（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2021～2022学年第二学期期末考试试卷

A卷答案

一.（本题共25分，每小题5分）简答题

1. 判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$ 是否存在？若存在, 求出极限值; 若不存在, 说明理由;

解: 当(x,y)沿$y=0$趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 1}{x^2}=0;$$

当(x,y)沿$y=x$趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

即: 沿不同的路径趋于$(0,0)$时, 函数值趋于不同的数, 故原极限不存在.

2. 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n!}$的敛散性, 若收敛, 求出级数的和;

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0<1,$$

由D'Alembert判别法知: 该级数收敛.

由于

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n!}=e^{\frac{1}{2}}-1.$

3. 试问在原点$(0,0)$处, 二元函数$f(x,y)=e^x\sin(xy)+e^y\cos x$沿哪一个方向函数值增长最快? 说明理由;

解:

$$f'_x(x,y)=e^x[\sin(xy)+y\cos(xy)]-e^y\sin x,$$

$$f'_y(x,y)=xe^x\cos(xy)+e^y\cos x.$$

于是, $f(x,y)$在$(0,0)$处的梯度$\mathbf{grad}f(0,0)=(0,1)$. 设$\mathbf{l}$为$(0,0)$处的任一单位向量, 则$f(x,y)$在$(0,0)$处沿$\mathbf{l}$方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(0,0)=\mathbf{grad}f(0,0)\cdot\mathbf{l}=(0,1)\cdot\mathbf{l}=\cos\alpha,$$

其中α为$(0,1)$与$\mathbf{l}$的夹角. 当$\alpha=0$时, 方向导数取最大值, 函数值增长最快. 因此, $f(x,y)$在$(0,0)$处沿梯度$\mathbf{grad}f(0,0)=(0,1)$的方向函数值增长最快, 即沿$y$轴正方向函数值增长最快.

4. 判断$\omega=(y^2-3x^2y^3-2)dx+(2xy-3x^3y^2+1)dy$是否在整个平面上为一个全微分形式? 若是, 求一个原函数;

解: 令$P=y^2-3x^2y^3-2$, $Q=2xy-3x^3y^2+1$. 在全平面上有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y-9x^2y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故ω在整个平面上为一个全微分形式.

对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$U(x,y)=\int_{O(0,0)}^{B(x,y)}(\eta^2-3\xi^2\eta^3-2)d\xi+(2\xi\eta-3\xi^3\eta^2+1)d\eta$$

为ω的一个原函数. 由于积分与路径无关, 取积分路径为折线:

$$\overline{OA}:\ \eta=0,\ \xi:\ 0\to x,$$

$$\overline{AB}:\ \xi=x,\ \eta:\ 0\to y,$$

于是有

$$\begin{aligned}U(x,y)=&\Big(\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}\Big)(\eta^2-3\xi^2\eta^3-2)d\xi+(2\xi\eta-3\xi^3\eta^2+1)d\eta\\=&\int_0^x(-2)d\xi+\int_0^y(2x\eta-3x^3\eta^2+1)d\eta\\=&-2x+y+xy^2-x^3y^3.\end{aligned}$$

5. 已知二元函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$的一个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

试问$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点?

解: 由

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

知: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \big(f(x,y)-xy\big) = 0$, 从而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. 由连续性知, $f(0,0)=0$.

又由

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

有:

$$f(x,y)-xy = o((x^2+y^2)^2)\ ((x,y)\to(0,0)),$$

即:

$$f(x,y) = xy + o((x^2+y^2)^2)\ ((x,y)\to(0,0)).$$

于是,

$$f(x,x) = x^2 + o(x^4) = x^2(1+o(x^2))\ (x\to(0,0)),$$

$$f(x,-x) = -x^2 + o(x^4) = -x^2(1+o(x^2))\ (x\to(0,0)).$$

因此, 在$(0,0)$附近, 在$y=x$上, $f(x,x)>0$; 在$y=-x$上, $f(x,-x)<0$. 故$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点.

二. （本题共75分，每小题5分）计算与证明题

6. 设$f(x,y)=e^{xy}\sin(x^2+y^2)$, 求$f''_{xy}(0,0)$;

解:

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) =& e^{xy}[y\sin(x^2+y^2)+2x\cos(x^2+y^2)],\\
f'_x(0,y) =& y\sin(y^2),\\
f''_{xy}(0,y) =& \sin(y^2)+2y^2\cos(y^2).
\end{aligned}$$

因此,

$$f''_{xy}(0,0)=0.$$

$$\left(f''_{xy}(x,y)=e^{xy}[2(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)+(1-3xy)\sin(x^2+y^2)]\right)$$

7. 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$的平行于平面$x+2y+3z=0$的切平面方程;

解: 设曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$在点(x_0,y_0,z_0)的切平面平行于$x+2y+3z=0$. 则曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$在点(x_0,y_0,z_0)的法向量$(2x_0,4y_0,6z_0)$平行于$(1,2,3)$, 即存在常数k使得:

$$(2x_0,4y_0,6z_0)=k(1,2,3).$$

由此得

$$x_0=y_0=z_0=\frac{k}{2}.$$

而 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=6$, 于是有

$$(\frac{k}{2})^2+2(\frac{k}{2})^2+3(\frac{k}{2})^2=6,$$

则$k=\pm2$.

于是得$(x_0,y_0,z_0)=(\pm1,\pm1,\pm1)$, 所求切平面为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,\ (x+1)+2(y+1)+3(z+1)=0.$$

即: $x+2y+3z=6$和$x+2y+3z=-6$.

8. 求函数$f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2x$在区域$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le4\}$上的最大值与最小值;

解: (1)在Ω内求f的驻点. 令

$$\begin{cases} f'_x=2x-2=0, \\ f'_y=4y=0, \\ f'_z=2z=0, \end{cases}$$

解得: $x=1,\ y=0,\ z=0$. 即$(1,0,0)$为f在Ω内的可能的极值点.

$$f(1,0,0)=-1.$$

(2)在Ω的边界: $x^2+y^2+z^2=4$上求可能的极值点. 作Lagrange函数:

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+z^2-2x+\lambda(x^2+y^2+z^2-4).$$

令

$$\begin{cases} L'_x=2x-2+2\lambda x=0, \\ f'_y=4y+2\lambda y=0, \\ f'_z=2z+2\lambda z=0, \\ f'_\lambda=x^2+y^2+z^2-4=0, \end{cases}$$

解得在$\partial\Omega$上可能的极值点为$(\pm2,0,0)$和$(-1,\pm\sqrt{3},0)$.

$$f(2,0,0)=0,\ f(-2,0,0)=8,\ f(-1,\pm\sqrt{3},0)=9.$$

故在Ω上f的最大值为9, 最小值为-1.

9. 求由曲面$z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$与曲面$z=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}$所围立体(有限部分)的体积;

解: 联立$z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$与$z=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}$得它们的交线为

$$\begin{cases} z=4, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=16. \end{cases}$$

于是所求立体的体积

$$V=\iint\limits_D\big[\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36})\big]dxdy,$$

其中$D=\{(x,y)|\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le16\}$. 令

$$\begin{cases} x=8r\cos\theta, \\ y=12r\cos\theta, \end{cases}$$

则
$$V=96\int_0^{2\pi}\int_0^1(4r-4r^2)rdr=64\pi.$$

10. 计算积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$, 其中$\Omega$为上半椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\ (z\geq 0)$;

解: 由对称性知:
$$\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz=0.$$
于是$I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$. 作广义球坐标变换:
$$\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}$$
则与Ω对应的区域$\Omega'=\{(r,\varphi,\theta)|0\leq r\leq 1,0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},0\leq\theta\leq 2\pi\}$. 于是
$$\begin{aligned}I=&abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 cr\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr\\ =&\frac{\pi abc^2}{4}.\end{aligned}$$

11. 计算积分$I=\int\limits_{\Gamma}xy(x^2+2y^2)ds$, 其中$\Gamma$为椭球体面$2x^2+4y^2+z^2=4$与平面$z=1$的交线在第一卦限内的部分;

解: 由Γ的方程知, 在Γ上有$2x^2+4y^2=3$. 因此
$$I=\frac{3}{2}\int\limits_{\Gamma}xyds.$$
Γ的参数方程为
$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\\ z=1,\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} xyds =&\frac{3\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sqrt{(x'_\theta)^2+(y'_\theta)^2+(z'_\theta)^2}d\theta\\ =&\frac{3\sqrt{6}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sqrt{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta\\ =&\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{8}.\end{aligned}$$

由此得: $I=\dfrac{3}{16}(4\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

12. 计算积分$I=\oint\limits_L \dfrac{(x-1)dy-(y-1)dx}{(x-1)^2+(y-1)^2}$, 其中$L$为椭圆$(x-1)^2+2(y-1)^2=3$, 方向为顺时针方向;

解: 令

$$P=\frac{-(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2},\quad Q=\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

当$(x,y)\neq(1,1)$时有:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(y-1)^2-(x-1)^2}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

取L': $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, 方向为逆时针方向(在L内部取一个适当小的圆即可). 记L与L'之间的闭区域为D, 由Green公式有:

$$(\int\limits_L+\int\limits_{L'})\frac{(x-1)dy-(y-1)dx}{(x-1)^2+(y-1)^2}=-\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\limits_L\frac{(x-1)dy-(y-1)dx}{(x-1)^2+(y-1)^2}&=-\int\limits_{L'}\frac{(x-1)dy-(y-1)dx}{(x-1)^2+(y-1)^2}\\ &=\int\limits_{L'}(y-1)dx-(x-1)dy.\end{aligned}$$

L'的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta,\end{cases}\quad \theta:0\to 2\pi.$$

于是

$$\int_{L'}(y-1)dx-(x-1)dy=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=-2\pi.$$

故原积分$I=-2\pi$.

13. 求面密度为$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$的锥形薄片$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2-2ay=0(a>0)$截下部分的质量;

解: 依题意, 所求质量

$$m=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS,$$

其中$\Sigma=\{(x,y,z)|z=\sqrt{x^2+y^2},x^2+y^2-2ay\le 0\}$. 记$D=\{(x,y)|x^2+y^2-2ay\le 0\}$, 于是

$$\begin{aligned}m=&2\iint_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy\\=&2\iint_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy\\=&2\sqrt{2}\iint_{D}(x^2+y^2)dxdy.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$$

则与D对应的区域$D'=\{(r,\theta)|0\le r\le 2a\sin\theta,0\le\theta\le\pi\}$. 于是

$$\begin{aligned}m=&2\sqrt{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}r^2\cdot rdr\\=&3\sqrt{2}\pi a^4.\end{aligned}$$

14. 计算积分$I=\iint_{\Sigma}(x-1)(y^2+z^2)dydz+(y-1)(z^2+x^2)dzdx+(z-1)(x^2+y^2)dxdy$, 其中$\Sigma$为上半球面$x^2+y^2+z^2=4\ (z\ge 0)$的下侧;

解: 取$\Sigma' = \{(x,y,z)|z=0, x^2+y^2\le 4\}$, 上侧. 于是$\Sigma$与$\Sigma'$构成封闭曲面, 且为内侧. 记$\Omega$为它们所围的闭区域. 由Gauss公式有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma\bigcup\Sigma'}(x-1)(y^2+z^2)dydz+(y-1)(z^2+x^2)dzdx+(z-1)(x^2+y^2)dxdy\\
&\quad=-\iiint\limits_{\Omega}2(x^2+y^2+z^2)dxdydz\\
&\quad=-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr\\
&\quad=-\frac{128}{5}\pi.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma'}(x-1)(y^2+z^2)dydz+(y-1)(z^2+x^2)dzdx+(z-1)(x^2+y^2)dxdy\\
&\quad=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy\\
&\quad=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr\\
&\quad=-8\pi.
\end{aligned}$$

于是原积分$I=8\pi-\dfrac{128}{5}\pi=-\dfrac{88\pi}{5}$.

15. 将$f(x)=(x+\pi)^2\ (0\le x\le\pi)$展开为周期为$2\pi$的余弦级数;

解:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\pi)^2dx=\frac{14\pi^2}{3}.$$

对于$n=1,2,\cdots$, $b_n=0$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\pi)^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+2\pi x)\cos nxdx=\frac{4[2(-1)^n-1]}{n^2}.$$

则$f(x)$的余弦级数为

$$f(x)\sim\frac{7\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\quad(=(x+\pi)^2, 0\le x\le\pi),$$

即

$$f(x)=\frac{7\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n-1}{n^2}\cos nx.$$

(最后一步不做要求)

16. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有一阶连续导数, 且满足

$$2\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2-1+f(x),$$

求$f(x)$;

解: 将原积分方程变形为

$$2[(x+1)\int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt] = x^2-1+f(x),$$

然后两边求导数:

$$2[\int_0^x f'(t)dt + (x+1)f'(x) - xf'(x)] = 2x + f'(x),$$

即

$$2\int_0^x f'(t)dt + f'(x) = 2x.$$

令$g(x)=\int_0^x f'(t)dt$, 则$f'(x)=g'(x)$. 于是$g(x)$满足常微分方程:

$$y'+2y=2x.$$

这是一阶非齐次线性常微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} y =& e^{-2x}(C+\int 2xe^{2x}dx) \\ =& Ce^{-2x}+x-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由于$g(0)=0$, 于是$C=\frac{1}{2}$. 因此,

$$g(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}.$$

则$f'(x)=-e^{-2x}+1$. 由原积分方程知: $f(0)=1$. 于是有

$$f(x)=1+\int_0^x(-e^{-2t}+1)dt=\frac{1}{2}e^{-2x}+x+\frac{1}{2}.$$

或者如下求解: 将原积分方程变形为

$$2[(x+1)\int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt] = x^2-1+f(x),$$

然后两边求导数:

$$2[\int_0^x f'(t)dt+(x+1)f'(x)-xf'(x)]=2x+f'(x),$$

即

$$2\int_0^x f'(t)dt+f'(x)=2x,$$

从而我们有

$$2(f(x)-f(0))+f'(x)=2x,$$

注意到$f(0)=1$, 于是得到:

$$f'(x)+2f(x)=2x+2,$$

即$f(x)$满足常微分方程:

$$y'+2y=2x+2.$$

这是一阶非齐次线性常微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} y =& e^{-2x}(C+\int(2x+2)e^{2x}dx) \\ =& Ce^{-2x}+x+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由于$f(0)=1$, 因此$C=\frac{1}{2}$. 于是

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x+\frac{1}{2}.$$

17. 求微分方程

$$y''+2y'+y=6e^{-x}$$

的通解;

解: 相应的齐次方程为

$$y''+2y'+y=0,$$

其特征方程$\lambda^2+2\lambda+1=0$有二重根-1. 于是齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x},$$

其中C_1和C_2为任意常数.

由于-1是特征方程的二重根, 因此设原非齐次方程有特解: $y^* = Ax^2e^{-x}$, 其中A为待定常数. 将其代入原方程有:

$$2Ae^{-x} = 6e^{-x},$$

则$A = 3$. 于是$y^* = 3x^2e^{-x}$.

故原方程的通解为$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 3x^2e^{-x}$.

18. 设$f(x) = 2x\arctan x - \ln(1 + x^2)$ $(x \in [-1, 1])$, 将$f(x)$展开成x的Taylor级数, 并求$f^{(10)}(0)$;

解: $f'(x) = 2\arctan x = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ x \in [-1, 1].$

当$x \in (-1, 1)$时,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)dt \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}. \end{aligned}$$

当$x = \pm1$时, 由Leibniz判别法知: 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$收敛. 因此, 由连续性有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n},\ x \in [-1, 1].$$

由于$f(x)$的Taylor展开系数$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 因此,

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{(-1)^{5-1}}{5(10-1)}.$$

由此得: $f^{(10)}(0) = \dfrac{10!}{45}$ $(= 2(8!) = 80640)$.

19. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$的收敛域, 并证明其和函数$f(x)$在区间$(0, 1)$内满足:

$$f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x) \equiv C,$$

其中C表示常数;

解: 由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$知: 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$的收敛半径$R=1$. 当$x=1$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛;

当$x=-1$时, 由Leibniz判别法知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$收敛. 故该幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

当$x\in(-1,1)$时, 对$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$逐项求导得:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

因此, 当$x\in(0,1)$时,

$$f'(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

从而, $f'(1-x)=-\frac{1}{1-x}\ln x$.

另一方面,

$$[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]'=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}.$$

于是有

$$[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]'=0,$$

故$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$为常数.

20. 设$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 记$r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$收敛.

证明: 由题意知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$为正项级数, $a_n=r_n-r_{n+1}$. 于是有

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}=\frac{r_n-r_{n+1}}{\sqrt{r_n}}=(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})(1+\sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_n}}).$$

由于$r_n>0\ (1,2\cdots)$, 且$\{r_n\}$单调减少, 因此,

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}\le 2(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}).$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_k}-\sqrt{r_{k+1}})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_{n+1}})=\sqrt{r_1},\quad (r_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n)$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})$收敛.

由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$收敛.