（装订线内不要答题）

复旦大学

2021～2022 学年第一学期期中考试试卷

☑ **A 卷**　　☐ **B 卷**

课程名称： 线性代数　**课程代码：** COMP120004.10

开课院系： 信息科学与工程学院　**考试形式：** 闭　卷

姓　名： ________　**学　号：** ________　**专　业：** ________

提示： 请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	一	二	三	总分
得　分				

一、填空题 (40 分, 每小题 4 分)

1. 对于二维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，如果 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 1$，那么 $\det(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2) =$ $\underline{\quad 3 \quad}$

2. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ 的解为 $\underline{\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}}$

3. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$ $\underline{\quad -54 \quad}$

4. 如果矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}^4 =$ $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 8 & 24 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

5. 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ a \end{bmatrix}$ 线性相关,那么 $a=$ $\underline{\quad 1 \text{ 或 } -8 \quad}$

?

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}_2$，则 $\boldsymbol{B}=$ $\underline{\quad \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix} \quad}$

7. 已知 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}=$ $\underline{\quad \pm \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

8. $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{\beta}$ 的解不唯一，那么下列结论正确的有 $\underline{\quad (3) \quad}$

(1).$m < n$ (2).$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ (3).$\boldsymbol{A}x = 0$ 的解不唯一 (4).$\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量张成

9. 对于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，方程 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{\beta}$ 无解，则下列结论正确的为 $\underline{\quad (2)(4) \quad}$

(1).$\boldsymbol{\beta}$ 的值可能为 $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$ (2).$\boldsymbol{\beta}$ 的值可能为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ (3).$\boldsymbol{\beta}$ 的秩必定为 2

(4).$\boldsymbol{\beta}$ 的秩必定不可能为 2

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足 $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = \frac{1}{2}$，则 $|(2\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{B}^{-1} - (\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^*|=$ $\underline{\quad (2^n - 1)^n \quad}$

（装订线内不要答题）

二、计算题 (30 分，第 1 题 8 分，第 2 题 10 分，第 3 题 12 分)

1. 计算行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a_1+1 & a_1^2+a_1+1 & \cdots & a_1^n+a_1+1 \\ 2a_2+1 & a_2^2+a_2+1 & \cdots & a_2^n+a_2+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_n+1 & a_n^2+a_n+1 & \cdots & a_n^n+a_n+1 \end{vmatrix}$$

解 将行列式升阶，在上面加一行 1，为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2a_1+1 & a_1^2+a_1+1 & \cdots & a_1^n+a_1+1 \\ 0 & 2a_2+1 & a_2^2+a_2+1 & \cdots & a_2^n+a_2+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2a_n+1 & a_n^2+a_n+1 & \cdots & a_n^n+a_n+1 \end{vmatrix}$$

将第一行乘 $-(a_i+1)$ 加到第 $i+1$ 行 $(i=1,2,\cdots,n)$，得：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(a_1+1) & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ -(a_2+1) & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_n+1) & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

将第二列加到第一列，再将第一列乘 (-1)，得到

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

然后利用行列式的拆分法，结合 Vandermonde 行列式，得到

$$|\boldsymbol{A}| = (3a_1a_2\cdots a_n - (a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1)) \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

2. 我们在线性代数中可以证明如下的 Schur 降阶公式：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 分别为 n,m 阶可逆方阵，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $n\times m, m\times n$ 的矩阵，那么有

$$\det \boldsymbol{D}\cdot\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{C})=\det \boldsymbol{A}\cdot\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{B})$$

那么请根据上述材料，计算下列矩阵的行列式

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

解 由于

$$-\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}_n-\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

在 Schur 降阶公式中，令

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}_2^{-1}$$

容易计算，

$$\det \boldsymbol{A}=1,\det \boldsymbol{D}=1,\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{B})=(1-n)(1-\sum_{i=1}^n a_i^2)-(\sum_{i=1}^n a_i)^2$$

因此，有 Schur 降阶公式，有

$$\det \boldsymbol{M}=(-1)^n\left((1-n)(1-\sum_{i=1}^n a_i^2)-(\sum_{i=1}^n a_i)^2\right)$$

（装订线内不要答题）

3. 考虑方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 &= 4 \end{cases}$$

(1). 当 a, b 取何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多组解？

(2). 当方程组有无穷多组解时，求方程组的通解。

(1). 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作如下的初等变换：

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & -b & 0 & -1 \\ 0 & 1-2ab & 1-a & 4(1-a) \end{array}\right]$$

- 当 $b = 0$ 时，原方程组无解
- 当 $b \neq 0$ 时，增广矩阵还可以继续进行初等变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & -b & 0 & -1 \\ 0 & 1-2ab & 1-a & 4(1-a) \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1-a & \frac{4b-2ab-1}{b} \end{array}\right]$$

- 于是当 $a = 1, b \neq \frac{1}{2}$ 时，则原方程组无解

- 当 $a = 1, b = \frac{1}{2}$ 时，原方程组有无穷多组解

- 当 $a \neq 1$，原方程组有唯一解。

综上所述，当 $b = 0$ 或 $a = 1$ 且 $b \neq \frac{1}{2}$ 时，原方程组无解，$a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时，原方程组有唯一解，$a = 1$ 且 $b = \frac{1}{2}$ 时原方程组有无穷多组解。

(2). 求解得到方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

三、简答题 (30 分)

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$.

   (1). 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 是可逆阵，并求出它的逆矩阵。

   (2). 证明：存在无穷多个 t，使得 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n$ 是可逆阵。

(1). 在条件式两边同时减去 $6\boldsymbol{I}_n$，得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_n)=-6\boldsymbol{I}_n$

因此,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)^{-1}=-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}_n)$

(2). 取 t 为正整数 m，则利用 (1) 的方法，可以求得 $\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{I}_n$ 可逆，且逆矩阵为 $-\frac{1}{m^2+3m+2}(\boldsymbol{A}-(m+3)\boldsymbol{I}_n)$

注记. 事实上，本题是来源于摄动法，可逆矩阵在全体同阶方阵中是稠密的。具体体现为，任意一个奇异阵 $\boldsymbol{B}$，都存在一列 $\boldsymbol{B}+t_k\boldsymbol{I}_n$ 使得 $t_k\to 0$ 时，有 $\boldsymbol{B}+t_k\boldsymbol{I}_n\to 0$

考虑 $\det(\boldsymbol{B}+t\boldsymbol{I}_n)$ 是一个关于 t 的多项式，其至多有 n 个根，所以事实上，在 (2) 中使得 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n$ 为可逆阵的 t 为整个域除去有限个元素，因此对无限域来说，必定有无限多个这样的 t.

2. 以定义在全体实数上的全体连续函数构成的线性空间 $C(\mathbb{R})$ 上,若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的 n 个实数，证明：$e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x}$ 是一组线性无关的向量。

证明. 用反证法,如果这些向量线性相关,那么存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，使得

$$\lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{a_n x} \equiv 0$$

分别让 $x = 0, 1, 2, \cdots, n-1$，得到方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{a_1} & e^{a_2} & \cdots & e^{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{a_1})^{n-1} & (e^{a_2})^{n-1} & \cdots & (e^{a_n})^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵的行列式是个 Vandermonde 行列式，易于验证其为可逆阵，从而关于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的方程组只有零解，矛盾。

综上所述，$e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x}$ 是 $C(\mathbb{R})$ 上一组线性无关的向量。

（装订线内不要答题）

3. 对于 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，求证：$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^2$.

证明. 设线性方程组的 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的解空间为 V_1，$\boldsymbol{A}^2x = 0$ 的解空间为 V_2

首先易于证明 $V_1 \subset V_2$，下证 $V_2 \subset V_1$，从而有 $V_1 = V_2$

任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V_2$，有 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = 0$，于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = 0$

题目条件易证 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可交换，因此，

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

于是有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$，方程两侧同乘 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$

这就说明 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$，也就是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1$。

综上所述 $V_1 = V_2$，故两方程组解空间维数相同，于是由线性方程组解的结构定理，知 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^2 = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$.

接下来考虑推广到高次的秩，利用数学归纳法（这里省略归纳假设了）

由 Frobenius 不等式：

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k+2} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A} \geq \mathrm{rank}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k + \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A} - \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^k = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k+1}$$

再由

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k+2} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{A} \leq \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k=1}$$

所以 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k+2} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{k+1}$，证毕.