另一些元素接近于±1。

因子旋转方法有正交旋转和斜交旋转两类，本书中我们只讨论正交旋转。对公共因子作正交旋转相当于对载荷矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一正交变换，右乘正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{AT}$ 能有更鲜明的实际意义。旋转后的公共因子向量为 $\boldsymbol{f}^*=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{f}$，它的几何意义是在 m 维空间上对原因子轴作一刚性旋转。因子旋转不改变共性方差和残差矩阵，这是因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^{*\prime}=\boldsymbol{ATT'A'}=\boldsymbol{AA'}$。正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的不同选取法构成了正交旋转的各种不同方法，在这些方法中使用最普遍的是最大方差旋转法(Varimax)，本节仅介绍这一种正交旋转法。

令

$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{AT}=(a_{ij}^*),\quad d_{ij}=a_{ij}^*/h_i$$

$$\bar{d}_j=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}d_{ij}^2$$

则 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 j 列元素平方的**相对方差**可定义为

$$V_j=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(d_{ij}^2-\bar{d}_j)^2 \tag{8.4.1}$$

以上用 a_{ij}^* 除以 h_i 是为了消除公共因子对各原始变量的方差贡献不同的影响，取 d_{ij}^2 是为了消除 d_{ij} 符号不同的影响。所谓**最大方差旋转法**就是选择正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 所有 m 个列元素平方的相对方差之和

$$V=V_1+V_2+\cdots+V_m \tag{8.4.2}$$

达到最大。

当 $m=2$ 时，设已求出的因子载荷矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix}$$

现选取正交变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 进行因子旋转，$\boldsymbol{T}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

这里 θ 是坐标平面上因子轴按逆时针方向旋转的角度，只要求出 θ，也就求出了 $\boldsymbol{T}$。

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{AT}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta & -a_{11}\sin\theta + a_{12}\cos\theta \\ a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta & -a_{21}\sin\theta + a_{22}\cos\theta \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}\cos\theta + a_{p2}\sin\theta & -a_{p1}\sin\theta + a_{p2}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}^* & a_{p2}^* \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = a_{ij}^* / h_i, \quad i=1,2,\cdots,p, \quad j=1,2$$

$$\bar{d}_j = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_{ij}^2, \quad j=1,2$$

再由(8.4.1)式和(8.4.2)式即可求得 $\boldsymbol{A}^*$ 各列元素平方的相对方差之和 V。显然，V 是旋转角度 θ 的函数，按照最大方差旋转法的原则，应求出 θ，使 V 达到最大。由微积分中求极值的方法，将 V 对 θ 求导，并令其为零，可以推得 θ 满足

$$\mathrm{tg}4\theta = \frac{c_4 - 2c_1c_2/p}{c_3 - (c_1^2 - c_2^2)/p} \tag{8.4.3}$$

其中

$$c_1 = \sum_{i=1}^{p} u_i, \quad c_2 = \sum_{i=1}^{p} v_i$$

$$c_3 = \sum_{i=1}^{p} (u_i^2 - v_i^2), \quad c_4 = 2\sum_{i=1}^{p} u_i v_i$$

而

$$u_i = \left(\frac{a_{i1}}{h_i}\right)^2 - \left(\frac{a_{i2}}{h_i}\right)^2, \quad v_i = 2\,\frac{a_{i1}a_{i2}}{h_i^2}$$

当 $m>2$ 时，我们可以逐次对每两个因子进行上述的旋转。对因子 f_l 和 f_k 进行旋转，就是对 $\boldsymbol{A}$ 的第 l 和 k 两列进行正交变换，使这两列元素平方的相对方差之和达到最大，而其余各列不变，其正交变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{lk}=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ &\ddots&&&&&&&&& \\ &&1&&&&&&&& \\ &&&\cos\theta&&&&-\sin\theta&&& \\ &&&&1&&&&&& \\ &&&&&\ddots&&&&& \\ &&&&&&1&&&& \\ &&&\sin\theta&&&&\cos\theta&&& \\ &&&&&&&&1&& \\ &&&&&&&&&\ddots& \\ &&&&&&&&&&1\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} &&&l&&&&k&&& \end{array} & \end{array}$$

其中 θ 是因子轴 f_l 和 f_k 的旋转角度，矩阵中其余位置上的元素全为 0。m 个因子的两两配对旋转共需进行 $\binom{m}{2}=\frac{1}{2}m(m-1)$ 次，称其为完成了第一轮旋转，并记第一轮旋转后的因子载荷矩阵为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$。然后再重新开始，进行第二轮的 $\binom{m}{2}$ 次配对旋转，新的因子载荷矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{(2)}$。如此继续旋转下去，记第 s 轮旋转后的因子载荷矩阵为 $\boldsymbol{A}^{(s)}$，得到的一系列因子载荷矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(s)},\cdots$$

记 $V^{(s)}$ 为 $\boldsymbol{A}^{(s)}$ 各列元素平方的相对方差之和，则必然有

$$V^{(1)}\leqslant V^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant V^{(s)}\leqslant\cdots$$

这是一个有界的单调上升数列，因此一定会收敛到某一极限。在实际应用中，当 $V^{(s)}$ 的值变化不大时，即可停止旋转。

例 8.4.1 在例 8.3.1 至例 8.3.3 中分别使用最大方差旋转法，旋转后的因子载荷矩阵列于表 8.4.1。