{4}{9}\mathrm{Var}(X)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}a^2=\frac{a^2}{3}$$

4.13　$F(t)=P(T\le t)=1-a\mathrm{e}^{-\lambda t}-(1-a)\mathrm{e}^{-\mu t}$

$$f(t)=F'(t)=a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}+(1-a)\mu\mathrm{e}^{-\mu t}$$

$$E(T)=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)\,\mathrm{d}t=a\lambda\int_0^{\infty}t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t+(1-a)\mu\int_0^{\infty}t\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{\lambda}\varGamma(2)+\frac{1-a}{\mu}\varGamma(2)=\frac{a}{\lambda}+\frac{1-a}{\mu}$$

$$E\left(T^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}t^2f(t)\,\mathrm{d}t=a\lambda\int_0^{\infty}t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t+(1-a)\mu\int_0^{\infty}t^2\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{\lambda^2}\varGamma(3)+\frac{1-a}{\mu^2}\varGamma(3)=\frac{2a}{\lambda^2}+\frac{2(1-a)}{\mu^2}$$

故

$$\operatorname{Var}(T)=E\left(T^2\right)-E^2(T)=\frac{2a}{\lambda^2}+\frac{2(1-a)}{\mu^2}-\left(\frac{a}{\lambda}+\frac{1-a}{\mu}\right)^2$$

$$=\frac{a(2-a)}{\lambda^2}-\frac{2a(1-a)}{\lambda\mu}+\frac{1-a^2}{\mu^2}$$

4.14 $E(Y)=E\left(\frac{1}{X}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$

（$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x=1$，因为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$是$N\left(0,a^2\right)$的密度函数）

4.15 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$E\left(X+\mathrm{e}^{-2X}\right)=\int_0^{\infty}\left(x+\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(2)+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

4.16 设测得边长的误差为 X，则测得的场地面积为$S=(500+X)^2$。

$$E(X)=-30\times0.05-20\times0.08-10\times0.16+0\times0.42+10\times0.16+20\times0.08+30\times0.05=0$$

$$E\left(X^2\right)=(-30)^2\times0.05+(-20)^2\times0.08+(-10)^2\times0.16+0^2\times0.42+10^2\times0.16$$

$$+20^2\times0.08+30^2\times0.05=186$$

从而

$$E(S)=E(500+X)^2=250000+1000E(X)+E\left(X^2\right)=250186\text{米}^2$$

4.17 $E(X)=-3\times0.15-2\times0.20+1\times0.30+2\times0.25+6\times0.1=0.55$

$$E\left(X^2\right)=(-3)^2\times0.15+(-2)^2\times0.20+1^2\times0.30+2^2\times0.25+6^2\times0.1=7.05$$

$$E\left(4X^2-7\right)=4E\left(X^2\right)-7=4\times7.05-7=21.2$$

4.18 设圆盘的直径为 X，于是圆盘的面积为$S=\frac{1}{4}\pi X^2$，依题意，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$E\left(X^4\right)=\int_a^b \frac{x^4}{b-a}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{b-a}\frac{x^5}{5}\Big|_a^b=\frac{b^5-a^5}{5(b-a)}=\frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{5}$$

$$\operatorname{Var}\left(X^2\right)=E\left(X^4\right)-E^2\left(X^2\right)=\frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{5}-\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{45}\left(4a^4-a^3b-6a^2b^2-ab^3+4b^4\right)$$

故

$$E(S)=\frac{1}{4}\pi E\left(X^2\right)=\frac{\pi}{12}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\operatorname{Var}(S)=\frac{\pi^2}{16}\operatorname{Var}\left(X^2\right)=\frac{\pi^2}{720}\left(4a^4-a^3b-6a^2b^2-ab^3+4b^4\right)$$

4.19 $E(X-c)^2=E\left[(X-EX)+(EX-c)\right]^2$

$$\begin{aligned}&=E(X-EX)^2+2E(X-EX)(EX-c)+(EX-c)^2\\&=E(X-EX)^2+2(EX-c)(EX-EX)+(EX-c)^2\\&=\operatorname{Var}(X)+(EX-c)^2\end{aligned}$$

故 $\operatorname{Var}(X)\le E(X-c)^2$ 。

4.20 $E\left|X-E(X)\right|=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x\overset{令y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y$

$$=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}y\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

4.21 设厂方出售一台设备的净赢利为 Y，则

$$\begin{aligned}E(Y)&=100P(Y=100)+(-200)P(Y=-200)=100P(X>1)-200P(X\le 1)\\&=100-300P(X\le 1)=100-300\times\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}\,\mathrm{d}\,x=100-300\times\left(1-\mathrm{e}^{-1/4}\right)\\&=300\,\mathrm{e}^{-1/4}-200=33.64\text{元}\end{aligned}$$

4.22 设一周内发生故障的次数为 X，一周内的利润为 Y，则 $X\sim B(5,0.2)$，于是

$$\begin{aligned}E(Y)&=10P(Y=10)+5P(Y=5)+0P(Y=0)-2P(Y=-2)\\&=10P(X=0)+5P(X=1)-2P(X\ge 3)\\&=10P(X=0)+5P(X=1)-2\left[1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)\right]\\&=12P(X=0)+7P(X=1)+2P(X=2)-2\\&=12\times 0.8^5+7\times 0.8^4+2\times 0.4\times 0.8^3-2=5.20896\end{aligned}$$

4.23 设应该组织的货源吨数为 a，它是[2000，4000]内的某一整数，又设国家收益为 Y，则

$$Y=\begin{cases}3X-1\times(a-X), & x\le a\\ 3a, & x>a\end{cases}=\begin{cases}4X-a, & x\le a\\ 3a, & x>a\end{cases}$$

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{2000}^{4000}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{2000}^{a}(4x-a)\frac{1}{2000}\mathrm{d}x+\int_{a}^{4000}3a\frac{1}{2000}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1000}\left(a^2-2000^2\right)-\frac{a}{2000}(a-2000)+\frac{3a}{2000}(4000-a)$$

$$=-\frac{1}{1000}a^2+7a-4000=-\frac{1}{1000}(a-3500)^2+8250$$

故取 a=3500 吨时，国家收益最大。

4.24 $f(x)=\dfrac{1}{\theta}$, $0\le x\le\theta$；$F(x)=\dfrac{x}{\theta}$, $0\le x\le\theta$

由（3.5.10）式知，

$$f_Y(y)=n\left[F(y)\right]^{n-1}f(y)=n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=\frac{ny^{n-1}}{\theta^n},\quad 0\le y\le\theta$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\theta}y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}y=\frac{n}{n+1}\theta$$

4.25 令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{只盒子有球}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$, $i=1,2,\cdots,M$ ，则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_M$ 。

$$E(X_i)=P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n$$

$$E(X)=ME(X_i)=M\left[1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n\right]$$

4.26 $E(X)=\int_0^1\int_0^1\max(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_0^1\mathrm{d}x_1\left(\int_0^{x_1}x_1\mathrm{d}x_2+\int_{x_1}^1x_2\mathrm{d}x_2\right)$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x_1=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^1\left[\max(x_1,x_2)\right]^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_0^1\mathrm{d}x_1\left(\int_0^{x_1}x_1^2\mathrm{d}x_2+\int_{x_1}^1x_2^2\mathrm{d}x_2\right)$$

$$=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x_1^3+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^1\min(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_0^1\mathrm{d}x_1\left(\int_0^{x_1}x_2\mathrm{d}x_2+\int_{x_1}^1x_1\mathrm{d}x_2\right)=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x_1^2+x_1\right)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{3}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^1\int_0^1\left[\min\left(x_1,x_2\right)\right]^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2=\int_0^1\mathrm{d}x_1\left(\int_0^{x_1}x_2^2\,\mathrm{d}x_2+\int_{x_1}^1x_1^2\,\mathrm{d}x_2\right)$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{2}{3}x_1^3+x_1^2\right)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=E\left(Y^2\right)-E^2\left(Y\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$E\left(X+Y\right)=E\left(X\right)+E\left(Y\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

4.27 X 和 Y 的边缘分布律列于下表。

X \\ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	

从边缘分布律容易求得，

$$E\left(X\right)=\frac{17}{8},E\left(Y\right)=\frac{1}{8},\mathrm{Var}\left(X\right)=\frac{39}{64},\mathrm{Var}\left(Y\right)=\frac{39}{64}$$

$$E\left(XY\right)=1\times\left(-1\right)\times0+2\times\left(-1\right)\times\frac{1}{8}+3\times\left(-1\right)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}+2\times1\times\frac{1}{8}+3\times1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)=\frac{1}{8}-\frac{17}{8}\times\frac{1}{8}=-\frac{9}{64}\text{。}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{-9/64}{\sqrt{39/64}\sqrt{39/64}}=-\frac{3}{13}$$

4.28 $E\left(Y\right)=\int_0^\infty y\left(0.2\mathrm{e}^{-0.2y}+0.3\mathrm{e}^{-0.3y}-0.5\mathrm{e}^{-0.5y}\right)\mathrm{d}y=6\frac{1}{3}$ 。

4.29 $E\left(X+Y+Z\right)=E\left(X\right)+E\left(Y\right)+E\left(Z\right)=1+1-1=1$

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=\rho_{XY}\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\sqrt{\mathrm{Var}\left(Y\right)}=0$$

$$\mathrm{Cov}\left(X,Z\right)=\rho_{XZ}\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\sqrt{\mathrm{Var}\left(Z\right)}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Cov}\left(Y,Z\right)=\rho_{YZ}\sqrt{\mathrm{Var}\left(Y\right)}\sqrt{\mathrm{Var}\left(Z\right)}=-\frac{1}{2}\times1\times1=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y+Z)&=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+\operatorname{Var}(Z)+2\operatorname{Cov}(X,Y)+2\operatorname{Cov}(X,Z)+2\operatorname{Cov}(Y,Z)\\&=1+1+1+2\times0+2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}=3\end{aligned}$$

4.30 X 和 Y 的边缘分布律列于下表。

X \ Y	0	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

$$E(X)=1\times\frac{3}{4}+3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2},\quad E(Y)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$E(XY)=1\times1\times\frac{3}{8}+1\times2\times\frac{3}{8}+3\times3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=0\text{。}$$

所以 X 与 Y 不相关，由于 $P(X=1,Y=0)\neq P(X=1)P(Y=0)$，故 X 与 Y 不独立。

4.31 $$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y)&=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)\\&=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}\\&=20+30+2\times0.6\times\sqrt{20}\times\sqrt{30}=50+12\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y)&=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)-2\operatorname{Cov}(X,Y)\\&=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}\\&=20+30-2\times0.6\times\sqrt{20}\times\sqrt{30}=50-12\sqrt{6}\end{aligned}$$

4.32 （1）$\operatorname{Cov}(aX+b,cY+d)$

$$\begin{aligned}&=E\big[(aX+b)-E(aX+b)\big]\big[(cY+d)-E(cY+d)\big]\\&=acE\big[X-E(X)\big]\big[Y-E(Y)\big]=ac\operatorname{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

（2）当 a、c 同号时，

$$\begin{aligned}\rho(aX+b,cY+d)&=\frac{\operatorname{Cov}(aX+b,cY+d)}{\sqrt{\operatorname{Var}(aX+b)}\sqrt{\operatorname{Var}(cY+d)}}\\&=\frac{ac\operatorname{Cov}(X,Y)}{ac\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}=\rho(X,Y)\end{aligned}$$

4.33 （1） $\mathrm{Cov}(X+Y,Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]\left[Y-E(Y)\right]$

$$=E\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]+E\left[Y-E(Y)\right]^2$$
$$=\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Var}(Y)=2+6=8$$

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=3+6+2\times2=13$$

$$\rho(X+Y,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X+Y,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{8}{\sqrt{13}\times\sqrt{6}}=\frac{8}{\sqrt{78}}$$

（2） $\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]\left[(X-Y)-E(X-Y)\right]$

$$=E\left\{\left[X-E(X)\right]+\left[Y-E(Y)\right]\right\}\left\{\left[X-E(X)\right]-\left[Y-E(Y)\right]\right\}$$
$$=\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)=3-6=-3$$

$$\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=3+6-2\times2=5$$

$$\rho(X+Y,X-Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(X-Y)}}=\frac{-3}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=-\frac{3}{\sqrt{65}}$$

4.34 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}y\,\mathrm{d}y=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}xy\,\mathrm{d}y=0$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-\frac{2}{3}\times0=0$$

4.35 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^{-x},\quad x>0$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-y}\,\Gamma(2)=\mathrm{e}^{-y},\quad y>0$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}y\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\Gamma(2)=1$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^{\infty}x^3\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(4)=6$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^{\infty}y^2\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\Gamma(3)=2$$

$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=6-2^2=2$$

$$\mathrm{Var}(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)=2-1^2=1$$

$$E(XY)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x^2y\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_0^{\infty}y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\Gamma(3)\Gamma(2)=2$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2-2\times1=0$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=0$$

4.36　记 X_i 为第 i 个零件的重量（i=1,2,⋯,5000），X 为 5000 个零件的总重量，即有 $X=\sum_{i=1}^{5000}X_i$ 。依题意 $E(X_i)=0.5$, $\mathrm{Var}(X_i)=0.1^2$，由中心极限定理知，$\dfrac{X-5000\times0.5}{\sqrt{5000}\times0.1}$ 近似服从 $N(0,1)$分布，故所求概率为

$$\begin{aligned}P(X>2510)&=1-P(X\le2510)\\&=1-P\left(\frac{X-5000\times0.5}{\sqrt{5000}\times0.1}\le\frac{2510-5000\times0.5}{\sqrt{5000}\times0.1}\right)\\&\approx1-\Phi\left(\frac{2510-5000\times0.5}{\sqrt{5000}\times0.1}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{2}\right)\\&=1-0.9213=0.0787\end{aligned}$$

4.37　（1）记 X_i 为第 i 人的索赔金额，X 为 10000 个人的总索赔金额，即有 $X=\sum_{i=1}^{10000}X_i$ 。据题意

$$E(X_i)=280,\ \mathrm{Var}(X_i)=800^2$$

故所求概率为

$$\begin{aligned}P(X>2700000)&=1-P(X\le2700000)\\&=1-P\left(\frac{X-10000\times280}{\sqrt{10000}\times800}\le\frac{2700000-10000\times280}{\sqrt{10000}\times800}\right)\\&\approx1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944\end{aligned}$$

（2）$P\left(\sum_{i=1}^{50}X_i>300\right)\approx1-\Phi\left(\dfrac{300-50\times5}{\sqrt{50\times6}}\right)=1-\Phi(2.89)=0.0019$

4.38　$\mu=np=20\times0.4=8,\quad \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{8\times0.6}=\sqrt{4.8}$

(1) $P(X=4)=P(3.5<X\le4.5)=\Phi\left(\dfrac{4.5-8}{\sqrt{4.8}}\right)-\Phi\left(\dfrac{3.5-8}{\sqrt{4.8}}\right)=\Phi(-1.60)-\Phi(-2.05)$

$$=\Phi(2.05)-\Phi(1.60)=0.97982-0.94520=0.03462$$

(2) $P(3\le X\le11)=P(2.5\le X\le11.5)=\Phi\left(\dfrac{11.5-8}{\sqrt{4.8}}\right)-\Phi\left(\dfrac{2.5-8}{\sqrt{4.8}}\right)$

$$=\Phi(1.60)-\Phi(-2.51)=\Phi(1.60)+\Phi(2.51)-1=0.94520+0.99379-1=0.93899$$

(3) $P(X\ge 6)=P(X\ge 5.5)=1-\Phi\left(\frac{5.5-8}{\sqrt{4.8}}\right)=1-\Phi(-1.14)=\Phi(1.14)=0.8729$。

4.39 设该车间每月应生产 a 只显象管，其中有 X 只显象管是正品，则 $X\sim B(a,0.8)$，由题意，a 应满足 $P(X\ge 10000)=0.997$。

$$\mu=a\times 0.8=0.8a,\quad \sigma=\sqrt{a\times 0.8\times 0.2}=0.4\sqrt{a}$$

$$P(X\ge 10000)=1-\Phi\left(\frac{10000-0.8a}{0.4\sqrt{a}}\right)=0.997$$

$$\Phi\left(\frac{0.8a-10000}{0.4\sqrt{a}}\right)=0.997,\quad \frac{0.8a-10000}{0.4\sqrt{a}}=2.75$$

解得 a=12654.7，因此该车间每月应生产 12655 只显象管。

4.40 设一年内有 X 个人死亡，则 $X\sim B(10000,0.006)$。

$$\mu=10000\times 0.006=60,\quad \sigma=\sqrt{60\times 0.994}=7.7227$$

(1) P(保险公司亏本)= $P(1000X>10000\times 12)=P(X>120)$

$$=1-\Phi\left(\frac{120-60}{7.7227}\right)=1-\Phi(7.769)=1-1=0$$

(2) P(保险公司一年的利润不少于 40000 元)= $P(120000-1000X\ge 40000)$

$$=P(X\le 80)=P(X\le 80.5)=\Phi\left(\frac{80.5-60}{7.7227}\right)=\Phi(2.65)=0.9960$$

P(保险公司一年的利润不少于 60000 元)= $P(120000-1000X\ge 60000)$

$$=P(X\le 60)=P(X\le 60.5)=\Phi\left(\frac{60.5-60}{7.7227}\right)=\Phi(0.065)=0.5251$$

P(保险公司一年的利润不少于 80000 元)= $P(120000-1000X\ge 80000)=P(X\le 40)$

$$=P(X\le 40.5)=\Phi\left(\frac{40.5-60}{7.7227}\right)=\Phi(-2.525)=1-\Phi(2.525)=1-0.9942=0.0058$$

4.41 设发现的这种稀有血型人数为 X，则 $X\sim B(500,0.06)$。

$$\mu=500\times 0.06=30,\quad \sigma=\sqrt{30\times 0.94}=5.3104$$

$$P(X\ge 40)=P(X\ge 39.5)=1-\Phi\left(\frac{39.5-30}{5.3104}\right)=1-\Phi(1.789)=1-0.9633=0.0367$$

第五章

5.1 (1) $P\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\right)=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x_i!\right)}\mathrm{e}^{-n\lambda}$, $x_i=0,1,2,\cdots$, $i=1,2,\cdots,n$；

(2) $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\begin{cases}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

(3) $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}$, $-\infty<x_i<\infty$, $i=1,2,\cdots,n$ 。

5.2 （1）$P\left[\max\left(X_1,X_2,X_3,X_4\right)>24\right]=1-P\left[\max\left(X_1,X_2,X_3,X_4\right)\le 24\right]$

$$=1-\left[P\left(X\le 24\right)\right]^4=1-\left[\Phi\left(\frac{24-20}{3}\right)\right]^4=1-\left[\Phi\left(1.33\right)\right]^4=1-0.90824^4=0.320$$

（2）$P\left[\min\left(X_1,X_2,X_3,X_4\right)<18\right]=1-P\left[\min\left(X_1,X_2,X_3,X_4\right)\ge 18\right]=1-\left[P\left(X\ge 18\right)\right]^4$

$$=1-\left[1-P\left(X<18\right)\right]^4=1-\left[1-\Phi\left(\frac{18-20}{3}\right)\right]^4=1-\left[\Phi\left(0.67\right)\right]^4=1-0.7486^4=0.686$$

5.3 只有 $X_1+X_2+X_3-\mu$ 不是统计量，其他三个都是统计量。

5.4 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$ 。

5.5 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}f_ix_i,\ s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{m}f_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}f_ix_i^2-n\overline{x}^2\right)$。

5.6 （1）$\overline{x}_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i=\dfrac{n\overline{x}_n+x_{n+1}}{n+1}$；

（2）$s_{n+1}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left(x_i-\overline{x}_{n+1}\right)^2=\dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2-\left(n+1\right)\overline{x}_{n+1}^2\right]=\dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2-\dfrac{1}{n+1}\left(n\overline{x}_n+x_{n+1}\right)^2\right]$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2-\frac{1}{n+1}\left(n^2\overline{x}_n^2+2n\overline{x}_nx_{n+1}+x_{n+1}^2\right)\right]=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}_n^2+\frac{1}{n+1}\left(n\overline{x}_n^2-2n\overline{x}_nx_{n+1}+nx_{n+1}^2\right)\right]$$

$$=\frac{n-1}{n}s_n^2+\frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\overline{x}_n)^2$$

5.7 $E\left(\bar{X}\right)=\mu=60$，$\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{144}{12}=12$

5.8 使用公式 $E\left(\bar{X}\right)=\mu, \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$，各分布的结果为

（1）$E\left(\bar{X}\right)=p, \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)=\dfrac{pq}{n}$，这里 q=1−p；

（2）$E\left(\bar{X}\right)=\lambda, \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\lambda}{n}$；（3）$E\left(\bar{X}\right)=\dfrac{1}{\lambda}, \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)=\dfrac{1}{n\lambda^2}$。

5.9 $\bar{X}\sim N(8,1)$，

$$P(6\le X\le 9)=\Phi\left(\frac{9-8}{1}\right)-\Phi\left(\frac{6-8}{1}\right)=\Phi(1)+\Phi(2)-1=0.8413+0.97725-1=0.81855$$

5.10 （1）$E\left(\bar{X}\right)=\mu=240$，$\sqrt{\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{60}{\sqrt{30}}=2\sqrt{30}$；

（2）由于为大样本，故 $\bar{X}$ 的抽样分布近似为 $N(240, 120)$；

（3）$P\left(220\le\bar{X}\le 260\right)=\Phi\left(\dfrac{260-240}{2\sqrt{30}}\right)-\Phi\left(\dfrac{220-240}{2\sqrt{30}}\right)=2\Phi(1.83)-1$

$$=2\times 0.96638-1=0.93276$$

（4）$P\left(\bar{X}\ge 250\right)=1-\Phi\left(\dfrac{250-240}{2\sqrt{30}}\right)=1-\Phi(0.91)=1-0.8186=0.1814$。

5.11 由于为大样本，从而 $\bar{X}$ 的抽样分布近似为 $N\left(3.9,\dfrac{1}{30}\right)$，故

$$P\left(\bar{X}>4.15\right)=1-\Phi\left(\frac{4.15-3.9}{1/\sqrt{30}}\right)=1-\Phi(1.37)=1-0.91466=0.08534$$

5.12 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，于是

$$E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=n-1,\quad \operatorname{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$$

从而

$$E\left(S^2\right)=\sigma^2,\quad \operatorname{Var}\left(S^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

5.13 $\dfrac{X_i}{1.2}\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,8$，于是 $\dfrac{1}{1.2^2}\sum\limits_{i=1}^{8}X_i^2=\sum\limits_{i=1}^{8}\left(\dfrac{X_i}{1.2}\right)^2\sim\chi^2(8)$，从而由

$P\left(\dfrac{1}{1.2^2}\sum\limits_{i=1}^{8}X_i^2>\dfrac{A}{1.2^2}\right)=P\left(\sum\limits_{i=1}^{8}X_i^2>A\right)=0.25$ 可得 $\dfrac{A}{1.2^2}=\chi^2_{0.25}(8)=10.219$，解得 $A=14.715$。

5.14　$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，又 $\bar{X}_n$ 与 X_{n+1} 独立，于是 $X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N\left(0, \left(1+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$，由于

$\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0,1)$，　$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且两者独立，故

$$Y = \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\right) \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)} \sim t(n-1)$$

5.15　$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$，于是 $\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，同理，$\frac{(X_3 - X_4)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，

因 $\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2}$ 与 $\frac{(X_3 - X_4)^2}{2\sigma^2}$ 独立，从而 $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 - X_4)^2} = \frac{(X_1 - X_2)^2 / (2\sigma^2)}{(X_3 - X_4)^2 / (2\sigma^2)} \sim F(1,1)$，因此由

$$P\left[\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 - X_4)^2} > A\right] = 1 - P\left[\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 - X_4)^2} \le A\right] = 1 - 0.1 = 0.9$$

可得

$$A = F_{0.9}(1,1) = \frac{1}{F_{0.1}(1,1)} = \frac{1}{39.86} = 0.0251$$

第六章

6.1　由例 6.1.1 知，μ 和 σ^2 的矩估计为

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 20.733, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = 35.954$$

6.2　$E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta \, \mathrm{d}x = \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$，解得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^\theta = (\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^\theta, \quad \ln L(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

解得 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$ 。

6.3 $E(X)=\int_0^{\infty}x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{\lambda}=\bar{X}$ ，解得 λ 的矩估计为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\bar{X}}$ 。

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}=\lambda^n\,\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\text{，}\quad \ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\,\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解得 λ 的极大似然估计仍为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\bar{X}}$ 。

6.4 $L(p)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dbinom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\dbinom{m}{x_i}\right]p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+\left(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}\,p}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

解得 p 的极大似然估计为 $\hat{p}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{nm}=\dfrac{1}{m}\bar{X}$ 。

6.5 由例 6.1.7 知，μ 和 σ^2 的极大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\bar{x}=1047.1,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=12972.29$$

6.6 $f(x)=\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1},\quad \theta_1\le x\le\theta_2$ ，$E(X)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}x\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}\mathrm{d}\,x=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}=\bar{X}$

$$E(X^2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}x^2\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\mathrm{d}\,x=\frac{\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2}{3}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

从上述两个方程解得 θ_1,θ_2 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1=\bar{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2},\quad \hat{\theta}_2=\bar{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

$$L(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n},\quad \theta_1\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta_2$$

要使 $L(\theta_1, \theta_2)$不为零，必须有$\theta_1\le\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\theta_2\ge\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，此时$L(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}$，从而当$\theta_1=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\theta_2=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$时，$L(\theta_1, \theta_2)$达到最大，因此$\hat{\theta}_1=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 θ_1, θ_2 的极大似然估计。

6.7 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]$

$$\ln L(\sigma^2)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

解得 σ^2 的极大似然估计为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$。

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$$

故$\hat{\sigma}^2$为 σ^2 的无偏估计。

6.8 令 $\lambda=g(\theta)$，由于 $y=g(x)$是一一对应函数，从而当$\lambda=\hat{\lambda}=g(\hat{\theta})$ 时，有$\theta=\hat{\theta}$，而此时似然函数 L 达到最大。因此$\hat{\lambda}=g(\hat{\theta})$是 $\lambda=g(\theta)$的极大似然估计。

6.9 （1）由于$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ 是 σ^2 的一一对应函数，故由习题 6.8 和习题 6.7 知，σ 的极大似然估计为$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$；

（2）$P(X>\mu+2)=1-P(X\le\mu+2)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$，它是 σ^2 的一一对应函数，故$P(X>\mu+2)$的极大似然估计为$1-\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}\right)$；

（3）$P\left(\left|X-\mu\right|<A\right)=2\Phi\left(\frac{A}{\sigma}\right)-1=0.75$，$\Phi\left(\frac{A}{\sigma}\right)=0.875$，查表得，$\frac{A}{\sigma}=1.15$，于是 A=1.15σ 的极大似然估计为$1.15\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}$。

6.10 $E\left(X_{i+1}-X_i\right)^2=E\left[\left(X_{i+1}-\mu\right)-\left(X_i-\mu\right)\right]^2$

$$=E\left(X_{i+1}-\mu\right)^2-2E\left(X_{i+1}-\mu\right)\left(X_i-\mu\right)+E\left(X_i-\mu\right)^2$$
$$=\mathrm{Var}\left(X_{i+1}\right)+\mathrm{Var}\left(X_i\right)=2\sigma^2$$

于是

$$\sigma^2=E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}E\left(X_{i+1}-X_i\right)^2=2c\left(n-1\right)\sigma^2$$

故$c=\frac{1}{2\left(n-1\right)}$。

6.11 $f\left(x\right)=\frac{1}{\theta}$，$\theta\le x\le 2\theta$，$E\left(X\right)=\int_{\theta}^{2\theta}x\frac{1}{\theta}\mathrm{d}x=\frac{3\theta}{2}=\bar{X}$

从而 θ 的矩估计为$\hat{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$。

$$L\left(\theta\right)=\frac{1}{\theta^n},\quad \theta\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le 2\theta$$

要使 $L(\theta)$ 不为零，必须有 $\theta\le\min\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，$\theta\ge\frac{1}{2}\max\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，即有 $\frac{1}{2}\max\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\le\theta\le\min\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，此时 $L\left(\theta\right)=\frac{1}{\theta^n}$，从而当 $\theta=\frac{1}{2}\max\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$时，$L(\theta)$达到最大，因此$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\max\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$是 θ 的极大似然估计。

$F\left(x\right)=\frac{x-\theta}{\theta}$，$\theta\le x\le 2\theta$，令$Y=\max\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，则

$$f_Y\left(y\right)=n\left[F\left(y\right)\right]^{n-1}f\left(y\right)=n\left(\frac{y-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=\frac{n}{\theta^n}\left(y-\theta\right)^{n-1},\quad \theta\le y\le 2\theta$$

$$E\left(Y\right)=\int_{\theta}^{2\theta}y\frac{n}{\theta^n}\left(y-\theta\right)^{n-1}\mathrm{d}y\overset{令z=y-\theta}{=}\frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta}\left(z+\theta\right)z^{n-1}\mathrm{d}z=\frac{n}{n+1}\theta+\theta=\frac{2n+1}{n+1}\theta$$

于是

$$E\left(\hat{\theta}\right)=E\left[\frac{1}{2}\max\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\right]=\frac{2n+1}{2\left(n+1\right)}\theta$$

故 $\dfrac{2(n+1)}{2n+1}\hat{\theta}=\dfrac{n+1}{2n+1}\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是修正后的无偏估计。

6.12 $E\left(\hat{\theta}^2\right)=\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right)+E^2\left(\hat{\theta}\right)=\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right)+\theta^2>\theta^2$

故 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

6.13 $$E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{6}E(X_3)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{1}{5}E(X_2)+\frac{3}{5}E(X_3)=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{3}E(X_3)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\mu=\mu$$

从而 $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$、$\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计。

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{2^2}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{1}{3^2}\mathrm{Var}(X_2)+\frac{1}{6^2}\mathrm{Var}(X_3)=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}\right)\sigma^2=\frac{7}{18}\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{5^2}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{1}{5^2}\mathrm{Var}(X_2)+\frac{3^2}{5^2}\mathrm{Var}(X_3)=\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}\right)\sigma^2=\frac{11}{25}\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{3^2}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{1}{3^2}\mathrm{Var}(X_2)+\frac{1}{3^2}\mathrm{Var}(X_3)=\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)\sigma^2=\frac{1}{3}\sigma^2$$

由于 $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_3)$ 最小，所以 $\hat{\mu}_3$ 最有效。

6.14 $E(\hat{\mu})=aE(\bar{X})+bE(\bar{Y})=a\mu+b\mu=\mu$，故 $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计。

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\mu})&=\mathrm{Var}\left(a\bar{X}+b\bar{Y}\right)=a^2\,\mathrm{Var}\left(\bar{X}\right)+b^2\,\mathrm{Var}\left(\bar{Y}\right)=a^2\frac{\sigma_1^2}{n_1}+(1-a)^2\frac{\sigma_2^2}{n_2}\\&=\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)a^2-\frac{2\sigma_2^2}{n_2}a+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\\&=\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\left[a-\frac{\sigma_2^2}{n_2}\bigg/\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\right]^2-\frac{\sigma_2^4}{n_2^2}\bigg/\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\end{aligned}$$

所以，当 $a=\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\bigg/\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)=\dfrac{n_1\sigma_2^2}{n_2\sigma_1^2+n_1\sigma_2^2}$， $b=1-a=\dfrac{n_2\sigma_1^2}{n_2\sigma_1^2+n_1\sigma_2^2}$ 时，$\mathrm{Var}(\hat{\mu})$ 达到最小。

6.15 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{4}{n}\right)$，于是

$$P\left(\left|\bar{X}-\mu\right|<0.6\right)=\Phi\left(\frac{0.6}{2/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(-\frac{0.6}{2/\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(0.3\sqrt{n}\right)-1=0.95$$

$$\Phi\left(0.3\sqrt{n}\right)=0.975，\quad 0.3\sqrt{n}=1.96，\quad n=42.68$$

故样本容量 n 应取为 43。

6.16　μ 的 0.95 置信区间为

$$\bar{x}\pm t_{0.025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=24.33\pm 2.2622\times\frac{0.2003}{\sqrt{10}}=24.33\pm 0.143=(24.187,24.473)$$

σ^2 的 0.95 置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right)=\left(\frac{9\times 0.0401}{19.023},\frac{9\times 0.0401}{2.7}\right)=(0.019,0.134)$$

6.17　μ 的 0.99 单侧置信下限为

$$\hat{\mu}_L=\bar{x}-t_{0.01}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=2243.4-2.8214\times\frac{86.6169}{\sqrt{10}}=2243.4-77.28=2166.12$$

σ^2 的 0.95 单侧置信上限为

$$\hat{\sigma}_U^2=\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.95}^2(n-1)}=\frac{9\times 7502.4889}{3.325}=20307$$

6.18　（1）μ 的 0.95 置信区间为

$$\bar{x}\pm u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=6\pm 1.96\times\frac{0.6}{\sqrt{9}}=6\pm 0.392=(5.608,6.392)$$

μ 的 0.95 单侧置信上限为

$$\hat{\mu}_U=\bar{x}+u_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=6+1.645\times\frac{0.6}{\sqrt{9}}=6+0.329=6.329$$

（2）μ 的 0.95 置信区间为

$$\bar{x}\pm t_{0.025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=6\pm 2.3060\times\frac{0.5745}{\sqrt{9}}=6\pm 0.442=(5.558,6.442)$$

μ 的 0.95 单侧置信上限为

$$\hat{\mu}_U=\bar{x}+t_{0.05}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=6+1.8595\times\frac{0.5745}{\sqrt{9}}=6+0.356=6.356$$

6.19　μ 的 0.95 置信区间为

$$\bar{x}\pm t_{0.025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=80\pm 2.1098\times\frac{10}{\sqrt{18}}=80\pm 4.973=(75.027,84.973)$$

6.20　μ 的 0.90 置信区间为

$$\bar{x}\pm u_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}=1.6\pm 1.645\times\frac{0.7}{\sqrt{36}}=1.6\pm 0.192=(1.408,1.792)$$

6.21 从 $2u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le l$ 解得 $n\ge\left(\dfrac{2\sigma}{l}u_{\alpha/2}\right)^2$

6.22 $\mu_1-\mu_2$ 的 0.95 置信区间为

$$\begin{aligned}(\bar{x}-\bar{y})\pm u_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}&=(21-28)\pm1.96\times\sqrt{\frac{0.5^2}{20}+\frac{0.7^2}{20}}=-7\pm0.377\\&=(-7.377,-6.623)\end{aligned}$$

6.23 $\bar{x}=1650.5,\ \bar{y}=1442.875,\ s_1^2=17471.6111,\ s_2^2=9525.5536$

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{9\times17471.6111+7\times9525.5536}{16}=13995.211$$

$s_p=118.301$，从而 $\mu_1-\mu_2$ 的 0.90 置信区间为

$$\begin{aligned}(\bar{x}-\bar{y})\pm t_{0.05}(16)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}&=(1650.5-1442.875)\pm1.7459\times118.301\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}\\&=207.625\pm97.971=(109.65,305.60)\end{aligned}$$

6.24 $\mu_1-\mu_2$ 的 0.95 置信区间为

$$\begin{aligned}(\bar{x}-\bar{y})\pm u_{0.025}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}&=(7.2-6.4)\pm1.96\times\sqrt{\frac{0.95^2}{36}+\frac{0.77^2}{44}}\\&=0.8\pm0.384=(0.416,1.184)\end{aligned}$$

6.25 σ 的 0.95 置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{0.025}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{0.975}(n-1)}}\right)=\left(\frac{\sqrt{8}\times11}{\sqrt{17.535}},\frac{\sqrt{8}\times11}{\sqrt{2.180}}\right)=(7.430,21.072)$$

6.26 σ^2 的 0.95 置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95}(n-1)}\right)=\left(\frac{21\times0.6^2}{32.671},\frac{21\times0.6^2}{11.591}\right)=(0.231,0.652)$$

σ 的 0.95 置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{0.05}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{0.95}(n-1)}}\right)=\left(\sqrt{0.231},\sqrt{0.652}\right)=(0.481,0.807)$$

6.27 σ_1^2/σ_2^2 的 0.90 置信区间为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.05}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.95}(n_1-1,n_2-1)}\right)=\left(\frac{0.36/0.59}{F_{0.05}(13,17)},\frac{0.36/0.59}{1/F_{0.05}(17,13)}\right)\\&=\left(\frac{0.36/0.59}{2.353},\frac{0.36/0.59}{1/2.499}\right)=(0.259,1.525)\end{aligned}$$

6.28　σ_1^2/σ_2^2 的 0.95 置信区间为

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}\right)=\left(\frac{80/170}{F_{0.025}(20,24)},\frac{80/170}{1/F_{0.025}(24,20)}\right)$$
$$=\left(\frac{80/170}{2.33},\frac{80/170}{1/2.41}\right)=(0.202,1.134)$$

σ_1/σ_2 的 0.95 置信区间为

$$\left(\frac{s_1/s_2}{\sqrt{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)}},\frac{s_1/s_2}{\sqrt{F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}}\right)=\left(\sqrt{0.202},\sqrt{1.134}\right)=(0.449,1.065)$$

第七章

7.1　建立假设

$$H_0:\mu\geq1200,\ H_1:\mu<1200$$

选取检验统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

其观测值为

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1160-1200}{80/\sqrt{15}}=-1.936$$

由于 $u<-u_{0.05}=-1.645$，故拒绝 H_0，即能判断这批元件不合格。

$$p=P(U<-1.936)=\Phi(-1.936)=1-\Phi(1.936)=1-0.9738=0.0262$$

7.2　建立假设

$$H_0:\mu\geq32.5,\ H_1:\mu<32.5$$

选取检验统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

其观测值为

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{31.805-32.5}{1.1/\sqrt{8}}=-1.787$$

取 α=0.05 时，由于 $u<-u_{0.05}=-1.645$，从而拒绝 H_0，即有充分的理由否定厂方的说法；取 α=0.01 时，由于 $u>-u_{0.01}=-2.32$，从而接受 H_0，即没有充分的理由否定厂方的说法。

7.3 （1）选取检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

其观测值为

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{820-800}{60/\sqrt{18}}=1.414$$

查表得，$t_{0.025}(17)=2.1098$，因$|t|<t_{0.025}(17)$，故接受 H_0；

（2）选取检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

其观测值为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(18-1)\times 60^2}{1470}=41.633$$

查表得，$\chi^2_{0.025}(17)=30.191$，由于 $\chi^2>\chi^2_{0.025}(17)$，所以拒绝 H_0。

7.4 建立假设

$$H_0:\mu=120，H_1:\mu\neq 120$$

选取检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

其观测值为

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{118.9-120}{4.9318/\sqrt{10}}=-0.705$$

查表得，$t_{0.025}(9)=2.2622$，因$|t|<t_{0.025}(9)$，故接受 H_0，即该样本数据不能充分说明制造过程运行不佳。

7.5 建立假设

$$H_0:\mu_1\leq\mu_2，H_1:\mu_1>\mu_2$$

采用检验统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

其观测值为

$$u=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{62-59}{\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{36}{16}}}=1.338$$

由于 $u<u_{0.05}=1.645$，因此接受 H_0，即这些数据不能有力地支持 $\mu_1>\mu_2$ 的结论。

7.6　建立假设

$$H_0:\mu_1=\mu_2,\quad H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

采用检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

其观测值为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{2.33-0.75}{\sqrt{\frac{9\times 4.009+9\times 3.201}{18}}\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}=1.861$$

由于 $|t|<t_{0.025}(18)=2.1009$，故接受 H_0，即无显著差异。

$$p=P\left(|T|\geq 1.861\right)=0.079$$

7.7　建立假设

$$H_0:\mu_1=\mu_2,\quad H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

（1）采用检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

其观测值为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{83-77}{\sqrt{\frac{10\times 10^2+12\times 12^2}{22}}\times\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{13}}}=1.315$$

由于 $|t|<t_{0.05}(22)=1.7171$，故接受 H_0，即这些数据不足以推论两个班级的平均分数不同；

（2）采用检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

其观测值为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}=\frac{83-77}{\sqrt{\frac{10^2}{11}+\frac{12^2}{13}}}=1.336$$

t 分布的自由度为

$$v=\frac{\left(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(10^2/11+12^2/13\right)^2}{\frac{\left(10^2/11\right)^2}{10}+\frac{\left(12^2/13\right)^2}{12}}=21.999\approx 22$$

由于$|t|<t_{0.05}(22)=1.7171$，故接受 H_0。

7.8　建立假设

$$H_0:\mu_1=\mu_2，H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

选取检验统计量

$$T=\frac{\bar{D}}{S/\sqrt{n}}$$

根据 $d_i=x_i-y_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$ 算得 10 个差值为

5，−1，11，0，17，17，10，−5，13，16

这组差值的样本均值和样本标准差为

$$\bar{d}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}d_i=8.3,\quad s=\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}=8.0698$$

于是统计量 T 的观测值为

$$t=\frac{\bar{d}}{s/\sqrt{n}}=\frac{8.3}{8.0698/\sqrt{10}}=3.252$$

查表得 $t_{0.025}(9)=2.2622$，由于$|t|>t_{0.025}(9)$，故拒绝 H_0，即有显著差异。

$$p=P\left(|T|\geq 3.252\right)=0.010$$

7.9　建立假设

$$H_0:\mu_1\leq\mu_2，H_1:\mu_1>\mu_2$$

选取检验统计量

$$T = \frac{\bar{D}}{S/\sqrt{n}}$$

根据 $d_i = x_i - y_i\left(i = 1,2,\cdots,15\right)$ 算得 15 个差值为

−0.8，1.6，−0.5，0.2，−1.6，0.2，1.6，1.0，0.8，1.0，1.7，1.2，1.9，0.0，0.0

这组差值的样本均值和样本标准差为

$$\bar{d} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} d_i = 0.5533, \quad s = \sqrt{\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} = 1.0225$$

于是统计量 T 的观测值为

$$t = \frac{\bar{d}}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.5533}{1.0225/\sqrt{15}} = 2.096$$

查表得 $t_{0.05}(14)=1.7613$，由于 $t>t_{0.05}(14)$，故拒绝 H_0，即可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿。

$$p = P\left(T \geq 2.096\right) = 0.027$$

7.10　建立假设

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2,\ H_1: \mu_1 < \mu_2$$

采用检验统计量

$$T = \frac{\bar{D}}{S/\sqrt{n}}$$

根据 $d_i = x_i - y_i\left(i = 1,2,\cdots,7\right)$ 算得 7 个差值为

−3，2，−5，−6，−3，−2，0

这组差值的样本均值和样本标准差为

$$\bar{d} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} d_i = -2.4286, \quad s = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} = 2.7603$$

于是统计量 T 的观测值为

$$t = \frac{\bar{d}}{s/\sqrt{n}} = \frac{-2.4286}{2.7603/\sqrt{7}} = -2.328$$

查表得 $t_{0.05}(6)=1.9432$，因 $t<t_{0.05}(6)$，所以拒绝 H_0，即这些数据表明使用计算机字处理系统使平均打字速度提高了。

7.11　建立假设

$$H_0: \sigma^2=0.0004，H_1: \sigma^2\neq 0.0004$$

检验统计量的观测值为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(15-1)\times 0.025^2}{0.0004}=21.875$$

查 χ^2 分布表得 $\chi^2_{0.975}(14)=5.629, \chi^2_{0.025}(14)=26.119$，由于 $\chi^2_{0.975}(14)<\chi^2<\chi^2_{0.025}(14)$，所以接受 H_0，即该批轴料椭圆度的方差与规定的无显著差别。

7.12　建立假设

$$H_0: \sigma^2\leq 0.0006，H_1: \sigma^2>0.0006$$

检验统计量的观测值为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(20-1)\times 0.0008}{0.0006}=25.333$$

由于 $\chi^2<\chi^2_{0.05}(19)=30.144$，故接受 H_0，即这些数据不足以表明总体方差违背了规格。

7.13　建立假设

$$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

选取检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

其观测值为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{1.621}{0.135}=12.007$$

查表得，$F_{0.025}(9, 4)=8.90$，由于 $F>F_{0.025}(9, 4)$，故拒绝 H_0，即这两种小麦蛋白质含量的方差有显著差异。

7.14　建立假设

$$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1: \sigma_1^2>\sigma_2^2$$

检验统计量的观测值为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{6.37}{3.19}=1.997$$

查表得，$F_{0.05}(24, 14)=2.35$，由于 $F<F_{0.05}(24, 14)$，故接受 H_0，即这组数据还不足以说明新工艺的精确度比老工艺好。

7.15　建立假设

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

检验统计量的观测值为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{80}{170}=0.471$$

查表得，$F_{0.975}\left(20,24\right)=\dfrac{1}{F_{0.025}\left(24,20\right)}=\dfrac{1}{2.41}=0.415, F_{0.025}\left(20,24\right)=2.33$，由于 $F_{0.975}(20, 24)< F< F_{0.025}(20, 24)$，故接受 H_0，即男、女申请者测试分数的总体方差无显著差异。。

7.16　建立假设

$$H_0:p_i=\frac{1}{6}, i=1,2,\cdots,6\text{，}\quad H_1:p_i\neq\frac{1}{6}\text{，至少存在一个 } i$$

当 H_0 为真时，$np_i=100\times\dfrac{1}{6}=16.6667$，计算 χ^2 检验统计量的必要计算过程见下表。

点　数	1	2	3	4	5	6	合计
观测频数 f_i	16	23	12	18	11	20	100
期望频数 np_i	16.6667	16.6667	16.6667	16.6667	16.6667	16.6667	100
$\left(f_i-np_i\right)^2/np_i$	0.0267	2.4067	1.3067	0.1067	1.9267	0.6667	6.44

由于 $\chi^2=6.44<\chi^2_{0.05}\left(5\right)=11.071$（或 p=0.266），故接受 H_0，即无充分理由否定这颗骰子是均匀的说法。

7.17　建立假设

$$H_0:p_1=0.1, p_2=0.3, p_3=0.35, p_4=0.15, p_5=0.1\text{，}\quad H_1:H_0\text{ 不正确}$$

计算 χ^2 检验统计量的必要计算过程如下表所示。

分　数	优	良	中	及格	不及格	合计
观测频数 f_i	16	35	29	23	7	110
期望频数 np_i	11	33	38.5	16.5	11	110
$\left(f_i-np_i\right)^2/np_i$	2.2727	0.1212	2.3442	2.5606	1.4545	8.7532

由于 $\chi^2=8.7532<\chi^2_{0.05}\left(4\right)=9.488$（或 $p=0.068$），故接受 H_0，即实际分数未显著偏离分数分布原则。

7.18　建立假设

H_0:X 服从泊松分布，H_1:X 不服从泊松分布

λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\bar{x}=0.805$，必要计算过程见下表。

过路的车辆数 X	0	1.	2	≥ 3	合计
观测频数 f_i	92	68	28	12	200
期望频数 $n\hat{p}_i$	89.4176	71.9812	28.9724	9.3388	200
$\left(f_i-n\hat{p}_i\right)^2/n\hat{p}_i$	0.0746	0.2202	0.0326	0.7583	1.0857

由于 $\chi^2=1.086<\chi^2_{0.1}(2)=4.605$(或$p=0.581$)，故接受 H_0，即该分布未显著偏离泊松分布。

7.19　建立假设

H_0:X 服从二项分布，　H_1:X 不服从二项分布

p 的极大似然估计值为 $\hat{p}=0.1$，必要计算过程见下表。

每次取出的次品数 X	0	1.	2	≥ 3	合计
观测频数 f_i	35	40	18	7	100
期望频数 $n\hat{p}_i$	34.8678	38.7421	19.3710	7.0044	100
$\left(f_i-n\hat{p}_i\right)^2/n\hat{p}_i$	0.0005	0.0408	0.0970	0.0000	0.1384

由于 $\chi^2=0.138<\chi^2_{0.05}(2)=5.991$(或$p=0.933$)，因此接受 H_0，即该分布未显著偏离二项分布。

7.20　建立假设

H_0:X 服从正态分布，　H_1:X 不服从正态分布

将每一组的数据用组中值代替，求出 μ 和 σ 的极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}=3.7,\hat{\sigma}=9.8392$，

计算过程见下表。

尺寸偏差的组限	$(-\infty,-15)$	$[-15,-10)$	$[-10,-5)$	$[-5,0)$	$[0,5)$	$[5,10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,\infty)$	合计
观测频数 f_i	7	14	15	27	49	41	20	17	10	200
期望频数 $n\hat{p}_i$	5.7360	10.6445	21.2774	33.0304	39.8232	37.2906	27.1205	15.3183	9.7593	200
$\left(f_i-n\hat{p}_i\right)^2/n\hat{p}_i$	0.2785	1.0578	1.8520	1.1010	2.1147	0.3690	1.8695	0.1846	0.0059	8.8330

因 $\chi^2=8.833<\chi^2_{0.05}(6)=12.592$(或$p=0.183$)，故接受 H_0，即尺寸偏差的分布未显著偏离正态分布。

7.21　建立假设

H_0:X 服从正态分布，　H_0:X 不服从正态分布

μ 和 σ 的极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}=145.938, \hat{\sigma}=20.609$，计算过程见下表。

工作寿命组限	$(-\infty,130)$	$[130,145)$	$[145,160)$	$[160,\infty)$	合计
观测频数 f_i	6	8	10	8	32
期望频数 $n\hat{p}_i$	7.0290	8.3902	8.6602	7.9206	32
$\left(f_i-n\hat{p}_i\right)^2/n\hat{p}_i$	0.1506	0.0181	0.2073	0.0008	0.3769

由于 $\chi^2=0.377<\chi^2_{0.05}(1)=3.841(\text{或}p=0.539)$，故接受 H_0，即工作寿命的分布未显著偏离正态分布。

7.22　建立假设

H_0:X 服从指数分布，　H_0:X 不服从指数分布

将每一组的数据用组中值代替，最后一组用 42.5 代替，求出 λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=1/\bar{x}=0.07414$，必要计算过程见下表。

间隔天数 X	$[0,5)$	$[5,10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,40)$	≥ 40	合计
观测频数 f_i	50	31	26	17	10	8	12	8	162
期望频数 $n\hat{p}_i$	50.180 5	34.636 8	23.907 8	16.502 2	11.390 6	7.8623	9.1728	8.347 1	162
$\left(f_i-n\hat{p}_i\right)^2/n\hat{p}_i$	0.0006	0.3819	0.1831	0.0150	0.1698	0.0024	0.8714	0.014 4	1.638 6

因为 $\chi^2=1.639<\chi^2_{0.05}(6)=12.592(\text{或}p=0.950)$，所以接受 H_0，即相继两次地震间隔时间的分布未显著偏离指数分布。

第八章

8.1　建立假设

H_0: $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_5=0$，$H_1$: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5$ 不全为零

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	0.3416	4	0.0854	5.77
误差	0.2960	20	0.0148	
总　计	0.6376	24		

查 F 分布表得，$F_{0.05}(4, 20)=2.87$，因 $F>F_{0.05}(4, 20)$，故拒绝 H_0，即这五台织布机的每分钟平均产量有显著差异。

8.2　建立假设

$$H_0: \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_5=0，H_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5 \text{不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	405.5343	4	101.3836	11.28
误差	269.7371	30	8.9912	
总　计	675.2714	34		

查 F 分布表得，$F_{0.05}(4, 30)=2.69$，由于 $F>F_{0.05}(4, 30)$，故拒绝 H_0，即五种方法的平均推销额有显著差异。

8.3　建立假设

$$H_0: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0，H_1: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	1894.4667	2	947.2333	22.79
误差	1122.2000	27	41.5630	
总　计	3016.6667	29		

查 F 分布表得，$F_{0.01}(2, 27)=5.49$，由于 $F> F_{0.01}(2, 27)$，所以拒绝 H_0，即三家企业职工的平均业务水平有显著差异。

8.4　建立假设

$$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=0，H_{11}: \alpha_1, \alpha_2 \text{不全为零}$$
$$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=0，H_{12}: \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{不全为零}$$
$$H_{03}: \gamma_{11}=\gamma_{12}=\cdots=\gamma_{23}=0，H_{13}: \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{23} \text{不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	48	1	48	3.00
因素 B	344	2	172	10.75
交互作用	56	2	28	1.75
误差	96	6	16	

总　计	544	11	

(1)由于 $F_{A\times B}=1.75<F_{0.05}(2,6)=5.14$，故接受 H_{03}，即广告方案因素与广告大小因素无显著的交互作用。(2)由于 $F_A=3.00<5.99=F_{0.05}(1,6)$，故接受 H_{01}，即大小两个广告收到邮购请求的平均数目无显著差异。(3)由于 $F_B=10.75>5.14=F_{0.05}(2,6)$，故拒绝 H_{02}，即三个广告方案收到邮购请求的平均数目有显著差异。

8.5　建立假设

$$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0，H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 不全为零}$$

$$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=0，H_{12}: \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 不全为零}$$

$$H_{03}: \gamma_{11}=\gamma_{12}=\cdots=\gamma_{33}=0，H_{13}: \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{33} \text{ 不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	76.2222	2	38.1111	30.26
因素 B	214.2222	2	107.1111	85.06
交互作用	11.5556	4	2.8889	2.29
误差	22.6667	18	1.2593	
总　计	324.6667	26		

(1)因 $F_{A\times B}=2.29<2.93=F_{0.05}(4, 18)$，故接受 H_{03}，即种子品种因素与化肥因素无显著交互作用。(2)因 $F_A=30.26>3.55=F_{0.05}(2, 18)$，故拒绝 H_{01}，即三个种子品种下的平均产量有显著差异。(3)因 $F_B=85.06>3.55=F_{0.05}(2, 18)$，故拒绝 H_{02}，即三个化肥水平的平均产量有显著差异。

8.6　建立假设

$$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0，H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 不全为零}$$

$$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0，H_{12}: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \text{ 不全为零}$$

$$H_{03}: \gamma_{11}=\gamma_{12}=\cdots=\gamma_{44}=0，H_{13}: \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{44} \text{ 不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	70.5938	3	23.5313	17.51
因素 B	8.5937	3	2.8646	2.13
交互作用	79.5312	9	8.8368	6.58
误差	21.5	16	1.3437	

总　计	180.2187	31	

由于 $F_{A\times B}$ =6.58>2.54=$F_{0.05}(9, 16)$，故拒绝 H_{03}，即收缩率因素与总拉伸倍数因素有显著的交互作用。此时再对 H_{01} 和 H_{02} 进行检验已无实际意义。

8.7　建立假设

$$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3= 0，H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{不全为零}$$

$$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0，H_{12}: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \text{不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	3000.6667	2	1500.3333	6.61
因素 B	82619.5833	3	27539.8611	121.26
误差	1362.6667	6	227.1111	
总　计	86982.9167	11		

(1)由于 F_A=6.61>$F_{0.05}(2, 6)$=5.14，所以拒绝 H_{01}，即三种不同加压水平之间的纱支强度有显著差异。(2)由于 F_B=121.26>4.76=$F_{0.05}(3, 6)$，所以拒绝 H_{02}，即四台不同机器之间纱支强度有显著差异。

8.8　建立假设

$$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3= 0，H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{不全为零}$$

$$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0，H_{12}: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \text{不全为零}$$

将主要计算过程列成如下的方差分析表。

来　源	平方和	自由度	均方	F
因素 A	28.2917	2	14.1458	35.74
因素 B	66.0625	3	22.0208	55.63
误差	2.3750	6	0.3958	
总　计	96.7292	11		

(1)因为 F_A=35.74>5.14=$F_{0.05}(2, 6)$，故拒绝 H_{01}，即不同促进剂之间的定强有显著差异。(2)因为 F_B=55.63>4.76=$F_{0.05}(3, 6)$，故拒绝 H_{02}，即不同分量的氧化锌之间的定强有显著差异。

8.9　(1) $\bar{y}=\dfrac{1}{10}\times\sum_{i=1}^{10}y_i=\dfrac{1}{10}\times 1110=111$,　$\bar{x}=\dfrac{1}{10}\times\sum_{i=1}^{10}x_i=\dfrac{1}{10}\times 1680=168$

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2=315400-10\times168^2=33160$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\,\bar{y}=204200-10\times168\times111=17720$$

由(8.3.8)、(8.3.9)式得

$$b_1=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{17720}{33160}=0.5344$$

$$b_0=\bar{y}-b_1\bar{x}=111-0.5344\times168=21.224$$

(2) $\mathrm{SST}=l_{yy}=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2=133300-10\times111^2=10090$

$$\mathrm{SSR}=b_1l_{xy}=0.5344\times17720=9469.568$$

$$\mathrm{SSE}=\mathrm{SST}-\mathrm{SSR}=10090-9469.568=620.432$$

$$\mathrm{MSE}=\frac{\mathrm{SSE}}{n-2}=\frac{620.432}{10-2}=77.554,\quad \sqrt{\mathrm{MSE}}=8.8065$$

$$s(b_0)=\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}}\times\sqrt{\mathrm{MSE}}=\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{168^2}{33160}}\times8.8065=8.589$$

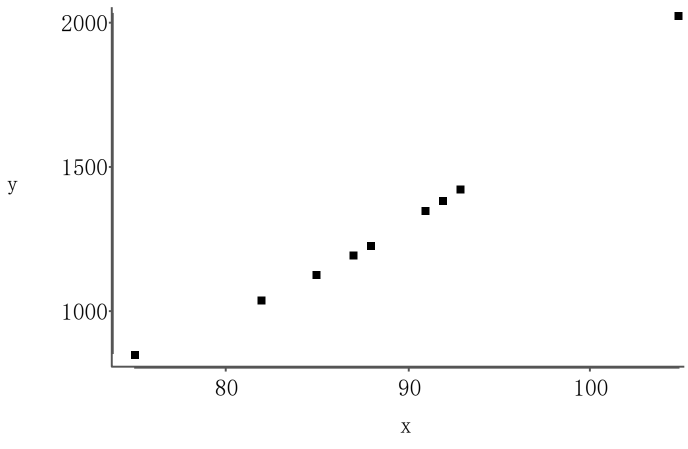
$$s(b_1)=\sqrt{\frac{\mathrm{MSE}}{l_{xx}}}=\sqrt{\frac{77.554}{33160}}=0.0484$$

(3) $r^2=\dfrac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{SST}}=\dfrac{9469.568}{10090}=0.9385$

(4) $b_1\pm t_{0.025}(8)s(b_1)=0.5344\pm2.306\times0.0484=(0.4228,0.6460)$

(5) $t=\dfrac{b_1}{s(b_1)}=\dfrac{0.5344}{0.0484}=11.041$，因$|t|>2.306=t_{0.025}(8)$，从而拒绝 H_0。

8.10 (1)



(2)SAS 软件的输出结果如下：

参数估计值							
变量	自由度	估计值	标准误差	T 统计量	Pr >|t|	容差	方差膨胀因子 (VIF)
Intercept	1	-2196.8958	227.2610	-9.67	<.0001	.	0
x	1	39.4236	2.5532	15.44	<.0001	1.0000	1.0000

为检验假设 H_0:β_1=0，H_1:$\beta_1\neq$0，从该输出可见，t=15.44，因$|t|$>2.3646=$t_{0.025}$(7)(或由输出知 p<0.0001)，所以拒绝 H_0，即认为承载能力与轮胎等级之间存在线性关系；

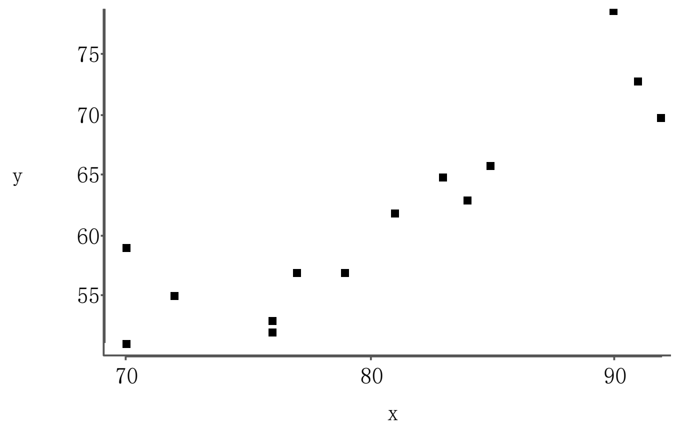
(3)从上述输出知，估计回归函数为 $\hat{y}=-2196.896+39.424x$；

(4)等级分为 90 的轮胎，其平均承载能力的点估计和承载能力的点预测皆为

$$\hat{y}=-2196.896+39.424\times 90=1351.232$$

(5)可使用 SAS 软件的分析家菜单系统算得：轮胎的等级分为 90 时，平均承载能力的 0.95 置信区间为 (1303.354, 1399.109)，承载能力的 0.95 预测区间为(1201.768, 1500.695)。

8.11　(1)



(2)SAS 软件的输出结果如下：

模型方程
y = − 18.3151 + 0.9931 x

该输出直接给出了估计回归函数为 $\hat{y}=-18.315+0.993x$；

(3)SAS 软件输出如下的方差分析表。

方差分析					
源	自由度	平方和	均方	F 统计量	Pr > F
模型	1	709.9005	709.9005	46.68	<.0001
误差	13	197.6995	15.2077		
C 合计	14	907.6000			

由于 F=46.68>4.67=$F_{0.05}$(1, 13)(或由输出知 p<0.0001)，所以拒绝 H_0，即认为工作定额与推销才能的测验分数之间存在线性关系；

(4) $r^2=\dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}}=\dfrac{709.9005}{907.6}=0.7822$。

8.12　(1)SAS 软件的输出结果如下：

参数估计值							
变量	自由度	估计值	标准误差	T 统计量	Pr > |t|	容差	方差膨胀因子 (VIF)
Intercept	1	5.8764	5.5448	1.06	0.2986	.	0
x1	1	2.5356	0.5331	4.76	<.0001	0.9848	1.0154
x2	1	0.4841	0.1174	4.12	0.0003	0.9848	1.0154

从上述输出知，估计回归函数为 $\hat{y}=5.876+2.536x_1+0.484x_2$；

(2)SAS 软件输出的方差分析表如下。

方差分析					
源	自由度	平方和	均方	F 统计量	Pr > F
模型	2	8544.1920	4272.0960	17.66	<.0001
误差	27	6531.8681	241.9210		
C 合计	29	15076.0601			

由于 F=17.66>3.35=$F_{0.05}(2, 27)$(或由输出知 p<0.0001)，故拒绝 H_0，即认为每股价格与每股帐面价值、每股资本收益率之间存在线性关系；

(3)由方差分析表知，$R^2=\frac{\text{SSR}}{\text{SST}}=\frac{8544.192}{15076.0601}=0.5667$；

(4)由(1)中的 SAS 输出知，两个检验的 t 值分别是 t=4.76 和 t=4.12，其$|t|$皆大于临界值 $t_{0.025}(27)$=2.0518，故两个 H_0 都要拒绝，即每股帐面价值和每股资本收益率都对每股价格有显著影响；

(5) SAS 软件的输出结果如下：

参数的 95% 置信区间			
变量	估计值	下限	上限
Intercept	5.8764	-5.5007	17.2534
x1	2.5356	1.4417	3.6294
x2	0.4841	0.2431	0.7251

β_1 和 β_2 的 0.95 置信区间分别为(1.4417, 3.6294)和(0.2431, 0.7251)；

(6) $\hat{y}=5.876+2.536\times 9.48+0.484\times 17.5=38.385$；

(7)由 SAS 输出可得，平均每股价格的 0.95 置信区间为(32.103, 44.668)，和每股价格的 0.95 预测区间为(5.859, 70.912)。

8.13　(1)SAS 软件的输出结果如下：

参数估计值							
变量	自由度	估计值	标准误差	T 统计量	Pr > |t|	容差	方差膨胀因子 (VIF)
Intercept	1	162.8759	25.7757	6.32	<.0001	.	0
x1	1	-1.2103	0.3015	-4.01	0.0007	0.7386	1.3540
x2	1	-0.6659	0.8210	-0.81	0.4274	0.3620	2.7625
x3	1	-8.6130	12.2413	-0.70	0.4902	0.3481	2.8726

估计回归函数为 $\hat{y}=162.876-1.210x_1-0.666x_2-8.613x_3$；

(2)SAS 软件输出的方差分析表如下。

方差分析					
源	自由度	平方和	均方	F 统计量	Pr > F
模型	3	4133.6332	1377.8777	13.01	<.0001
误差	19	2011.5842	105.8729		
C 合计	22	6145.2174			

由于 F=13.01>3.13=$F_{0.05}(3, 19)$(或由输出知 p<0.0001)，故拒绝 H_0，即认为病人满意程度与病人年龄、病情严重性、忧郁程度之间存在线性关系；

(3) $R^2 = \dfrac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \dfrac{4133.6332}{6145.2174} = 0.6727$；

(4)由(1)中的 SAS 输出知，$|t|$=4.01>2.0930=$t_{0.025}(19)$(或由输出知 p=0.0007<α=0.05)，故拒绝 H_0:β_1=0，即病人年龄对病人满意程度有显著影响；$|t|$=0.81<$t_{0.025}(19)$(或由输出知 p=0.4274>α=0.05)，故接受 H_0:β_2=0，即病情严重性对病人满意程度无显著影响；$|t|$=0.70<$t_{0.025}(19)$(或由输出知 p=0.4902>α=0.05)，故接受 H_0:β_3=0，即忧郁程度对病人满意程度无显著影响。

(5)SAS 软件的输出结果如下：

参数的 95% 置信区间			
变量	估计值	下限	上限
Intercept	162.8759	108.9268	216.8250
x1	−1.2103	−1.8413	−0.5794
x2	−0.6659	−2.3843	1.0525
x3	−8.6130	−34.2343	17.0082

β_1, β_2 和 β_3 的 0.95 置信区间分别为(−1.8413, −0.5794), (−2.3843, 1.0525)和(−34.2343, 17.0082)；

(6) $\hat{y} = 162.876 - 1.210 \times 32 - 0.666 \times 49 - 8.613 \times 2.3 = 71.7$；

(7)由 SAS 输出可得，平均满意程度的 0.95 置信区间为(64.7, 78.7)，满意程度的 0.95 预测区间为(49.1, 94.4)。