

复旦大学数学科学学院

2009~2010 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (下) 课程代码: MATH120002

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

1. (本题满分 48 分, 每小题 8 分) 计算下列各题:

(1) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y - z = e^z$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

(2) 求二元函数 $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ 的极值。

(3) 计算二重积分 $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ 及直

线 $y = 0$, $y = x$ 在第一象限所围的闭区域。

(4) 计算第一类曲线积分 $\int_L y ds$, 其中曲线 L 为上半心脏线, 其极坐标表示为 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 其中 $a > 0$ 。

(5) 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的部分, 并定向为下侧。

(6) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{4n} x^n$ 的收敛半径和收敛域。

2. (本题满分 8 分) 设 V 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限上的点处的切平面和三个坐标平面所围成的四面体体积 ($a > 0, b > 0, c > 0$), 求 V 的最小值。

3. (本题满分 8 分) 计算第二类曲线积分 $\int_L (\sin y + y)dx + x \cos y dy$, 其中 L 为曲线 $y = x(\pi - x)$ 在第一象限的部分, 方向为从 $A(0, 0)$ 到 $B(\pi, 0)$ 。

4. (本题满分 8 分) 已知螺旋面片 $\Sigma: x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$), 计算第一类曲面积分 $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dS$ 。

5. (本题满分 10 分) 设 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}, x \in [0, \pi]$ 。

(1) 将 f 展开为余弦级数; (2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2}$ 的和。

6. (本题满分 8 分) 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy$, 其中 Σ 是

椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧。

7. (本题满分 10 分) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 。(1) 求其收敛域; (2) 若记该幂级

数的和函数为 $S(x)$, 且已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} S(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ 。