

# 复旦大学数学科学学院

## 2010~2011 学年第二学期期末考试试卷

### A 卷

课程名称: 高等数学 A (下) 课程代码: MATH120002

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名:                      学 号:                      专 业:                     

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

1. (本题满分 42 分, 每小题 7 分) 计算下列各题:

(1) 设方程  $z - x = \arctan \frac{y}{z - x}$  确定隐函数  $z = z(x, y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

(2) 计算二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是圆  $x^2 + y^2 = 2y$  所围的有界闭区域。

1

(3) 求椭圆抛物面  $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  ( $a, b > 0$ ) 与平面  $z = 0$  所围立体的体积。

(4) 计算曲线积分  $\int_L (x^2 + y^2) ds$ , 其中  $L$  是曲线  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )。

(5) 将  $f(x) = x^2$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 展开为周期 4 的余弦级数。

(6) 解定解问题 
$$\begin{cases} y'' + 4y = 8e^{2x}, \\ y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$$


2. (本题满分 8 分) 已知函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = 2xdx - 2ydy$ , 且  $f(1, 1) = 2$ 。

求  $f$  在椭圆域  $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$  上的最大值和最小值。

3. (本题满分 8 分) 求过直线  $L: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$  且与曲线  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2, \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

在点  $P_0(1, -1, 2)$  处的切线平行的平面方程。

4. (本题满分 8 分) 求曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上  $z \geq h$  ( $0 < h < a$ ) 的部分。



5. (本题满分 8 分) 计算曲线积分  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为圆周  $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ , 定向为逆时针方向。

6. (本题满分 8 分) 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (xz^2 + \sin y)dydz + (x^2y - z)dzdx + y^2z dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ( $z \geq 0$ ) 的上侧。

7. (本题满分 8 分) 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$  的和。

8. (本题满分 10 分) 设  $y_n(x)$  是定解问题 
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \left(y + \frac{x}{n^2}\right)^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
 的解 ( $n = 1, 2, \dots$ )。

(1) 求  $y_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ );

(2) 证明: 对于每个  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 y_n(x)$  收敛。