复旦大学数学科学学院

2020～2021学年第二学期期末考试试卷

A卷

课程名称：高等数学A(下)　　课程代码：MATH120022

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

姓　名：________ 学　号：________ 专　业：________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总　分
得　分								

1.（本题40分，每小题5分）计算下列各题

(1) $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ 求全微分 $dz|_{(1,0)}$。

(2) 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的切平面。

(3) 求微分方程 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解。

(4) 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值。

(5) 计算二重积分 $I=\iint_D \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}dxdy$ 其中 D 为直线 $x+y=1, y=\frac{1}{2}$ 及 y 轴所围平面区域。

(6) 计算曲线积分 $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=10x$ 。

(7) 求$(4x^3y^3-y^2)dx+(3x^4y^2-2xy)dy$的原函数。

(8) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]x^{2n}$的收敛半径和收敛域。

2.（本题 10 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}$ 的通解。

3.（本题 10 分）将 $f(x)=1-x^{2}(0\le x\le \pi)$ 展开为余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$ 的和。

4.（本题 10 分）计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xz\,dydz + yz\,dzdx + 100\,xy\,dxdy$ ，其中 Σ 为

曲面 $z=1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}(0\le z\le 1)$，取上侧。

5.（本题 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n!}x^n$ 的和函数 $S(x)$ 。

6.（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 具有连续导数，且在任意围绕原点分段光滑的简单闭曲线 L 上，积分 $\oint_L \frac{4xydx+f(x)dy}{x^2+y^4}$ 为常数 k，其中 L 沿逆时针方向，求函数 $f(x)$ 及常数 k。

7.（本题 10 分）设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+\mathrm{z}^2\le 4\}$为球体，$f(x,y,z)$ 在$\mathbb{R}^3$上具有连续的二阶偏导数，且f在Ω 的边界上为0，$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$ 为其梯度，$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$，$\|\nabla f\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ 为模长，证明：

$$2\iiint_\Omega f^2dxdydz+\frac{1}{2}\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\ge 2\iiint_\Omega\|\nabla f\|^2dxdydz$$ 。

复旦大学数学科学学院

2020～2021 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A　　　　课程代码：

开课院系：数学科学学院　　　　考试形式：闭卷

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总　分
得　分								

1．（本题 40 分，每小题 5 分）计算下列各题

(1) $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$，求全微分 $dz|_{(1,0)}$。

$$dz = [e^{x+y} + xe^{x+y} + \ln(1+y)]dx + [e^{x+y} + (x+1)\frac{1}{1+y}]dy$$

$$dz(1,0) = 2edx + (e+2)dy$$

(2) 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的切平面。

$\nabla F \,||\, (1,4,6) \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6}$

$y = z = 2x$, 代入曲面得到 $21x^2 = 1$

$x = -1, 1$. 得到曲面点 $P_1(-1,-2,-2), P_2(1,2,2)$

$(x \pm 1, y \pm 2, z \pm 2) \cdot (1, 4, 6) = 0 \Rightarrow$

所求切平面为 $x + 4y + 6z \pm 21 = 0$.

(3) 求微分方程 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解。

$P = 2x, Q = xe^{-x^2}$

$$\int Pdx = x^2, \int Qe^{\int Pdx}dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = e^{-x^2}[C + \frac{1}{2}x^2]$$

(4) 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值。

$f_x{}'=2x-y-2=0, f_y{}'=-x+2y+1=0$

驻点$\mathrm{P}_0(1,0)$，$\mathrm{Hess}_f(\mathrm{P}_0)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$正定，

$f(1,0)=-1$为极小值.

(5) 计算二重积分 $I=\iint_D \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}dxdy$ 其中 D 为直线 $x+y=1, y=\frac{1}{2}$ 及 y 轴所围平面区域。

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_0^{1-y}\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}y^{-2}[\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}-1]dy$$

$$=\mathrm{e}^{-1}[e^2-e]-1=e-2$$

(6) 计算曲线积分 $I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=10x$ 。

极坐标 $r=10\cos\theta,\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$ds=10d\theta,$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}10\cos\theta\, 10d\theta=200.$$

(7) 求 $(4x^3y^3-y^2)dx+(3x^4y^2-2xy)dy$ 的原函数。

为全微分

$\omega=[y^3\cdot 4x^3dx+x^4\cdot 3y^2dy]-[y^2dx+x\cdot 2ydy]$

$=\mathrm{d}[x^4y^3-y^2x]$

原函数为 $x^4y^3-y^2x+c.$

(8) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\mathrm{n}\cdot\ln(1+\frac{1}{n})]x^{2n}$ 的收敛半径和收敛域。

$a_n=1-\mathrm{n}\cdot\ln(1+\frac{1}{n})$

$=1-n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})]\sim\frac{1}{2n}>0$

令$t=x^2\geq 0$, 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$

则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 关于t的收敛范围为

$t\in[-1,1)$, $x^2\in[-1,1)$

得到原级数的收敛域为 $(-1,1)$,

收敛半径为1.

2.（本题 10 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解。

特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0, \lambda=1,2$

设特解为 $y^*=e^x x[Ax+B]=e^x[Ax^2+Bx]$

$y^*{}'=e^x[\mathrm{A}\,x^2+(2A+B)x+B]$

$y^*{}''=e^x[\mathrm{A}\,x^2+(4A+B)x+2A+2B]$

$y^*{}''-3y^*{}'+2y^*=e^x[-2Ax+2A-B]=\mathrm{e}^x\,x$

$-2A=1, 2A-B=0 \Rightarrow A=-\dfrac{1}{2}, B=-1$

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-e^x[\dfrac{1}{2}x^2+x], \mathrm{C}_1, C_2$为常数.

3.（本题 10 分）将 $f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 的和。

$$f(x)\sim 1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx=2\int_0^{\pi}(1-x^2)^2dx=2[\pi-\frac{2}{3}\pi^3+\frac{1}{5}\pi^5]$$

利用Parseval等式

$$2[1-\frac{2}{3}\pi^2+\frac{1}{5}\pi^4]=\frac{(2-\frac{2}{3}\pi^2)^2}{2}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4$$

4.（本题 10 分）计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xz\,dydz+yz\,dzdx+100\,xy\,dxdy$ ，其中 Σ 为

曲面 $z=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}(0\le z\le 1)$，取上侧。

利用高斯公式取 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\}$

$\partial\Omega=\Sigma-\Sigma_1,\ \Sigma_1=\{(x,y,0)\,|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\}$取上侧

$\omega=xz\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+100\,xy\,dx\wedge dy$

$\iint_{\partial\Omega}\omega=\iiint_{\Omega}d\omega,$

$\iint_{\Sigma}\omega-\iint_{\Sigma_1}\omega=\iiint_{\Omega}[2z]dxdydz$

$=2\int_0^1 zdz\iint_{\Omega_z}dxdy=2\int_0^1 z[\pi 2\sqrt{1-z}\cdot 3\sqrt{1-z}]dz$

$=12\pi\int_0^1 z(1-z)dz=2\pi$

$\iint_{\Sigma_1}\omega=0,\ I=\iint_{\Sigma}\omega=2\pi.$

5.（本题 10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}x^n$ 的和函数 $S(x)$。

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{m!}x^{m+1}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{m!}x^{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m!}x^{m+1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+1}-2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}x^{m+1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+1}-2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+1}-2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$=x^2e^x+xe^x-2xe^x+[e^x-1]=e^x(x^2-x+1)-1,\ x\in\mathbb{R}.$

6.（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 具有连续导数，且在任意围绕原点分段光滑的简单闭曲线 L 上，积分 $\oint_L \frac{4xydx+f(x)dy}{x^2+y^4}$ 为常数 k，其中 L 沿逆时针方向，求函数 $f(x)$ 及常数 k 。

$$\omega = Pdx+Qdy, \mathrm{P} = \frac{4xy}{x^2+y^4}dx + \frac{f(x)}{x^2+y^4}dy$$

$$d\omega = [-P_y^{'} + Q_x{'}]dxdy$$

由反证法利用格林公式可以证明在原点外 $d\omega = 0$，即 $-P_y^{'} + Q_x{'}=0.$

若点 $P_0 \neq (0,0)$处$-P_y^{'} + Q_x{'} \neq 0$，不妨设为大于0，

则存在含P_0的半径充分小的圆盘D在其上$-P_y^{'} + Q_x{'} > 0$

可构作两条分段光滑的沿逆时针方向的简单闭曲线L_1、L_2

使得 $L_2 - L_1 = \partial D$,格林公式引出矛盾：

$\int_{\partial D}\omega = \int_D d\omega$,左边为0，右边大于0.

$$P_y{'} = \frac{4x(x^4+y^2)-8xy^2}{(x^4+y^2)^2}, Q_x{'} = \frac{f'(x)(x^4+y^2)-4f(x)x^3}{(x^4+y^2)^2},$$

从而 $4x-8x = f'(x), 4x^5 = f'(x)x^4 - 4f(x)x^3$

解得 $f(x) = -2x^2$

沿曲线 $L_1: x^4+y^2=1$ 计算得到

$$k = \int_{L_1}\frac{4xydx-2x^2dy}{x^2+y^4} = \int_{L_1} 4xydx - 2x^2dy$$

$$= \iint_D (-8x)dxdy = 0$$

7.（本题 10 分）设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$为球体，$f(x,y,z)$ 在$\mathbb{R}^3$上具有连续的二阶偏导数，且 f 在Ω 的边界上为0，$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$ 为其梯度，$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$，$\|\nabla f\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ 为模长，证明：

$$2\iiint_\Omega f^2dxdydz+\frac{1}{2}\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\ge 2\iiint_\Omega\|\nabla f\|^2dxdydz$$ 。

利用格林公式 $div(f\nabla f)=\|\nabla f\|^2+f\Delta f,$

应用Gauss公式及$Cauchy$不等式

$$0=\iint_{\partial\Omega}f\nabla f\cdot\vec{n}dS=\iiint_\Omega[\|\nabla f\|^2+f\Delta f]dxdydz$$

$$\Rightarrow\iiint_\Omega\|\nabla f\|^2\,dxdydz=\iiint_\Omega[-f\Delta f]dxdydz$$

$$\le\left(\iiint_\Omega f^2dxdydz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left[2\iiint_\Omega f^2dxdydz+\frac{1}{2}\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\right]$$

其中利用 $2ab\le Ca^2+\frac{1}{C}b^2,\ a,b,\mathrm{C}>0.$