

复旦大学信息科学与工程学院

《线性代数》期中考试试卷

共 7 页

课程代码: COMP120004.10

考试形式: ☐ 开卷 ☒ 闭卷

2023 年 11 月

(本试卷答卷时间为 100 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

1. 请给出矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ 的 LU 和 LDU 分解的具体过程。(12 分)

(装订线内不要答题)

2. 讨论以下线性方程组当 λ 取不同值, 解的情况 (无解、唯一解、无穷多解), 若有解请写出解集. (14 分)

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

3. 请证明所有 2×2 的上三角矩阵的集合 $U^{2 \times 2}$ 为一个线性空间, 并请给出这个空间的一个基, 并证明其是基。(12 分)

(装订线内不要答题)

4. 设 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ u_2 = -v_1 - 3v_2 + 5v_3 + v_4 \\ u_3 = 3v_1 + 2v_2 - v_3 + 4v_4 \\ u_4 = -2v_1 - 6v_2 + 10v_3 + 2v_4 \end{cases}$$

求 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 的一个极大线性无关组。(12分)

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求两个零空间之和 $N(A) + N(B)$ 的一个正交基. (14 分)

(装订线内不要答题)

6. A 和 B 都为 n 阶方阵, 请证明: 若 $I+AB$ 可逆, 则 $I+BA$ 也可逆。(12 分)

7. 对于方阵 A , 请证明 $A^2 = I_n$ 当且仅当 $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) = n$ 。(12 分)

8. 对于线性空间 U 中的两个线性子空间 V 和 W , 若 $V \perp W$, 请证明 $V+W=U$ 当且仅当 $\dim V + \dim W = \dim U$. (12 分)