1. (6分) 讨论函数$f(x,y)=\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$当$(x,y)\to(0,0)$时极限的存在性(若存在，求出极限值；若不存在，说明理由).

2. (6分) 设$f(x,y)=\ln\tan\dfrac{x}{y}$，求$f''_{xy}(\pi,4)$.

3. (6分) 求函数$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y-5$在闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 25\}$上的最大值与最小值.

4. (7分) 设椭球面$x^2+2y^2+3z^2=21$在点M处的切平面包含直线L: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$, 求该切平面方程.

5. (6

6.

时

5. (6分) 计算积分$I = \iint\limits_{D} (4 - x^3 - y^2) dxdy$，其中$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

6. (7分) 计算积分$I = \oint\limits_{L} \frac{(y-1)dx - (x-1)dy}{x^2 + y^2}$，其中$L$为方程$|x| + |y| = 4$确定的闭曲线，取顺时针方向.

7. (6分) 计算积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+y)dydz+(z+1)dxdy$，其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2\ (x^2+y^2\le 1)$，其法向量与$z$轴正向的夹角为锐角.

8. (6分) 设一物体占据空间区域$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 3$，它在任一点处的密度与该点到球心的距离成正比，比例系数为常数$k(k>0)$，求该物体关于z轴的转动惯量.

9. (6分) 计算积分$I=\oint\limits_{\Gamma}\frac{(z-y+1)dx+(x-z+1)dy+(y-x+1)dz}{x^2+y^2+1}$，其中$\Gamma$是柱面$x^2+y^2=1$与平面$x-y+z=4$的交线，从$z$轴正向往负向看，$\Gamma$为顺时针方向.

10. (6分) 设$a_n\geq 0$且满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{2n\ln(1+\frac{1}{n})}\cdot a_n\right)=1,$$

证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

11. (7分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{[4^n+(-3)^n]n}$的收敛半径与收敛域.

12. (7分) 将$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$在$(-1,1)$展开成$x$的幂级数，并求$f^{(5)}(0)$.

13. (6分) 将$f(x)=$

14. (6分) 求微

的通解.

13. (6分) 将$f(x)=\pi^2-x^2+\cos x(-\pi\le x\le\pi)$展开成$Fourier$级数.

14. (6分) 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}+\sin y+x^2\cos y+x^2=0$$

的通解.

15. (12分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，且

$$[xy(e^x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$$

为全微分方程，(1)求$f(x)$；(2)求此全微分方程的通解.

（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2022～2023学年第二学期期末考试试卷

A 卷(答案)

课程名称:	高等数学A(下)	课程代码:	MATH120022
开课院系:	数学科学学院	考试形式:	闭卷

1. (6分) 讨论函数$f(x,y)=\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$当$(x,y)\to(0,0)$时极限的存在性(若存在, 求出极限值; 若不存在, 说明理由).

解:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln[(x^2+e^{y^2}-1)+1]}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+e^{y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2+o(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}[\sqrt{x^2+y^2}+\frac{o(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}]\\ &=0.\end{aligned}$$

2. (6分) 设$f(x,y)=\ln\tan\dfrac{x}{y}$, 求$f''_{xy}(\pi,4)$.

解:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}(\tan\frac{x}{y})'_x=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}},$$

$$f''_{xy}(x,y)=(\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}})'_y=\frac{2(\frac{2x}{y}\cos\frac{2x}{y}-\sin\frac{2x}{y})}{y^2\sin^2\frac{2x}{y}},$$

$$f''_{xy}(\pi,4)=-\frac{1}{8}.$$

3. (6分) 求函数$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y-5$在闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 25\}$上的最大值与最小值.

解: (1)在D内求f的驻点. 令

$$\begin{cases} f'_x=2x-12=0, \\ f'_y=2y+16=0, \end{cases}$$

解得: $x=6,\ y=-8$. f在D内无驻点. 由于$f(x,y)$是D上的连续函数, 它一定有最大值和最小值. 则最值在边界上取得.

(2)作$Lagrange$函数:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y-5+\lambda(x^2+y^2-25).$$

令

$$\begin{cases} L'_x=2x-12+2\lambda x=0, \\ f'_y=2y+16+2\lambda y=0, \\ f'_\lambda=x^2+y^2-25=0, \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x, \\ x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = 4. \end{cases}$$

$$f(3,-4) = -80,\ f(-3,4) = 120.$$

故在D上f的最大值为120, 最小值为-80.

4. (7分) 设椭球面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$在点M处的切平面包含直线L: $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{2z-1}{-2}$, 求该切平面方程.

解: 设M的坐标为(x_0, y_0, z_0), 则椭球面在M处的切平面方程为

$$2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0, \tag{1}$$

即

$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z = 21. \tag{2}$$

由题意知, $(x_0, 2y_0, 3z_0)$与$(2, 1, -1)$垂直, 于是有

$$2x_0 + 2y_0 - 3z_0 = 0. \tag{3}$$

由于$(0, 0, \frac{7}{2})$在L上, 则$(0, 0, \frac{7}{2})$满足(2), 从而$z_0 = 2$. 于是由(3)有

$$x_0 + y_0 = 3.$$

将$(x_0, 3 - x_0, 2)$代入$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$中有

$$x_0^2 + 2(3 - x_0)^2 = 9.$$

于是有$x_0=1$或3, 从而得M的坐标为$(1,2,2)$或者$(3,0,2)$. 故所求切平面方程为

$$x+4y+6z=21, x+2z=7.$$

5. (6分) 计算积分$I=\iint\limits_D(4-x^3-y^2)dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$.

解: 由对称性有

$$\iint\limits_D x^3dxdy=0.$$

于是

$$I=\iint\limits_D(4-y^2)dxdy=2\iint\limits_{D_1}(4-y^2)dxdy,$$

其中$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y,\ x\ge 0\}$. 作极坐标变换:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

与D_1对应的区域为$D_1'=\{(r,\theta)|0\le r\le 2\sin\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$. 于是有

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(4-r^2\sin^2\theta)rdr\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2\theta-\sin^6\theta)d\theta\\&=4\pi-\frac{5}{4}\pi\\&=\frac{11}{4}\pi.\end{aligned}$$

6. (7分) 计算积分$I=\oint\limits_L\frac{(y-1)dx-(x-1)dy}{x^2+y^2}$, 其中$L$为方程$|x|+$

$|y|=4$确定的闭曲线, 取顺时针方向.

解: 令

$$P=\frac{y-1}{x^2+y^2},\quad Q=-\frac{x-1}{x^2+y^2}.$$

当$x^2+y^2\neq 0$时,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+2y}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

取$l: x^2+y^2=1$, 逆时针方向. 记L与l所夹的闭区域为D. 由$Green$公式有

$$\begin{aligned}(\int_L+\int_l)\frac{(y-1)dx-(x-1)dy}{x^2+y^2}&=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy\\&=-\iint_D\frac{-2(x+y)}{(x^2+y^2)^2}dxdy\\&=2(\iint_D\frac{x}{(x^2+y^2)^2}dxdy\\&\quad+\iint_D\frac{y}{(x^2+y^2)^2}dxdy).\end{aligned}$$

由对称性知,

$$\iint_D\frac{x}{(x^2+y^2)^2}dxdy=\iint_D\frac{y}{(x^2+y^2)^2}dxdy=0.$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_L\frac{(y-1)dx-(x-1)dy}{x^2+y^2}&=-\int_l\frac{(y-1)dx-(x-1)dy}{x^2+y^2}\\&=-\int_l(y-1)dx-(x-1)dy.\end{aligned}$$

l的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases} \quad \theta : 0 \to 2\pi.$$

$$\int_L \frac{(y-1)dx - (x-1)dy}{x^2+y^2}$$
$$= -\int_0^{2\pi} [(\sin\theta - 1)(-\sin\theta) - (\cos\theta - 1)(\cos\theta)]d\theta$$
$$= 2\pi.$$

7. (6分) 计算积分$I = \iint\limits_{\Sigma} (2x+y)dydz + (z+1)dxdy$, 其中$\Sigma$为有向曲面$z = x^2+y^2$ $(x^2+y^2 \le 1)$, 其法向量与z轴正向的夹角为锐角.

解: 取$\Sigma_1 : z = 1,\ x^2+y^2 \le 1$, 下侧. 记$\Sigma$与$\Sigma_1$所围的闭区域为$\Omega$. 由$Gauss$公式有

$$\left(\iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\Sigma_1}\right)(2x+y)dydz + (z+1)dxdy = -3\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$
$$= -3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 r dz$$
$$= -6\pi \int_0^1 (1-r^2) r dr$$
$$= -\frac{3}{2}\pi.$$

$$\iint\limits_{\Sigma} (2x+y)dydz + (z+1)dxdy$$
$$= -\frac{3}{2}\pi + \iint\limits_{\Sigma_1^-} (2x+y)dydz + (z+1)dxdy.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1^-}(2x+y)dydz+(z+1)dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=2\pi.$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+y)dydz+(z+1)dxdy=\frac{\pi}{2}.$$

8. (6分) 设一物体占据空间区域$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 3$, 它在任一点处的密度与该点到球心的距离成正比, 比例系数为常数$k(k>0)$, 求该物体关于z轴的转动惯量.

解: 依题意, 密度$\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}, (x,y,z)\in\Omega$.

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz \\ &= k\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz. \end{aligned}$$

作球坐标变换:

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r\cdot r^2\sin\varphi dr \\ &= k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}r^5\sin^3\varphi dr \\ &= 12k\pi. \end{aligned}$$

9. (6分) 计算积分$I=\oint\limits_{\Gamma}\frac{(z-y+1)dx+(x-z+1)dy+(y-x+1)dz}{x^2+y^2+1}$,

其中Γ是柱面$x^2+y^2=1$与平面$x-y+z=4$的交线, 从z轴正向往负向看, Γ为顺时针方向.

解: 由于在Γ上有$x^2+y^2=1$, 于是原积分

$$I=\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}(z-y+1)dx+(x-z+1)dy+(y-x+1)dz.$$

取$\Sigma: z=4-x+y, x^2+y^2\leq 1$, 下侧. 则$\Sigma$的法向量为$\vec{n}=-(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. 由$Stokes$公式有

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_{\Gamma}(z-y+1)dx+(x-z+1)dy+(y-x+1)dz\\
&=\iint\limits_{\Sigma}2dydz+2dzdx+2dxdy\\
&=2\iint\limits_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy\\
&=-2\iint\limits_{\Sigma}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})dS\\
&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}dS\\
&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\pi=-2\pi.
\end{aligned}$$

于是有

$$I=-\pi.$$

10. (6分) 设$a_n\geq 0$且满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{2n\ln(1+\frac{1}{n})}\cdot a_n\right)=1,$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证明: 由已知条件有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{2n\ln(1+\frac{1}{n})}}} = 1,$$

由此知, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n\ln(1+\frac{1}{n})}}$同敛散. 由于

$$\lim_{n\to\infty} 2n\ln(1+\frac{1}{n}) = 2,$$

于是,存在正整数N,当$n > N$时,有

$$2n\ln(1+\frac{1}{n}) > \frac{3}{2}.$$

从而当$n \geq N$时,有

$$\frac{1}{n^{2n\ln(1+\frac{1}{n})}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛, 故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n\ln(1+\frac{1}{n})}}$收敛, 从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

11. (7分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[4^n+(-3)^n]n}$的收敛半径与收敛域.

解:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{[4^n+(-3)^n]n}\right|} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+(-\frac{3}{4})^n}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{4}.$$

收敛半径$R = 4$.

$x = 4$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{[4^n+(-3)^n]n}$.

$$\frac{4^n}{[4^n+(-3)^n]n} = \frac{1}{[1+(-\frac{3}{4})^n]n} > \frac{1}{2n}.$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{[4^n+(-3)^n]n}$发散.

$x=-4$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{[4^n+(-3)^n]n}$.

$$\begin{aligned}\frac{(-4)^n}{[4^n+(-3)^n]n}&=\frac{(-1)^n[4^n+(-3)^n]-(-1)^n(-3)^n}{[4^n+(-3)^n]n}\\&=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{3^n}{[4^n+(-3)^n]n}.\end{aligned}$$

由$Leibniz$判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{[4^n+(-3)^n]n}$为正项级数，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{[4^n+(-3)^n]n}}=\frac{3}{4}.$$

由$Cauchy$判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{[4^n+(-3)^n]n}$收敛. 于是，由收敛级数的线性性质有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{[4^n+(-3)^n]n}$收敛.

从而原幂级数的收敛域为$[-4,4)$.

12. (7分) 将$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$在$(-1,1)$展开成$x$的幂级数，并求$f^{(5)}(0)$.

解:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{4}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) + \frac{1}{2(1+x^2)} - 1 \\
&= \frac{1}{1-x^4} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} \quad (|x|<1).
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{4n} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x|<1).
\end{aligned}
$$

由此有

$$
\begin{aligned}
&\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{5}, \\
&f^{(5)}(0) = 4!(=24).
\end{aligned}
$$

13. (6分) 将$f(x) = \pi^2 - x^2 + \cos x(-\pi \le x \le \pi)$展开成$Fourier$级数.

解: $f(x)$为偶函数, 故$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

$$
a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2 + \cos x)dx = \frac{4\pi^2}{3}.
$$

当$n=1,2,\cdots$时,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2 + \cos x)\cos nx dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cos nx dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2 d\sin nx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]dx.
\end{aligned}
$$

$$a_1 = 5,$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}, \quad n = 2,3,\cdots.$$

于是, $f(x)$的$Fourier$级数为

$$f(x) \sim \frac{2\pi^2}{3} + 5\cos x + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

(进一步, 由于$f(x)$连续, 还可得到

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 5\cos x + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

这一步不作要求)

14. (6分) 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \sin y + x^2\cos y + x^2 = 0$$

的通解.

解: 将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + 2x^2\cos^2\frac{y}{2} = 0$$

将上面方程两边同除以$2\cos^2\frac{y}{2}$得:

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{dy}{dx} + \tan\frac{y}{2} + x^2 = 0.$$

$$\frac{d\tan\frac{y}{2}}{dx}+\tan\frac{y}{2}+x^2=0.$$

令$u=\tan\frac{y}{2}$, 则u满足

$$\frac{du}{dx}+u+x^2=0,$$

这是一阶线性常微分方程,于是有

$$\begin{aligned}u&=e^{-\int dx}[C+\int(-x^2)e^{\int dx}dx]\\&=e^{-x}[C-\int x^2e^xdx]\\&=e^{-x}[C-x^2e^x+2xe^x-2e^x]\\&=Ce^{-x}-x^2+2x-2,\end{aligned}$$

其中C为任意常数.

于是原方程的通解为

$$\tan\frac{y}{2}=Ce^{-x}-x^2+2x-2,$$

其中C为任意常数.

(或者

$$y=2\arctan(Ce^{-x}-x^2+2x-2),$$

其中C为任意常数.)

15. (12分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶连续导数, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 且

$$[xy(e^x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$$

为全微分方程, (1)求$f(x)$; (2)求此全微分方程的通解.

解: 由全微分方程的充要条件有:

$$\frac{\partial[xy(e^x+y)-f(x)y]}{\partial y}=\frac{\partial[f'(x)+x^2y]}{\partial x},$$

即:

$$xe^x+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$$

$$f''(x)+f(x)=xe^x.$$

$f(x)$满足

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=xe^x. \tag{4}$$

这是二阶的常系数非齐次方程, 对应的齐次方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0,$$

其特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda=\pm i.$$

于是, 齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

其中C_1和C_2为任意常数.

由于1不是特征方程的根, 设(4)的特解为$y^*=(a_0x+a_1)e^x$. 将其代入(4)中,比较系数得:

$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_1=-\frac{1}{2}.$$

于是, $y^* = \frac{1}{2}(x-1)e^x$. (4)的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x,$$

其中C_1和C_2为任意常数.

由 $f(0)=0$和$f'(0)=1$有$C_1=\frac{1}{2}, C_2=1$. 于是,

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x.$$

原全微分方程为

$$\begin{aligned}&[xy(e^x+y) - (\frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x)y]dx\\&\qquad +[\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}xe^x + x^2y]dy = 0,\end{aligned}$$

其一个原函数为

$$\begin{aligned}U(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} [\xi\eta(e^\xi+\eta) - (\frac{1}{2}\cos\xi + \sin\xi + \frac{1}{2}(\xi-1)e^\xi)\eta]d\xi\\&\qquad + [\cos\xi - \frac{1}{2}\sin\xi + \frac{1}{2}\xi e^\xi + \xi^2\eta]d\eta\\&= \int_0^y [\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}xe^x + x^2\eta]d\eta\\&= (\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}xe^x)y + \frac{1}{2}x^2y^2.\end{aligned}$$

故原全微分方程的通解为

$$(\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}xe^x)y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C,$$

其中C为任意常数.