（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2019~2020 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：课程代码：

开课院系：考试形式：线上考试（闭卷）

线上考试

姓名：　　　　学号：　　　　专业：

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

1. （本题共 40 分，每小题 5 分）简答题

(1) 设 $z=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$，求 z'_x 。

解： $z'_x=2x\ln(x^2+y^2)+2x$ 。

(2) 求曲面 $x^2+y^2-3z^2=2$ 在点 $(2,1,1)$ 处的切平面方程,

解：切平面方程为 $4(x-2)+2(y-1)-6(z-1)=0$,

即 $2x+y-3z=2$ 。

(3) 求解方程 $xdx+ydy+y(x^2+y^2)dy=0$ 。

解：通解为 $\ln(x^2+y^2)+y^2=c$ 。

(4) 求函数 $u=x^3+2y^2-4xy+x$ 的极值。

解：先求驻点， $u'_x=3x^2-4y+1,\ u'_y=4y-4x$ ，得驻点 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(1,1)$,

由$u''_{xx}=6x, u''_{yy}=4, u'_{xy}=-4$，在点$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$\Delta=u''_{xx}u''_{yy}-u''_{xy}{}^2=-8<0$，所以函数在点$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$没有极值，在点$(1,1)$，$\Delta=u''_{xx}u''_{yy}-u''_{xy}{}^2=8>0$，且$u''_{xx}=6>0$，所以函数在点$(1,1)$有极小值$u_{\min}=0$。

(5)计算$\int\limits_{\Gamma}(x^2+2x)ds$，其中$\Gamma: x^2+y^2=2x$。

解： 原式=$\int_0^{2\pi}[(\cos t+1)^2+2(\cos t+1)]dt=7\pi$。

(6)计算第一类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中柱面$\Sigma: x^2+y^2=1$（$0\le z\le 1$）。

解：原式=$\iint\limits_{\Sigma}dS=2\pi$。

(7)计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+2y)dxdy$，其中$D$由$x$轴，$y$轴和直线$2x+y=2$所围。

解： 原式=$\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}(x+2y)dy=\frac{5}{3}$。

(8)讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$的收敛性。

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$，所以级数收敛。

2（本题共 40 分，每小题 5 分）计算题

（1）问函数$u=x^2+xe^y+yz$在点（1, 0, 1）处沿何方向的方向导数为最大，并求出此最大值。

解：在点（1, 0, 1）的梯度为 $\mathrm{grad}u=(3,2,0)$，沿此方向的方向导数为最大，最大值为 $\frac{\partial u}{\partial l}=\sqrt{13}$。

（2）设隐函数$z=z(x,y)$由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$确定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：方程两边分别对x,y偏导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$，

由此可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{xz^2}{y(x+z)^3}$。

（3）求原点到曲线$\Gamma:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$的最长距离和最短距离。

解： 作$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$，

令$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z-\lambda+\mu=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ L_\mu=x+y+z-1=0 \end{cases}$，可得$\begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ z=2\mp\sqrt{3} \end{cases}$，

所以最长距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$。

（4）设向量值函数$f:(r,\varphi,\theta)\to(x,y,z)$，计算$f$的 Jacobi 矩阵及行列式，其中$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$。

解： f 的 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

Jacobi 行列式$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$。

（5）计算曲线积分$\int_L (x+y)dx+(2x-y)dy$，其中L是由x轴、直线$x=1$和$y=x$所围三角形的边界，方向为逆时针方向。

解：原式=$\int_0^1 xdx+\int_0^1(2-y)dy+\int_1^0(2x+2x-x)dx=\frac{1}{2}$。

（6）计算三重积分

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz,$$

其中 $\Omega:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$。

解：作变量代换 $u=x-a,v=y-b,w=z-c$，则

原式=$\iiint_{\Omega'}(u+v+w+a+b+c)dudvdw=(a+b+c)\iiint_{\Omega'}dudvdw$

$$=\frac{4\pi}{3}(a+b+c)R^3,$$

其中 $\Omega':u^2+v^2+w^2\le R^2$。

（7）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\ln(n+1)}x^n$的收敛半径和收敛区间。

解：收敛半径为$R=\frac{1}{2}$，收敛区间为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

（8）将函数$y=\arcsin x$展开为关于x的幂级数。

解：$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-x^2)^n$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in(-1,1),$$

积分得 $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$，$x\in[-1,1]$。

3.（本题共 5 分）计算第二类曲面积分$\iint_{\Sigma}(x+z^2)dydz-zdxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=2$与$z=8$之间的部分，取下侧。

解：原式$=\iint\limits_{D}\left(x(x+\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dxdy$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=120\pi,$$

其中$D:4\le x^2+y^2\le 16$。

4.（本题共 5 分）求曲面$z=4+x^2+y^2$上某一点，使得过该点处的切平面与这曲面之间介于圆柱面$(x-1)^2+y^2=1$内部的立体的体积为最小。

解：设所求点为$(s,t,4+s^2+t^2)$，过这点的切平面为

$$2sx+2ty-z=s^2+t^2-4,$$

所围体积$V=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}(x^2+y^2-2sx-2ty+s^2+t^2)dxdy$

$$=\pi(s^2+t^2-2s+\frac{3}{2})。$$

当$s=1,t=0$，即当所求点为$(1,0,5)$时，体积最小。

5.（本题共 5 分）设$a_n>0$，$n=1,2,\ldots$，记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$收敛。

证：$\frac{a_n}{S_n^2}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^2}dx\le\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^2}dx,\ n=2,3,\ldots,$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}\le\frac{1}{a_1}+\int_{S_1}^{S_n}\frac{1}{x^2}dx\le\frac{1}{a_1}+\int_{S_1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx,$

即有上界，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$收敛。

6.（本题共 5 分）设一元函数f具有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=1$。试确定f，使得在全平面上曲线积分

$$\int_L (5e^{2x} - f(x))ydx + (f'(x) - \sin y)dy$$

与路径无关，并求$\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (5e^{2x} - f(x))ydx + (f'(x) - \sin y)dy$。

解：由条件，$5e^{2x} - f(x) = f''(x)$，解得 $f(x) = e^{2x} - \sin x$。

这时

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (5e^{2x} - f(x))ydx + (f'(x) - \sin y)dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (4e^{2x} + \sin x)ydx + (2e^{2x} - \cos x - \sin y)dy,$$

$$= \int_0^{\pi} (2e^{2\pi} + 1 - \sin y)dy = 2e^{2\pi} + \pi - 2。$$