（装订线内不要答题）

复旦大学

2021～2022 学年第一学期期中考试试卷

☑ **A 卷**　　☐ **B 卷**

课程名称： 线性代数　**课程代码：** COMP120004.10

开课院系： 信息科学与工程学院　**考试形式：** 闭　卷

姓　名： ________　**学　号：** ________　**专　业：** ________

提示： 请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　号	一	二	三	总分
得　分				

一、填空题 (40 分, 每小题 4 分)

1. 对于二维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，如果 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 1$，那么 $\det(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2) =$__________

2. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ 的解为__________

3. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$__________

4. 如果矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}^4$=_______________

5. 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\a\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\a\end{bmatrix}$ 线性相关,那么 a=_________

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}_2$，则 $\boldsymbol{B}$=_____________

7. 已知 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$=__________________

8. $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的解不唯一，那么下列结论正确的有_________

   (1).$m<n$ (2).$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ (3).$\boldsymbol{A}x=0$ 的解不唯一 (4).$\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量张成

9. 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\end{bmatrix}$，方程 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 无解，则下列结论正确的为_________

   (1).$\boldsymbol{\beta}$ 的值可能为 $\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix}$ (2).$\boldsymbol{\beta}$ 的值可能为 $\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix}$ (3).$\boldsymbol{\beta}$ 的秩必定为 2

   (4).$\boldsymbol{\beta}$ 的秩必定不可能为 2

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{2}$，则 $|(2\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{B}^{-1}-(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^*|$=_____________

（装订线内不要答题）

二、计算题 (30 分，第 1 题 8 分，第 2 题 10 分，第 3 题 12 分)

1. 计算行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a_1+1 & a_1^2+a_1+1 & \cdots & a_1^n+a_1+1 \\ 2a_2+1 & a_2^2+a_2+1 & \cdots & a_2^n+a_2+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_n+1 & a_n^2+a_n+1 & \cdots & a_n^n+a_n+1 \end{vmatrix}$$

2. 我们在线性代数中可以证明如下的 Schur 降阶公式：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 分别为 n,m 阶可逆方阵，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $n\times m, m\times n$ 的矩阵，那么有

$$\det\boldsymbol{D}\cdot\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{C})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{B})$$

那么请根据上述材料，计算下列矩阵的行列式

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

（装订线内不要答题）

3. 考虑方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 & = 4 \end{cases}$$

(1). 当 a, b 取何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多组解？

(2). 当方程组有无穷多组解时，求方程组的通解。

三、简答题 (30 分，第 1 题 8 分，第 2 题 8 分，第 3 题 14 分)

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{O}$.

   (1). 证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ 是可逆阵，并求出它的逆矩阵。

   (2). 证明：存在无穷多个 t，使得 $\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{I}_n$ 是可逆阵。

（装订线内不要答题）

2. 以定义在全体实数上的全体连续函数构成的线性空间 $C(\mathbb{R})$ 上，若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的 n 个实数，证明：$e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x}$ 是一组线性无关的向量。

3. 对于 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，求证：$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^2 = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^3 = \cdots$.

提示： 可以先证明 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^2$，然后在这个结论的基础上考虑推广。