复旦大学数学科学学院

2018~2019 学年第二学期期末考试试卷

☐ A 卷

课程名称：高等数学 A（下）　课程代码：MATH120022

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

1. (本题共 40 分，每小题 5 分) 计算下列各题

(1) 设 $f(x,y)=\ln\dfrac{x+y}{1-2xy}$，求 $f'_x(1,0)$，$f'_y(1,0)$。

(2) 求 $2xydx+(x^2-y^2)dy$ 的原函数。

(3) 求$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{e^y\cos x}{\sin\sqrt{y}-\sin y}dy$。

(4) 求$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}(x+2)dx$。

(5) 设$z(x,y)$由方程组$x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，$z=u+v$所确定，求z'_x，z'_y。

(6) 设$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，求它的极值。

(7) 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+z^3)dS$，其中 Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。

(8) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n!)^2}{n^p}$ 的敛散性，其中 p 为实数。(需详细理由)

2. (本题共 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ 的和。

3. (本题共 10 分)

设$m>0$，$n>0$，$k>0$和$R>0$为给定常数。求$x^m y^n z^k$在$x^2+y^2+z^2=(m+n+k)R^2$，$x>0$，$y>0$和$z>0$下的最大值。并证明不等式：$a^m b^n c^k \le m^m n^n k^k (\frac{a+b+c}{m+n+k})^{m+n+k}$，其中$a>0$，$b>0$，$c>0$。

4. (本题共 10 分)

1) 求$\frac{dy}{dx}=-2y-2e^x$的通解；

2) 求$\frac{du}{dt}-1=e^{t+2u}$的通解$u(t;C)$，并指出C及t的取值范围。

5. (本题共 10 分) 设 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 为给定常数。

1) 椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+c^2$ 上任取点 $(u,v,\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}+c^2)$，求该点处的切平面 $\pi(u,v)$；

2) 求切平面 $\pi(u,v)$ 与椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 所围区域的体积。

6. (本题共 10 分)

求 $I=\displaystyle\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取为外侧。

7. (本题共 10 分) 设 $f(x,y)$ 在 R^2 上具有连续的偏导数。

1) 若存在函数 $\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$ 使得 $f(x,y)=x\alpha(x,y)+y\beta(x,y)$，则 $f(0,0)=0$；

2) 上述命题 1)的逆命题是否为真？若真，给出证明；若不真，给出反例。

高数下 2018 - 2019

1. (本题共 40 分，每小题 5 分) 计算下列各题

(1) 设 $f(x,y)=\ln\dfrac{x+y}{1-2xy}$，求 $f_x'(1,0)$，$f_y'(1,0)$。

解：$f(x,0)=\ln x$，$f_x'(x,0)=\dfrac{1}{x}$，$f_x'(1,0)=1$。同理 $f_y'(1,0)=3$。

(2) 求 $2xydx+(x^2-y^2)dy$ 的原函数。

解：$P=2xy$，$Q=x^2-y^2$。计算得到

$\int_{(0,0)}^{(x,y)}P(s,t)ds+Q(s,t)dt=x^2y-\dfrac{1}{3}y^3$，故原函数为 $x^2y-\dfrac{1}{3}y^3+C$，其中 C 为任意常数。

(3) 求 $I=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}\dfrac{e^y\cos x}{\sin\sqrt{y}-\sin y}dy$。

解：$I=\int_0^1dy\int_y^{\sqrt{y}}\dfrac{e^y\cos x}{\sin\sqrt{y}-\sin y}dx=\int_0^1e^ydy=e-1$。

(4) 求 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}(x+2)dx$。

解：$\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy$。作极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。则

$\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr=\dfrac{\pi}{4}$。故 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}(x+2)dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx+\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx^2=\sqrt{\pi}+\dfrac{1}{2}$。

(5) 设 $z(x,y)$ 由方程组 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，$z=u+v$ 所确定，求 z_x'，z_y'。

解：$x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 有逆映射 $u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$。

$$z_x'=u_x'+v_x'=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-y}{x^2+y^2},$$

$$z_y'=u_y'+v_y'=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}。$$

(6) 设 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，求它的极值。

解：$f_x'=4x^3-2x-2y$，$f_y'=4y^3-2x-2y$。$f_x'=f_y'=0$，得驻点 $(0,0)$，$(-1,-1)$，$(1,1)$。

$f_{xx}''=12x^2-2$，$f_{xy}''=-2$，$f_{yy}''=12y^2-2$。$\Delta=f_{xx}''f_{yy}''-\left(f_{xy}''\right)^2$。

$\Delta(-1,-1)=\Delta(1,1)=96>0$，$f''_{xx}(-1,-1)=f''_{xx}(1,1)=10>0$，故$(-1,-1)$，$(1,1)$为极小值点，

极小值$f(-1,-1)=f(1,1)=-2$。

在$(0,0)$附近，$f(x,-x)=2x^4>0$，$f(x,x)=2(x^2-2)x^2<0$，故$(0,0)$不为极值点。

(7) 求$I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+z^3)dS$，其中$\Sigma$为单位球面$x^2+y^2+z^2=1$。

解：Σ的参数方程为$x=\sin\varphi\cos\theta$，$y=\sin\varphi\sin\theta$，$z=\cos\varphi$，其中

$D=\{(\varphi,\theta)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\}$。

$E=\sin^2\varphi$，$F=0$，$G=1$，$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi$。故

$\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\iint\limits_{D}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi$。

又由对称性和奇偶性，$\iint\limits_{\Sigma}z^3dS=0$。因此$I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+z^3)dS=\frac{4}{3}\pi$。

(8) 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n!)^2}{n^p}$的敛散性，其中$p$为实数。(需详细理由)

解：当$p\le 3$时，由于$\ln n!\ge(n-1)\ln 2$，故$\frac{(\ln n!)^2}{n^p}\ge\ln^2 2\cdot\frac{(n-1)^2}{n^p}$。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-2}}$发散，和$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{n^p}\Big/\frac{1}{n^{p-2}}=1$得到，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n!)^2}{n^p}$发散；

当$p>3$时，由于$\ln n!<n\ln n$，故$\frac{(\ln n!)^2}{n^p}<\frac{n^2\ln^2 n}{n^p}=\frac{\ln^2 n}{n^{p-2}}$。

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n!)^2}{n^p}$收敛。

2. (本题共 10 分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}x^n$的和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$的和。

解：记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，其收敛域为$(-1,1)$。故

$\int_0^x (\int_0^s S(t)dt)ds = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$，$\forall x \in (-1,1)$。

两边求两次导得

$S(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$，$\forall x \in (-1,1)$。

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} x^n = \frac{x}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(\frac{x}{3})^{n-1} = \frac{x}{3}S(\frac{x}{3}) = 18\frac{x}{(3-x)^3}，\forall x \in (-1,1)。$$

在上式中令 $x=1$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} = \frac{9}{4}。$$

3. (本题共 10 分)

设 $m>0$，$n>0$，$k>0$ 和 $R>0$ 为给定常数。求 $x^m y^n z^k$ 在 $x^2+y^2+z^2=(m+n+k)R^2$，$x>0$，$y>0$ 和 $z>0$ 下的最大值。并证明不等式：$a^m b^n c^k \le m^m n^n k^k (\frac{a+b+c}{m+n+k})^{m+n+k}$，其中 $a>0$，$b>0$，$c>0$。

解：Lagrange 函数 $L(x,y,z;\lambda) = x^m y^n z^k + \lambda[x^2+y^2+z^2-(m+n+k)R^2]$，则 Lagrange 驻点方程组为

$$\begin{cases} L'_x = mx^{m-1}y^n z^k + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = nx^m y^{n-1} z^k + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = kx^m y^n z^{k-1} + 2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda = x^2+y^2+z^2-(m+n+k)R^2 = 0 \end{cases}$$

前三个方程解得 $\frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{k}$。再由第四方程得惟一的驻点 $(\sqrt{m}R, \sqrt{n}R, \sqrt{k}R)$。最大值为 $m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} k^{\frac{k}{2}} R^{m+n+k}$。

从而在 $x^2+y^2+z^2=(m+n+k)R^2$，$x>0$，$y>0$ 和 $z>0$ 下 $x^m y^n z^k \le m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} k^{\frac{k}{2}} R^{m+n+k}$，

即 $x^{2m} y^{2n} z^{2k} \le m^m n^n k^k R^{2(m+n+k)}$。

令 $a=x^2$，$b=y^2$，$c=z^2$，有 $R^2 = \frac{a+b+c}{m+n+k}$，代入上一式即得不等式。

4. (本题共 10 分)

1) 求$\dfrac{dy}{dx}=-2y-2e^x$的通解；

2) 求$\dfrac{du}{dt}-1=e^{t+2u}$的通解$u(t;C)$，并指出$C$及$t$的取值范围。

解：1) $\dfrac{dy}{dx}=-2y$的通解为$y=Ce^{-2x}$，

令$y=C(x)e^{-2x}$，代入$\dfrac{dy}{dx}=-2y-2e^x$，得到$C'(x)=-2e^{3x}$，

积分得$C(x)=-\dfrac{2}{3}e^{3x}+C$，故原方程的通解为$y=Ce^{-2x}-\dfrac{2}{3}e^x$，其中$C$为任意常数；

2) 方程两边乘以e^{-2u}，化为

$$-\frac{1}{2}\frac{de^{-2u}}{dt}-e^{-2u}=e^t。$$

令$y=e^{-2u}$，$x=t$。化为1)的方程，由1)得到$e^{-2u}=Ce^{-2t}-\dfrac{2}{3}e^t$，

故原方程的通解

$u(t;C)=-\dfrac{1}{2}\ln\left(Ce^{-2t}-\dfrac{2}{3}e^t\right)$，其中$C>0$为任意常数。

t的取值范围为$(-\infty,\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3C}{2})$。

5. (本题共 10 分) 设$a>0$，$b>0$，$c>0$为给定常数。

1) 椭圆抛物面$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+c^2$上任取点$(u,v,\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}+c^2)$，求该点处的切平面$\pi(u,v)$；

2) 求切平面$\pi(u,v)$与椭圆抛物面$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$所围区域的体积。

解：1) 法向量为$\vec{n}=(2\dfrac{u}{a^2},2\dfrac{v}{b^2},-1)$，故$\pi(u,v)$的方程为

$$2\frac{u}{a^2}(x-u)+2\frac{v}{b^2}(y-v)-(z-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}-c^2)=0；$$

2) $\pi(u,v)$与抛物面$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$相交曲线在$oxy$上投影为$\dfrac{(x-u)^2}{a^2c^2}+\dfrac{(y-v)^2}{b^2c^2}=1$。故

$$V=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}^{2\frac{u}{a^2}(x-u)+2\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+c^2}dz=\iint_{D_{xy}}\left(c^2-\frac{(x-u)^2}{a^2}-\frac{(y-v)^2}{b^2}\right)dxdy$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid \frac{(x-u)^2}{a^2c^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2c^2}\le 1\}$ 。作坐标变换 $x=u+acr\cos\theta$ ，$y=v+bcr\sin\theta$ 。则

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 c^2(1-r^2)acbcrdr=\frac{\pi}{2}abc^4 \text{。}$$

6. (本题共 10 分)

求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取为外侧。

解：令 $P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0 \text{，} \forall (x,y,z)\ne(0,0,0) \text{。}$$

作辅助曲面 $S: x^2+y^2+z^2=10^2$，方向取为外侧。则由 Gauss 公式得

$$\oiint\limits_{S\cup\Sigma^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=0 \text{。}$$

因此

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint\limits_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{10^3}\oiint\limits_{S}xdydz+ydzdx+zdxdy \text{，}$$

再由 Gauss 公式得 $I=\frac{1}{10^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 10^2}3dxdydz=4\pi$ 。

7. (本题共 10 分) 设 $f(x,y)$ 在 R^2 上具有连续的偏导数。

1) 若存在函数 $\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$ 使得 $f(x,y)=x\alpha(x,y)+y\beta(x,y)$，则 $f(0,0)=0$；

2) 上述命题 1)的逆命题是否为真？若真，给出证明；若不真，给出反例。

解：1) 略；2) 逆命题为真。

记 $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=f_1'(u,v)$，$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=f_2'(u,v)$。

$\forall(x,y)\in R^2$，令 $\varphi(t)=f(tx,ty)$，$t\in[0,1]$。则

$$\frac{d\varphi}{dt}=xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)$$

在 $[0,1]$ 上连续。故用 N-L 公式，得到

$$f(x,y)=\varphi(1)-\varphi(0)$$

$$=\int_0^1\frac{d\varphi}{dt}dt=\int_0^1\left(xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)\right)dt$$

$$=x\int_0^1 f_1'(tx,ty)dt+y\int_0^1 f_2'(tx,ty)dt\text{。}$$

令 $\alpha(x,y)=\int_0^1 f_1'(tx,ty)dt$，$\beta(x,y)=\int_0^1 f_2'(tx,ty)dt$，则它们都是关于 $(x,y)\in R^2$ 的函数。

$$f(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,y)}{y}\,y+\frac{f(\cancel{x}0,y)-f(0,0)}{x}\,\cancel{8}x$$