UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

SECRETARÍA GENERAL

COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

C O P A D I

PROBLEMARIO COPADI DE CÁLCULO DIFERENCIAL

COORDINADORES

ING. FRANCISCO BARRERA GARCÍA
ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ
ING. JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

ESTUDIANTES AUTORES

RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE
DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ
RAÚL PULIDO MARTÍNEZ
BOGDAD ROBERTO ESPINOSA VARGAS
EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS
ALEJANDRO FELIX REYES
GABRIEL CALDERÓN OCHOA
DANIELA GARCÍA RUBÍ
IRENE RUBALCABA MONTSERRAT
RAFAEL LIMA GUERRERO
HUGO MENDIETA PACHECO
PABLO LORENZANA GUTIÉRREZ
DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA
GABRIELA BERENICE VERA PADILLA
RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN
MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

JUNIO DE 2005

ESTA OBRA SE REALIZÓ GRACIAS A LA DGAPA, A TRAVÉS DE UN PROYECTO PAPIME

PRÓLOGO

La Coordinación de Programas de Atención Diferenciada para Alumnos (COPADI) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, con algunos de los estudiantes del Programa de Alto Rendimiento Académico (PARA), y dentro de su Programa de Solidaridad Académica (PROSOLAC), se dio a la tarea de realizar sus *PROBLEMARIOS COPADI*. Cada uno considera una serie de ejercicios resueltos de algunas de las asignaturas con mayor grado de dificultad para los estudiantes en la División de Ciencias Básicas.

Estos ejercicios son planteados y resueltos por estudiantes del PARA, y revisados por nosotros. Los objetivos de estos *PROBLEMARIOS COPADI* son, entre otros los siguientes:

> Apoyar el desempeño académico de los estudiantes con ejercicios resueltos que les pueden ayudar a comprender y aprender los conceptos de que consta el programa de la asignatura, en este caso, CÁLCULO DIFERENCIAL, y poder así acreditarla y seguir adelante en sus estudios de ingeniería.
>
> Reafirmar los conocimientos de los estudiantes autores en asignaturas que ya acreditaron.
>
> Producir material didáctico para la Facultad, como un compromiso de los estudiantes del PARA.

Es importante comentar que este Problemario consta de 320 ejercicios de los temas de CÁLCULO DIFERENCIAL y, además de que se ha revisado el material, se ha pretendido dejar los ejercicios y sus enunciados tal como los hicieron y plantearon los estudiantes, ya que básicamente se trata de una publicación realizada por estudiantes y dirigida a estudiantes. Y esto es lo que le da carácter a la publicación. Sólo en ciertos casos tuvimos que incluir ejercicios cuando se consideró que hacían falta para cubrir un determinado tema.

Hay ejercicios de Funciones (66), Límites y continuidad (76), La derivada y algunas de sus aplicaciones (78), Variación de funciones (máximos y mínimos) (45) y Sucesiones y series (60).

Agradecemos la entusiasta ayuda de la Lic. Ana María Vieyra Ávila para el logro de esta obra, con sus labores de seguimiento, organización y convocatoria de los estudiantes autores.

Es nuestro mejor deseo que este trabajo sea de utilidad para los estudiantes que cursan Cálculo Diferencial y que también sea motivo de genuino orgullo para los estudiantes que participaron en su realización, así como lo es para nosotros.

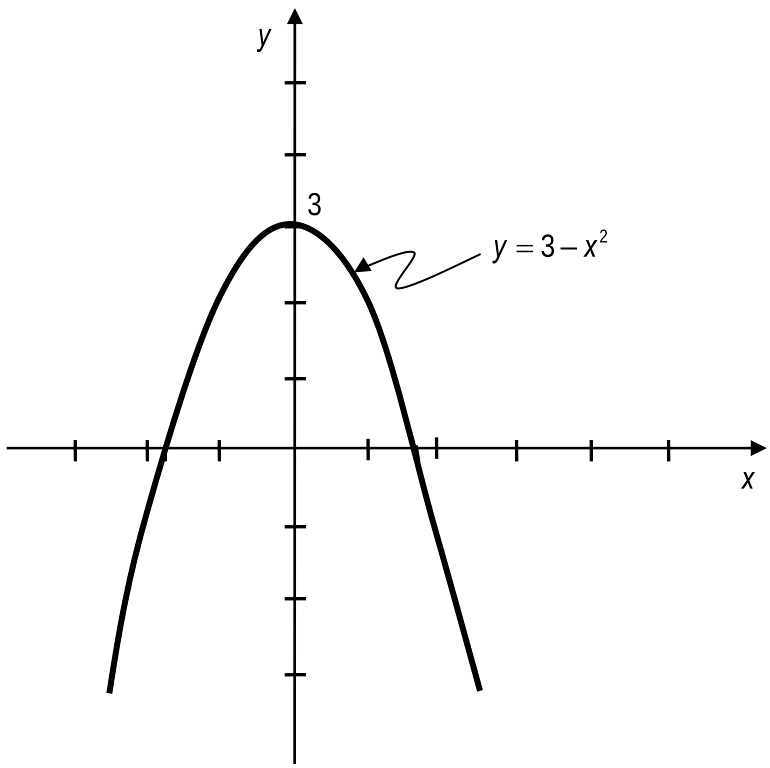
Ing. Francisco Barrera García
Ing. Pablo García y Colomé
Ing. Jorge A. Rangel Rangel

ÍNDICE

FUNCIONES

1. Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x)=3-x^2$. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de f?

Solución. La función dada es una parábola cuya ecuación se escribe como: $y-3=-x^2$. Su vértice está en el punto $(0,3)$, abre hacia abajo y su eje de simetría es el eje "y". Su gráfica es:



Su dominio es: $D_f=\mathbb{R}$ y su recorrido es: $R_f=(-\infty,3]$

ALUMNA: REYES CHAVEZ DAISY TESSIE

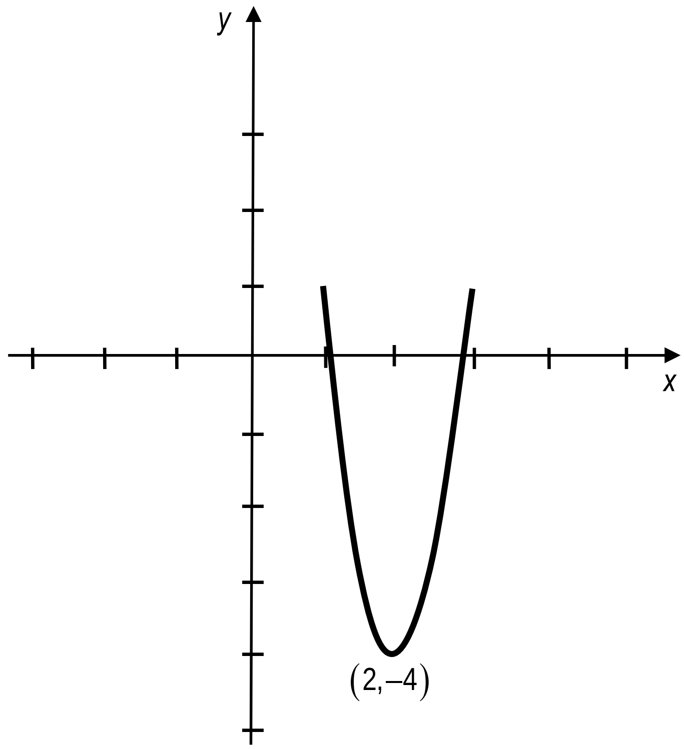
2. Dada la función $g(x)=5(x-2)^2-4$, determinar su dominio, recorrido y gráfica.

Solución. Si se analiza esta función a través de la Geometría Analítica, se obtiene:

$$y=5(x-2)^2-4 \quad \Rightarrow \quad y+4=5(x-2)^2$$

que es una parábola con vértice en $(2,-4)$, que abre hacia arriba y cuyo eje de simetría es la recta $x=2$. Como es una función polinomial su dominio es: $D_f=\mathbb{R}$ y su recorrido: $R_f=(-4,\infty)$. La gráfica es:

2



ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

3. Sea $R = \left\{ (x,y) \;\middle|\; y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+9} \right\}$. Indicar si la relación $R:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función o no. En caso afirmativo, determinar su dominio, contradominio y recorrido.

Solución. Se analiza la expresión $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+9}$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+9} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(x^2+9\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{4}{9}\left(x^2+9\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4}y^2 = x^2+9 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4}y^2 - x^2 = 9$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad \therefore \quad \frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

La relación es una hipérbola con centro en el origen, su eje de simetría es el eje de las ordenadas y sus semiejes son 2 en x y 3 en y. Y como solamente se consideran los valores positivos de la variable "y", entonces sólo se toma en cuenta la rama superior y por lo tanto se concluye que es una función y su dominio contradominio (o codominio) y recorrido son:

$$D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad C_f = \mathbb{R} \quad y \quad R_f = (-\infty,-2] \cup [2,\infty) = \mathbb{R} - (-2,2)$$

ALUMNA: DÁVILA MERCADO MARÍA PAULA

4. Determinar el dominio de la función $y = \sqrt{x^2 + 11x + 24}$

Solución. El radicando debe ser mayor o igual a cero. Se factoriza y obtenemos: $x^2 + 11x + 24 = (x+8)(x+3)$. Por lo que hay que resolver la desigualdad $(x+8)(x+3) \geq 0$. Y para esto se utiliza la siguiente tabla en la que se colocan las raíces de los factores, su producto y se analiza el signo del mismo a lo largo del eje de las abscisas.

$$(x+8)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -8 \quad y \quad x = -3$$

x	$x+8$	$x+3$	$(x+8)(x+3)$
$(-\infty,-8)$	$-$	$-$	$+$
$(-8,\ -3)$	$+$	$-$	$-$
$(-3,\infty)$	$+$	$+$	$+$

Observamos que en el intervalo $(-8,-3)$ tenemos signos negativos para x, por lo cual no podemos darle esos valores dado que es una raíz cuadrada. Entonces el dominio es: $D_f = x \in (-\infty,-8] \cup [-3,\infty)$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

5. Obtener el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = -\sqrt{x^2 + 7x + 12}$, y trazar aproximadamente su gráfica.

Solución. Esta función se puede analizar de dos formas. La primera si se atiende únicamente al hecho de que el radicando debe ser mayor o igual a cero y que es factorizable; y la segunda desde el punto de vista de la Geometría Analítica ya que se trata de una cónica. De la primera forma se tiene que: $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4) \geq 0$. De donde tenemos tres opciones:

$$1a)\quad \begin{matrix} x+4>0 & x+3>0 \\ x>-4 & x>-3 \end{matrix} \quad \therefore \quad \phi_1 = (-3\ ,\ \infty)$$

$$2a)\quad \begin{matrix} x+4<0 & x+3<0 \\ x<-4 & x<-3 \end{matrix} \quad \therefore \quad \phi_2 = (-\infty,-4)$$

$$3a)\quad \begin{matrix} x+4=0 & x+3=0 \\ x=-4 & x=-3 \end{matrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} \phi_3 = -4 \\ \phi_4 = -3 \end{matrix}$$

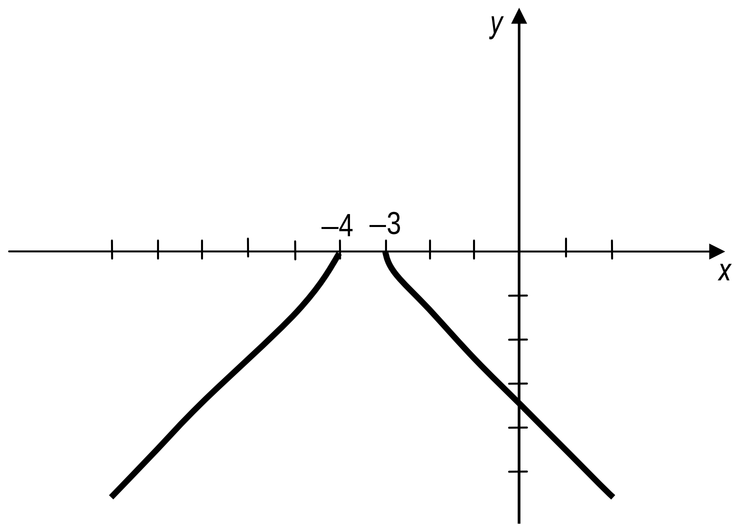
Por lo tanto el dominio es: $D_f = \phi_1 \cup \phi_2 \cup \phi_3 \cup \phi_4$; $D_f = \{x \mid x \in (-\infty\ ,\ -4] \cup [-3\ ,\ \infty);\ x \in \mathbb{R}\}$

Para el recorrido, se observa que el máximo valor que toma "y" es 0 y todos los demás valores son los reales negativos. Por lo tanto: $R_f = \{y \mid y \in (-\infty, 0];\ y \in \mathbb{R}\}$.

Por la Geometría Analítica se tiene que:

$$y = \sqrt{x^2 + 7x + 12} \quad ; \quad y^2 = x^2 + 7x + 12 \quad ; \quad y^2 = x^2 + 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 12 \quad ; \quad y^2 = \left(x + \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

$\left(x + \frac{7}{2} \right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \dfrac{\left(x + \frac{7}{2} \right)^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ luego es una hipérbola con centro en $\left(-\frac{7}{2}, 0 \right)$, eje de simetría el eje "x" y semiejes vertical y horizontal iguales a $\frac{1}{2}$. Y sus vértices son los puntos $(-4,0)$ y $(3,0)$. Con lo cual se comprueba que el dominio y el recorrido obtenidos son correctos y como el signo indica la parte inferior de la hipérbola, entonces la gráfica es la siguiente:



ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

6. Dada la función $g(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$, determinar su dominio , recorrido y gráfica.

Solución. Como el denominador no puede ser cero, la "x" no puede tomar el valor de $\frac{1}{2}$; entonces el dominio es:

$$D_f = \left\{ x \middle| -\infty < x < \infty \quad ; \quad x \neq \frac{1}{2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

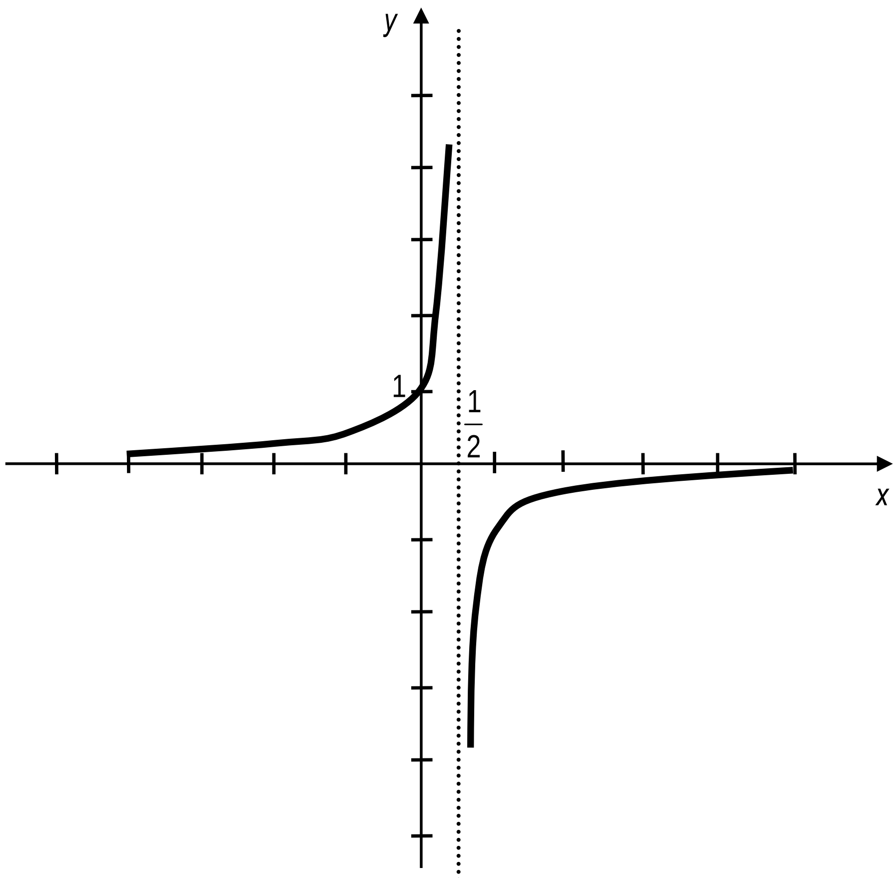
Para obtener el recorrido se despeja la variable "x", de donde:

$$y = \frac{1}{1 - 2x} \quad \Rightarrow \quad 1 - 2x = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad -2x = -1 + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y - 1}{2y}$$

con lo cual se aprecia que "y" no puede tomar el valor de "0" , y por lo tanto, el recorrido es:

$$R_f = \left\{ y \middle| -\infty < y < \infty \quad ; \quad y \neq 0 \quad ; \quad y \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ahora se traza en forma aproximada la gráfica, tomando en consideración que en el valor de $x=\frac{1}{2}$ tiene una asíntota vertical.



Nota. En el valor que hace cero el denominador se presenta una asíntota vertical y, cuando se obtuvo el recorrido se vio que también hay una asíntota horizontal en $y=0$.

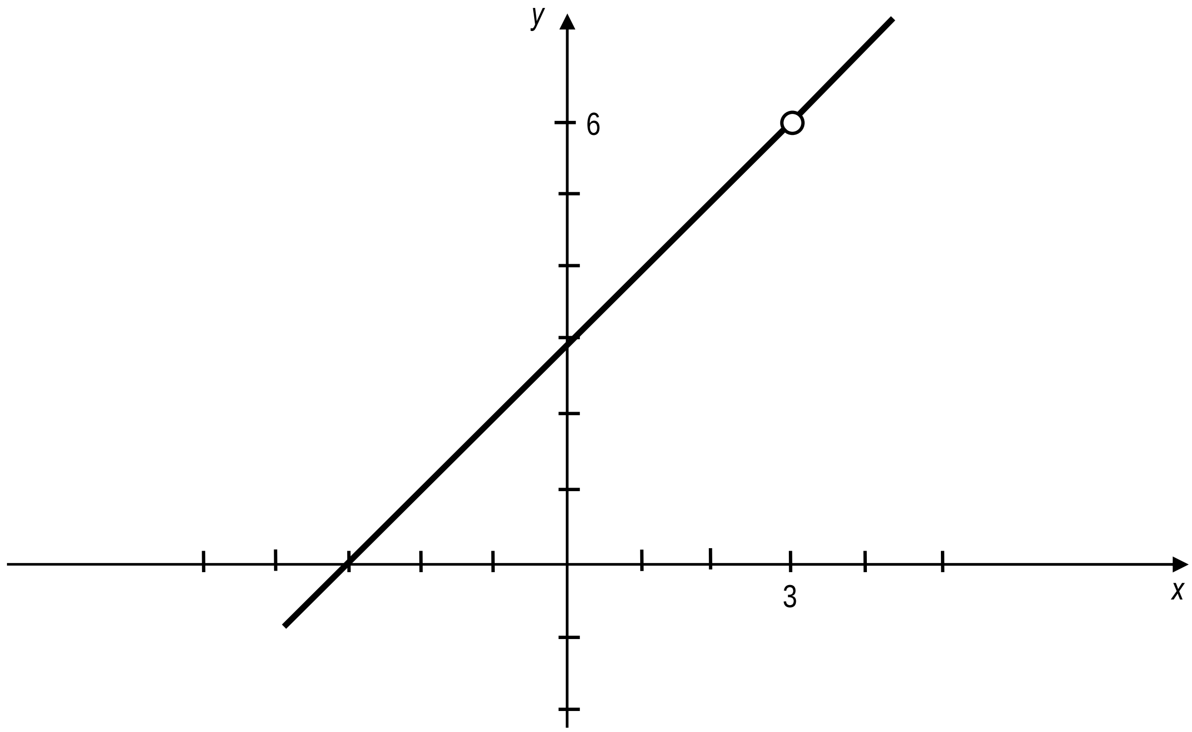
ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

7. Dada la función $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, determinar su dominio, recorrido y gráfica.

Solución. Al factorizar el numerador y simplificar se tiene que:

$$g(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \quad \Rightarrow \quad g(x)=x+3 \quad ; \quad x\neq 3$$

por lo tanto el dominio es: $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$, el recorrido es: $R_f=\mathbb{R}-\{6\}$ y la gráfica está dada en la siguiente figura, donde se observa que en el valor correspondiente a $x=3$ la función presenta un "hueco" o un "vacío", es decir, que ahí no existe valor de la función.



ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

8. Obtener el dominio de la siguiente función: $y = \dfrac{3x}{x^2 + 7x + 10}$

Solución. La x del numerador puede tomar cualquier valor; buscamos los valores para los cuales el denominador sea igual a cero para eliminarlos del dominio; entonces,

$$x^2 + 7x + 10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x+2) \neq 0$$
$$\therefore \quad x \neq -5 \quad y \quad x \neq -2$$

Luego el dominio de la función es: $D_f = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \neq -2, x \neq -5 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -2, -5 \right\}$. Cabe hacer notar que en los valores -2 y -5 la gráfica de esta función presenta dos asíntotas verticales.

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

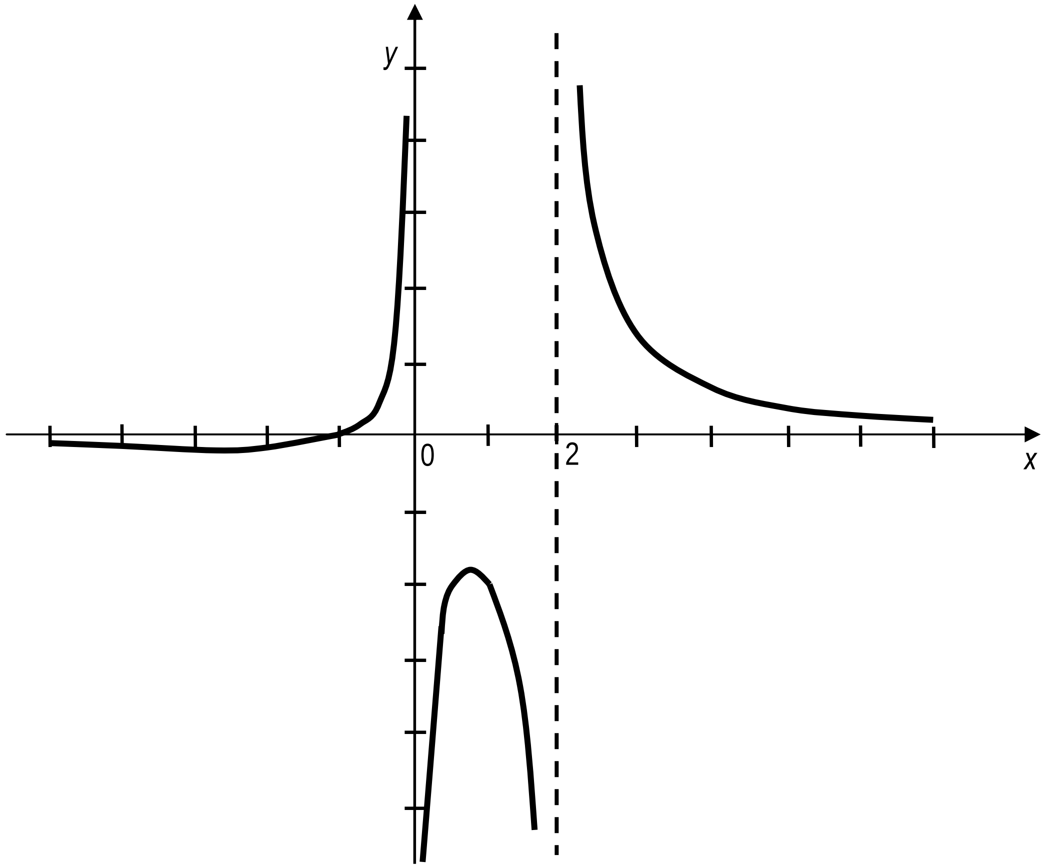
9. Obtener dominio, recorrido y gráfica de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x}$

Solución. Se obtienen los valores para los cuales el denominador se anula

$$x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \;\; y \;\; x_2 = 2$$

Por lo que el dominio de esta función es $D_f = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \neq 0, 2 \right\}$

En estos valores de $x = 0$ y $x = 2$ se presentan asíntotas verticales. La gráfica de la función es:



Al darle valores a $"y"$ y afinar la tabulación se determina el recorrido aproximado de esta función que es:

$$R_f = (-\infty, -1.87] \cup [-0.134, \infty)$$

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

10. Obtener el dominio de la siguiente función: $y = \sqrt{\dfrac{x + 2}{x - 3}}$

Solución. La raíz no puede tomar valores negativos, y el denominador debe ser diferente de cero. Luego, tenemos que resolver la desigualdad $\dfrac{x+2}{x-3} \geq 0$; $x \neq 3$. Entonces se analizan los dos casos:

a) $x + 2 \geq 0$, $x \geq -2$; $x - 3 > 0$, $x > 3$; $\therefore\ x \in (3, \infty)$

b) $x + 2 \leq 0$, $x \leq -2$; $x - 3 < 0$, $x < 3$; $\therefore\ x \in (-\infty, -2]$

Por lo tanto el dominio está dado por: $D_f = (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

11. Obtener el dominio, el recorrido y la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+1 & \text{si} \quad -4<x<-2 \\ -x^2-4x-2 & \text{si} \quad -2<x<0 \\ 2 & \text{si} \quad 0\le x\le 4 \end{cases}$$

Solución. Para: $y=x^2+4x+1$:

$$y=x^2+4x+4-4+1 \quad \Rightarrow \quad y+3=(x+2)^2$$

es una parábola con vértice en el punto $(-2,-3)$, abre hacia arriba y su eje de simetría es la recta $x=-2$.

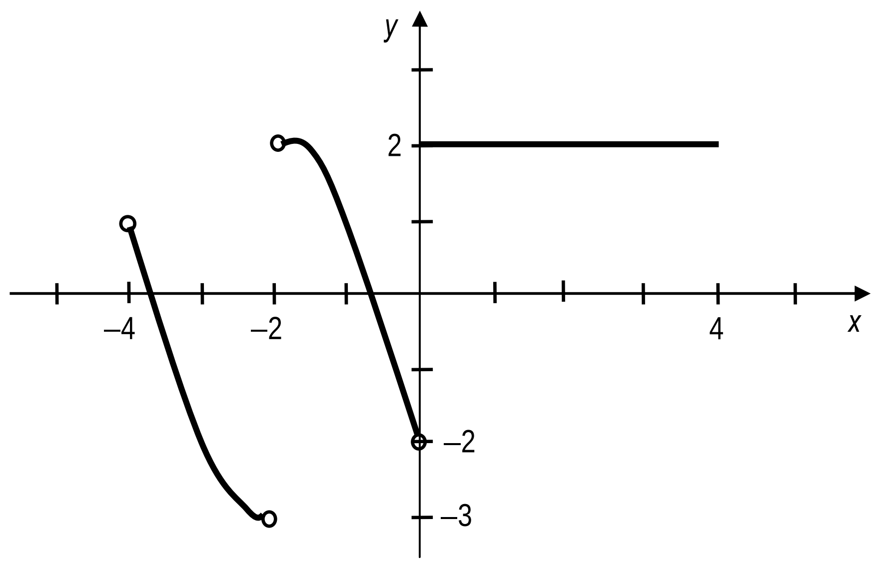
Para : $y=-x^2-4x-2$:

$$y=-(x^2+4x+2) \quad \Rightarrow \quad y=-(x^2+4x+4-4+2) \quad \Rightarrow \quad y-2=-(x+2)^2$$

es una parábola con vértice en el punto $(-2,2)$, abre hacia abajo y su eje de simetría es la recta: $x=-2$.

La tercera regla de correspondencia es una función constante: $y=2$.

Por lo que el dominio es: $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|(-4,-2)\cup(-2,4]\}$. La gráfica está dada por.



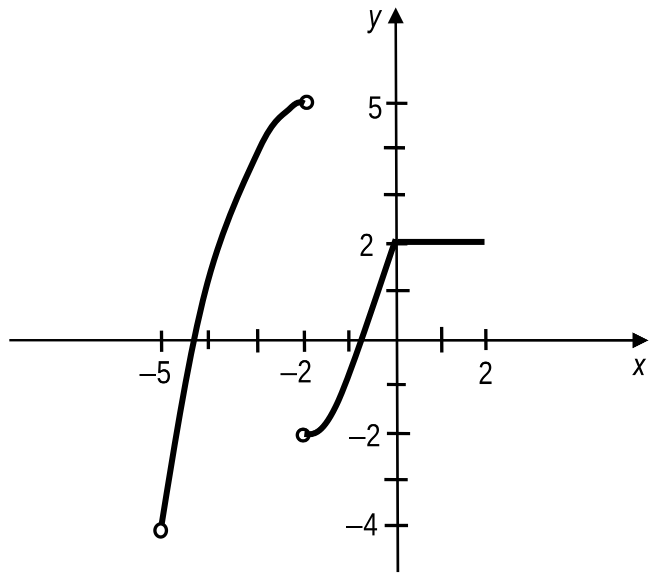
y el recorrido es: $R_f=\{y\in\mathbb{R}\,|(-3,2]\}$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

12. Obtener el dominio, el recorrido y trazar la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 1-4x-x^2 & si \quad -5<x<-2 \\ x^2+4x+2 & si \quad -2<x<0 \\ 2 & si \quad 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

Solución. Se grafican las tres reglas de correspondencia que definen a la función



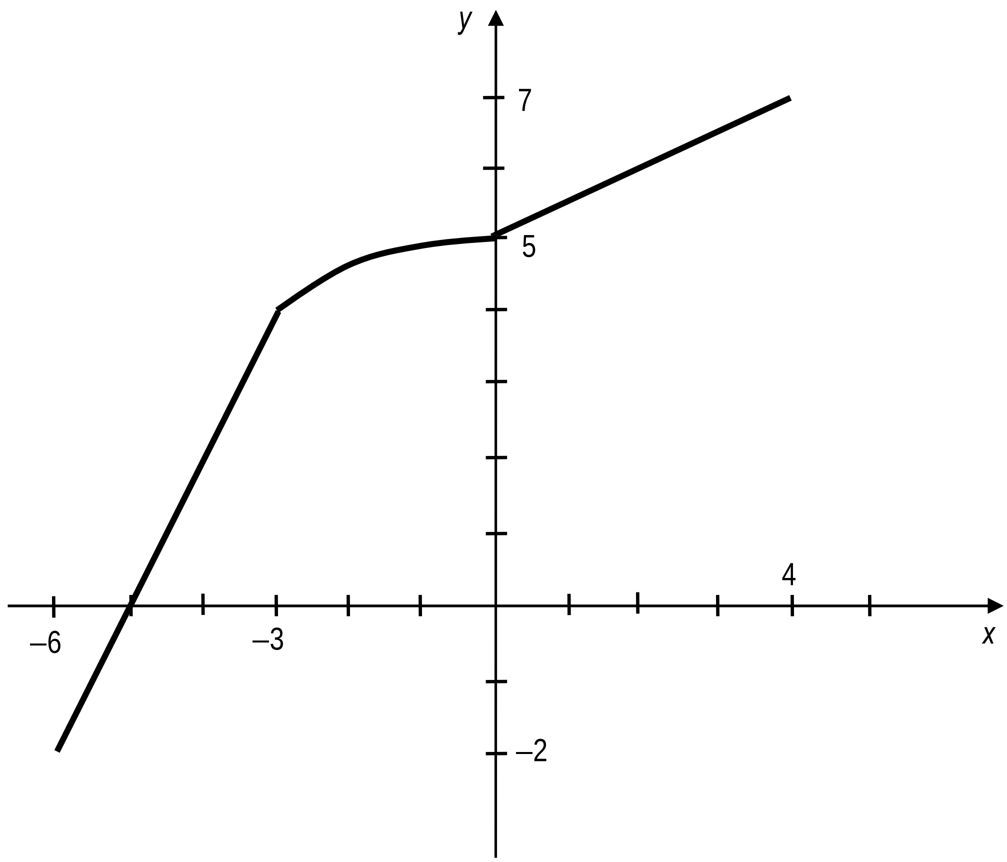
De la figura y sabiendo que se trata de funciones polinomiales (parábolas) y una función constante, se deduce que el dominio es $D_f = (-5,2]-\{-2\}$ y el recorrido es $R_f = (-4,5)$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

13. Obtener el dominio, el recorrido y dibujar la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+10 & \text{si } -6\leq x<-3 \\ +\sqrt{25-x^2} & \text{si } -3\leq x<0 \\ \dfrac{x+10}{2} & \text{si } \quad 0\leq x\leq 4 \end{cases}$$

Solución. Si se analizan las tres reglas de correspondencia, se observa que la primera y la tercera son dos segmentos de rectas y la segunda es un segmento de circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5 . De donde la gráfica es como sigue y en ella se puede observar cómo para cada regla de correspondencia se considera el intervalo dado en su definición, teniendo presente cuándo toma o no los valores de los extremos.



De los intervalos de las reglas de correspondencia y de la gráfica de cada una de ellas, obtenemos que el dominio y el recorrido de la función son:

$$D_f = \left[-6, 4\right] \quad y \quad R_f = \left[-2, 7\right]$$

ALUMNA: RODRÍGUEZ DE LA TORRE RHAMID H.

14. Obtener el dominio, el recorrido y trazar la gráfica de la función

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(x+6\right)^2}{8} & si \quad -6 \le x \le 2 \\ \dfrac{8}{3} + \sqrt{9-\left(x-2\right)^2} & si \quad 2 < x \le 5 \\ 4\left(x-5\right) & si \quad x > 5 \end{cases}$$

Solución. La primera regla de correspondencia es una sección de parábola con vértice en el punto $\left(-6,0\right)$ que abre hacia arriba y corresponde a una función polinomial por lo que toma todos los valores reales de su intervalo de definición.
La segunda regla es una función algebraica y, como se trata de una sección de cónica, se procede como sigue:

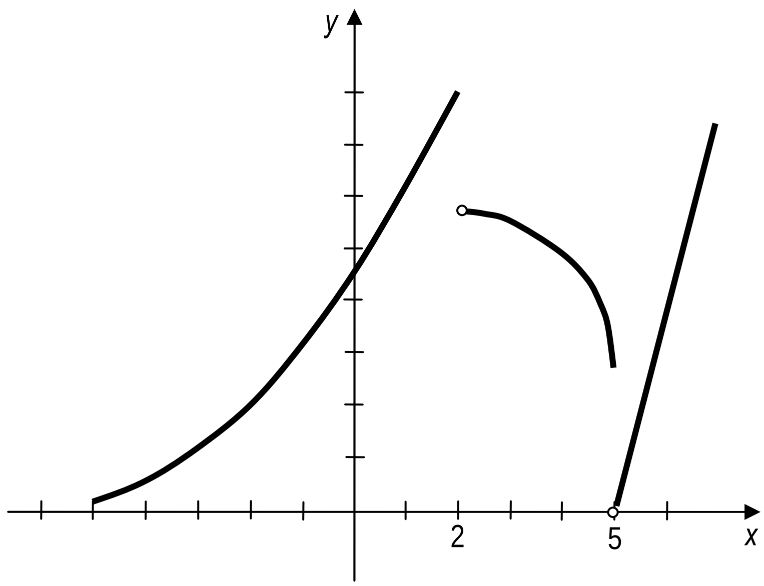
$$f(x)=y=\frac{8}{3}+\sqrt{9-(x-2)^2} \quad\Rightarrow\quad y-\frac{8}{3}=\sqrt{9-(x-2)^2} \quad\Rightarrow\quad \left(y-\frac{8}{3}\right)^2=9-(x-2)^2 \quad\Rightarrow$$

$$\left(x-2\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=9$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en el punto $\left(2,\frac{8}{3}\right)$ y radio igual a 3 ; su intervalo de definición está contenido en su dominio.

La tercera regla es una función polinomial, corresponde a una recta, por lo que no presenta problemas en su intervalo de definición.

Así, se concluye que el dominio de la función es: $D_f=\left\{x\,\middle|\,x\in\left[-6,\infty\right);\ x\in\mathbb{R}\right\}=\left[-6,\infty\right)$. Y su gráfica es la que se muestra en la siguiente figura:



El recorrido de esta función es $R_f=\left\{y\,\middle|\,y\in\left(0,\infty\right);\ x\in\mathbb{R}\right\}=\left(0,\infty\right)$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

15. Sea la siguiente función:

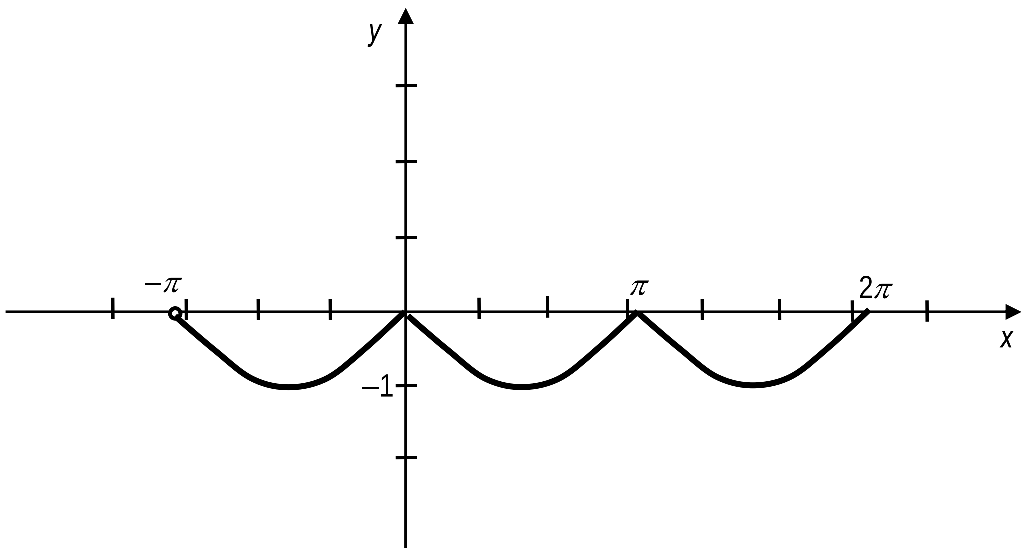
$$f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & si \quad -\pi<x\leq 0\\ sen\left(x-\pi\right) & si \quad 0<x\leq\pi\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) & si \quad \pi<x\leq 2\pi\end{cases}$$

Determinar su dominio y recorrido, y trazar en forma aproximada su gráfica.

Solución. Las reglas de correspondencia son tres funciones trascendentes, cuyos dominios de definición son los reales. Luego el dominio en este caso es la unión de los intervalos, esto es:

$$D_f = \left\{ x \middle| -\pi < x \leq 2\pi \quad ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Para graficarla se consideran los intervalos y se tiene la siguiente figura:



Como podemos apreciar, la función no toma valores positivos ni toma valores más negativos que –1 (que resulta evidente pues las funciones son trigonométricas). Por lo tanto, el recorrido es:

$$R_f = \left\{ y \mid -1 \leq y \leq 0 \quad ; \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

ALUMNO: FELIX REYES ALEJANDRO

16. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = 2x + 3$. Determinar si la función es biyectiva. En caso afirmativo obtener la regla de correspondencia de f^{-1} y dar dominio, recorrido, codominio y gráfica de la función y de su inversa.

Solución. Si es inyectiva, se debe cumplir que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad ; \quad f(x_1) = 2x_1 + 3 \quad ; \quad f(x_2) = 2x_2 + 3$$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Por lo tanto la función es inyectiva, lo que quiere decir que a diferentes valores del dominio les corresponden diferentes valores del codominio.

Como está definida, esta función tiene como dominio a los reales y como codominio también a los reales, y al tratarse de una función polinomial (una recta), su recorrido son los reales. Entonces, como el codominio es igual al recorrido, la función será suprayectiva, lo que quiere decir que todos los elementos del codominio están asociados con elementos del dominio.

Y al cumplir con ser inyectiva o “uno a uno” y suprayectiva o “sobre”, entonces es biyectiva y entonces admite función inversa, la que se obtiene de la siguiente manera:

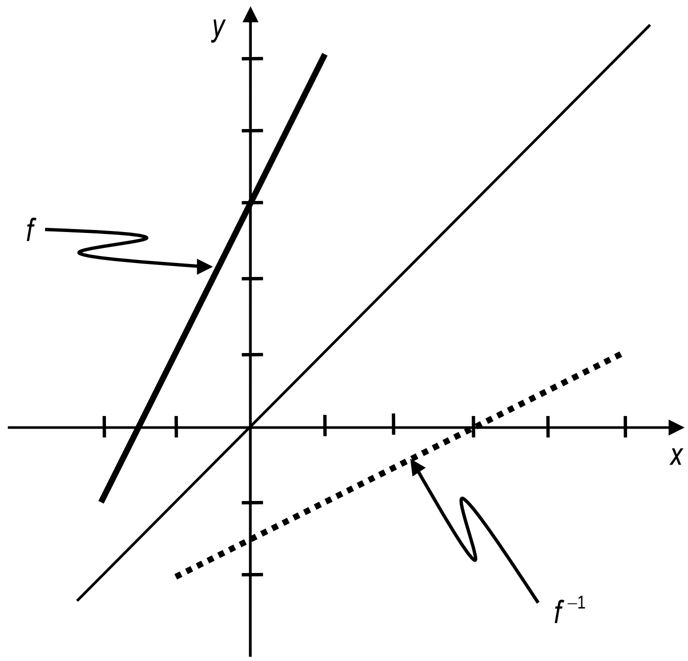
$$y = 2x + 3 \quad ; \quad x = 2y + 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x-3}{2}$$

luego $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

Y los dominios recorridos y codominios de ambas son los reales, es decir:

$$D_f = \mathbb{R} = R_{f^{-1}} \quad ; \quad R_f = \mathbb{R} = R_{f^{-1}} \quad ; \quad C_f = \mathbb{R} = C_{f^{-1}}$$

Las correspondientes gráficas son:



ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

17. Determinar el valor de k que hace que la función *f* sea la misma que su función inversa. Obtener también el dominio y recorrido de ambas.

$$f(x) = \frac{x+4}{x-k}$$

Solución. Como se dice que la función f y su función inversa f^{-1} deben ser la misma, entonces se cumple lo siguiente:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

$$y = \frac{x+4}{x-k} \quad ; \quad x = \frac{y+4}{y-k} \quad \Rightarrow \quad xy - kx = y + 4 \quad \Rightarrow \quad y(x-1) = kx + 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{kx+4}{x-1} \quad \therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{kx+4}{x-1}$$

para que las dos funciones, original e inversa, sean iguales, el valor de "k" debe ser igual a "1".

El dominio de la función original, recorrido de la función inversa, es $D_f = \mathbb{R} - \{1\} = R_{f^{-1}}$. Y, como f y f^{-1} son iguales, entonces $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{1\} = R_f$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

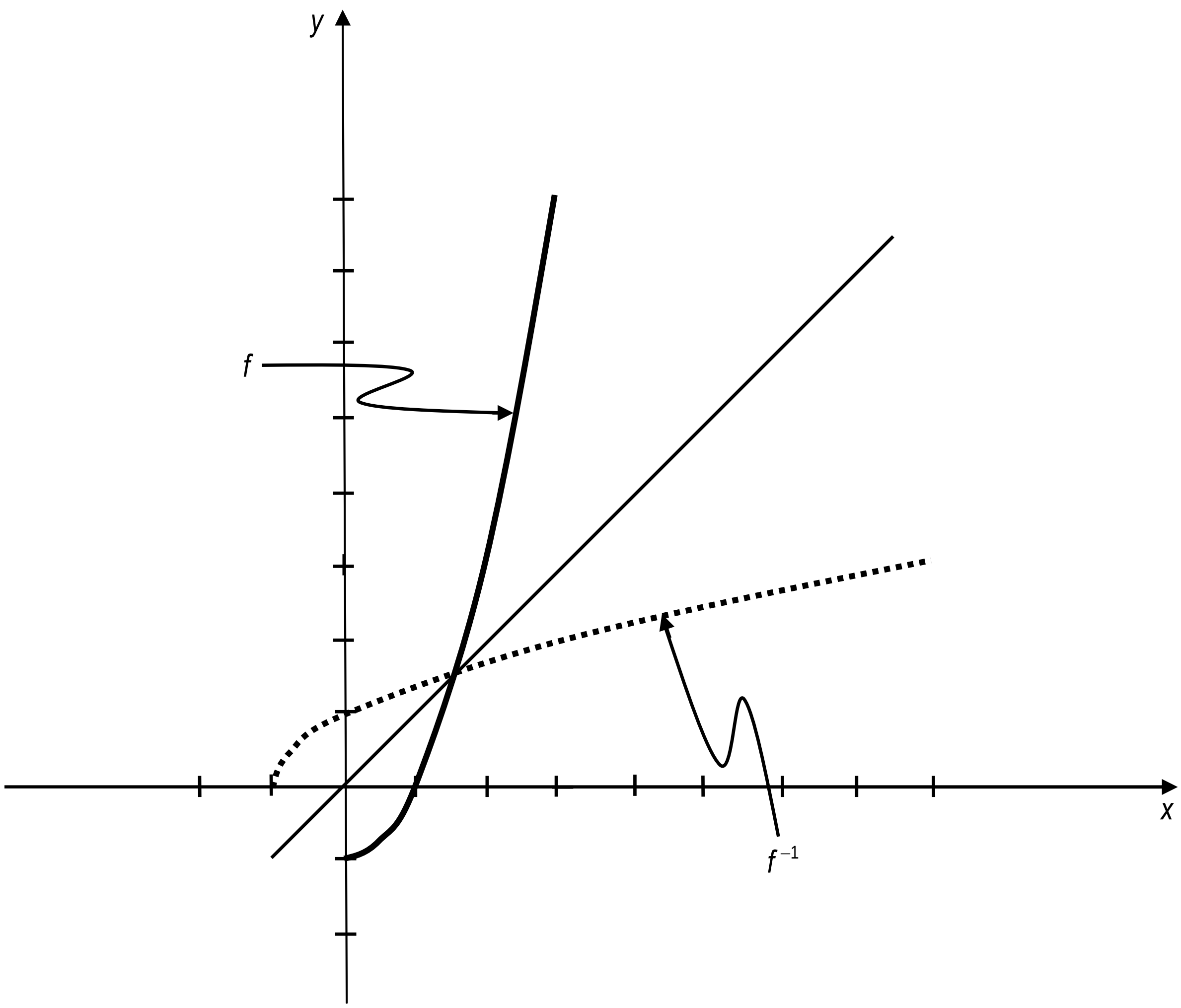
18. Determinar si la función dada es biyectiva; si lo es, obtener su función inversa y dar dominio, recorrido y gráfica de la función y de su inversa.

$$f(x) = x^2 - 1 \quad ; \quad x \in [0,\infty)$$

Solución. La ecuación $y = x^2 - 1 \ \Rightarrow \ y + 1 = x^2$ es una parábola con vértice en el punto $(0,-1)$, eje de simetría el eje $"y"$ y que abre hacia arriba. Su dominio, que está establecido en la formulación del ejercicio, es: $D_f = [0,\infty)$ y resulta evidente que su recorrido está dado por: $R_f = [-1,\infty)$. Como se trata de la mitad de la parábola, es decir, de la parte de la derecha del vértice, entonces es inyectiva y si se considera su codominio igual que su recorrido, es suprayectiva y por lo tanto biyectiva. Luego admite función inversa y la regla de correspondencia de ésta es:

$$y = x^2 - 1 \quad ; \quad x = y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x+1}$$

Y el dominio y recorrido de la función inversa son: $D_f = [-1,\infty)$ y $R_f = [0,\infty)$. Las gráficas de ambas funciones se muestran en la siguiente figura:



ALUMNA: RODRÍGUEZ DE LA TORRE RHAMID H.

19. Dada la función $f:(3,9)\to R$; $f=\left\{ (x,y) \;\middle|\; y=9-\sqrt{36-(x-3)^2} \right\}$, verificar que es biyectiva y determinar su función inversa, así como los dominios, recorridos y gráficas de la función y de su inversa.

Solución. Se analiza la regla de correspondencia dada y se ve que:

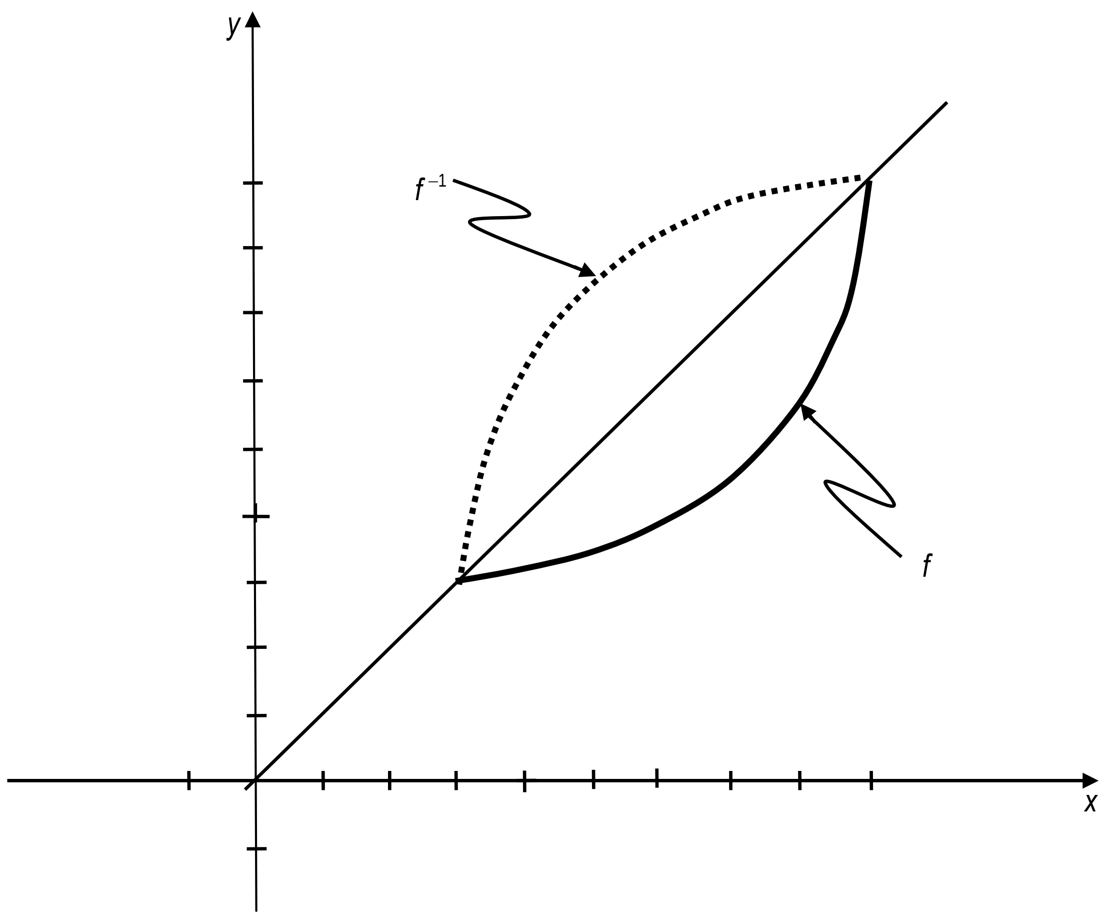
$$y=9-\sqrt{36-(x-3)^2} \quad \Rightarrow \quad y-9=-\sqrt{36-(x-3)^2}$$
$$\Rightarrow \quad (y-9)^2=36-(x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y-9)^2=6^2$$

Se trata de la parte inferior de la gráfica (por el signo del radical) de una circunferencia con centro en el punto $(3,9)$ y radio igual a 6 . Y, dado su dominio de definición como $D_f=(3,9)$, entonces es la parte de la derecha. Luego cualquier recta horizontal corta a su gráfica en un sólo punto y entonces es inyectiva. Si se fija su codominio igual a su recorrido, es suprayectiva y por consiguiente biyectiva; por lo que tiene función inversa, cuya regla de correspondencia está dada por:

$$y=9-\sqrt{36-(x-3)^2} \quad ; \quad x=9-\sqrt{36-(y-3)^2} \quad \Rightarrow \quad (x-9)^2+(y-3)^2=36 \quad \Rightarrow \quad y=3+\sqrt{36-(x-9)^2}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x)=3+\sqrt{36-(x-9)^2} \quad ; \quad x\in[3,9]$$

y los dominios y recorridos quedan como: $D_f=[3,9]=R_{f^{-1}}$ $\;y\;$ $R_f=[3,9]=D_{f^{-1}}$



20. Dada la función:

$$f = \left\{ (x,y) \middle| y = 3 - \sqrt{16-(x-1)^2} \quad ; \quad 1 \le x \le 5 \right\}$$

investigar si es biyectiva, y en caso afirmativo determinar su función inversa, los dominios y recorridos de ambas funciones y trazar sus gráficas.

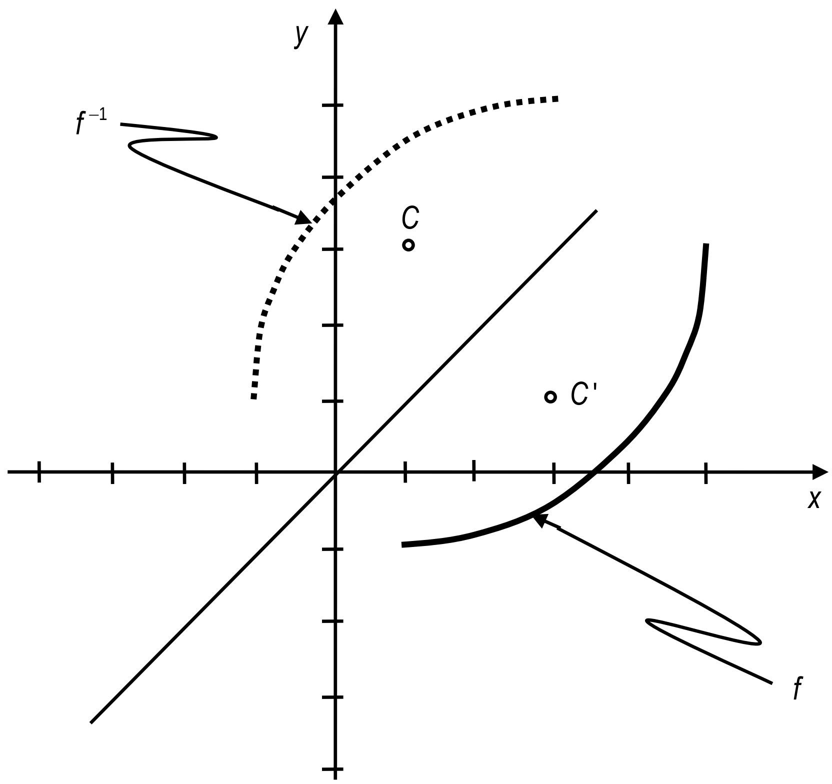
Solución. Se analiza la regla de correspondencia y,

$$y = 3 - \sqrt{16-(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad (y-3)^2 = 16-(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Se trata de una circunferencia con: $r = 4$ y $C(1,3)$. Por lo tanto su dominio es $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \le x \le 5 \right\}$

y por el signo negativo sólo se toma la parte inferior, por lo que su recorrido es $R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le y \le 3 \right\}$

Además, si se fija su codominio igual al recorrido, es suprayectiva y por lo tanto biyectiva. Se gráfica esta función y;



Luego el dominio y el recorrido de la función inversa son:

$$D_{f^{-1}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le x \le 3 \right\} \quad \text{y} \quad R_{f^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \le y \le 5 \right\}$$

y la regla de correspondencia es:

$$y = 3 - \sqrt{16-(x-1)^2} \quad ; \quad x = 3 - \sqrt{16-(y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \sqrt{16-(x-3)^2}$$

$$\therefore \quad f^{-1} = \left\{ (x,y) \middle| y = 1 - \sqrt{16-(x-3)^2} \quad ; \quad -1 \le x \le 3 \right\}$$

21. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x-1 & si \quad -4\le x\le -2 \\ -\dfrac{1}{2}x-6 & si \quad -2<x<0 \\ \dfrac{-x-24}{4} & si \quad 0\le x<4 \end{cases}$$

Investigar si es biyectiva y en caso afirmativo, obtener su función inversa, así como dominio, recorrido y gráfica de f y f^{-1}

Solución. La primera regla de correspondencia es la siguiente parábola:

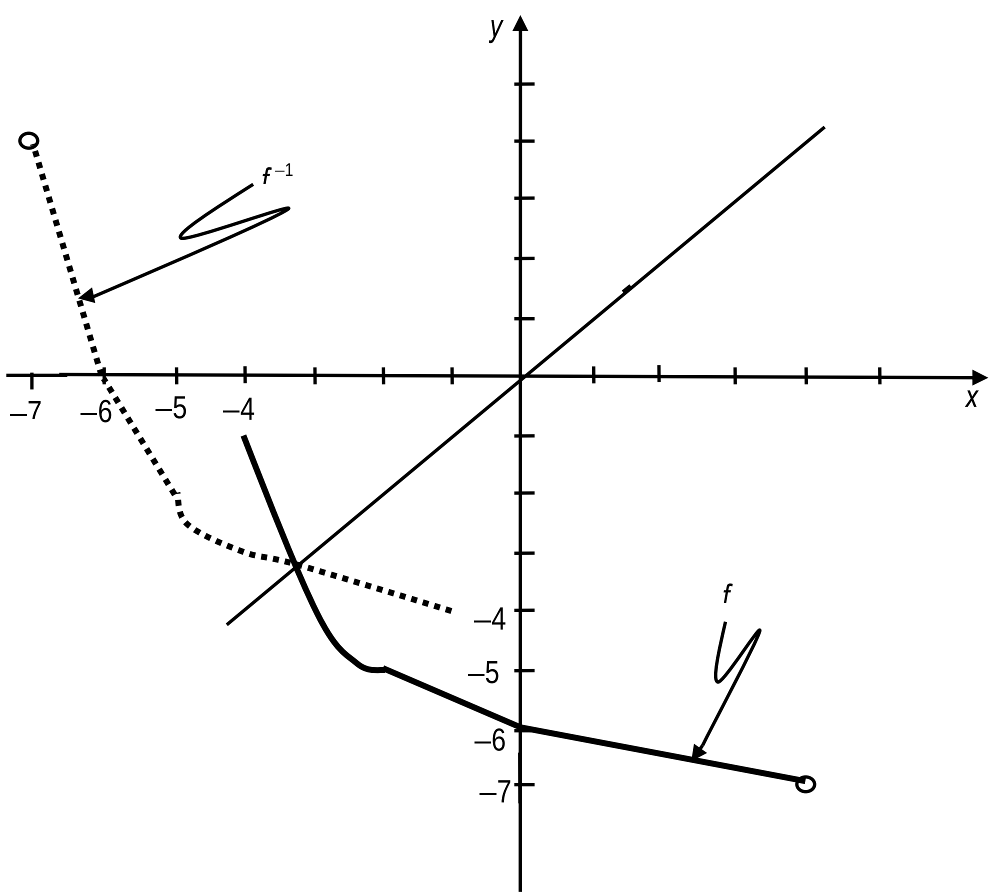
$$y=x^2+4x-1 \quad\Rightarrow\quad y=x^2+4x+4-4-1 \quad\Rightarrow\quad y=(x+2)^2-5 \quad\Rightarrow\quad y+5=(x+2)^2$$

cuyo vértice es $(-2,-5)$, se extiende hacia arriba y la recta $x=-2$ es su eje se simetría. Está definida en el intervalo $[-4,-2]$.

La segunda es una recta por lo que es una función continua en su intervalo.

La tercera es una recta también, es continua y tampoco tiene problema en su intervalo de definición.

Por lo tanto, el dominio de la función es: $D_f=[-4,4)$. Se graficará ahora:



El recorrido de la función es: $R_f=(-7,-1]$

Se observa en la figura que en toda la función, para cada valor de "y" hay uno y sólo uno de "x", por lo que es inyectiva y si se hace el codominio igual al recorrido, es suprayectiva y por lo tanto biyectiva. Entonces tiene función inversa. Para obtenerla se hace lo siguiente:

$$y = x^2 + 4x - 1 \quad ; \quad x = y^2 + 4y - 1 \quad \Rightarrow \quad (y+2)^2 = x + 5 \quad \Rightarrow \quad y = -2 - \sqrt{x+5}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 6 \quad ; \quad x = -\frac{1}{2}y - 6 \quad \Rightarrow \quad 2x = -y - 12 \quad \Rightarrow \quad y = -2x - 12$$

$$y = \frac{-x-24}{4} \quad ; \quad x = \frac{-y-24}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x = -y - 24 \quad \Rightarrow \quad y = -4x - 24$$

por lo que finalmente la función inversa se puede definir como sigue:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -4x - 24 & si \quad -7 < x \le -6 \\ -2x - 12 & si \quad -6 < x < -5 \\ -2 - \sqrt{x+5} & si \quad -5 \le x \le -1 \end{cases}$$

Finalmente, el dominio de la función inversa es $D_{f^{-1}} = (-7,-1]$ y su recorrido es $R_{f^{-1}} = [-4,4)$.

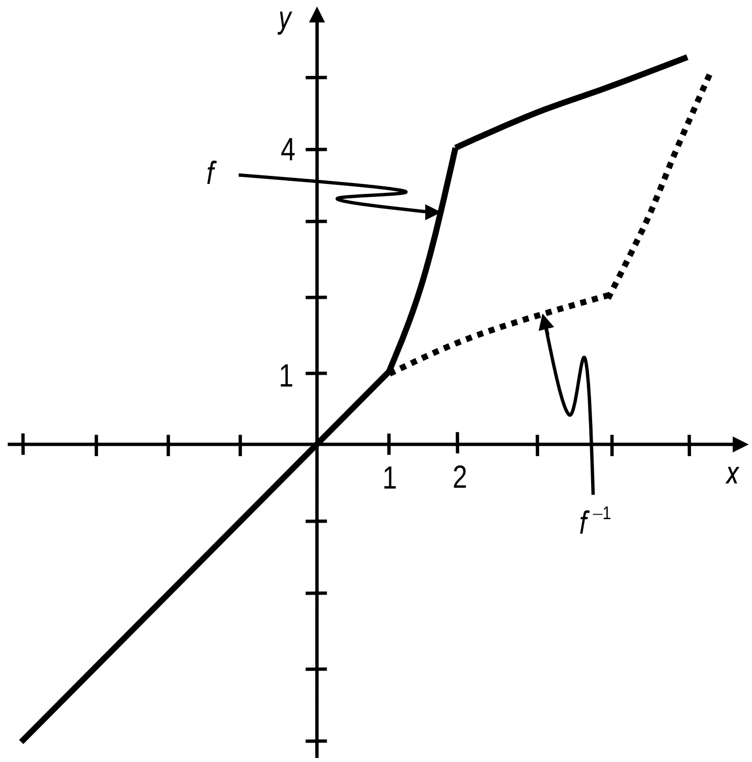
LOS COORDINADORES

22. Determinar la regla de correspondencia de la función inversa, si existe, de la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 1 \\ x^2 & si \quad 1 \le x \le 2 \\ 2\sqrt{x+2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

En caso de existir, dar dominio, recorrido y gráfica de f y f^{-1} .

Solución. Las tres reglas de correspondencia corresponden, respectivamente, a la función identidad, una parábola con vértice en el origen, eje de simetría el eje "y" y que abre hacia arriba, y otra parábola con vértice en el punto $(-2,0)$ y con eje de simetría el eje "x" y abre hacia la derecha. Por sus intervalos de definición, se ve que la función es inyectiva y siendo su recorrido, los reales, igual a su codominio, es suprayectiva y por lo tanto biyectiva, por lo que sí tiene función inversa.
Su dominio y su recorrido son todos los valores reales, esto es, $D_f = \mathbb{R} = R_f$. La gráfica de ambas funciones se muestra en la siguiente figura:



Para definir la función inversa se procede de la siguiente manera con cada regla de correspondencia:

$$y = x \quad ; \quad x = y \quad \Rightarrow \quad y = x$$

$$y = x^2 \quad ; \quad x = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x}$$

$$y = 2\sqrt{x+2} \quad ; \quad x = 2\sqrt{y+2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4(y+2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2-8}{4}$$

Entonces la función inversa queda definida como:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & si \quad 1 \le x \le 4 \\ \dfrac{x^2-8}{4} & si \quad x > 4 \end{cases}$$

ALUMNO: CALDERÓN OCHOA GABRIEL

23. Sea la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{5}{3}x - \dfrac{14}{13} & -\infty < x < -4 \\ \sqrt{-\left(x^2 + 8x + 12\right)} & -4 \le x < -2 \\ -\sqrt{4 - x^2} & -2 \le x < 0 \\ -4x - 2 & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

Determinar si esta función es biyectiva y en caso de serlo, obtener su función inversa y determinar dominio, recorrido y gráfica de f y f^{-1}

Solución. Se analiza cada regla de correspondencia y se llega a:

$y = -\frac{5}{3}x - \frac{14}{13}$ es una recta por lo que está definida en el intervalo considerado.

$y = \sqrt{-\left(x^2 + 8x + 12\right)}$ es la ecuación de una cónica y para saber sus características hacemos lo siguiente:

$y^2 = -\left(x^2 + 8x + 16 - 16 + 12\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 - \left(x + 4\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x + 4\right)^2 + y^2 = 4$

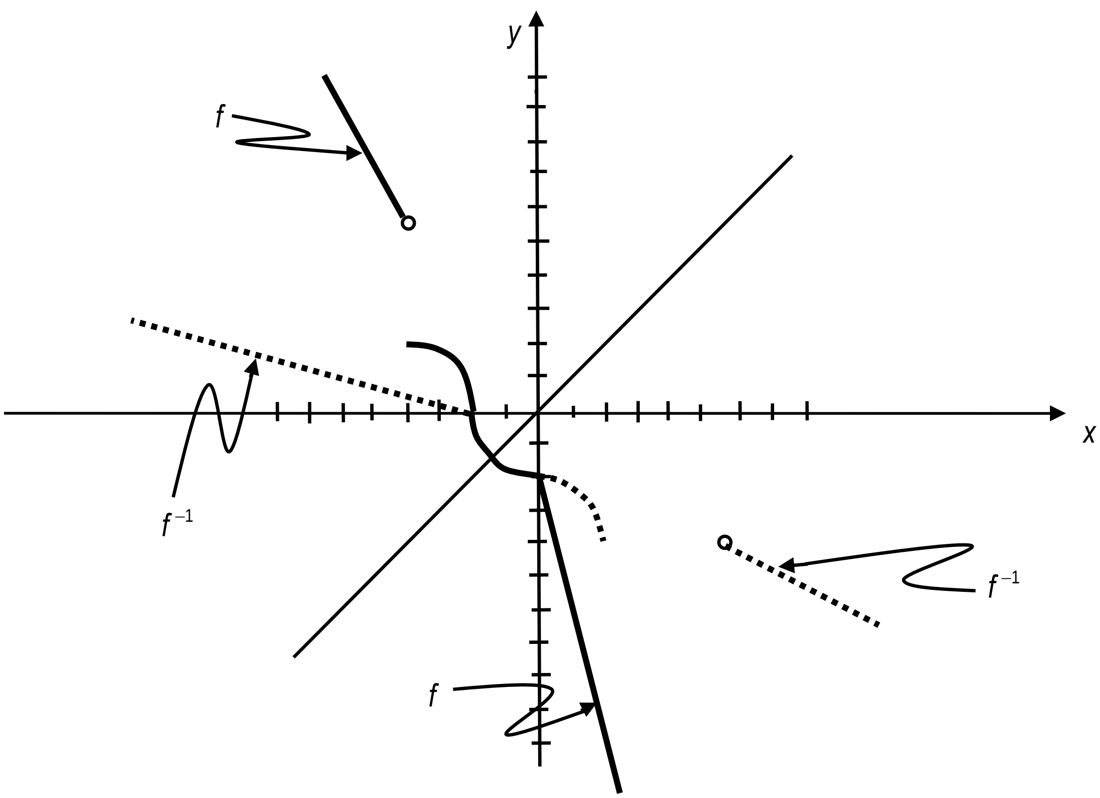
Es una circunferencia con centro en $\left(-4, 0\right)$ y radio igual a 2. Por lo que en el intervalo dado está definida.

$y = -\sqrt{4 - x^2}$ es la parte inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, con centro en el origen y radio igual a 2. Luego está definida en el intervalo considerado.

$y = -4x - 2$ es una recta por lo que está definida en su intervalo.

Por lo tanto el dominio de la función es: $D_f = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$.

Al graficar la función podremos determinar, de una manera más sencilla, su recorrido:



Como se ve en la gráfica y tomando en cuenta que las dos rectas no tienen limitaciones a la izquierda y a la derecha respectivamente, el recorrido es: $R_f = \left\{y \middle| y \in \left(-\infty, 2\right] \cup \left(5.6, \infty\right) \quad ; \quad y \in \mathbb{R} \right\}$.

Como podemos apreciar, para cada $"y"$ existe un y sólo un valor de $"x"$. Esto hace que la función sea inyectiva. De igual manera podemos definir como codominio al recorrido con lo que la función que estamos estudiando también es suprayectiva. Debido a que la función es suprayectiva e inyectiva, llegamos a la conclusión de que es biyectiva y por lo tanto tiene inversa, y es la que se presenta en la gráfica de manera punteada (para el caso de la circunferencia con centro en el origen, la gráfica de la función y su inversa coinciden).

Procederemos a desarrollar su inversa.
En estos casos se recomienda hacer un cambio de variables en cada regla de correspondencia y luego despejar a $"y"$, con lo que se tendrá para cada caso la regla de correspondencia de su función inversa. Así,

$$y=-\frac{5}{3}x-\frac{14}{13} \quad ; \quad x=-\frac{5}{3}y-\frac{14}{13} \quad \Rightarrow \frac{5}{3}y=-x-\frac{14}{13} \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{3}{5}x-\frac{42}{65}$$

$$y=\sqrt{-\left(x^2+8x+12\right)} \quad ; \quad x=\sqrt{-\left(y^2+8y+12\right)} \quad \Rightarrow \quad x^2=-\left(y^2+8y+12\right) \quad \Rightarrow x^2=-y^2-8y-12$$

$$y^2+8y+16-16+12=-x^2 \quad \Rightarrow \quad \left(y+4\right)^2=-x^2+4 \quad \Rightarrow \quad y+4=\pm\sqrt{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad y=+\sqrt{4-x^2}-4$$

$$y=-\sqrt{4-x^2} \quad ; \quad x=-\sqrt{4-y^2} \quad \Rightarrow \quad y=-\sqrt{4-x^2}$$

$$y=-4x-2 \quad ; \quad x=-4y-2 \quad \Rightarrow \quad 4y=-x-2 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$$

Para determinar la función inversa, debemos determinar el dominio de cada regla de correspondencia, esto se logrará con facilidad observando la gráfica de la función. Recordemos que el recorrido de una función es el dominio de su función inversa. Basándonos en esto la función inversa queda de la siguiente forma:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} & si \quad -\infty < x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & si \quad -2 \le x < 0 \\ \sqrt{x^2+4}-4 & si \quad 0 \le x \le 2 \\ -\frac{3}{5}x-\frac{42}{65} & si \quad 5.6 < x \le \infty \end{cases}$$

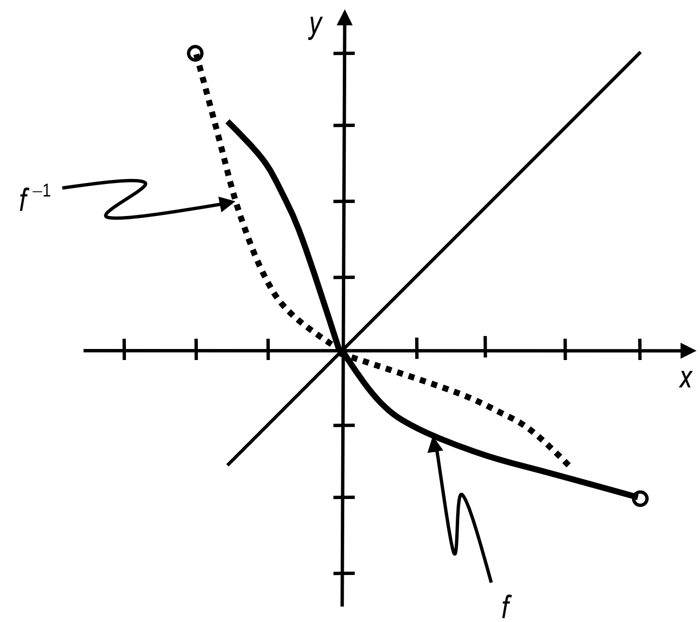
Finalmente, el domino de la función inversa es: $D_{f^{-1}}=\left\{x \middle| x\in\left(-\infty,2\right]\cup\left(5.6,\infty\right) \quad ; \quad x\in\mathbb{R}\right\}$ y el recorrido es: $R_{f^{-1}}=\left\{y \middle| y\in\mathbb{R}\right\}$

ALUMNO: FELIX REYES ALEJANDRO

24. Para la función f, determinar su función inversa así como el dominio, recorrido y gráfica de la función y de su inversa.

$$f(x)=\begin{cases} -3senx & si \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le 0 \\ -\sqrt{x} & si \quad 0< x<4 \end{cases}$$

Solución. La primera regla de correspondencia es una función trascendente con dominio en los reales. La segunda es la parábola de ecuación $y^2 = x$, con vértice en el origen, eje de simetría el eje "x" y abre hacia la derecha; está definida con el signo menos en la raíz por lo que se trata de la rama inferior.
Si se grafica se tiene que:



En la gráfica se puede apreciar que la función es inyectiva y si su codominio se fija igual que su recorrido, entonces es suprayectiva y por lo tanto biyectiva por lo que su inversa es función, y sus respectivos dominios y recorridos son:

$$D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, 4 \right) = R_{f^{-1}} \qquad y \qquad R_f = (-2, 3] = D_{f^{-1}}$$

y las reglas de correspondencia se obtienen como:

$$y = -3senx \quad ; \quad x = -3seny \quad \Rightarrow \quad seny = -\frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad y = angsen\left(-\frac{x}{3} \right)$$

$$y = -\sqrt{x} \quad ; \quad x = -\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y = x^2$$

Por lo que la función inversa queda como: $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ angsen\left(-\frac{x}{3} \right) & si \quad 0 < x \leq 3 \end{cases}$

ALUMNO: CALDERÓN OCHOA GABRIEL

25. Determinar si la función f expresada en forma paramétrica es biyectiva. Si lo es, obtener su función inversa, el dominio y recorrido de ambas y trazar las gráficas correspondientes.

$$f : \begin{cases} y = 1 + sen\theta \quad ; \quad y \leq 1 \\ \sqrt{x-2} = \dfrac{\cos\theta}{2} \end{cases}$$

Solución. Si se aplica la identidad trigonométrica: $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$sen^2\theta = (y-1)^2 \quad \text{y} \quad \cos^2\theta = 4(x-2) \ .$$

De donde $sen^2\theta + \cos^2\theta = (y-1)^2 + 4(x-2) = 1 \quad \Rightarrow$

$$(y-1)^2 = 1 - 4x + 8 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = -4\left(x - \frac{9}{4}\right) \ ;$$

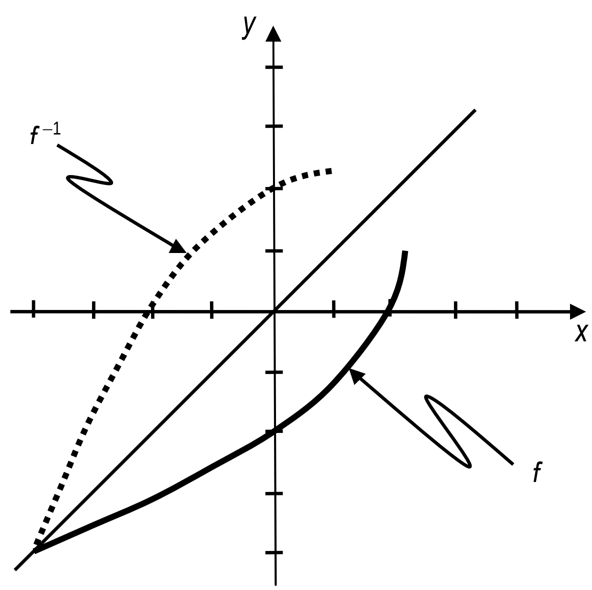
Es una parábola con vértice en $V\left(\frac{9}{4},1\right)$, con eje de simetría el eje $y = 1$; el signo negativo del coeficiente de x indica que abre hacia la izquierda, por lo que su dominio y recorrido son:

$$D_f = \left\{ x \middle| x \le \frac{9}{4} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \right\} \quad y \quad R_f = \left\{ y \middle| y \le 1 \quad ; \quad y \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Como se tiene sólo la rama inferior de la parábola, entonces es inyectiva y si su codomino se fija igual a su recorrido, entonces es biyectiva por lo que tiene función inversa, donde el dominio y el recorrido son:

$$D_{f^{-1}} = \left\{ x \middle| x \le 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \right\} \quad y \quad R_{f^{-1}} = \left\{ y \middle| y \le \frac{9}{4} \quad ; \quad y \in \mathbb{R} \right\}$$

Sus gráficas son:



Como la regla de correspondencia de la función dada en coordenadas cartesianas es: $y = 1 - \sqrt{-4x+9}$ con $y \le 1$, entonces la regla de correspondencia de la función inversa estará dada por:

$$y = 1 - \sqrt{-4x+9} \quad ; \quad x = 1 - \sqrt{-4y+9} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = -4y + 9 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9-(x-1)^2}{4}$$

Por lo tanto la función inversa es: $f^{-1}(x) = \dfrac{9-(x-1)^2}{4} \quad ; \quad x \le 1$

26. Para la función dada, verificar si es biyectiva y, en caso de serlo, obtener su función inversa y determinar dominio, recorrido y gráfica de f y f^{-1}

$$f(x)=\begin{cases}\cos x-2 & ; \quad -\pi\le x<0\\ -\sqrt{1-x^2} & ; \quad 0\le x\le 1\\ \ln x & ; \quad 1<x\end{cases}$$

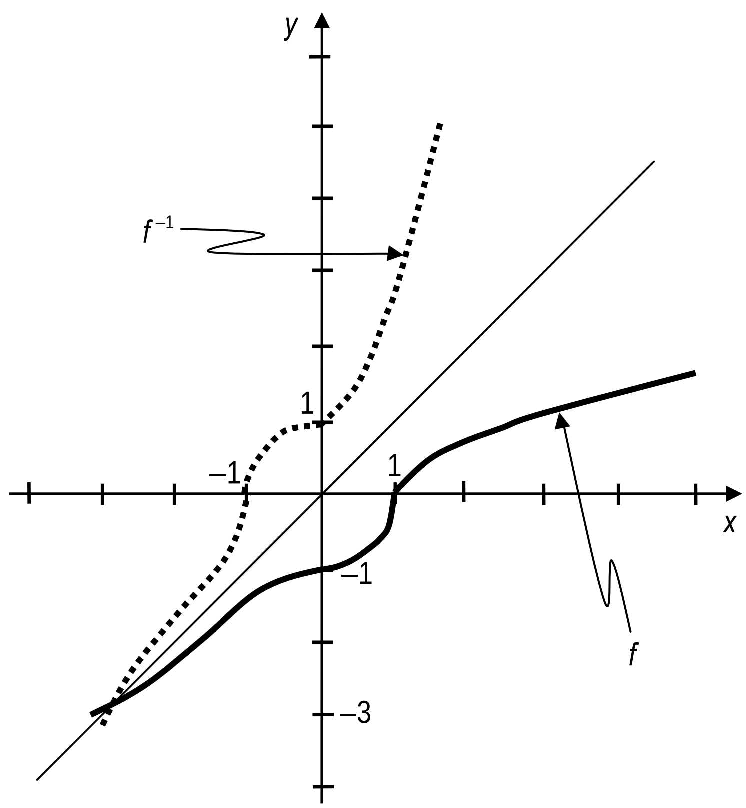
Solución. La primera regla de correspondencia es una función trascendente, en su intervalo de definición es inyectiva, y si su codominio se iguala a su recorrido entonces es suprayectiva y por lo tanto biyectiva, por lo que tiene función inversa.

La segunda regla de correspondencia es parte de una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 1.

$$y=-\sqrt{1-x^2} \quad\Rightarrow\quad y^2=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=1$$

La tercera regla de correspondencia es la función logaritmo natural, por lo que es inyectiva (uno a uno) y si se considera que su codominio es igual a su recorrido es una función suprayectiva (sobre), por lo tanto es biyectiva y tiene función inversa.

En la gráfica se puede observar si la función en su conjunto (con las tres reglas de correspondencia) es biyectiva, lo que se comprueba si cualquier recta horizontal la toca en un solo punto.



En la figura se observa que la fundón es inyectiva, luego, con lo dicho anteriormente, admite inversa, cuya gráfica se muestra en la figura. El dominio y el recorrido de cada uno de ellas es:

$$D_f=\left[-\pi,\infty\right)=R_{f^{-1}} \quad ; \quad R_f=\left[-3,\infty\right)=D_{f^{-1}}$$

Para obtener las reglas de correspondencia que definen a la función inversa, se cambian las variables y se despeja la nueva variable independiente "y". Así se llega a:

Primera regla: $x = \cos y - 2 \quad \Rightarrow \quad \cos y = x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = ang\cos\left(x - 2\right)$

Segunda regla: $x = -\sqrt{1 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

(se toma el signo positivo de la raíz porque se trata de la parte de la circunferencia localizada en el cuarto cuadrante.)

Tercera regla: como se sabe, la función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial.

$x = \ln y \quad \Rightarrow \quad y = e^x$

finalmente, la función inversa está definida como:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ang\cos(x+2) & si \quad -3 \leq x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & si \quad 0 < x < \infty \end{cases}$$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

27. Dadas $f\left(x\right) = -4x + 2$ y $g\left(x\right) = \sqrt{4 - x}$, obtener $f \circ g$, $g \circ f$ y sus respectivos dominios.

Solución. El dominio y el recorrido de cada función es:

$$D_f = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}\right\} \quad ; \quad R_f = \left\{y \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$D_g = \left\{x \middle| x \leq 4 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}\right\} \quad ; \quad R_g = \left\{y \middle| y \geq 0 \quad ; \quad y \in \mathbb{R}\right\}$$

Para obtener $f \circ g$ se hace lo siguiente:

$$f \circ g = f\left(g\left(x\right)\right) = 2 - 4\sqrt{4 - x}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \middle| x \in D_g \quad ; \quad g\left(x\right) \in D_f\right\} \text{ . Como } R_g \subset D_f \text{ , entonces } D_{f \circ g} = D_g = \left(-\infty, 4\right]$$

Para obtener $g \circ f$ se procede como sigue:

$$g \circ f = g\left(f\left(x\right)\right) = \sqrt{4 - \left(-4x + 2\right)} = \sqrt{2 + 4x}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x \middle| x \in D_f \quad ; \quad f\left(x\right) \in D_g\right\}$$

Para obtener el dominio de la composición, se debe investigar qué valores del dominio de "f" conducen al recorrido $\left(-\infty, 4\right]$. Si $f\left(x\right) = 4$, entonces $4 = -4x + 2 \quad \Rightarrow \quad 4x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$.

Luego, el dominio de la composición está dado por: $D_{g \circ f} = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

28. Sean las funciones $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=3x+1$.
Obtener las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$ y dar sus respectivos dominios.

Solución. Los dominios de las funciones son:

$$D_f=[1,\infty) \quad ; \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$f\circ g=f\left(g\left(x\right)\right)=\sqrt{3x+1-1}=\sqrt{3x}$$

$D_C=[0,\infty)$. Luego $D_{f\circ g}=D_C\cap D_g=[0,\infty)$; donde D_C es el dominio de $\sqrt{3x}$

$$g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=3\sqrt{x-1}+1$$

$D_C=[1,\infty)$. Luego $D_{g\circ f}=D_C\cap D_f=[1,\infty)$; donde D_C es el dominio de $3\sqrt{x-1}+1$

ALUMNO: CALDERÓN OCHOA GABRIEL

29. Obtener $f\circ g$ y $g\circ f$ si $f\left(x\right)=x^2$ y $g\left(x\right)=\sqrt{x}$

Solución: Los dominios y recorridos de ambas funciones son:

$$D_f=\mathbb{R} \quad ; \quad D_g=[0,\infty)$$
$$R_f=[0,\infty) \quad ; \quad R_g=[0,\infty)$$

$$f\circ g=f\left(g\left(x\right)\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\middle|x\in D_g\,;g\left(x\right)\in D_f\right\}\text{ . Como } R_g\subset D_f \quad\Rightarrow\quad D_{f\circ g}=D_g=[0,\infty)$$

$$g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{x^2}=x$$

$$D_{g\circ f}=\left\{x\middle|x\in D_f\,;f\left(x\right)\in D_g\right\}\text{ . Como } R_f\subseteq D_g \quad\Rightarrow\quad D_{g\circ f}=D_f=\mathbb{R}$$

ALUMNO: MENDIETA PACHECO HUGO

30. Obtener las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$, así como sus respectivos dominios, para las funciones:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x} \quad y \quad g\left(x\right)=x^2+1$$

Solución:

$$D_f=[0,\infty) \quad ; \quad D_g=\mathbb{R}$$
$$R_f=[0,\infty) \quad ; \quad R_g=[1,\infty)$$

$$f \circ g = f\left(g\left(x\right)\right) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \middle| x \in D_g \,;\, g\left(x\right) \in D_f\right\} \quad . \text{Como} \quad R_g \subset D_f \quad \therefore \quad D_{f \circ g} = D_g = \mathbb{R}$$

$$g \circ f = g\left(f\left(x\right)\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x \middle| x \in D_f \,;\, f\left(x\right) \in D_g\right\} \quad . \text{Como} \quad R_f \subset D_g \quad \therefore \quad D_{g \circ f} = D_f = \left[0, \infty\right)$$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

31. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{4x} \quad y \quad g(x) = 8 - 2x^2$$

determinar $f \circ g$ y $g \circ f$, así como el dominio de las composiciones.

Solución. Los dominios de las dos funciones son, respectivamente

$$D_f = \left[0, \infty\right) \quad y \quad D_g = \mathbb{R}$$

La primera composición pedida es igual a: $f \circ g = f\left(g\left(x\right)\right) = \sqrt{4\left(8 - 2x^2\right)} = \sqrt{32 - 8x^2}$

De donde $32 - 8x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(2 - x\right)\left(2 + x\right) \geq 0$

Las dos posibilidades son:

$$\begin{matrix} 2 - x \leq 0 & \Rightarrow & x \geq 2 \\ 2 + x \leq 0 & \Rightarrow & x \leq -2 \end{matrix} \quad \therefore \quad x \in \left(-\infty, -2\right] \cap \left[2, \infty\right) = \phi \quad ; \quad \begin{matrix} 2 - x \geq 0 & \Rightarrow & x \leq 2 \\ 2 + x \geq 0 & \Rightarrow & x \geq -2 \end{matrix} \quad \therefore \quad x \in \left[-2, 2\right]$$

Por lo que el dominio D_C es igual a: $D_C = \left[-2, 2\right]$

Luego el dominio de la composición es: $D_{f \circ g} = D_C \cap D_g = \left[-2, 2\right]$

La otra composición es: $g \circ f = g\left(f\left(x\right)\right) = 8 - 2\left(\sqrt{4x}\right)^2 = 8 - 8x$; $D_C = \mathbb{R}$

Luego $D_{g \circ f} = D_C \cap D_f = \left[0, \infty\right)$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

32. Sean las funciones f y g definidas por:

$$f\left(x\right) = \sqrt{1 - x^2} \quad y \quad g\left(x\right) = \sqrt{x}$$

obtener las reglas de correspondencia y los dominios de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución.

$$D_f = [-1,1] \quad ; \quad D_g = [0,\infty)$$
$$R_f = [0,1] \quad ; \quad R_g = [0,\infty)$$

$$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{1-(\sqrt{x})^2} = \sqrt{1-x} \quad ; \quad D_C = (-\infty,1]$$
$$D_{f\circ g} = D_C \cap D_g = (-\infty,1] \cap [0,\infty) = [0,1]$$

$$g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt[4]{1-x^2} \quad ; \quad D_C = [-1,1]$$
$$D_{g\circ f} = D_C \cap D_f = [-1,1] \cap [-1,1] = [-1,1]$$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

33. Sean las funciones f y g, definir $f \circ g$ y $g \circ f$ y dar sus respectivos dominios.

$$f(x) = x^3 + 1 \;\; si \;\; x \in [0\,,\,\infty) \qquad y \qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1} \;\; si \;\; x \in \mathbb{R}$$

Solución. Resulta conveniente conocer los dominios y recorridos de ambas funciones, por lo que:

$$D_f = [0,\infty) \qquad D_g = \mathbb{R}$$
$$y$$
$$R_f = [1,\infty) \qquad R_g = \mathbb{R}$$

Se obtiene la regla de correspondencia de la composición $f \circ g$ y:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 1 \;\; \Rightarrow \;\; (f \circ g)(x) = x - 1 + 1 \;\; \Rightarrow \;\; (f \circ g)(x) = x$$

El dominio se expresa a través de $D_{f\circ g} = \{x \mid x \in D_g \;\; ; \;\; g(x) \in D_f\}$. Las imágenes de g que pertenecen a D_f son $[0,\infty)$; luego se deben determinar los valores del dominio de g que conducen a esas imágenes. Para ello se hace lo siguiente:

$y = 0 \;\; ; \;\; 0 = \sqrt[3]{x-1} \;\; \Rightarrow \;\; x = 1$. Luego el dominio de la composición es $D_{f\circ g} = [1,\infty)$.

Se obtiene la regla de correspondencia de la composición $g \circ f$ y:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} \;\; \Rightarrow \;\; (g \circ f)(x) = x$$

El dominio se expresa a través de $D_{g\circ f} = \{x \mid x \in D_f \;\; ; \;\; f(x) \in D_g\}$. Las imágenes de f que son parte del D_g son todas las de su recorrido, es decir, $[1,\infty)$, luego el dominio de la composición es $D_{g\circ f} = [0,\infty)$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

34. Dadas las siguientes funciones, obtener $f \circ g$ y $g \circ f$ y determinar sus respectivos dominios.

$$f(x) = \sqrt{x-9} \qquad y \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Solución.

$$D_f = [9, \infty) \qquad ; \qquad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} - 9} = \sqrt{\frac{1-9x}{x}}$$

$$\frac{1-9x}{x} \geq 0 \quad ; \quad x \neq 0$$

x	$1-9x$	x	$\frac{1-9x}{x}$
$(-\infty, 0)$	$+$	$-$	$-$
$\left(0, \frac{1}{9}\right)$	$+$	$+$	$+$
$\left(\frac{1}{9}, \infty\right)$	$-$	$+$	$-$

$\therefore \quad D_C = \left(0, \frac{1}{9}\right]$. Por lo que $D_{f \circ g} = D_C \cap D_g = \left(0, \frac{1}{9}\right]$

$$g \circ f = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-9}}$$

$x - 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 9 \quad \therefore \quad D_C = (9, \infty)$. De donde $D_{g \circ f} = D_C \cap D_f = (9, \infty)$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

35. Dadas las funciones siguientes, determinar $f \circ g$ y $g \circ f$ y dar los dominios respectivos.

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{2-x}$$

Solución.

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad ; \quad D_g = (-\infty, 2]$$

$$R_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad ; \quad R_g = [0, \infty)$$

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{2}{\sqrt{2-x} - 1}$$

Para obtener el dominio de "C", es decir, de la expresión $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}-1}$, se hace lo siguiente:

$\sqrt{2-x}-1\neq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{2-x}\neq 1 \;\Rightarrow\; x\neq 1$; además $2-x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\leq 2$ .Por lo tanto

$$D_C=\left(-\infty,2\right]-\{1\}$$

luego, el dominio de la composición $f\circ g$ es:

$$D_{f\circ g}=D_C\cap D_g=\left(-\infty,2\right]-\{1\}$$

$$g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{2-\frac{2}{x-1}}=\sqrt{\frac{2x-4}{x-1}}$$

Para obtener el dominio de "C", es decir, de $\sqrt{\dfrac{2x-4}{x-1}}$, se puede proceder como sigue:

$$\frac{2x-4}{x-1}\geq 0 \quad ; \quad x\neq 1$$

x	$x-1$	$2x-4$	$\frac{2x-4}{x-1}$
$(-\infty,1)$	$-$	$-$	$+$
$(1,2)$	$+$	$-$	$-$
$(2,\infty)$	$+$	$+$	$+$

Luego $D_C=\left(-\infty,1\right)\cup\left[2,\infty\right)$. Por lo que $D_{g\circ f}=D_C\cap D_f=\left(-\infty,\,1\right)\cup\left[2,\,\infty\right)$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

36. Dadas las siguientes funciones $f(x)=\dfrac{6x}{x^2-9}$ y $g(x)=\sqrt{3x}$, obtener $f\circ g$ y $g\circ f$ señalando sus respectivos dominios.

Solución.

$$D_f=\mathbb{R}-\{-3,3\} \qquad ; \qquad D_g=\left[0,\infty\right)$$

$$f\circ g=f(g(x))=\frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2-9}=\frac{6\sqrt{3x}}{3x-9}=\frac{2\sqrt{3x}}{x-3}$$

$D_C=\left[0,\infty\right)-\{3\}$. Por lo tanto $D_{f\circ g}=D_C\cap D_g=\left[0,\infty\right)-\{3\}$

Por otro lado,

$$g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{3\left(\frac{6x}{x^2-9}\right)}=\sqrt{\frac{18x}{x^2-9}}$$

$$\frac{18x}{x^2-9} \geq 0 \quad ; \quad x \neq -3,3$$

x	$18x$	$x-3$	$x+3$	$\dfrac{18x}{(x-3)(x+3)}$
$(-\infty,-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-3,0)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(0,3)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(3,\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

$\therefore \quad D_C = (-3,0] \cup (3,\infty)$. Luego $D_C \cap D_f = (-3,0] \cup (3,\infty)$.

ALUMNO: CALDERÓN OCHOA GABRIEL

37. Dadas las funciones siguientes, determinar $f \circ g$ y $g \circ f$ y dar los respectivos dominios.

$$f(x) = \frac{x}{3x+2} \qquad\qquad g(x) = \frac{2}{x}$$

Solución. Los dominios de las dos funciones son:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\} \quad \text{y} \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

Si se procede como en el ejercicio anterior, se obtiene:

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{\frac{2}{x}}{3\left(\frac{2}{x}\right)+2} \quad \Rightarrow \quad f \circ g = \frac{2}{6+2x} \quad \Rightarrow f \circ g = \frac{1}{3+x}$$

$$\begin{array}{l} D_c = \mathbb{R} - \{-3\} \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_c \cap D_g = \mathbb{R} - \{-3,0\} \quad \therefore \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-3,0\}$$

Y la otra composición es

$$g \circ f = g(f(x)) = \frac{2}{\frac{x}{3x+2}} \quad \Rightarrow \quad g \circ f = \frac{6x+4}{x}$$

$$\begin{array}{l} D_c = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_c \cap D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3},0\right\} \quad \therefore \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3},0\right\}$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

38. Sean las funciones f y g definidas por :

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad y \qquad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Obtener las reglas de correspondencia y los dominios de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$

Solución.

$$D_f = \mathbb{R} \qquad ; \qquad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f \circ g = f\left(g(x)\right) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 1 = \frac{x^2}{x^2-2x+1} - 1 = \frac{x^2 - x^2 + 2x - 1}{x^2-2x+1} = \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

Como $D_C = \mathbb{R} - \{1\}$, luego $D_{f\circ g} = D_C \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$$g \circ f = g\left(f(x)\right) = \frac{x^2-1}{x^2-1-1} = \frac{x^2-1}{x^2-2}$$

Como $D_C = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, luego $D_{g\circ f} = D_C \cap D_f = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

39. Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ así como sus respectivos dominios.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Solución. Los dominios y recorridos de ambas funciones son:

$$\begin{matrix} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ R_f = \mathbb{R} - \{0\} \end{matrix} \quad y \quad \begin{matrix} D_g = \mathbb{R} \\ R_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{matrix}$$

Se obtiene la regla de correspondencia de $f \circ g$:

$$f \circ g = f\left(g(x)\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f \circ g = \left(x^2+1\right)^2$$

Para obtener el dominio de la composición que es $D_{f\circ g} = \left\{x \middle| x \in D_g \;\; ; \;\; g(x) \in D_f\right\}$, cuando los dominios de las funciones involucradas no son modificados sino que son los debidos a su definición, se puede utilizar la expresión siguiente: $D_{f\circ g} = D_c \cap D_g$, donde D_c es el dominio de la expresión obtenida al realizar la composición. En este caso, como $D_c = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

Ahora se obtiene la regla de correspondencia de $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} \quad (g \circ f)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^4} + 1} \quad \Rightarrow \quad g \circ f = \frac{1}{\frac{1 + x^4}{x^4}} \quad \Rightarrow \quad g \circ f = \frac{x^4}{1 + x^4}$$

Para el dominio de esta composición se procede como en el caso anterior y se llega a:

$$\begin{array}{l} D_c = \mathbb{R} \\ D_f = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_c \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad \therefore \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

40. Dadas $f(x) = \dfrac{x + 4}{x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ obtener $f \circ g$ y $g \circ f$ con sus respectivos dominios y recorridos.

Solución. $D_f = \{x | x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \neq 2\}$; $D_g = \{x | x \in \mathbb{R} \quad ; x \neq -1, \ x \neq 1\}$

$$f \circ g = \frac{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + 4}{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - 2} = \frac{\frac{x^2 + 1 + 4x^2 - 4}{x^2 - 1}}{\frac{x^2 + 1 - 2x^2 + 2}{x^2 - 1}} = \frac{5x^2 - 3}{3 - x^2}$$

$D_C = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Por lo que $D_{f \circ g} = D_C \cap D_g = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$

$$g \circ f = \frac{\left(\frac{x + 4}{x - 2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{x + 4}{x - 2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 4x + 4} + 1}{\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 4x + 4} - 1} = \frac{\frac{x^2 + 8x + 16 + x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}}{\frac{x^2 + 8x + 16 - x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 4}} = \frac{2x^2 + 4x + 20}{12x + 12} = \frac{x^2 + 2x + 10}{6x + 6}$$

$D_C = \mathbb{R} - \{-1\}$. Por lo que $D_{g \circ f} = D_C \cap D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

ALUMNO: ESPINOSA VARGAS BOGDAD ROBERTO

41. Sean las funciones siguientes. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, así como sus respectivos dominios.

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ x + 2 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq -1 \\ x - 5 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

Solución. Los dominios y recorridos de ambas funciones son:

$$\begin{array}{ll} D_f = (-\infty, \infty) & D_g = (-\infty, \infty) \\ R_f = (-\infty, 0) \cup [2, \infty) & R_g = (-6, \infty) \end{array}$$

Luego $f \circ g$ está dada por:

$$f \circ g = f\left(g\left(x\right)\right) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq -1 \\ x - 5 & si \quad -1 < x < 0 \\ \left(x-5\right)+2 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad D_{f \circ g} = D_C \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Por otro lado, $g \circ f$ está dada por:

$$g \circ f = g\left(f\left(x\right)\right) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq -1 \\ x - 5 & si \quad -1 < x < 0 \\ \left(x+2\right)-5 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad D_{g \circ f} = D_C \cap D_f = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

42. Para la función dada en forma paramétrica, determinar su dominio y recorrido, dar su expresión cartesiana y graficarla.

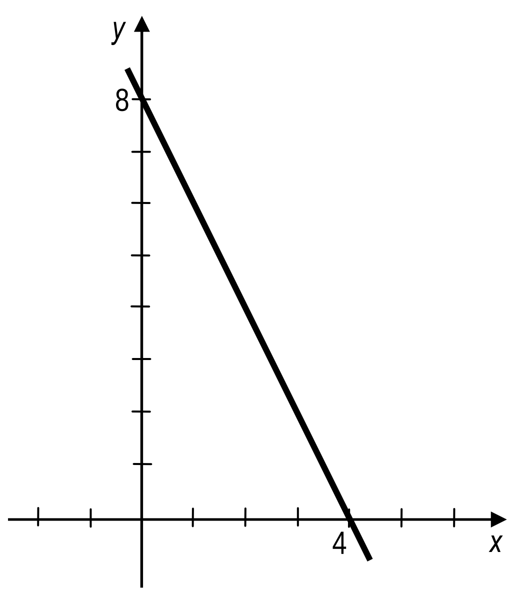
$$f\left(t\right) = \begin{cases} x = t^3 + t + 4 \\ y = -2t^3 - 2t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Solución. De la expresión paramétrica de x: $t^3 + t = x - 4$ y de la expresión de y, $y = -2\left(t^3 + t\right)$. Si se sustituye el valor de $t^3 + t = x - 4$ en "y", se llega a $y = -2\left(x-4\right) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 8$ que es la forma cartesiana de la función.

Como se observa se trata de una recta, por lo que su dominio y recorrido son:

$$D_f = \left(-\infty, \infty\right) \quad ; \quad R_f = \left(-\infty, \infty\right)$$

y su gráfica es la siguiente:



ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

43. Para la función dada en forma paramétrica, dar su expresión cartesiana, determinar su dominio y recorrido, y graficarla.

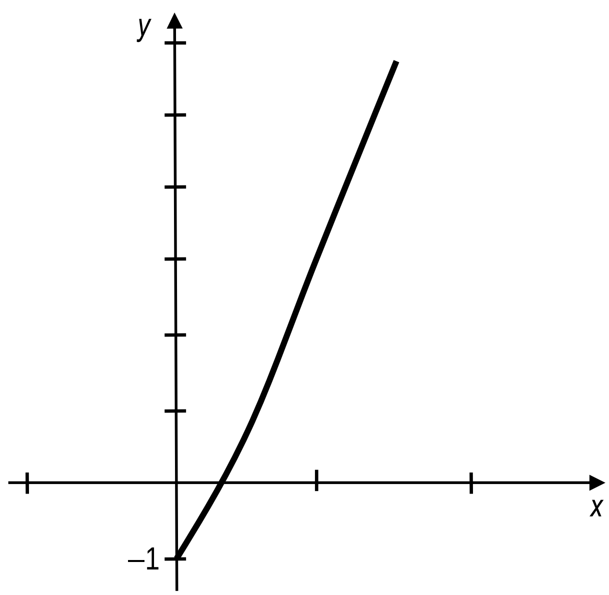
$$f(t) = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 + 3t^2 - 1 \end{cases} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

Solución. Primero se sustituye la expresión paramétrica de x en y: $y = x^2 + 3x - 1$

Del análisis de esta ecuación se puede ver que se trata de una parábola y para ver sus características se hace lo siguiente:

$$y + 1 = x^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad y + 1 + \frac{9}{4} = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad y + \frac{13}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{13}{4}$$

luego la parábola tiene su vértice en $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right)$, su eje de simetría es paralelo al eje "y" y abre hacia arriba. Si se analiza la expresión paramétrica de x, dado que $t \in \mathbb{R}$, el valor de x siempre será positivo o igual a cero $(x \geq 0)$, razón por la cual, la función $f(t)$ es solamente la parte de la parábola que se encuentra a la derecha del eje "y". Entonces su dominio es $D_f = [\square, 0)$. De la ecuación cartesiana $y = x^2 + 3x - 1$, se tiene que para el valor mínimo de x $(x = 0)$, $y = -1$, y dado que la parábola abre hacia arriba, el recorrido de la función $f(t)$ es: $R = [-1, \infty)$. Para terminar, se grafica la parábola $y = x^2 + 3x - 1$.



Nota. Se utilizan escalas diferentes en los ejes coordenados y la gráfica es aproximada.

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

44. Dada las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$

indicar si determinan paramétricamente una función. En caso afirmativo, obtener el dominio, el recorrido y su gráfica.

Solución. Se despeja el parámetro en ambas ecuaciones: $t = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

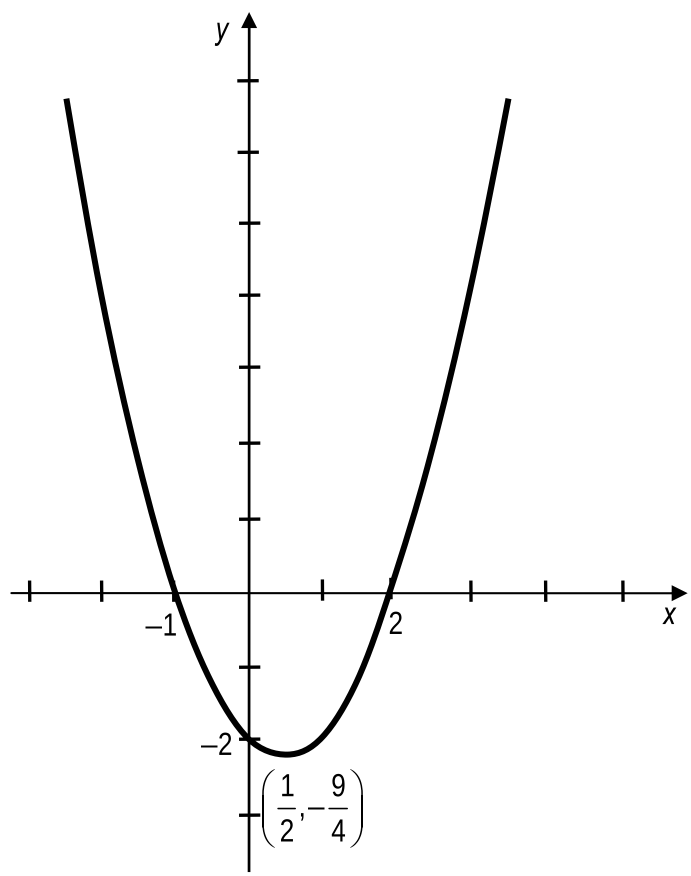
$$t^2 + 3t - y = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4y}}{2} \quad \Rightarrow \quad y \in \left[-\frac{9}{4}, \infty \right)$$

Ecuación cartesiana:

$$x = t + 2 \quad \Rightarrow \quad t = x - 2 \quad ; \quad y = \left(x-2\right)^2 + 3\left(x-2\right) \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - 4x + 4 + 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - x - 2$$

$$y + 2 = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad y + 2 + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

Se trata de una parábola cuyo vértice es el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4} \right)$ con eje de simetría la recta $x = \frac{1}{2}$ y que abre hacia arriba. La gráfica es:



El dominio y recorrido son: $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \left[-\frac{9}{4}, \infty \right)$

ALUMNA: DÁVILA MERCADO MARÍA PAULA

45. Para la función f representada en forma paramétrica, determinar su dominio y recorrido, dar su expresión cartesiana y graficarla.

$$f(\theta)=\begin{cases} x = sen\theta \\ y = \cos 2\theta \end{cases} \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Solución. Se hace uso de la identidad trigonométrica $sen^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, de la cual se despeja el término $\cos 2\theta$: $\quad 2sen^2\theta = 1-\cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = 1-2sen^2\theta$. Se sustituye en las expresiones paramétricas que definen a la función, se obtiene su forma cartesiana:

$y = 1-2sen^2\theta \quad \Rightarrow \quad y = 1-x^2$ que es una parábola, y para determinar sus características se hace lo siguiente:

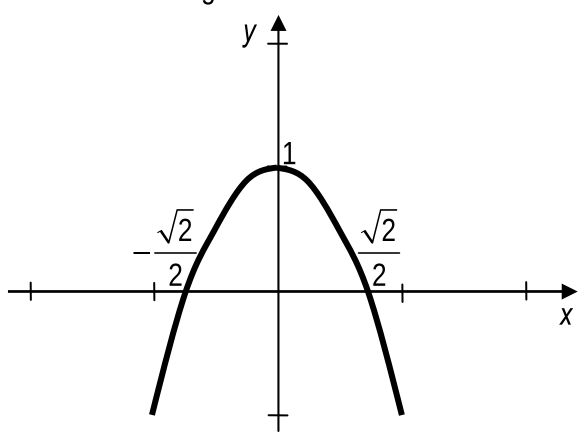
$$2x^2 = 1-y \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}(1-y) \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{2}(y-1)$$

luego su vértice está en el punto $(0,1)$ y su eje de simetría es el eje "y".

Si se asignan al parámetro "θ" algunos valores dentro del intervalo de definición de la función, se tiene

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	0.7071	1	0.7071	0	–0.7071	–1	–0.7071	0
y	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1

Con estos valores, la gráfica de la función es la siguiente:



El dominio y el recorrido de esta función son, respectivamente $D_f = [-1,-1]$ y $R_f = [-1,1]$.

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

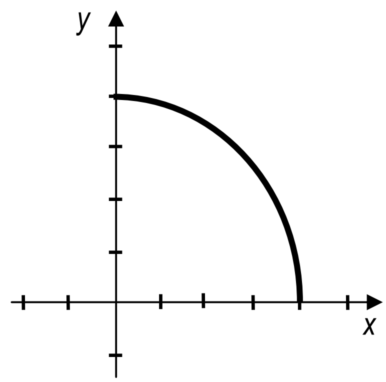
46. Dada la función definida por las siguientes ecuaciones paramétricas, obtener su dominio, recorrido, gráfica y dar su expresión cartesiana.

$$x = 4sen\alpha \quad ; \quad y = 4\cos\alpha \quad ; \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

Solución. Si se procede primero a obtener su expresión cartesiana, despejando a $sen\alpha$ y $\cos\alpha$

$$sen\alpha = \frac{x}{4} \quad y \quad \cos\alpha = \frac{y}{4}$$

Se elevan al cuadrado ambas ecuaciones y se suman, obteniendo $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16}$. Como $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 16$, que es una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 4. Si se considera el intervalo dado, se concluye que se trata de un cuarto de circunferencia, en el primer cuadrante, como se observa en la figura.



Por lo que el dominio y el recorrido son: $D_f = [0,4] \quad y \quad R_f = [0,4]$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

47. Para la siguiente función obtener su dominio, recorrido y trazar su gráfica.

$$F = \left\{ (x,y) \mid x = 3\cos t,\ y = 4sent \quad ; \quad 0 \le t \le \pi \right\}$$

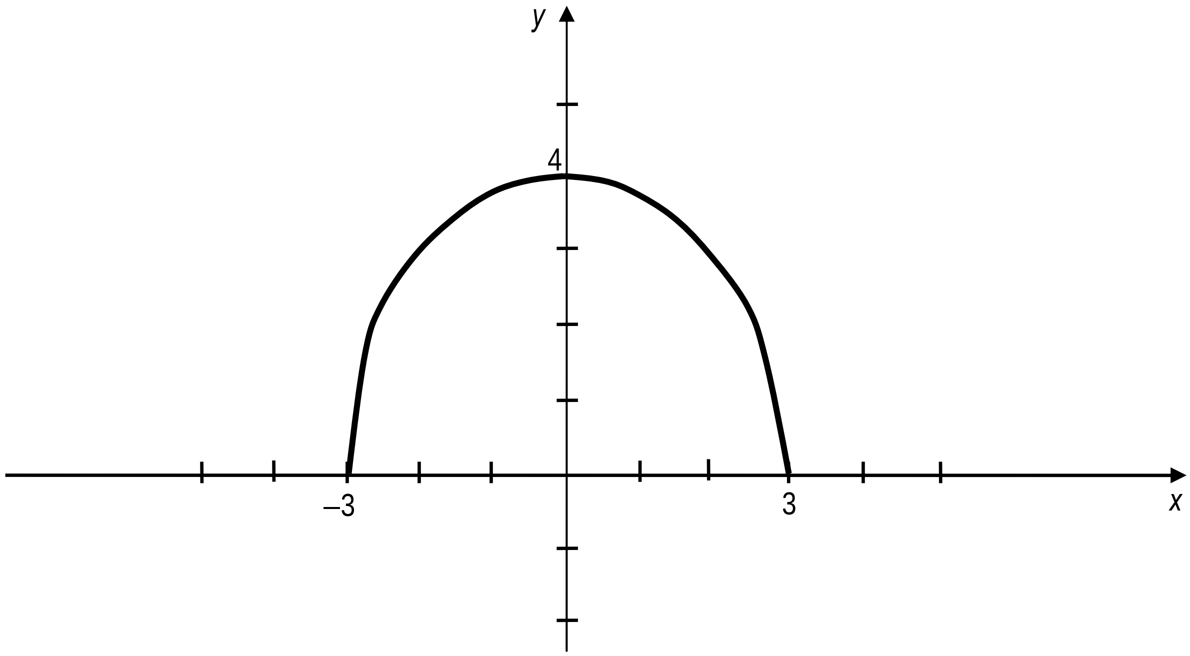
Solución. Si se despeja el parámetro "t" en ambas ecuaciones, se tiene que:

$$t = ang\cos\frac{x}{3} \quad ; \quad t = ang\ sen\frac{y}{4}$$

Se transforma su ecuación a su forma cartesiana, mediante la identidad trigonométrica $sen^2 t + \cos^2 t = 1$; se llega a:

$$sent = \frac{y}{4} \quad ; \quad \cos t = \frac{x}{3} \quad ; \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

que corresponde a la ecuación de una elipse con centro en el origen y semiejes "3 y 4" respectivamente. De acuerdo con el intervalo de definición se trata sólo de la parte superior de la curva. Su gráfica es:



En la gráfica aproximada se observa que: Dominio $D_f = x \in [-3,3]$ y Recorrido $R_f = y \in [0,4]$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

48. Para la función dada en forma paramétrica, obtener su dominio, recorrido y su ecuación cartesiana. Hacer un trazo aproximado de su gráfica.

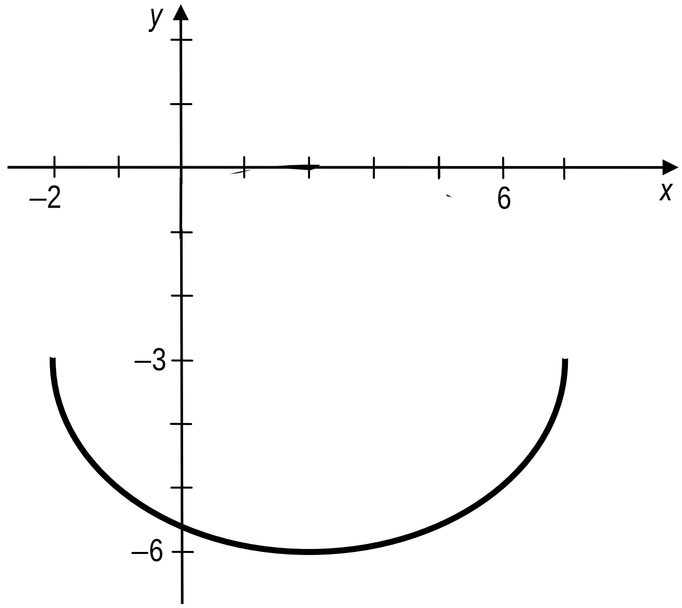
$$f:\begin{cases} x = 2 + 4sen\alpha \\ y = -3 + 3\cos\alpha \end{cases} \quad ; \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$$

Solución. Se procede a obtener la ecuación cartesiana, despejando $sen\alpha$ y $\cos\alpha$ como sigue:

$$sen\alpha = \frac{x-2}{4} \quad y \quad \cos\alpha = \frac{y+3}{3}$$

Si se hace uso de la identidad trigonométrica $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se obtiene: $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$, que corresponde a la ecuación de una elipse con centro en $(2, -3)$, semieje mayor igual a 4 y semieje menor 3. Para definir dominio, recorrido y gráfica, se construye la siguiente tabla con el intervalo dado:

α	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
x	6	4.8	2	–0.8	–2
y	–3	–5.1	–6	–5.1	–3



El dominio y el recorrido de esta función son, respectivamente, $D_f = [-2,6]$ y $R_f = [-6,-3]$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

49. Para la siguiente función expresada en forma paramétrica, obtener su expresión cartesiana, su dominio, recorrido y trazar su gráfica.

$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = 2\tan t \end{cases} \quad ; \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

Solución. Se obtiene la ecuación de la función en su forma cartesiana y para ello se hace lo siguiente:

$$x^2 = \sec^2 t \quad ; \quad y^2 = 4\tan^2 t$$

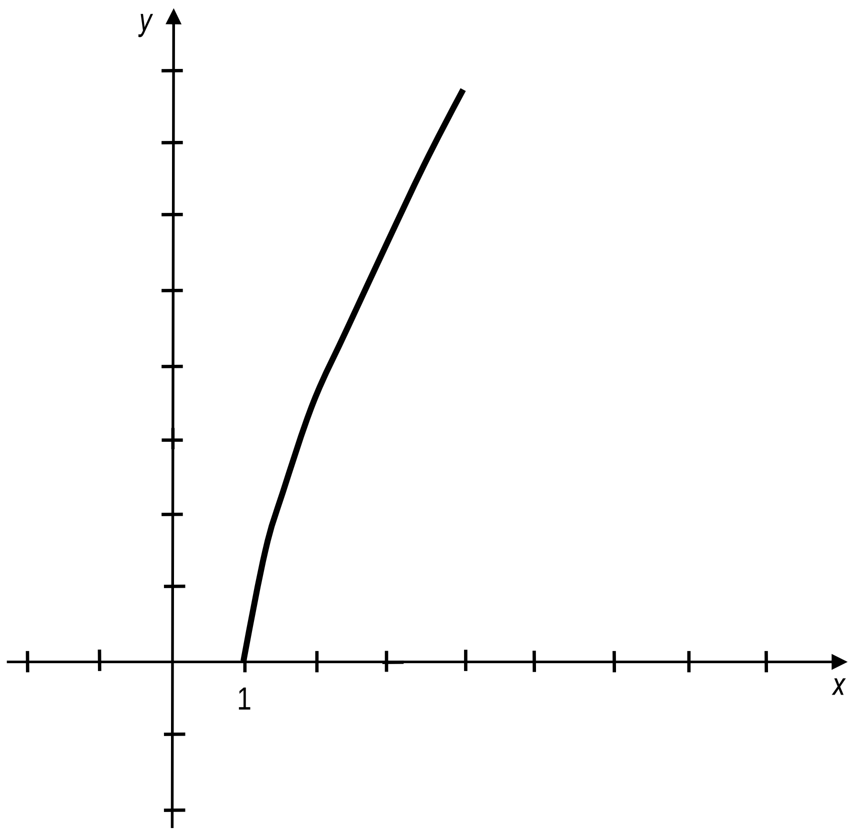
Por identidad trigonométrica, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$; luego $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Para su dominio y recorrido se tiene que:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases} \quad ;$$

$$D_f = \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \quad ; \quad x \in [1,\infty) \,\} \quad ; \quad R_f = \{\, y \mid y \in \mathbb{R} \quad ; \quad y \in [0,\infty) \,\}$$

Y la gráfica está dada por:



ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

50. La función dada es biyectiva y está expresada en forma paramétrica. Obtener su función inversa en forma cartesiana, así como el dominio, el recorrido y la gráfica de ambas funciones.

$$\begin{cases} x = sen^2\theta + 3 \\ y = \cos\theta + 1 \end{cases} \quad ; \quad y \geq 1$$

Solución. Se obtiene la forma cartesiana de la función dada. Entonces

$$x - 3 = sen^2\theta$$

$$y - 1 = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad (\cos\theta)^2 = (y-1)^2$$

Por la identidad trigonométrica $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se llega a:

$$x - 3 + (y-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = -x + 4 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = -(x-4)$$

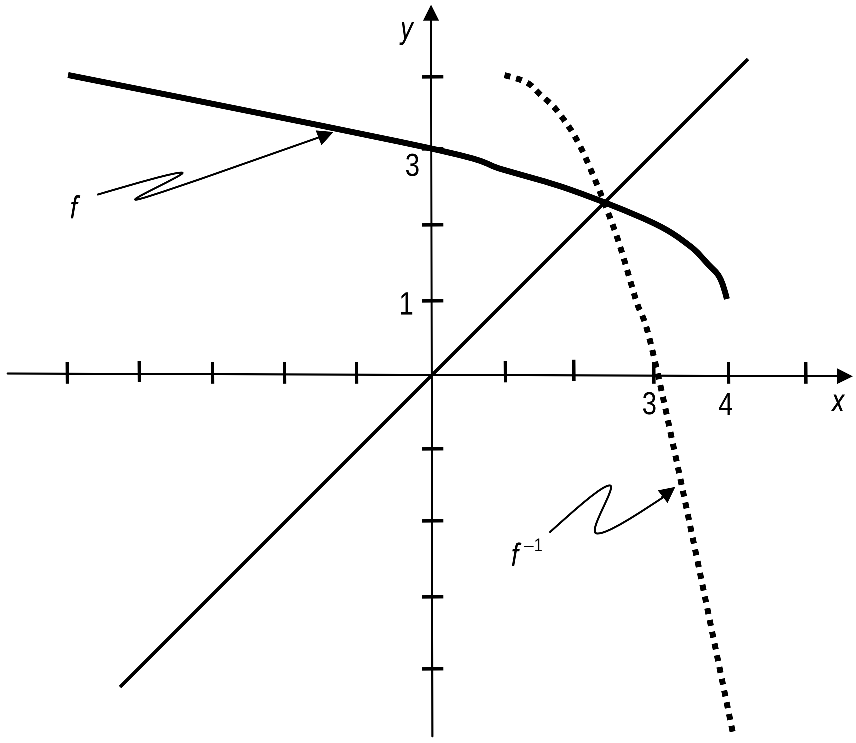
ecuación que corresponde a una parábola con centro en $(4,1)$ y que abre hacia la izquierda. Para pasarla a su forma explícita se despeja la variable "y", de donde:

$(y-1)^2 = -(x-4) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad y = 1 + \sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1 + \sqrt{4-x}$. De esta expresión se obtiene el dominio que es: $D_f = (-\infty, 4] = R_{f^{-1}}$.

Para obtener la regla de correspondencia de la función inversa, que existe porque la función original es biyectiva, se hace lo siguiente:

$$y = 1 + \sqrt{4-x} \quad ; \quad x = 1 + \sqrt{4-y} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-y} = x-1 \quad \Rightarrow \quad 4-y = (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad y = 4-(x-1)^2$$

Luego la función inversa es $f^{-1}(x) = 4-(x-1)^2$. Las gráficas de ambas funciones son:

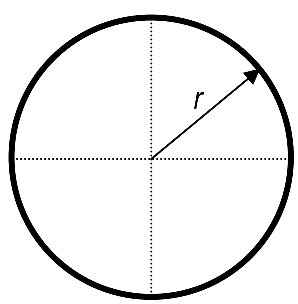


El recorrido de la función es $R_f = [1,\infty) = D_{f^{-1}}$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

51. Expresar el área de un círculo en función únicamente de su perímetro.

Solución. El modelo geométrico de este problema es el siguiente:

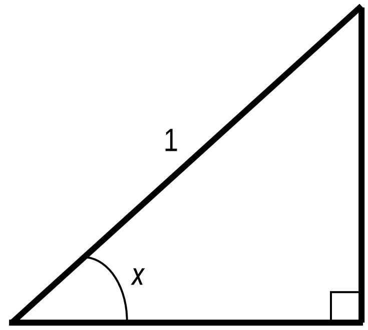


El área del círculo es igual a $A = \pi r^2$ y su perímetro se obtiene a partir de la expresión $P = 2\pi r$. Del perímetro se despeja el radio "r" y se sustituye en la expresión del área, con lo que se llega a la función pedida. Así,

$$r = \frac{P}{2\pi} \quad ; \quad A = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{P^2}{4\pi^2}$$

ALUMNA: RODRÍGUEZ DE LA TORRE RHAMID H.

52. Dado el siguiente triángulo rectángulo, escribir la longitud de su cateto adyacente en función únicamente del seno del ángulo x .



Solución. Se utilizan los símbolos C_A y C_O para los catetos adyacente y opuesto, respectivamente.

$$senx = \frac{C_O}{1} \quad \Rightarrow \quad C_O = senx$$

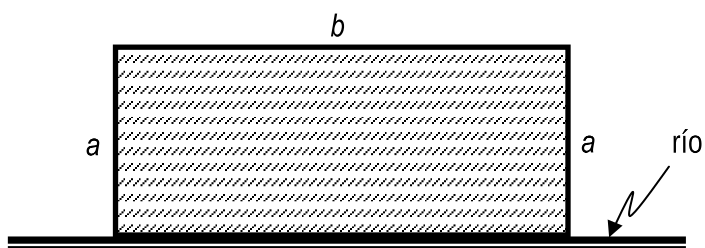
Mediante el Teorema de Pitágoras se tiene que $1 = \sqrt{C_O^2 + C_A^2}$, de donde:

$$C_A = \sqrt{1 - C_O^2} \quad \therefore \quad C_A = \sqrt{1 - sen^2 x}$$

ALUMNO: ESPINOSA VARGAS BOGDAD ROBERTO

53. Un granjero planea colocar una valla en un terreno de forma rectangular, uno de cuyos lados coincide con un la orilla de un río recto. Cuenta con $2000\,m$ de valla. Definir el área del terreno rectangular en términos solamente de la longitud de los lados que no coinciden con el río y que son perpendiculares a él.

Solución. Una figura que representa el problema es:



El área del terreno equivale a: $A = ab$. La longitud de valla en términos de las longitudes de la figura, sin tomar el lado que coincide con el río y que no es cercado, es:

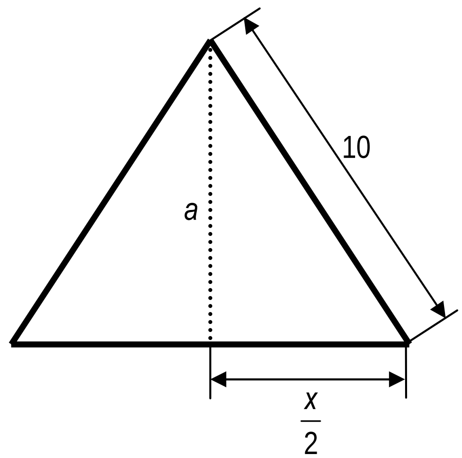
$$2a + b = 2000 \quad \Rightarrow \quad b = 2000 - 2a$$

Se sustituye este valor de "b" en la expresión del área "A" y finalmente se llega a:

$$A = a\left(2000 - 2a\right) \quad \therefore \quad A = 2000a - 2a^2$$

LOS COORDINADORES

54. Para el triángulo isósceles dado, expresar su área "A" en función exclusivamente de "x".



Solución. El área del triángulo está dada por $A=\frac{x\ a}{2}$.

Para obtener una relación entre x y a se utiliza el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos rectángulos que forman el triángulo isósceles:

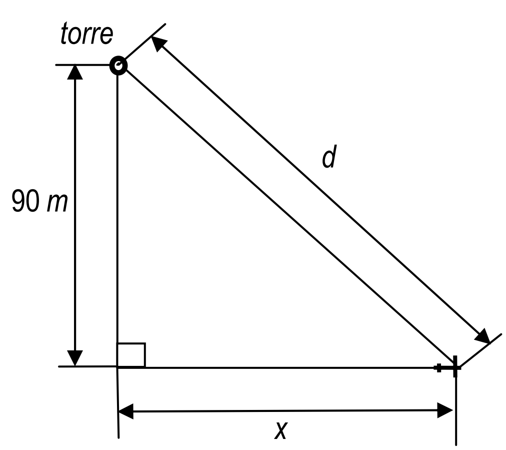
$$10^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+a^2 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{100-\frac{x^2}{4}}$$

Se sustituye este valor en el área y se tiene finalmente:

$$A=\frac{x\left(\sqrt{100-\frac{x^2}{4}}\right)}{2}$$

ALUMNO: ESPINOSA VARGAS BOGDAD ROBERTO

55. En la figura se muestran las posiciones relativas de un avión y una torre de control en un aeropuerto. El principio de la pista se encuentra a una distancia de $90\ m$ de la base de la torre, sobre la perpendicular. Expresar la distancia "d" de la aeronave a la torre de control como una función de la distancia "x" que el avión ha recorrido sobre la pista.



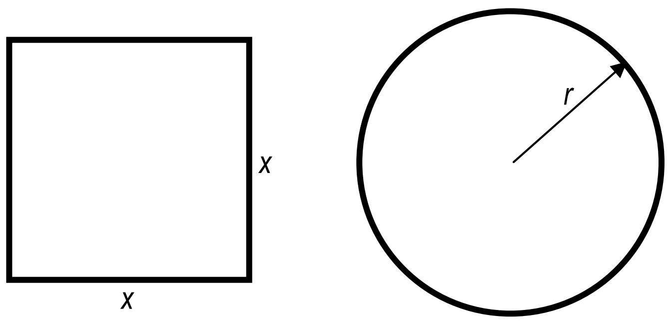
Solución. Como en la figura se forma un triángulo rectángulo, es posible utilizar el Teorema de Pitágoras, por lo que

$$d^2 = x^2 + 90^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{x^2 + 8100}$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

56. Se tienen $30\,cm$ de alambre del cual, al cortarlo en dos partes, con una se construye un cuadrado y con la otra una circunferencia. Obtener una función que exprese la suma de las áreas de las dos figuras en términos únicamente del lado del cuadrado.

Solución. El modelo geométrico es:



La suma de las áreas "S_A" de las dos figuras está dada por $S_A = x^2 + \pi r^2$. Para relacionar el lado del cuadrado con el radio de la circunferencia se utiliza la longitud del alambre que equivale a la suma de los perímetros de las figuras. Así,

$$4x + 2\pi r = 30 \quad \Rightarrow \quad 2x + \pi r = 15 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{15 - 2x}{\pi}$$

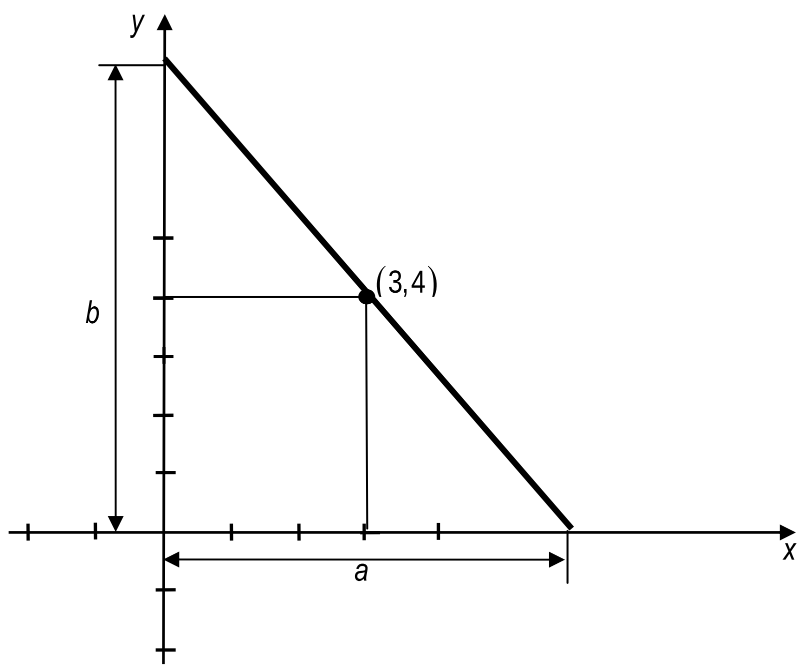
Se sustituye esta expresión en la función S_A y se tendrá ésta en términos sólo del lado del cuadrado:

$$S_A = x^2 + \pi \left(\frac{15 - 2x}{\pi} \right)^2 \quad \therefore \quad S_A = x^2 + \frac{(15 - 2x)^2}{\pi}$$

LOS COORDINADORES

57. Una recta que pasa por el punto $(3,4)$ forma con los ejes coordenados, en el primer cuadrante, un triángulo rectángulo. Definir una expresión del área del triángulo formado en términos exclusivamente de la longitud desde el origen de coordenadas al punto donde la recta corta el eje de las ordenadas, es decir, en términos de la ordenada al origen.

Solución. Se representa gráficamente el problema planteado y,



Como se observa, el área del triángulo está dada por $A = \frac{ab}{2}$

Por triángulos semejantes es posible escribir que

$$\frac{a}{b} = \frac{a-3}{4} \quad \Rightarrow \quad 4a = ab - 3b \quad \Rightarrow \quad a\left(b-4\right) = 3b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3b}{b-4}$$

Se sustituye este valor en el área y se llega finalmente a: $A = \dfrac{\frac{3b}{b-4}b}{2} \quad \therefore \quad A = \dfrac{3b^2}{2b-8}$

Otra forma de relacionar a y b, que son la abscisa y la ordenada al origen, respectivamente, es la ecuación de la recta en su forma simétrica es:

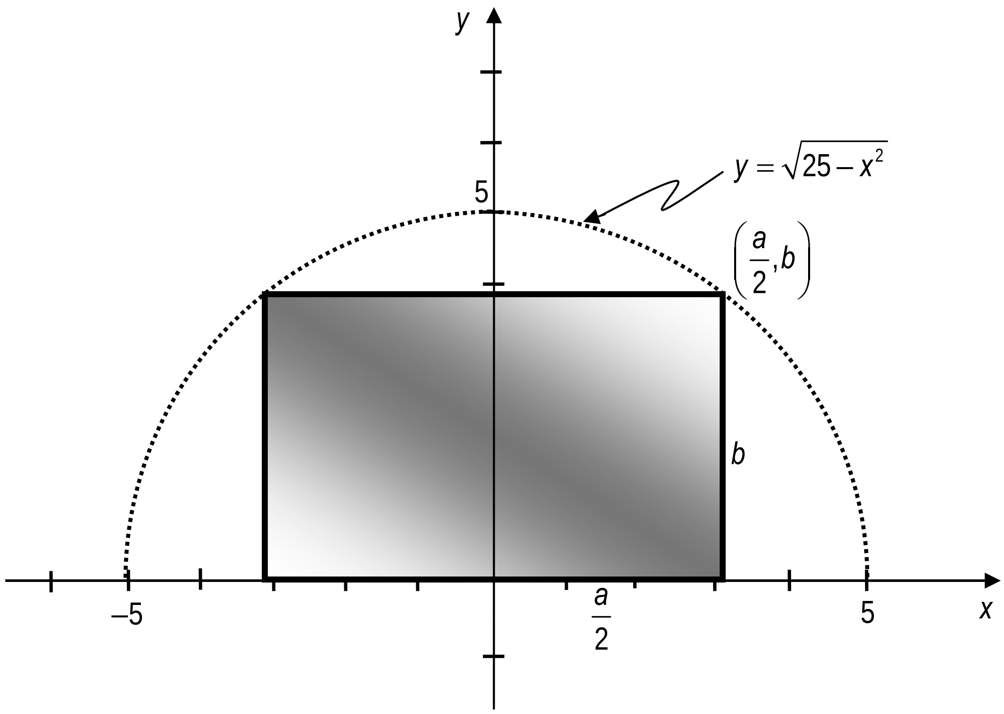
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad bx + ay = ab \quad \Rightarrow \quad a\left(b-y\right) = bx \quad \Rightarrow \quad a = \frac{bx}{b-y}$$

En el punto $\left(3,4\right)$ se tiene que $a = \dfrac{3b}{b-4}$, por lo que al sustituir se llega a: $A = \dfrac{3b^2}{2b-8}$

LOS COORDINADORES

58. Un rectángulo está limitado por el eje $"x"$, con el cual coincide y por el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$, en cuya gráfica tocan dos de sus vértices. Expresar el área del rectángulo en función únicamente de su base.

Solución. El modelo geométrico es:



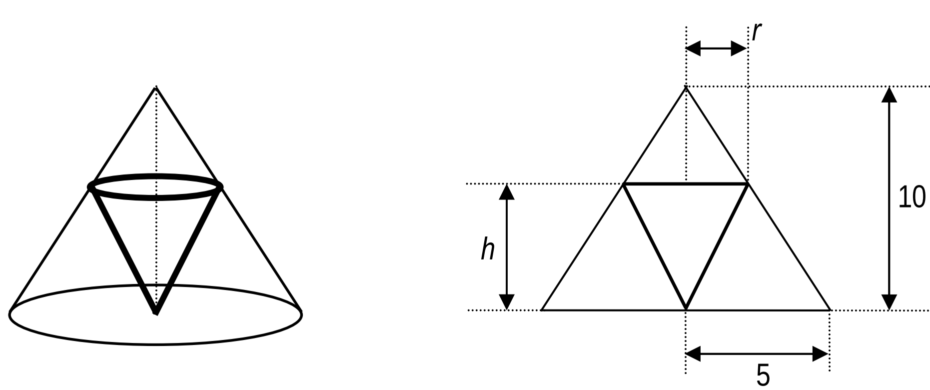
El área del rectángulo es $A = ab$. De la ecuación de la semicircunferencia a la que satisface el punto $\left(\frac{a}{2},b\right)$, se puede escribir que: $b=\sqrt{25-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Por lo que finalmente:

$$A=a\sqrt{25-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad A=a\sqrt{25-\frac{a^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad A=a\sqrt{\frac{100-a^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{a}{2}\sqrt{100-a^2}$$

LOS COORDINADORES

59. Un cono circular recto de dimensiones variables se encuentra inscrito en otro también circular recto de dimensiones fijas, con radio y altura de 5 y 10 unidades respectivamente. Obtener una función que represente el volumen del cono inscrito en términos de su radio.

Solución. La figura es la siguiente:



Se sabe que $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$; entonces, por triángulos semejantes se obtiene lo siguiente:

$$\frac{10-h}{r}=\frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad 50-5h=10r \quad \Rightarrow \quad h=\frac{50-10r}{5} \quad \Rightarrow \quad h=10-2r$$

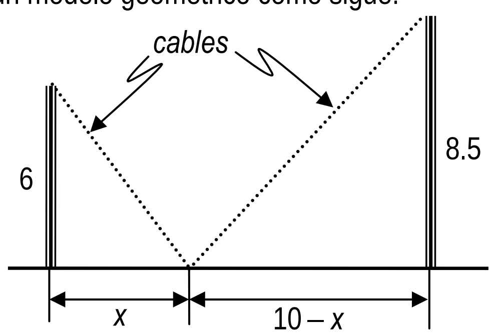
expresión que se sustituye en el volumen y

$$V=\frac{1}{3}\pi\ r^2(10-2r)$$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

60. Dos postes verticales de $6\,m$ y $8.5\,m$ de altura se encuentran a $10\,m$ de distancia uno del otro. Se deben sujetar con cables fijados en un sólo punto, desde el suelo hasta los extremos de los postes. Expresar la longitud total del cable en función sólo de la distancia de la base del primer poste (de $6\,m$) al punto del suelo donde están fijados los cables.

Solución. En primer lugar se traza un modelo geométrico como sigue:



Si se representan con "x" y "$10-x$" las respectivas distancias de las bases de los postes al punto del suelo, entonces se pueden determinar las longitudes de los cables mediante el Teorema de Pitágoras al aplicarlo en los dos triángulos rectángulos. De esta forma:

$$L_6=\sqrt{x^2+6^2} \qquad y \qquad L_{8.5}=\sqrt{(10-x)^2+8.5^2}$$

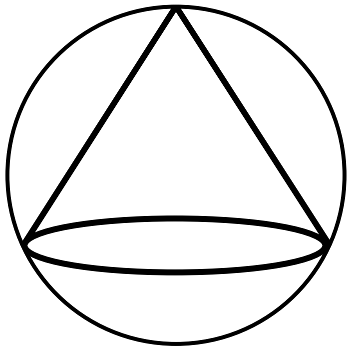
Por lo que finalmente la longitud total del cable, en función de la distancia "x" es:

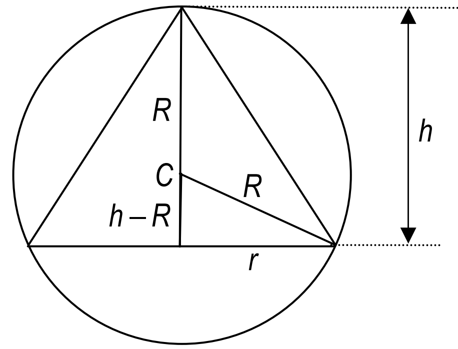
$$L=\sqrt{x^2+36}+\sqrt{(10-x)^2+8.5^2} \quad \therefore \quad L=\sqrt{x^2+36}+\sqrt{x^2-20x+172.25}$$

LOS COORDINADORES

61. Obtener el volumen del cono circular recto inscrito en una esfera de radio R, como función únicamente de su altura:

Solución. Es conveniente una figura con el cono inscrito en la esfera y también una sección transversal.



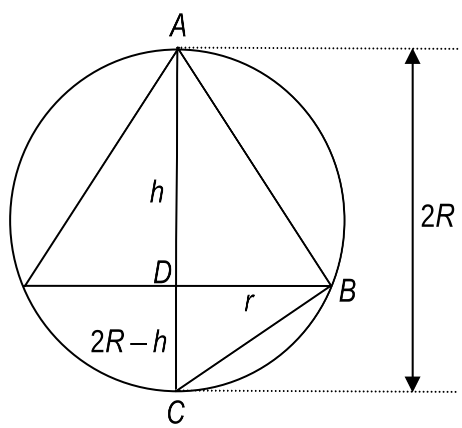


El volumen del cono está dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. En el triángulo rectángulo que se forma con $R, r \ y \ h - R$ se aplica el Teorema de Pitágoras para relacionar el radio y la altura del cono, de donde

$$r^2 + (h-R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 - (h-R)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2hR - h^2$$

Se sustituye esta expresión en la del Volumen y se obtiene la función de éste en términos únicamente de la altura.

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(2hR - h^2\right) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3}\left(2h^2R - h^3\right) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h)$$



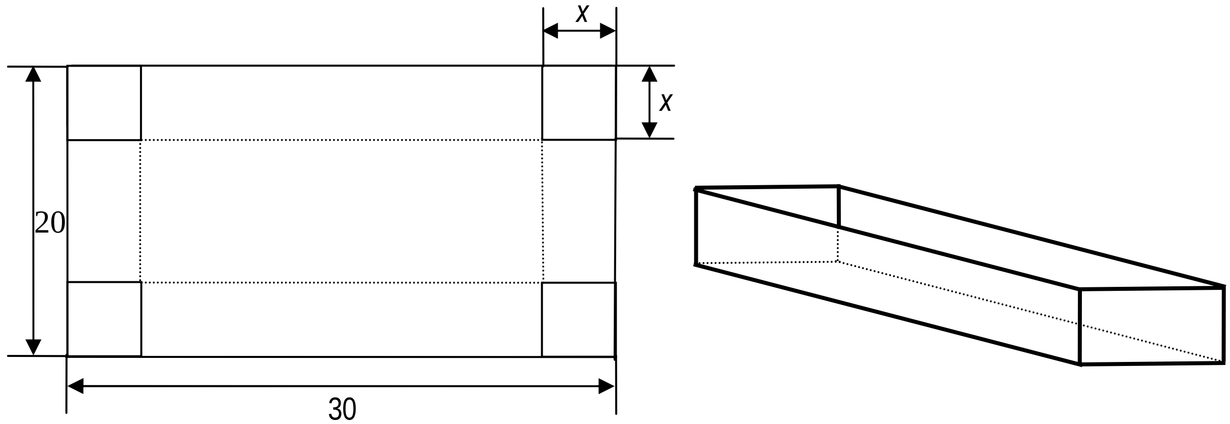
Otra forma para resolver el ejercicio parte de relacionar al radio del cono con su altura mediante los triángulos semejantes $ABD \ y \ BCD$. Luego

$$\frac{h}{r} = \frac{r}{2R - h} \quad ; \quad r^2 = h(2R - h)$$

Al sustituir en el volumen se tiene que: $V = \frac{1}{3}\pi h[h(2R-h)] \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$

ALUMNO: CALDERÓN OCHOA GABRIEL

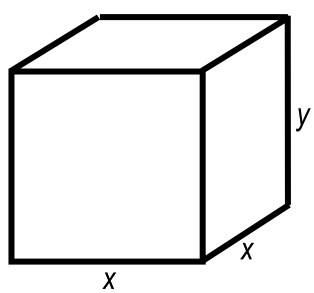
62. Se desea construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón rectangular que tiene dimensiones $20\,cm \times 30\,cm$. Para ello se recortarán cuatro cuadrados idénticos de área, uno en cada esquina y se doblarán hacia arriba los lados resultantes (véase la figura).Expresar el volumen "V" de la caja como función del lado "x" de los cuadrados recortados.



Solución. El volumen de la caja que se construye es igual a $V =$ área de la base $\times$ altura
Las dimensiones de la base, después de los recortes son, respectivamente: $20-2x$ y $30-2x$
y la altura de la caja es "x" . Luego el volumen, en términos de "x" es:
$V=(20-2x)(30-2x)x \quad \Rightarrow \quad V=600-40x-60x+4x^2 \quad \Rightarrow \quad V=4x^3-100x^2+600x$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

63. Un tanque de base cuadrada y con tapa debe construirse o fabricarse con un volumen $V=200\,m^3$. Si el costo por metro cuadrado de la base y de la tapa es de $\$10.00$ y el de las caras laterales de $\$5.00$; obtener una expresión para definir el costo total C de fabricación de dicho tanque en función exclusivamente del lado de la base.



Solución. El área y costo de la tapa y base están dados por:

$$A_{Tapa}=A_{Base}=x^2 \quad ; \quad C_B=\left(2x^2\right)(10) \quad \Rightarrow \quad C_B=20x^2$$

El área de las caras laterales es:

$$A_{Lateral}=4xy \quad ; \quad C_L=(4xy)(5) \quad \Rightarrow \quad C_L=20xy$$

Luego el costo total es: $C=C_B+C_L \quad \Rightarrow \quad C=20x^2+20xy$

El valor de y se obtiene de la siguiente manera:

$$V=x^2y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{V}{x^2} \quad ; \quad y=\frac{200}{x^2}$$

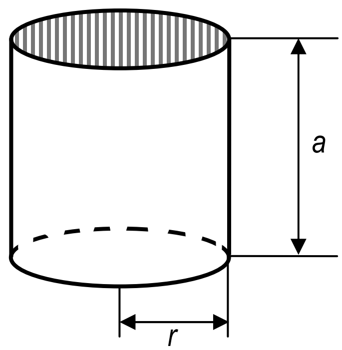
Se sustituye este valor en el costo "C" y se obtiene el costo en función exclusivamente del lado "x" de la base.

$$C = 20x^2 + 20x\left(\frac{200}{x^2}\right) \quad \therefore \quad C = 20x^2 + \frac{4000}{x}$$

ALUMNO: ESPINOSA VARGAS BOGDAD ROBERTO

64. Un fabricante necesita elaborar vasos de aluminio en forma de cilindro circular recto, cada uno con un volumen de 16 cm^3. Formular una función que represente la cantidad de material necesario para construir un vaso en términos únicamente de su altura.

Solución. El modelo geométrico con sus magnitudes es el siguiente:



Se utilizarán los siguientes símbolos

V = Volumen del cilindro $= 16\ cm^3$

r = Radio de la base del cilindro.

a = Altura del cilindro.

A_M = Cantidad de Material necesario.

De aquí:

$$V = \pi r^2 a = 16\ \ cm^3 \quad ; \quad \pi\ r^2\ a = 16 \quad ; \quad r^2 = \frac{16}{\pi\ a} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{4}{\sqrt{\pi a}} \quad \cdots \quad (1)$$

Por otro lado, el área del vaso, que equivale al área de la base más el área de la superficie lateral, está dada por:

$$A_M = \pi r^2 + 2\pi ra \quad \cdots \quad (2)$$

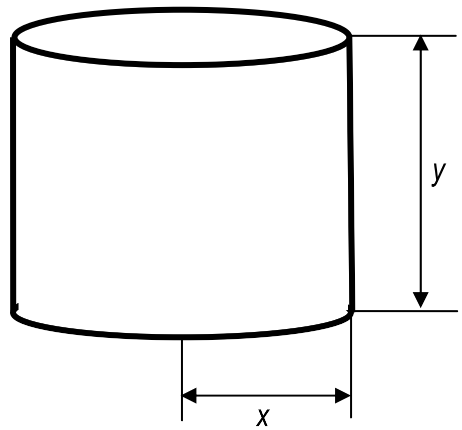
Se sustituye (1) en (2) y se tiene la cantidad de material necesario en términos únicamente de la altura.

$$A_M = \pi\left(\frac{4}{\sqrt{\pi a}}\right)^2 + 2\pi a\left(\frac{4}{\sqrt{\pi a}}\right) \quad \Rightarrow \quad A_M = \frac{16}{a} + 8\sqrt{\pi a}$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

65. Un tanque en forma de cilindro recto con tapa debe contener 10,000 litros de una determinada substancia química. Los materiales para su construcción tienen el costo siguiente: $\$200/m^2$ para la base, $\$100/m^2$ para la tapa y $\$180/m^2$ para la superficie lateral. Obtener una expresión que defina la cantidad de material empleado en la construcción del tanque en función solamente del radio de su base.

Solución. El tanque con sus dimensiones es el que se muestra en la siguiente figura:



El costo de los materiales para la construcción del tanque se da como el producto de las áreas (base, tapa y superficie lateral) por sus respectivos costos. Entonces el costo total de los materiales es:

$$C=\left(\pi x^2\right)(200)+\left(\pi x^2\right)(100)+\left(2\pi xy\right)(180) \quad \Rightarrow \quad C=300\pi x^2+360\pi xy$$

Para tener este costo en función sólo del radio de la base, se utiliza el dato del volumen.

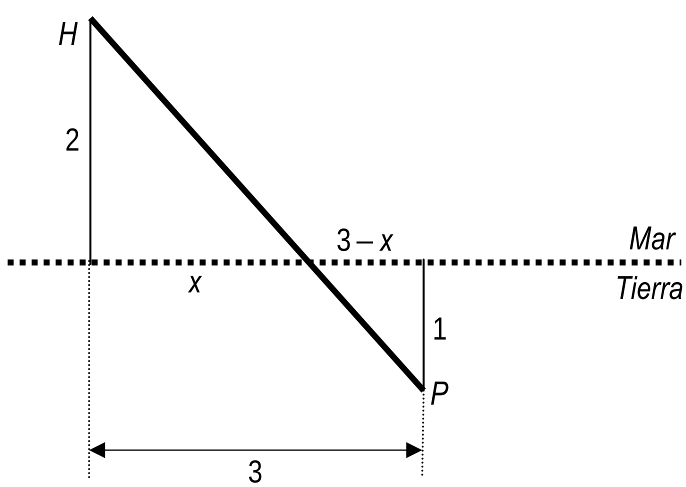
$$V=10000\ litros=10000\ dm^3=10\ m^3 \quad ; \quad \pi x^2 y=10 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10}{\pi x^2}$$

Se sustituye esta expresión en el costo y se logra que esté en función solamente del radio "x"

$$C=300\pi x^2+360\pi x\left(\frac{10}{\pi x^2}\right) \quad \therefore \quad C=360\pi x^2+\frac{3600}{x}$$

LOS COORDINADORES

66. Un hombre "H" se encuentra mar adentro a dos kilómetros de la playa y desea llegar tierra adentro al punto "P" como se muestra en el diagrama. El hombre puede nadar a un ritmo constante de $2\frac{km}{h}$ y caminar con una rapidez constante de $4\frac{km}{h}$. Expresar el tiempo "t" que emplea en llegar a "P" en función únicamente de la distancia "x" mostrada en la figura.



Como se observa, el hombre recorrerá la distancia de H a P en una trayectoria rectilínea para llegar a su destino. Esta línea forma dos triángulos rectángulos con la costa y las líneas perpendiculares a ella; con ellos se podrá determinar la distancia que recorre por Mar y por Tierra.

Por Mar se ve que la distancia que recorre es: $d_M = \sqrt{x^2 + 2^2}$.

Por Tierra se tiene que esta distancia es: $d_T = \sqrt{(3 - x)^2 + 1^2}$.

Ahora que ya se tienen las distancias habrá que calcular los tiempos correspondientes con la expresión conocida para velocidad constante, que es $v = \dfrac{d}{t} \Rightarrow t = \dfrac{d}{v}$.

Por lo que para el Mar: $t_M = \dfrac{d}{v} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$

Y por Tierra: $t_T = \dfrac{d}{v} = \dfrac{\sqrt{(3 - x)^2 + 1}}{4} = \dfrac{\sqrt{10 - 6x + x^2}}{4}$

Finalmente se suman los tiempos para obtener el tiempo total:

$$t = t_T + t_M \Rightarrow t = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{\sqrt{10 - 6x + x^2}}{4}$$

ALUMNO: FELIX REYES ALEJANDRO

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$$

Solución. Al sustituir el valor al que tiende la variable "x", se tiene que:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{(-1)^2 + 4(-1) + 3}{(-1)^2 + (-1) + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

que es el valor numérico del límite.

ALUMNO: RAFAEL NOLASCO CASTREJÓN

2. Obtener el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 6}{8 - x^3}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a

$$\frac{2(2)^2 - 5(2) + 6}{8 - (2)^3} = \frac{4}{0} \to \infty$$

por lo tanto el límite no existe.

LOS COORDINADORES

3. Calcular el límite:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$$

Solución. $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \frac{4 - 4}{16 - 4 - 12} = \frac{0}{0}$ (indeterminado)

Se factoriza, se simplifica y se llega a:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 3)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{4 - 3} = 1$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

4. Resolver el límite:

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}} \frac{6x^2 + 7x + 2}{\frac{4}{9} - x^2}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a:

$$\frac{6\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 7\left(-\frac{2}{3}\right) + 2}{\frac{4}{9} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{14}{3} + 2}{\frac{4}{9} - \frac{4}{9}} = \frac{0}{0}$$

, que es una indeterminación. Para eliminarla se factorizan numerador y denominador, se simplifica y se tiene que:

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}} \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)(6x + 3)}{\left(\frac{2}{3} + x\right)\left(\frac{2}{3} - x\right)} = \lim_{x \to -\frac{2}{3}} \frac{6x + 3}{\frac{2}{3} - x} = \frac{6\left(-\frac{2}{3}\right) + 3}{\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

LOS COORDINADORES

5. Calcular el límite:

$$\lim_{r \to -3} \frac{r^2 + 2r - 3}{r^2 + 7r + 12}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende r y:

$$\lim_{r \to -3} \frac{r^2 + 2r - 3}{r^2 + 7r + 12} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

Al factorizar numerador y denominador y simplificar, se obtiene:

$$\lim_{x \to -3} \frac{r^2 + 2r - 3}{r^2 + 7r + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(r-1)(r+3)}{(r+4)(r+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{(r-1)}{(r+4)} = \frac{-3-1}{-3+4} = -4$$

Otra forma de proceder es si se usa el hecho de que el valor de -3 es raíz de los dos polinomios, por lo que se realizan las divisiones algebraicas correspondientes:

$$\frac{r^2 + 2r - 3}{r + 3} = r - 1 \qquad y \qquad \frac{r^2 + 7r + 12}{r + 3} = r + 4$$

con lo que se llega al mismo resultado.

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

6. Determinar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$$

Solución. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{0}{0}$ (indeterminado). Se factorizan ambos polinomios y se llega a:

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2) \quad y \quad 3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$$

luego, el límite queda como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(3x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{3x+1} = \frac{7}{7} = 1$$

LOS COORDINADORES

7. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2 + \frac{5x}{6} + \frac{1}{6}}{x^2 + \frac{3x}{12} - \frac{1}{36}} \right)$$

Solución. Se efectúa la correspondiente sustitución y:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2 + \frac{5x}{6} + \frac{1}{6}}{x^2 + \frac{3x}{12} - \frac{1}{36}} \right) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{12}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{5}{18} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{36}} = \frac{\frac{2-5+3}{18}}{\frac{4-3-1}{36}} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

Se factorizan numerador y denominador, y se calcula el valor del límite:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)} \right) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{12}\right)} \right) = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{3} - \frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{30} = -\frac{2}{5}$$

ALUMNO: RAFAEL NOLASCO CASTREJÓN

8. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

Solución. Al sustituir se tiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^3-x^3}{h}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

Se desarrolla, factoriza y:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

ALUMNO: RAFAEL NOLASCO CASTREJÓN

9. Calcular el límite: $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$.

Solución. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}=\dfrac{27-27}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminado)

Se factoriza el numerador, se simplifica y:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right)=9+9+9=27$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

10. Calcular el siguiente límite: $\lim_{h\to -2}\dfrac{h^3+8}{h+2}$

Solución. Se sustituye y:

$$\lim_{h\to -2}\frac{h^3+8}{h+2}=\frac{-8+8}{-2+2}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

Se factoriza el numerador como "suma de cubos" y:

$$\lim_{h\to -2}\frac{h^3+8}{h+2}=\lim_{h\to -2}\frac{(h+2)(h^2-2h+4)}{h+2}=\lim_{h\to -2}(h^2-2h+4)=(-2)^2-2(-2)+4=12$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

11. Determinar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to -3}\frac{27+x^3}{x^2-6x-27}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a

$$\lim_{x\to -3}\frac{27+x^3}{x^2-6x-27}=\frac{27+(-3)^3}{(-3)^2-6(-3)-27}=\frac{0}{0}$$

que es una indeterminación. Para eliminarla se factorizan numerador y denominador y se tiene que:

$$\lim_{x\to -3}\frac{(3+x)\ (9-3x+x^2)}{(x+3)\ (x-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{9-3x+x^2}{x-9}=\lim_{x\to -3}\frac{9-3(-3)+(-3)^2}{-3-9}=\frac{9+9+9}{-12}=\frac{27}{-12}=-\frac{9}{4}$$

LOS COORDINADORES

12. Sea $f(x)=\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 16} f(x)$.

Solución. Cuando se sustituye $x=16$, se llega a la indeterminación

$$\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}=\frac{16-16}{\sqrt{16}-4}=\frac{0}{0}$$

Para obtener el límite, se racionaliza el denominador de $f(x)$ y se tiene:

$$\lim_{x\to 16} f(x)=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to 16}\left(\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\right)=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{x-16}=\lim_{x\to 16}(\sqrt{x}+4)=8$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

13. Sea $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}$. Calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 7.

Solución. Se sustituye el valor al que tiende "x" en la función para ver si se presenta una indeterminación o se tiene un resultado determinado. Así,

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{7}}{7-7}=\frac{0}{0}\quad \text{(indeterminado)}$$

Se tiene una indeterminación, así que se debe usar algún artificio para eliminarla. Se emplea el binomio conjugado para racionalizar el numerador ya que se tienen raíces cuadradas en su binomio.

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{x}+\sqrt{7}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

14. Obtener el límite: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Solución. Se sustituye el valor de "4" y:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

Se multiplican numerador y denominador por el binomio conjugado del numerador y se obtiene:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{n\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

15. Obtener el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{85+x}-9}{2x^2-32}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a $\frac{\sqrt{85+(-4)}-9}{2(-4)^2-32}=\frac{\sqrt{81}-9}{32-32}=\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para eliminarla se factoriza el denominador y se multiplican, numerador y denominador por el binomio conjugado del numerador. Así se llega a:

$$\lim_{x\to -4}\frac{\left(\sqrt{85+x}-9\right)\left(\sqrt{85+x}+9\right)}{2\ (x+4)(x-4)\left(\sqrt{85+x}+9\right)}=\lim_{x\to -4}\frac{85+x-81}{2\ (x+4)\ (x-4)\ \left(\sqrt{85+x}+9\right)}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{1}{2\ (x-4)\ \left(\sqrt{85+x}+9\right)}=\frac{1}{2(-8)(9+9)}=-\frac{1}{288}$$

LOS COORDINADORES

16. Resolver:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+20}-5}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a $\frac{1-\sqrt{6-5}}{\sqrt{5+20}-5}=\frac{1-1}{5-5}=\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para quitarla se multiplican al mismo tiempo, numerador y denominador, por el binomio conjugado del numerador y del denominador. Así se llega a:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+20}-5}\cdot\frac{1+\sqrt{6-x}}{1+\sqrt{6-x}}\cdot\frac{\sqrt{x+20}+5}{\sqrt{x+20}+5}=\lim_{x\to 5}\frac{\left[1-(6-x)\right]\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{(x+20-25)\left(1+\sqrt{6-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{(x-5)\left(1+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+20}+5}{1+\sqrt{6-x}}=\frac{5+5}{1+1}=\frac{10}{2}=5$$

LOS COORDINADORES

17. Obtener el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{0}{0}$ (indeterminado). Se multiplican, numerador y denominador, por el binomio conjugado del numerador y se obtiene el valor del límite. Así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

LOS COORDINADORES

18. Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{2-x}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a $\frac{\sqrt[3]{8}-2}{2-2}=\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para eliminarla se multiplican, numerador y denominador, por el trinomio que transforma el numerador de la expresión original en una diferencia de cubos. Así se tiene que

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{2-x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(10-x-8)}{(2-x)\left(\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(10-x)^2} + 2\sqrt[3]{10-x} + 4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

Otra forma de resolver este límite es mediante el siguiente cambio de variable:

$$u^3 = 10 - x \;\Rightarrow\; x = 10 - u^3 \;;\; \lim_{x\to 2}(10-x) = \lim_{u\to ?} u^3 \;\Rightarrow\; u \to 2 \quad \therefore \quad \lim_{u\to 2} \frac{\sqrt[3]{u^3} - 2}{2-(10-u^3)} = \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{u^3-8}$$

$$= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{(u-2)(u^2+2u+4)} = \lim_{u\to 2} \frac{1}{u^2+2u+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

LOS COORDINADORES

19. Obtener el valor del límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Solución. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0}$ (indeterminado). En este caso, se puede hacer un cambio de variable. Se cambia el radicando, que es común, por otra variable a la que se le coloca como exponente el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales, que en este caso es 6. Así,

$$x = u^6 \;;\; \lim_{x\to 1} x = \lim_{u\to ?} u^6 \;\Rightarrow\; u^6 = 1 \;\Rightarrow\; u = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{u\to 1} \frac{\sqrt[3]{u^6} - 1}{\sqrt{u^6} - 1} = \lim_{u\to 1} \frac{u^2 - 1}{u^3 - 1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(u+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{u+1}{u^2+u+1} = \frac{2}{3}$$

Este ejercicio también se podría haber resuelto multiplicando numerador y denominador de la expresión original por las expresiones $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$ y $\sqrt{x} + 1$ para lograr la diferencia de cubos y de cuadrados y así eliminar la indeterminación.

LOS COORDINADORES

20. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x^2-3} - 1}{\sqrt{x^2-3} - 1}$$

Solución. Se hace el cambio de variable $x^2 - 3 = u^4$; $\lim_{x\to 2}(x^2-3) = \lim_{u\to ?} u^4 \;\Rightarrow\; 2^3 - 3 = 4 \;\therefore\; u \to 1$

$$\lim_{u\to 1} \frac{\sqrt[4]{u^4} - 1}{\sqrt{u^4} - 1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^2-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{1}{u+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

LOS COORDINADORES

21. Determinar el valor del límite siguiente:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt[4]{22-x}-2}{4-\sqrt{22-x}}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a $=\frac{\sqrt[4]{22-6}-2}{4-\sqrt{22-6}}=\frac{2-2}{4-4}=\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para eliminarla se cambia el radicando común de ambas raíces por una nueva variable elevada a un exponente que es el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces. Así, se tiene que:

$$22-x=u^4\ ;\ \lim_{x\to 6}(22-x)=\lim_{u\to ?}u^4\ \Rightarrow\ 22-6=u^4\Rightarrow\ u=2\ \therefore\ \lim_{u\to 2}\frac{\sqrt[4]{u^4}-2}{4-\sqrt{u^4}}=\lim_{u\to 2}\frac{u-2}{4-u^2}$$

$$=\lim_{u\to 2}\frac{u-2}{(2-u)(2+u)}=\lim_{u\to 2}\frac{-(2-u)}{(2-u)(2+u)}=\lim_{u\to 2}\frac{-1}{(2+u)}=-\frac{1}{4}$$

LOS COORDINADORES

22. Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

Solución. Se hace la sustitución y:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{\sqrt[4]{1}-1}{\sqrt[3]{1}-1}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

Se hace un cambio de variable, dado que se presentan raíces con índices diferentes pero con el mismo radicando:

$$1+x=u^{12}\quad ;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)=\lim_{u\to ?}u^{12}\quad\Rightarrow\quad 1+0=u^{12}\quad\Rightarrow u=1\quad\therefore\quad u\to 1$$

Se realiza el cambio y se efectúan las operaciones requeridas para obtener el resultado:

$$\lim_{u\to 1}\frac{u^3-1}{u^4-1}=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u^2-1)(u^2+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u-1)(u+1))(u^2+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{(u^2+u+1)}{(u+1)(u^2+1)}=\frac{(1^2+1+1)}{(1+1)(1^2+1)}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{3}{4}$$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

23. Obtener el valor del límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3} = \frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se divide entre la variable de mayor exponente y se obtiene el valor del límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3} = \frac{0+0}{1-0+0} = 0$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

24. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{6x^2+x+2}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{6x^2+x+2} = \frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se divide entre la variable con mayor exponente y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{6x^2+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{6x^2+x+2} = \frac{1}{2}$$

ALUMNO: MENDIETA PACHECO HUGO

25. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2-3x+7}{4x^2+4x-3}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2-3x+7}{4x^2+4x-3} = \frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se desarrolla el binomio del numerador, se simplifica y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-6x+9\right)-3x+7}{4x^2+4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+16}{4x^2+4x-3}$$

Se dividen entre la variable de mayor exponente, numerador y denominador y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9x}{x^2}+\frac{16}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{9}{x}+\frac{16}{x^2}}{4+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{1-0+0}{4+0-0}=\frac{1}{4}$$

ALUMNO: RAFAEL NOLASCO CASTREJÓN

26. Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x-4}{x^2+3x-6}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x-4}{x^2+3x-6}=\dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se divide entre la variable de mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}=\frac{1-0-0}{1+0-0}=\frac{1}{1}=1$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x-4}{x^2+3x-6}=1$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

27. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\quad\text{donde}\quad f(x)=1-\frac{1-2x-3x^2}{2x^2+5x-3}$$

Solución.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1-2x-3x^2}{2x^2+5x-3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+5x-3}-\frac{1-2x-3x^2}{2x^2+5x-3}\right)$$

se suman las dos fracciones:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2+7x-4}{2x^2+5x-3}\right)$$

se divide tanto el numerador como el denominador entre x^2

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{7x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}}{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)$$

por lo tanto $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1-2x-3x^2}{2x^2+5x-3}\right)=\frac{5}{2}$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

28. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x+8}{x^2+2x+2}.$$

Solución. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x+8}{x^2+2x+2}=\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se divide entre la variable con mayor exponente y se llega a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{5+0+0}{0+0+0}=\frac{5}{0}\to\infty$$

por lo tanto no existe el límite.

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

29. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{5x^3-3x^2+2x}$.

Solución. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{5x^3-3x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Para calcular este límite se dividirá el numerador y el denominador de la función entre la variable de mayor potencia, en este caso x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{5x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+2x-1}{x^3}}{\frac{5x^3-3x^2+2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Se valúa el límite y finalmente se llega a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{5x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{5-\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{5}=0$$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

30. Obtener el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x^3+5x^2-2x}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x^3+5x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se divide entre la variable de mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x^3+5x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{x^3}}{\frac{2x^3+5x^2-2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

Por lo tanto; $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x^3+5x^2-2x}=\frac{6}{2}=3$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA M.

31. Sea $f(x)=\frac{-7x^3+3x^2-x+6}{5x^3+2x^2-9x}$. Calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞.

Solución. Al sustituir se tiene que:

$$f(x)=\frac{-7x^3+3x^2-x+6}{5x^3+2x^2-9x}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{(indeterminado)}$$

Se dividen numerador y denominador entre la variable de mayor exponente y se realiza la sustitución nuevamente en la expresión simplificada:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{7x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{5+\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}}=-\frac{7}{5}$$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

32. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^3-x-2}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^3-x-2}=\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^3-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}=\frac{2-0+0}{1-0-0}=2$$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

33. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}=\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se dividen numerador y denominador entre la variable de mayor exponente para poder calcular el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

LOS COORDINADORES

34. Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-9}+1}{x}$.

Solución. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-9}+1}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Mediante operaciones algebraicas se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-9}+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x-9}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=0$$

También su pudo haber dividido numerador y denominador entre la variable de mayor exponente, de donde:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-9}+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x-9}+1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x-9}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}}+\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-9}+1}{x}=0$$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

35. Calcular $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{10+3x}$.

Solución. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{10+3x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se dividen numerador y denominador entre la variable de mayor exponente, que es "x" , y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}}{\frac{10+3x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\frac{10}{x}+3}=\frac{2}{3}$$

LOS COORDINADORES

36. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

Solución. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado).

Se dividen numerador y denominador entre la variable elevada de mayor exponente. Esto es con la finalidad de lograr cocientes con el infinito como denominador lo que conduce a valores de tendencia cero. Así, en este caso, habrá que dividir entre x donde se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt[3]{1+0}}=1$$

LOS COORDINADORES

37. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+2}{1+\sqrt{x^3-6}}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+2}{1+\sqrt{x^3-6}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se dividen numerador y denominador entre la variable de mayor exponente que es "$x^{\frac{3}{2}}$" y así se puede calcular el valor numérico del límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+2}{x^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1+\sqrt{x^3-6}}{x^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+2}{x^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{\dfrac{x^3-6}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{1-\dfrac{6}{x^3}}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

LOS COORDINADORES

38. Obtener:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^6-21}}{4-3x^3}$$

Solución. Se sustituye el valor al que tiende la variable independiente x y se llega a $\dfrac{\sqrt{5(\infty)^6-21}}{4-3(\infty)^3}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

que es una indeterminación. Para quitarla se dividen, numerador y denominador , entre la variable de mayor exponente que en este caso es x^3 . El objeto de esto es lograr que la variable aparezca como denominador y así la división entre ella, cuando tiende x a tiende a ∞ , el cociente tiende a cero. De esta forma, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{5x^6-21}}{x^3}}{\dfrac{4-3x^3}{x^3}}=\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{5x^6}{x^6}-\dfrac{21}{x^6}}}{\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{3x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5-\dfrac{21}{x^6}}}{\dfrac{4}{x^3}-3}=\frac{\sqrt{5}}{-3}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

LOS COORDINADORES

39. Determinar: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

Solución. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Se multiplican numerador y denominador por $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = 1$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

40. Sea f la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 2-x & si \quad x<1 \\ x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$.

Obtener $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solución. Los límites laterales pueden existir por separado pero el límite de la función implica necesariamente su igualdad. Así:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2-x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+1\right) = 2$$

Como el limite por la izquierda es diferente al limite por la derecha el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHAVEZ

41. Sea la función:

$$g(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x \neq 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Determinar si $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe.

Solución. Se calculan los límites laterales y:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

Como $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x)$, se concluye que $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe y es igual a 0. Obsérvese que $g(0) = 2$, lo cual no afecta al valor del $\lim_{x \to 0} g(x)$.

ALUMNA: IRENE RUBALCABA M.

42. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & si \quad x \le 2 \\ 1 + x^2, & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Determinar $\lim_{x \to 2} f(x)$

Solución. Se calculan los limites laterales y, en caso de existir y ser iguales, ése será el valor del límite de la función. Así:

$$\lim_{x \to 2^-} (9 - x^2) = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} (1 + x^2) = 5$$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

43. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & si \ -3 \le x < 2.5 \\ \dfrac{(x-3)^3 + x - 3}{x - 3} & si \ 2.5 \le x \le 10 \end{cases}$

Calcular: *a*) $\lim_{x \to 2} f(x)$; *b*) $\lim_{x \to 3} f(x)$; *c*) $\lim_{x \to 2.5} f(x)$

Solución.

a) Si se sustituye directamente, se obtiene $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2^3 - 8}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$, que está indeterminado. Al factorizar se obtiene:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

b) Si se sustituye directamente, se obtiene $\lim_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(3-3)^3 + 3 - 3}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$, resultado indeterminado. Al factorizar se obtiene:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^3+x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left[(x-3)^2+1\right]}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left[(x-3)^2+1\right]=1$$

c) Para que este límite exista, los límites laterales deben existir y ser iguales. Así:

$$\lim_{x\to 2.5^-} f(x)=\frac{(2.5)^3-8}{2.5-2}=15.25 \qquad y \qquad \lim_{x\to 2.5^+} f(x)=\frac{(2.5-3)^3+2.5-3}{2.5-3}=1.25$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces el límite $\lim_{x\to 2.5} f(x)$ no existe.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

44. Determinar, si existe, el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to\pi} = f(x) \quad \text{si} \quad f(x)=\begin{cases} sen(x+1) & 0\le x\le\pi \\ e^{x^2} & \pi< x\le 2\pi \end{cases}$$

Solución. Como se trata de una función con dos reglas de correspondencia, se tendrá que verificar si existen los límites para cada una de ellas cuando $x\to\pi^-$ y $x\to\pi^+$ y éstos deberán ser iguales para que el límite de la función exista. De esta forma:

$$\lim_{x\to\pi^-} sen(x+1)=sen(\pi+1)=-0.84147$$

Ahora se calculará el límite lateral por la derecha con la segunda regla de correspondencia:

$$\lim_{x\to\pi^+} e^{x^2}=e^{\pi^2}=19333.6$$

Como se aprecia los valores de los límites laterales son distintos; por lo tanto, no existe límite para esta función.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

45. Para la función, $f(x)=\begin{cases} x & si \quad -3\le x<0 \\ sen\ x & si \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \tan x & si \quad \dfrac{\pi}{2}< x<\pi \end{cases}$

Calcular los siguientes límites $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} sen\ x=0$$

como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces: $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} sen \quad x = 1; \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan \quad x \to \infty \quad \text{(no existe).}$$

Como ; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x$ no existe, el $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ no existe.

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

46. Calcular: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{5\ senx}$.

Solución. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{5\ senx} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminado)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{5senx} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0} \frac{x}{senx}$$

Se divide numerador y el denominador entre x y se tiene que:

$$\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{senx}{x}} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{senx}{x}} = \frac{1}{5}\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{5\ senx} = \dfrac{1}{5}$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

47. Calcular $\lim_{x\to\pi} \dfrac{sen\ 6x}{6(x-\pi)}$.

Solución. $\lim_{x\to\pi} \dfrac{sen\ 6x}{6(x-\pi)} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminado).

Se realiza el siguiente cambio de variable: $u = x-\pi \quad \Rightarrow \quad x = u+\pi$; si $x\to\pi \quad \Rightarrow \quad u\to 0$

$$\lim_{u\to 0}\frac{sen\ 6(u+\pi)}{6(u+\pi-\pi)} = \lim_{u\to 0}\frac{sen(6u+6\pi)}{6u}$$

como $sen(6u+6\pi) = sen\ 6u$ por identidades trigonométricas, entonces:

$$\lim_{u\to 0}\frac{sen(6u+6\pi)}{6u} = \lim_{u\to 0}\frac{sen\ 6u}{6u} = 1$$

por lo tanto $\lim_{x\to\pi} \dfrac{sen\ 6x}{6(x-\pi)} = 1$

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

48. Sea la función $f(x)=\dfrac{sen\ 2x}{sen\ 7x}$. Calcular el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solución. Se realiza el siguiente manejo algebraico en la función:

$$\frac{sen\ 2x}{sen\ 7x}=\frac{sen\ 2x}{sen\ 7x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{sen\ 2x}{x}}{\frac{sen\ 7x}{x}}=\frac{\frac{sen\ 2x}{x}\cdot\frac{2}{2}}{\frac{sen\ 7x}{x}\cdot\frac{7}{7}}=\frac{2\left(\frac{sen\ 2x}{2x}\right)}{7\left(\frac{sen\ 7x}{7x}\right)}$$

De esta forma

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{sen\ 2x}{sen\ 7x}=\frac{2\left(\frac{sen\ 2x}{2x}\right)}{7\left(\frac{sen\ 7x}{7x}\right)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 2x}{2x}\right)}{7\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 7x}{7x}\right)}=\frac{2\cdot 1}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}$$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA M.

49. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 4x}{sen\ 2x}$$

Solución. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ 4x}{sen\ 2x}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminado)

Por identidades trigonométricas: $sen\ 2A=2senA\cos A$

Entonces se sustituye en el límite y:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen\ 2x\cos 2x}{sen\ 2x}=\lim_{x\to 0}2\cos 2x=2\lim_{x\to 0}\cos 2x=2(1)=2$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

50. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\ x}{x}$.

Solución. Al valuar directamente se obtiene: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\tan(0)}{0}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminado).

Se emplean identidades trigonométricas y:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\ x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x}{x}\right)\right]\left[\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}\right]$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

51. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{sen\ x}$$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{sen\ \ x}=\frac{0}{0}$ (indeterminado). Se multiplican numerador y denominador por $\frac{1}{x}$ y:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{sen\ x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x+2x^2}{x}}{\frac{sen\ x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{2x^2}{x}}{\frac{sen\ x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}2x}{\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}}$$

Ahora se multiplican numerador y denominador del primer límite por el binomio conjugado de $1-\cos x$ y se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\left(1+\cos x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x\left(1+\cos x\right)}=\frac{\lim_{x\to 0}senx\cdot\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}}{\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x}=\frac{0\cdot 1}{1+1}=0$$

de donde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{x\ \ sen\ \ x}=\frac{0+0}{1}=\frac{0}{1}=0$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

52. Sea $f\left(\theta\right)=\frac{\cos 2\theta-1}{sen\ \ \theta}$. Calcular el límite de $f\left(\theta\right)$ cuando θ tiende a 0.

Solución. Se sustituye el valor de $\theta=0$ en la función para determinar si se llega a una indeterminación.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos 2\theta-1}{sen\ \ \theta}=\frac{0}{0}$$

Se tiene una indeterminación, por lo que se utilizan identidades trigonométricas.

Dado que $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, se despeja $\cos\ 2\theta$ y se llega a: $\cos\ 2\theta=2\cos^2\theta-1$, de donde

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos^2\ \ \theta-1-1}{sen\ \ \ \theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos^2\ \ \ \theta-2}{sen\ \ \ \theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2(\cos^2\theta-1)}{sen\ \ \ \theta}$$

Como $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \quad \therefore \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{2(-sen^2\,\theta)}{sen\,\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(-2sen\,\theta\right) = 0$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

53. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{sen\;x + sen\;x\cos x}$$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{sen\;x + sen\;x\cos x} = \frac{1-1}{0+0\cdot 1} = \frac{0}{0}$ (indeterminado)

$sen^2 x + \cos^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2 x - 1 = -sen^2 x$; de donde $\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{sen\;x + sen\;x\cos x}$

ahora se factoriza y:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\,sen^2 x}{sen\;x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\,sen\;x}{1+\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{sen\;x}{1+\cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0$$

Por lo que finalmente $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{sen\;x + sen\;x\cos x} = 0$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

54. Calcular

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha - sen\alpha}{\alpha^3}.$$

Solución. $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha - sen\alpha}{\alpha^3} = \frac{0}{0}$ (indeterminado) . Con identidades trigonométricas se tiene que:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{sen\;\alpha}{\cos\alpha} - sen\alpha}{\alpha^3} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{sen\;\alpha - sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\alpha^3} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\;\alpha\,(1-\cos\alpha)}{\alpha^3\cos\alpha}$$

Se multiplica por el binomio conjugado de $1-\cos\alpha$ y se llega a:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\;\alpha\,(1-\cos\alpha)}{\alpha^3\cos\alpha}\left[\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\,\alpha\,(1-\cos^2\alpha)}{\alpha^3\cos\alpha\,(1+\cos\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\,\alpha\,(sen^2\alpha)}{\alpha^3\cos\alpha\,(1+\cos\alpha)}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sen^3\alpha}{\alpha^3\cos\alpha\;\;(1+\cos\alpha)} = \frac{\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{sen\alpha}{\alpha}\right)^3}{\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha\left(\lim_{\alpha\to 0}1 + \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha\right)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan\alpha - sen\ \alpha}{\alpha^3} = \frac{1}{2}$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

55. Calcular el siguiente límite con funciones trigonométricas:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{\tan 3x}$$

Solución. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{\tan 3x} = \frac{0}{0}$ (indeterminado) . Por identidades trigonométricas y operaciones algebraicas se puede escribir que:

$$\frac{\tan 4x}{\tan 3x} = \frac{\frac{sen\ 4x}{\cos\ 4x}}{\frac{sen\ 3x}{\cos\ 3x}} = \frac{(sen\ 4x)\cos\ 3x}{(sen\ 3x)\cos\ 4x} = \frac{\frac{sen\ 4x}{4x}}{\frac{sen\ 3x}{4x}} \frac{\cos\ 3x}{\cos\ 4x} = \frac{\frac{sen\ 4x}{4x}}{\frac{sen\ 3x}{\frac{4}{3}(3x)}} \frac{\cos\ 3x}{\cos\ 4x}$$

por propiedades de los límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{\tan 3x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{sen\ \ 4x}{4x} \cdot \cos 3x}{\frac{3}{4} \cdot \frac{sen\ \ 3x}{3x} \cdot \cos 4x} \right] = \frac{\lim_{x \to 0} \frac{sen 4x}{4x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos 3x}{\lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen 3x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos 4x} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto existe límite y su valor es $\frac{4}{3}$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

56. Calcular, si existe, el valor del siguiente límite:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta \sec\theta}{\tan\theta}$$

Solución. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta \sec\theta}{\tan\theta} = \frac{0}{0}$ (indeterminado)

Mediante identidades trigonométricas se obtiene:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta \sec\theta}{\tan\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{sen\theta}{\cos\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{sen\theta} \cdot \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\theta}{\theta}}{\frac{sen\theta}{\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\frac{sen\theta}{\theta}} = \frac{\lim_{\theta \to 0} (1)}{\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

57. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\theta\sec\theta}$$

Solución. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\theta\sec\theta}=\frac{0}{0}$ (indeterminado)

Se multiplican numerador y denominador por $\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta+1}$ y se llega a:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\theta\sec\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\theta\sec\theta}\cdot\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta+1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec^2\theta-1}{(\theta\sec\theta)(\sec\theta+1)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan^2\theta}{(\theta\sec\theta)(\sec\theta+1)}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}}{\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)(\sec\theta+1)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{sen^2\theta}{\theta\cos\theta(\sec\theta+1)}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen\ \theta}{\theta}\right)\left(\frac{sen\ \theta}{\cos\theta(\sec\theta+1)}\right)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen\ \theta}{\theta}\right)\left(\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen\ \theta}{\theta}\right)\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1}\right)=1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right)=0$$

Entonces $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\theta\sec\theta}=0$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

58. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{sen\,4x}.$$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{sen\ 4x}=\frac{0}{0}$ (indeterminado) . Se multiplica por el binomio conjugado de $\sqrt{1-x}-1$ y después se dividen numerador y denominador entre "$4x$" :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{sen\ 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{sen\ 4x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-1}{(sen\ 4x)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{4x}}{\frac{(sen\ 4x)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{4x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 4x}{4x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x}+\lim_{x\to 0}1\right)}=\frac{-\frac{1}{4}}{(1)(1+1)}=-\frac{1}{8}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{sen\ 4x}=-\frac{1}{8}$

ALUMNA: BERENICE VERA PADILLA GABRIELA

59. Determinar el valor del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x+\sqrt{1-\cos^2 x}}{x\cos x}$$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x+\sqrt{1-\cos^2 x}}{x\cos x}=\frac{0}{0}$ (indeterminado)

Se considera la identidad trigonométrica en el radicando y se separan los términos:

$$\frac{\cos\ x\tan x+\sqrt{1-\cos^2 x}}{x\cos x}=\frac{\tan x}{x}+\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x\cos x}=\frac{\tan x}{x}+\frac{sen\ x}{x\cos x}$$

Por lo tanto el límite queda:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{senx}{x}}{\cos x}+\frac{\frac{senx}{x}}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{senx}{x}\right)}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to 0}2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}}{\lim_{x\to 0}\cos x}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$$

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

60. Calcular los valores reales de a y b, tales que hagan a la función continua en todo su dominio de definición dado.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-a & si & -3\le x<-1\\ x-1 & si & -1\le x<2\\ b-\frac{4}{3}x & si & 2\le x\le 5\end{cases}$$

Solución. Si se observan los intervalos de cada regla de correspondencia, así como el hecho de que se trata de funciones polinomiales, entonces su dominio de definición es: $D_f=[-3,\ 5]$. Sólo habrá que garantizar que hay continuidad en los puntos donde $x=-1$ y $x=2$.

$$f(-1)=-1-1=-2$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-2x-a)=2-a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x-1)=-1-1=-2$$

se igualan ambos límites y se tiene que : $2-a=-2 \Rightarrow a=4$

Ahora se analiza el siguiente punto de discontinuidad, esto es, en $x=2$: $f(2)=b-\frac{4}{3}(2)=b-\frac{8}{3}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x-1) = 2-1=1 \qquad y \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(b-\frac{4}{3}x) = b-\frac{8}{3}$$

se igualan los límites por la derecha y por la izquierda:

$$b-\frac{8}{3}=1 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{11}{3}$$

Por lo tanto, los valores de "a" y "b" para los cuales la función es continua en todo su dominio son:

$$a=4 \quad y \quad b=\frac{11}{3}$$

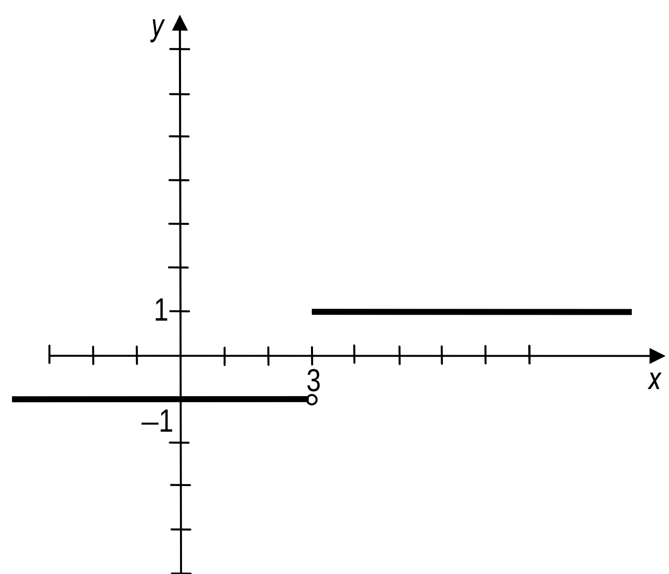
ALUMNO: PABLO A. LORENZANA G.

61. Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ 1 & si \quad x=3 \end{cases}$$

Trazar su gráfica y determinar si es continua en $x=3$.

Solución.



Como se observa en la gráfica y en las reglas de correspondencia de la función, se cumple la primera condición de continuidad, es decir,

$f(3)=1$

pero el límite cuando $x\to 3$ no existe, ya que los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

Por lo tanto la función no es continua en $x = 3$.

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHAVEZ

62. Calcular los valores de las constantes a y b tales que hagan a la siguiente función continúa en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \le 3 \\ ax+b & si \quad 3 < x < 5 \\ x^2+2 & si \quad x \ge 5 \end{cases}$$

Solución. Las tres reglas de correspondencia son funciones polinomiales, continuas en los reales y por lo tanto en los intervalos dados. Luego, sólo habrá que asegurar la continuidad en los puntos $x = 3$ y $x = 5$. Así:

Para: $x = 3$

a) $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 7$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3a + b = 7 \quad \cdots \quad (1)$

c) $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$

Para: $x = 5$

a) $f(5) = (5)^2 + 2 = 27$

b) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 5a + b$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 27$; $5a + b = 27 \quad \cdots \quad (2)$

c) $f(5) = \lim_{x\to 5} f(x)$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -3a - b &= -7 \\ \underline{5a + b} &\underline{= 27} \quad \Rightarrow \quad a = 10 \quad \Rightarrow \quad 5(10) + b = 27 \quad \Rightarrow \quad b = -23 \\ 2a \quad &= 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores que hacen continua a la función son: $a = 10$ y $b = -23$ y la función queda como;

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \le 3 \\ 10x-23 & si \quad 3 < x < 5 \\ x^2+2 & si \quad x \ge 5 \end{cases}$$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

63. Para la siguiente función, estudiar su continuidad, indicando en qué puntos es discontinua y por qué.

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si \ \ -1<x<0\\ 4 & si \ \ 0\le x\le 3\\ x-1 & si \ \ x>3\end{cases}$$

Solución.
Se determina primero si las reglas de correspondencia son continuas en los intervalos indicados.

a) $f(x)=(x+2)^2 \quad si \ \ -1<x<0$. Sí es continua ya que es un polinomio.

b) $f(x)=4 \quad si \quad 0<x<3$. Sí es continua ya que es una constante.

c) $f(x)=x-1 \quad si \quad x>3$. Sí es continua ya es un polinomio.

Ahora se estudiará la continuidad en los puntos donde $x=0 \quad y \quad x=3$

En $x=0$:

$$f(0)=4$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=4 \qquad \therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=4$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

por lo tanto $f(x)$ es continua en $x=0$.

En $x=3$:

$$f(3)=4$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=2 \qquad \therefore \quad \lim_{x\to 3} f(x) \ \text{no existe}$$

por lo que la función $f(x)$ no es continua en $x=3$.

Finalmente se dice que la función $f(x)$ es continua en $(-1,3) \quad y \quad (3,\infty)$.

ALUMNA: RODRÍGUEZ DE LA TORRE RHAMID HORTENSIA

64. Determinar los valores de $"a" \quad y \quad "b"$ de tal forma que la función sea continua en el intervalo $[-2,2]$ y trazar su gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & ; \quad -2\le x\le -1\\ a-\sqrt{1-x^2} & ; \quad -1<x\le 1\\ 4-\dfrac{3}{a}x & ; \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

Solución. Como se observa, las tres reglas de correspondencia, por sí solas y considerando sus dominios, no tienen problemas de discontinuidad en sus respectivos intervalos de definición. Dos puntos de posible dicontinuidad son $"-1" \quad y \quad "1"$. Si se busca que se cumplan en ellos las condiciones de continuidad se tendrá lo siguiente:

Para

$x=-1$; $f(-1)=-a+b$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-a+b$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a \Rightarrow -a+b=a$; $b=2a \cdots (1)$

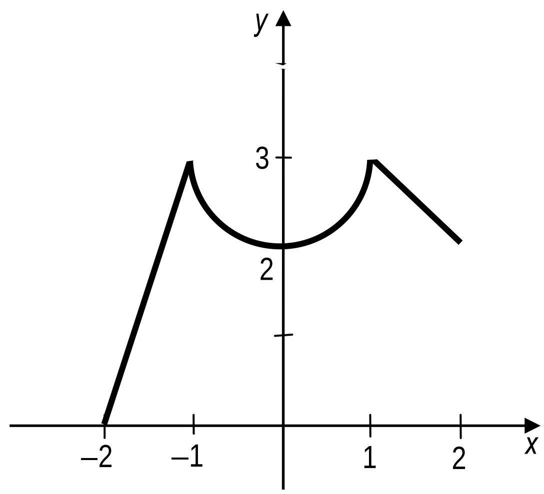
Para $x=1$; $f(1)=a$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4-\dfrac{3}{a} \Rightarrow a=4-\dfrac{3}{a}$; $a^2-4a+3=0$

$$a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow a=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{matrix} a_1=3 \\ a_2=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1=6 \\ b_2=2 \end{matrix}$$

Para los primeros valores, la función es:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+6 & ; \quad -2\le x\le -1 \\ 3-\sqrt{1-x^2} & ; \quad -1< x\le 1 \\ 4-x & ; \quad 1< x\le 2 \end{cases}$$

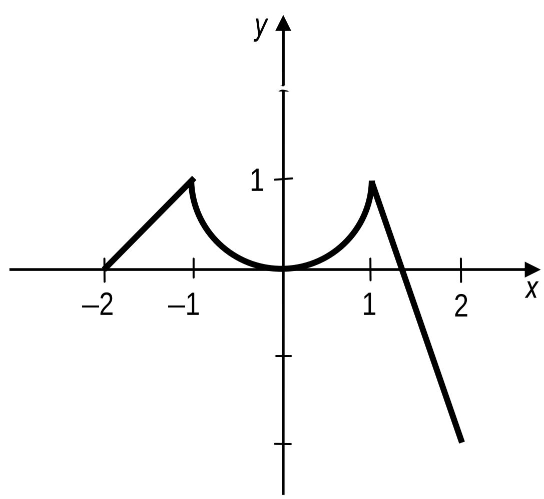
La gráfica de la función es por tanto;



Para los segundos valores, la función es:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad -2\le x\le -1 \\ 1-\sqrt{1-x^2} & ; \quad -1< x\le 1 \\ 4-3x & ; \quad 1< x\le 2 \end{cases}$$

y la gráfica de la función será ahora:



Por lo que se observa que para ambas parejas de valores "a" y "b", las respectivas funciones son continuas en el intervalo $\left[-2,2\right]$.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

65. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} +\sqrt{25-x^2} & si \ \ -4<x<0 \\ 5-2x & si \ \ \ 0\le x<2 \\ (x-3)^2 & si \ \ \ 2\le x\le 6 \end{cases}$$

Solución. $f(x)=+\sqrt{25-x^2}$ es continua en $-4<x<0$ porque es una función algebraica (semicircunferencia) cuyo dominio es $x\in\left[-5,5\right]$.

$f(x)=5-2x$ es continua en $0<x<2$ porque es un polinomio.

$f(x)=(x-3)^2$ es continua en $2<x<6$ porque es un polinomio.

Ahora se estudiará la continuidad en $x=0$ y $x=2$.

a) En $x=0$

$$f(0)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=5 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=5 \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=5$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

por lo que la función es continua en $x=0$.

b) En $x=2$

$$f(2)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=1 \quad \therefore \quad \lim_{x\to 2} f(x)=1$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

por lo que la función es continua en $x=2$.

Se concluye que la función es continua en $\left(-4,6\right]$.

ALUMNA: IRENE RUBALCABA M

66. Analizar la continuidad de la siguiente función en su dominio de definición:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \ \ -3\le x<0 \\ 1 & si \ \ 0\le x<\pi \\ sen\ \dfrac{x}{2} & si \ \ \pi\le x<3\pi \end{cases}$$

Solución. Puntos de análisis: $x=0$, $x=\pi$. Intervalos de análisis: $[-3,0)$, $[0,\pi)$ y $[\pi,3\pi)$

En el intervalo $[-3,0) \Rightarrow f(x)=x^2+1$ es una función continua por ser una función polinomial.

En el intervalo $[0,\pi) \Rightarrow f(x)=1$ es una función continua por ser una función constante.

En el intervalo $[\pi,3\pi) \Rightarrow f(x)=sen\dfrac{x}{2}$ es una función trascendente continua.

Luego sólo se investigará la continuidad de la función en los puntos donde $x=0$ y $x=\pi$.

Análisis en $x=0$.

a) $f(0)=1$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0^2+1=1$

c) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

Por lo tanto, f es continua en $x=0$

Análisis en $x=\pi$.

a) $f(\pi)=sen\dfrac{\pi}{2}=1$

b) $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=1$

c) $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=f(\pi)$

Por lo tanto; f es continua en $x=\pi$.

Entonces, f es continua en todo su dominio

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

67. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x & si \quad -3\le x<0 \\ sen\,x & si \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \tan x & si \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$$

Solución. Esta función está definida por tres reglas de correspondencia, las cuales son continuas en el intervalo de definición de cada una. Sin embargo la función en su conjunto puede ser no continua en los puntos donde se presenta el cambio de regla de correspondencia. Estos puntos son los que se analizarán:

Para $x=0$.

$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ $\therefore$ $\lim\limits_{x\to0}=0$

$f(0)=\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Como el límite y el valor de la función existen y son iguales, la función es continua en este punto.

Para $x=\frac{\pi}{2}$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ no existe. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ no existe.

Por lo tanto la función $f(x)$ no es continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

Luego, la función es continua en $\left[-3,\frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, pero no es continua en todo su dominio.

ALUMNO: ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS BOGDAD

68. Determinar el valor de A y B para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio:

$$f(x)=\begin{cases} 2x\ sen\ x & si \quad x<-\frac{\pi}{2} \\ -Asen\ \ x-B & si \quad -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2} \\ -\cos x & si \quad x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución. Las tres reglas de correspondencia contienen funciones trascendentes continuas en sus intervalos de definición, por lo que únicamente habrá que lograr que la función sea continua en "$-\frac{\pi}{2}$" y "$\frac{\pi}{2}$" para que sea continua en $\mathbb{R}$.

Para $x=-\frac{\pi}{2}$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-A\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)-B=A-B$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)=2\left(-\frac{\pi}{2}\right)sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi \quad ; \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)=-Asen\left(-\frac{\pi}{2}\right)-B=A-B \quad \Rightarrow \quad A-B=\pi \quad \cdots \quad (1)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$$

luego la función es continua en $x=-\frac{\pi}{2}$

Para $x=\frac{\pi}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=-Asen\left(\frac{\pi}{2}\right)-B=-A-B \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow -A-B=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$$

por lo que la función es continua en $x=\dfrac{\pi}{2}$

Se resuelve el sistema de ecuaciones (1) y (2) y se obtiene:

$$\begin{array}{r} A-B=\pi \\ -A-B=0 \end{array} \;\Rightarrow\; -2B=\pi \;\Rightarrow\; B=-\frac{\pi}{2} \quad y \quad A=\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$f(x)=\begin{cases} 2x\ sen\ x & si \quad x<-\dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2} sen\ x+\dfrac{\pi}{2} & si \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x & si \quad x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

69. Determinar por medio de límites las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de la siguiente función dada y trazar su gráfica.

$$f(x)=\frac{x+4}{x-2}.$$

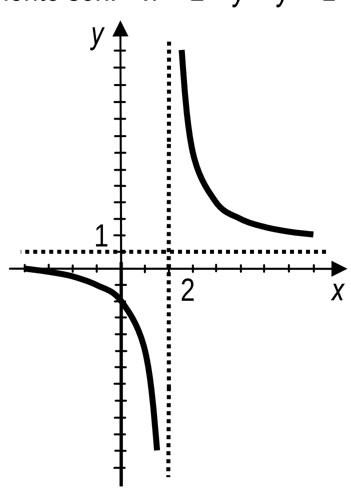
Solución. Para obtener las asíntotas verticales se hace lo siguiente:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-2}\to\infty \quad \therefore \quad x=2 \quad \text{(ecuación de la asíntota vertical)}$$

Para las asíntotas horizontales se evaluará el límite de la función cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+4}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1}{1}=1 \quad \therefore \quad y=1 \quad \text{(ecuación de la asíntota horizontal)}$$

En la siguiente gráfica se puede observar a la curva que representa a la función, junto con sus asíntotas vertical y horizontal, cuyas ecuaciones, respectivamente son: $x=2$ y $y=1$



ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

70. Determinar para la siguiente función la ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.

$$g(x)=\frac{x}{(x+7)(x-2)}$$

Solución.

$$(x+7)(x-2)=0 \quad ; \quad \begin{cases} x+7=0 \;\Rightarrow\; x=-7 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to -7} f(x)\to\infty \\ x-2=0 \;\Rightarrow\; x=2 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 2} f(x)\to\infty \end{cases}$$

por lo tanto, las ecuaciones de las asíntotas verticales son: $x=-7 \quad y \quad x=2$

Por otro lado, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{(x+7)(x-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+5x-14}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}-\frac{14}{x^2}}=\frac{0}{1+0-0}=0 \quad \therefore \quad y=0$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

71. Determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:

$$f(\theta)=\frac{1-\theta}{\theta^2-4}$$

Solución. Se puede escribir la función dada como:

$$f(\theta)=\frac{1-\theta}{(\theta-2)(\theta+2)}$$

$$\lim_{\theta\to 2} f(\theta)\to\infty \qquad y \qquad \lim_{\theta\to -2} f(\theta)\to\infty$$

por lo tanto, las ecuaciones de las asíntotas verticales son: $\theta=2 \quad y \quad \theta=-2.$
por otro lado:

$$\lim_{\theta\to+\infty}\frac{1-\theta}{\theta^2-4}=\lim_{\theta\to+\infty}\frac{\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}}{1-\frac{4}{\theta^2}}=0 \qquad y \qquad \lim_{\theta\to-\infty}\frac{1-\theta}{\theta^2-4}=\lim_{\theta\to-\infty}\frac{\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}}{1-\frac{4}{\theta^2}}=\frac{0}{1}=0$$

por lo que la ecuación de la asíntota horizontal es $y=0$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

72. Determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función:

$$g(x)=\frac{x^2}{x^2-64}$$

Solución.

$$x^2-64=0 \quad \Rightarrow \quad (x+8)(x-8)=0 \quad ; \quad \begin{cases} x=-8 \\ x=8 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2}{x^2-64}\to\infty \quad y \quad \lim_{x\to 8}\frac{x^2}{x^2-64}\to\infty \quad \therefore \quad \text{asíntotas verticales:} \quad \begin{cases} x=-8 \\ x=8 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-64}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{64}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{64}{x^2}}=1 \quad \therefore \quad \text{asíntota horizontal:} \quad y=1$$

ALUMNO: RAFAEL NOLASCO CASTREJÓN

73. Determinar las asíntotas horizontales y verticales de la función:

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2x-3}$$

Solución. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \dfrac{3x^2}{(x-3)(x+1)}$

En este caso las asíntotas verticales son: $x=3$ y $x=-1$ ya que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{x^2-2x-3}\to\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to -1}\frac{3x^2}{x^2-2x-3}\to\infty$$

Las asíntotas horizontales se obtienen con el límite cuando la variable independiente tiende a infinito, es decir;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}=3$, luego la ecuación de la asíntota horizontal es $y=3$.

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

74. Determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{8}{x^2-4}$$

Solución. Para asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2-4}=0 \quad \therefore \quad \text{asíntota horizontal:} \qquad y=0$$

Para asíntotas verticales:

$$f(x)=\frac{8}{x^2-4}=\frac{8}{(x-2)(x+2)} \quad ; \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad ; \quad x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

$$\lim_{x\to\pm 2}\left[\frac{8}{x^2-4}\right]\to\infty \quad : \quad \text{asíntotas verticales:} \quad x=2 \ \ \text{y} \ \ x=-2$$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

75. Para la función $y=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$, obtener las ecuaciones de sus asíntotas verticales y de sus asíntotas horizontales, y trazar su gráfica.

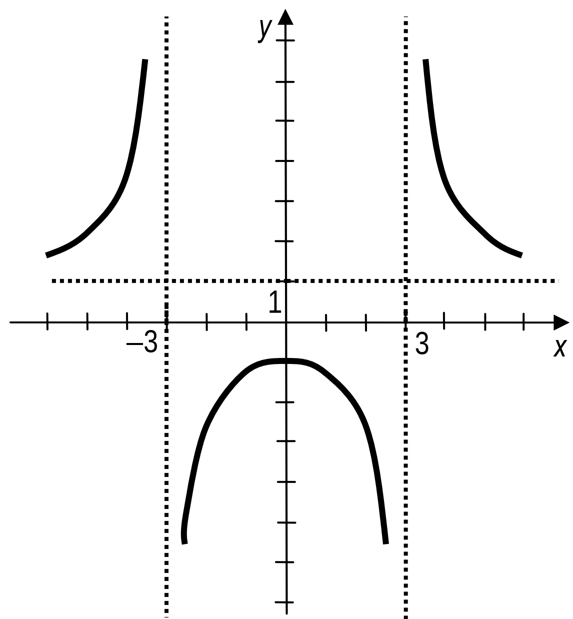
Solución. Para las asíntotas verticales se hace lo siguiente:

$$x^2-9=0 \quad ; \quad (x+3)(x-3)=0 \quad ; \quad x=-3 \quad y \quad x=3$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+9}{x^2-9}\to\infty \quad y \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x^2-9}\to\infty \qquad \therefore \qquad \text{asíntotas verticales:} \ \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$$

Para las asíntotas horizontales se calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+9}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+9}{x^2}}{\dfrac{x^2-9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{9}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x^2}}=\frac{1}{1}=1 \qquad \therefore \qquad \text{asíntota horizontal:} \quad y=1$$



ALUMNA: BERENICE VERA PADILLA GABRIELA

76. Para la siguiente función, determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

$$f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$$

Solución. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x+3}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1$$

por lo tanto, la única asíntota horizontal es la recta de ecuación $y=1$.

Para obtener las asíntotas verticales se iguala a cero el denominador de la función:

$$\sqrt{x^2-1}=0 \quad ; \quad x^2-1=0 \quad ; \quad (x+1)(x-1)=0 \quad \therefore \quad \begin{matrix} x=-1 \\ x=1 \end{matrix}$$

por lo tanto, las asíntotas verticales son las rectas cuyas ecuaciones son $x_1=1$ y $x_2=-1$.

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

1. Obtener la derivada de la siguiente función, mediante la definición de derivada.

$$y = x^3$$

Solución. Por la definición de derivada:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3$$
$$y + \Delta y - y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - x^3$$
$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + \left(\lim_{\Delta x \to 0} 3x\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x\right)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

2. Determinar la derivada por la definición de $y = x^3 - 4x + 9$.

Solución. Se sustituyen x por $x + \Delta x$ y y por $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = \left(x + \Delta x\right)^3 - 4\left(x + \Delta x\right) + 9$$
$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - 4x - 4\Delta x + 9$$
$$y + \Delta y - y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - 4x - 4\Delta x + 9 - x^3 + 4x - 9$$
$$\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - 4x - 4\Delta x + 9 - x^3 + 4x - 9$$
$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - 4\Delta x$$

Se divide entre Δx y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - 4\Delta x}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - 4$$

Ahora se calcula el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - 4 = 3x^2 - 4 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

3. Sea $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x$, obtener $f'(x)$ mediante la definición.

Solución. Se emplea directamente la definición:

$$f(x+\Delta x)=\frac{(x+\Delta x)^3}{3}+2(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{(x+\Delta x)^3}{3}+2(x+\Delta x)-\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)$$

$$\Delta y=\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{3}+2x+2\Delta x-\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\frac{1}{3}\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)+2\right)\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{3}\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)+2=\frac{3x^2}{3}+2 \quad \therefore \quad f'(x)=x^2+2$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

4. Obtener la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$, empleando la definición.

Solución . De la definición de derivada se tiene que $\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; entonces;

$$f(x+h)=\sqrt{x+h}$$

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

5. Determinar la derivada de la siguiente función $y=\sqrt{1+x}$ mediante la definición de derivada.

Solución. Se usará la definición de derivada que es: $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

De donde:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{1+x+\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1+x+\Delta x}-\sqrt{1+x}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x+\Delta x}-\sqrt{1+x}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x+\Delta x}-\sqrt{1+x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+x+\Delta x-1-x}{\Delta x\left(\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

6. Determinar $f'(x)$ para $y = f(x) = \sqrt{x-2}$ utilizando la definición:

Solución. De la definición de derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{(x+\Delta x)-2}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \sqrt{(x+\Delta x)-2}-\sqrt{x-2}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-2}-\sqrt{x-2}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-2}-\sqrt{x-2}}{\Delta x}$$

Se multiplican denominador y numerador por $\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}}$ y se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-2}-\sqrt{x-2}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)-2\right]-(x-2)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{\Delta x- 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)-2}+\sqrt{x-2}} \quad \therefore \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

7. Obtener la derivada de la siguiente función por medio de la definición.

$$f(x) = \sqrt{3-2x}$$

Solución. De la definición de derivada: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3-2(x+h)} - \sqrt{3-2x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3-2(x+h)} - \sqrt{3-2x}\right)\left(\sqrt{3-2(x+h)} + \sqrt{3-2x}\right)}{h\left(\sqrt{3-2(x+h)} + \sqrt{3-2x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[3-2(x+h)]-(3-2x)}{h\left(\sqrt{3-2(x+h)} + \sqrt{3-2x}\right)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3-2x-2h-3+2x}{h\left(\sqrt{3-2(x+h)} + \sqrt{3-2x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h\left(\sqrt{3-2(x+h)} + \sqrt{3-2x}\right)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{\sqrt{3-2(x+h)} + \sqrt{3-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{3-2x} + \sqrt{3-2x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} \quad \therefore \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

8. Sea $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ y $a \neq 0$. Obtener $f'(a)$ mediante la definición.

Solución. De la definición de derivada: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x-a}$

Se expresa el límite como: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3}$

Se factoriza el denominador como diferencia de cubos y:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$$

Finalmente se simplifican términos y se aplica el límite que conduce a la derivada:

$$f'(a) = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} \quad \therefore \quad f'(a) = \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}$$

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ

9. Obtener la derivada de la siguiente función por medio de la definición $f(x)=\sqrt[3]{5x^2-1}$

Solución. De la definición de derivada: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}-\sqrt[3]{5x^2-1}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}-\sqrt[3]{5x^2-1}\right)\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^2-1-\left(5x^2-1\right)}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^2-1-5x^2+1}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5\left(x^2+2xh+h^2\right)-5x^2}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5x^2+10xh+5h^2-5x^2}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{10xh+5h^2}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(10x+5h)}{h\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{10x+5h}{\left[\left(\sqrt[3]{5(x+h)^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5(x+h)^2-1\right)\left(5x^2-1\right)}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\frac{10x}{\left[\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2+\sqrt[3]{\left(5x^2-1\right)^2}+\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)^2\right]}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{10x}{3\sqrt[3]{\left(5x^2-1\right)^2}}$$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

10. Obtener la derivada de la siguiente función a través de la definición:

$$y=\frac{1+x}{1-x}$$

Solución. Se aplica la definición mediante los cuatro pasos conocidos y se llega a:

$$y=\frac{1+x}{1-x}$$

$$y+\Delta y=\frac{1+\left(x+\Delta x\right)}{1-\left(x+\Delta x\right)}=\frac{1+x+\Delta x}{1-x-\Delta x}$$

$$\Delta y=\frac{1+x+\Delta x}{1-x-\Delta x}-\frac{1+x}{1-x}$$

$$\Delta y=\frac{\left(1+x+\Delta x\right)\left(1-x\right)-\left(1+x\right)\left(1-x-\Delta x\right)}{\left(1-x-\Delta x\right)\left(1-x\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1+x+\Delta x-x-x^2-x\Delta x-\left(1-x-\Delta x+x-x^2-x\Delta x\right)}{\Delta x\left(1-x-\Delta x\right)\left(1-x\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1+\Delta x-x^2-x\Delta x-1+\Delta x+x^2+x\Delta x}{\Delta x\left(1-x-\Delta x\right)\left(1-x\right)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x\left(1-x-\Delta x\right)\left(1-x\right)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\left(1-x-\Delta x\right)\left(1-x\right)}\quad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\left(1-x\right)^2}$$

LOS COORDINADORES

11. Obtener la derivada de la siguiente función empleando la definición.

$$y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

Solución. Se incrementa x en Δx tal que este incremento corresponde a un incremento de la función en Δy.

$$y+\Delta y=\frac{1}{\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}}$$

Se resta al valor final el inicial y queda una expresión para Δy.

$$y+\Delta y-y=\frac{1}{\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\quad\Rightarrow\quad\Delta y=\frac{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}}{\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}}$$

Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del numerador:

$$\Delta y=\frac{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}}{\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}}{\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}}$$

$$\Delta y=\frac{9-x^2-9+\left(x+\Delta x\right)^2}{\left(\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\right)}$$

$$\Delta y=\frac{9-x^2-9+x^2+2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2}{\left(\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\right)}$$

$$\Delta y=\frac{2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2}{\left(\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\right)}$$

De donde $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2}{\left(\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\right)\Delta x}$

Al simplificar: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x+\Delta x}{\left(\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-\left(x+\Delta x\right)^2}\right)}$

Finalmente se calcula el límite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}\sqrt{9-x^2}\left(\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-x^2}\right)}\quad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\left(9-x^2\right)\left(2\sqrt{9-x^2}\right)}=\frac{x}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

12. Obtener la derivada de la función $f(x)=\cos x$, empleando la definición.

Solución. De la definición de derivada se tiene que $\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, entonces:

$$f(x+h)=\cos\,(x+h)$$

$$f(x+h)-f(x)=\cos\,(x+h)-\cos\,(x)$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-sen\ x\ sen\ h-\cos x}{h}$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-sen\ x\ sen\ h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{sen\ x\ sen\ h}{h}$$

$$\frac{df}{dx}=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}-senx\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sen\ h}{h}=(\cos x)(0)-(sen\ x)(1)$$

Por lo tanto: $\frac{df}{dx}=-sen\ x$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

13. Derivar la siguiente expresión: $N(t)=(5t-4)^{-2}$.

Solución. Se hace $u=5t-4 \quad \Rightarrow \quad N(u)=u^{-2}$ y se emplea la regla de la cadena

$$\frac{dN}{dt}=\frac{dN}{du}\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dN}{du}=-2u^{-3} \quad ; \quad \frac{du}{dt}=5 \quad ; \quad \frac{dN}{dt}=-2\left(5t-4\right)^{-3}\left(5\right) \Rightarrow \frac{dN}{dt}=-10\left(5t-4\right)^{-3} \quad \therefore \quad \frac{dN}{dt}=-\frac{10}{\left(5t-4\right)^{3}}$$

También se podría haber realizado de manera directa como:

$$\frac{dN}{dt}=-2\left(5t-4\right)^{-3}\left(5\right) \quad \therefore \quad \frac{dN}{dt}=-\frac{10}{\left(5t-4\right)^{3}}$$

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

14. Obtener $\frac{dr}{dm}$ de la siguiente función $r=\left(\frac{3(m-1)}{m+1}\right)^{2}$.

Solución. Por la regla de la cadena:

$$u=\left(\frac{3(m-1)}{m+1}\right)$$

$$y=(u)^{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dm}=2u\,\frac{du}{dm}$$

$$\frac{du}{dm}=\frac{(m+1)(3)-3(m-1)}{(m+1)^{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dm}=\frac{6}{(m+1)^{2}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dr}{dm}=2\left(\frac{3(m-1)}{m+1}\right)\frac{6}{(m+1)^{2}}=\frac{36(m-1)}{(m+1)^{3}}$$

De manera directa se puede obtener la derivada como sigue:

$$r=\left(\frac{3m-3}{m+1}\right)^{2}$$

$$\frac{dr}{dm}=2\left(\frac{3m-3}{m+1}\right)\left[\frac{(m+1)(3)-(3m-3)(1)}{(m+1)^{2}}\right] \quad ; \quad \frac{dr}{dm}=2\left(\frac{3m-3}{m+1}\right)\frac{6}{(m+1)^{2}} \quad \therefore \quad \frac{dr}{dm}=\frac{36(m-1)}{(m+1)^{3}}$$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

15. Determinar $f\,'(x)$ para $f(x)=\left(7x+\sqrt{x^{2}+6}\right)^{4}$.

Solución. Se procede de manera semejante con la regla de la cadena:

$$f'(x)=4\left(7x+\sqrt{x^2+6}\right)^3 D_x\left(7x+\sqrt{x^2+6}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=4\left(7x+\sqrt{x^2+6}\right)^3\left[D_x(7x)+D_x\left(\sqrt{x^2+6}\right)\right]$$

$$\therefore \quad f'(x)=4\left(7x+\sqrt{x^2+6}\right)^3\left[7+\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}\right]$$

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ

16. Derivar la siguiente expresión: $-x^2+2xy+6x+3y-3=0$.

Solución. Se despeja la variable dependiente y;

$$2xy+3y=x^2-6x+3 \quad \Rightarrow \quad (2x+3)y=x^2-6x+3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x^2-6x+3}{2x+3}$$

De donde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+3)(2x-6)-\left(x^2-6x+3\right)(2)}{(2x+3)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4x^2-6x-18-2x^2+12x-6}{(2x+3)^2} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x^2+6x-24}{(2x+3)^2}$$

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

17. Obtener la derivada de $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$.

Solución. $$y'=\frac{2x\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}\dfrac{d}{dx}(2x)}{(2x)^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{2x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)-2\sqrt{x}}{4x^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{4x^2}$$

$$y'=\frac{-\sqrt{x}}{4x^2} \quad \therefore \quad y'=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

18. Obtener la segunda derivada de y con respecto a x de la función:

$$y=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$$

Solución. $y=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \quad \therefore \quad y'' = -\frac{1}{8x\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

19. Calcular la derivada de $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$.

Solución. $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{9-x^2} - x^2\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\right)}{9-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}\right) + x^3}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\left(9-x^2\right) + x^3}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{18x - 2x^3 + x^3}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{18x - x^3}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

20. Obtener la derivada de $f(x) = \tan x$

Solución. Como $\tan x = \dfrac{sen\ x}{\cos x}$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - sen\ x(-sen\ x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x$$

Luego, si $f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

21. Obtener la derivada de $f(x) = \csc x$

Solución. Como $\csc x = \dfrac{1}{senx}$

$$\frac{d(\csc x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sen\ x}\right)=\frac{(sen\ x)(0)-(1)(\cos\ x)}{sen^2 x}=\frac{-\cos\ x}{sen^2 x}=\frac{-\cos\ x}{sen\ x}\cdot\frac{1}{sen\ x}$$

$$\frac{d(\csc x)}{dx}=-\cot x\csc\ \ x$$

Luego $f(x)=\csc x \quad \therefore \quad f'(x)=-\csc x\cot x$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

22. Derivar respecto a x, la siguiente expresión: $y=sen\ nx\ sen^n x$

Solución. $\frac{dy}{dx}=sen\ n\,x\ \frac{d}{dx}\ (senx)^n+sen^n x\ \frac{d}{dx}\ sen\ n\,x$; $\frac{dy}{dx}=(sen\ n\,x)\left(n\,sen^{n-1}x\right)\cos x+n\,sen^n x\cos n\,x$

$$\frac{dy}{dx}=nsen^{n-1}x\left(sen\ nx\ \cos x+senx\ \cos nx\right) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\left(nsen^{n-1}x\right)sen\left(n+1\right)x$$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

23. Obtener la derivada de $y=sen\,x\cos x\tan x$

Solución. $y'=senx\cos x\frac{d}{dx}\tan x+\tan x\frac{dy}{dx}(senx\ \cos x) \quad \Rightarrow \quad y'=senx\ \cos x\ \sec^2 x+\tan x\left(-sen^2 x+\cos^2 x\right)$

$$y'=sen\ x\cos x\sec^2 x-sen^2 x\tan x+\cos^2 x\tan x$$

$$y'=\frac{senx\cos x}{\cos^2 x}-\tan x\ sen^2 x+\tan x\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad y'=\tan x\left(1-sen^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$y'=\tan x\left(2\cos^2 x\right) \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{2senx\ \cos^2 x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y'=2senx\ \cos x \quad \therefore \quad y'=sen2x$$

También se pudo haber obtenido la derivada como

$$y=senx\ \cos x\ \tan x \quad ; \quad y=\frac{senx\ \cos x\ senx}{\cos x} \quad ; \quad y=sen^2 x \quad ; \quad y'=2senx\ \cos x \quad \therefore \quad y'=sen2x$$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

24. Obtener la derivada de $y=\cos^2 x\ \ senx$.

Solución. $y'=\cos^2 x\frac{d}{dx}(senx)+senx\frac{d}{dx}(\cos^2 x) \quad \Rightarrow \quad y'=\cos^2 x(\cos x)+senx(2\cos x(-senx))$

$$y'=\cos^3 x-2sen^2 x\cos x$$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

25. Obtener la derivada de $y = x^2 ang\tan 2x$.

Solución. $y' = x^2 \frac{d}{dx} ang\tan 2x + ang\tan 2x \frac{d}{dx} x^2$

$$y' = x^2\left(\frac{2}{1+4x^2}\right) + ang\tan 2x(2x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x^2}{1+4x^2} + 2x\ ang\tan 2x$$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

26. Para la función $y = \frac{1+\cot x}{\cos x}$, calcular $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$

Solución. $y = \frac{1+\cot x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cot x}{\cos x} = \sec x + \left(\frac{\cos x}{senx} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \sec x + \csc x$

$$y = \sec x + \csc x \quad \Rightarrow \quad y' = \sec x \tan x - \csc x \cot x$$

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad y' = \sqrt{2}\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \quad \therefore \quad y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

27. Obtener la derivada de $y = \tan\sqrt{4x^2 - 1}$

Solución. $\frac{dy}{dx} = \left(\sec^2\sqrt{4x^2-1}\right)\left(\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-1}}\right) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x\sec^2\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{4x^2-1}}$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

28. Derivar la siguiente función: $y = \sqrt[3]{\cos^2 3x}$

Solución. Esta función también se puede expresar como $y = \left(\cos^2 3x\right)^{\frac{1}{3}}$, la que se deriva como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\cos^2 3x\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(2\cos 3x\right)\left(-sen3x\right)(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2sen3x\cos 3x}{\left(\cos^2 3x\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2sen3x}{\cos^{\frac{1}{3}} 3x}$$

Otra forma de obtener esta derivada es si se maneja algebraicamente la función

$$y=\cos^{\frac{2}{3}}3x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}3x\cdot\left(-3sen3x\right) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2sen3x}{\cos^{\frac{1}{3}}3x}$$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

29. Derivar la siguiente función: $y=\sqrt{1+\sqrt{\tan(x-1)}}$.

Solución. La función se puede escribir también como:

$$y=\left[1+\tan^{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[1+\tan^{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\cdot\sec^{2}\left(x-1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sec^{2}\left(x-1\right)}{4\sqrt{1+\sqrt{\tan\left(x-1\right)}}\sqrt{\tan\left(x-1\right)}}$$

Como $y=\sqrt{1+\sqrt{\tan(x-1)}}$, se tiene finalmente que: $\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^{2}\left(x-1\right)}{4y\sqrt{\tan(x-1)}}$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

30. Sea $y=sen\,t$, $t=\sqrt{p}$, $p=\pi^{2}\tan q$ y $q=x+\frac{\pi}{4}$, obtener $\frac{dy}{dx}$ para $x=0$.

Solución. Se expresa "y" en términos de "x":

$$y=sen\,t \quad \Rightarrow \quad y=sen\sqrt{p} \quad \Rightarrow$$

$$y=sen\sqrt{\pi^{2}\tan q} \quad \Rightarrow \quad y=sen\sqrt{\pi^{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad y=sen\,\pi\sqrt{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Se deriva con respecto a x :

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(\pi\sqrt{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(\frac{\pi\sec^{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}}\right)$$

En $x=0$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\cos\left(\pi\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(\frac{\pi\sec^{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}}\right) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\cos\pi\sqrt{1}\left(\frac{\pi\left(2\right)}{2\sqrt{1}}\right) \quad \therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\pi$$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

31. Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = angsen\sqrt{1-x}$$

Solución. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-(1-x)}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

LOS COORDINADORES

32. Derivar

$$f(x) = ang\tan\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Solución. $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}{\dfrac{x+1}{x}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

LOS COORDINADORES

33. Calcular la derivada de la función:

$$y = ang\csc\frac{x^2}{1-x^2}$$

Solución. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{(1-x^2)2x - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2}}{\dfrac{x^2}{1-x^2}\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)^2 - 1}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2\dfrac{x^2}{1-x^2}\sqrt{\dfrac{x^4-(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2(1-x^2)\sqrt{\dfrac{x^4-1+2x^2-x^4}{(1-x^2)^2}}} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}} \quad ; \quad x > \frac{1}{2}$$

LOS COORDINADORES

34. Por derivación implícita obtener $\frac{dy}{dx}$ para $x^3 + y^3 = 8xy$.

Solución. $3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8x\frac{dy}{dx} + 8y \quad \Rightarrow \quad (3y^2 - 8x)\frac{dy}{dx} = 8y - 3x^2 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

35. Demostrar que para la expresión

$$\frac{Ax + By}{Cx + Dy} = K \quad \forall \quad A,\ B,\ C,\ D,\ K \in \mathbb{R}$$

se cumple que $xy' = y$.

Solución. Se deriva implícitamente la expresión dada y:

$$\frac{(Cx + Dy)\left(A + B\frac{dy}{dx}\right) - (Ax + By)\left(C + D\frac{dy}{dx}\right)}{(Cx + Dy)^2} = 0$$

$$(Cx + Dy)\left(A + B\frac{dy}{dx}\right) - (Ax + By)\left(C + D\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$A(Cx + Dy) + B(Cx + Dy)\frac{dy}{dx} - C(Ax + By) - D(Ax + By)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$B(Cx + Dy)\frac{dy}{dx} - D(Ax + By)\frac{dy}{dx} = C(Ax + By) - A(Cx + Dy)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C(Ax + By) - A(Cx + Dy)}{B(Cx + Dy) - D(Ax + By)} = \frac{ACx + BCy - ACx - ADy}{BCx + BDy - ADx - BDy}$$

$$\frac{dy}{dx} == \frac{(BC - AD)y}{(BC - AD)x} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad xy' = y$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

36. Obtener la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de:

$$x^2 + xy = -y^2$$

Solución. $2x + y + x\frac{dy}{dx} = -2y\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y \quad \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

Se deriva nuevamente y: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(x+2y)\left(-2-\dfrac{dy}{dx}\right)+(2x+y)\left(1+2\dfrac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2x-x\dfrac{dy}{dx}-4y-2y\dfrac{dy}{dx}+2x+4x\dfrac{dy}{dx}+y+2y\dfrac{dy}{dx}}{(x+2y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3x\dfrac{dy}{dx}-3y}{(x+2y)^2}$$

ahora se sustituye el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3x\left(\dfrac{-2x-y}{x+2y}\right)-3y}{(x+2y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{-6x^2-3xy-3xy-6y^2}{x+2y}}{(x+2y)^2}\quad\therefore\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-6x^2-6xy-6y^2}{(x+2y)^3}$$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

37. Determinar y'' para $y^4+3y-4x^3=5x+1$

Solución. Se deriva implícitamente la ecuación y se tiene:

$$4y^3y'+3y'-12x^2=5\quad\Rightarrow\quad(4y^3+3)y'=12x^2+5\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{12x^2+5}{4y^3+3}$$

Se deriva nuevamente y' : $y''=D_x(y')=\dfrac{(4y^3+3)D_x(12x^2+5)-(12x^2+5)D_x(4y^3+3)}{(4y^3+3)^2}$

$$y''=\frac{(4y^3+3)(24x)-(12x^2+5)(12y^2y')}{(4y^3+3)^2}$$

ahora se sustituye el valor de y' de donde se obtiene:

$$y''=\frac{(4y^3+3)(24x)-(12x^2+5)(12y^2)\left(\dfrac{12x^2+5}{4y^3+3}\right)}{(4y^3+3)^2}\quad\Rightarrow\quad y''=\frac{(4y^3+3)^2(24x)-(12x^2+5)^2(12y^2)}{(4y^3+3)^3}$$

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ

38. Dada la expresión $3\cos^2(x+y)=2$, demostrar que $\dfrac{dy}{dx}=-1$.

Solución. Se obtiene la derivada por derivación implícita:

$$-6\cos(x+y)sen(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=0\quad\Rightarrow\quad-6\cos(x+y)sen(x+y)\frac{dy}{dx}=6\cos(x+y)sen(x+y)$$

Por lo tanto, $\dfrac{dy}{dx}=-1$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

39. Realizar la derivada implícita de:

a) $\tan y = xy$
b) $a\cos^2(x+y) = b$

Solución.

a) $\left(\sec^2 y\right)y' = xy' + (1)y \quad \Rightarrow \quad \left(\sec^2 y\right)y' = xy' + y \quad \Rightarrow \quad \left(\sec^2 y\right)y' - xy' = y$

$$y'\left(\sec^2 y - x\right) = y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{\sec^2 y - x}$$

b) $2a\left[\cos(x+y)\right]\left[-sen(x+y)\right][1+y'] = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{sen(x+y)\cos(x+y)}{-sen(x+y)\cos(+y)} \quad \therefore \quad y' = -1$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

40. Obtener $\dfrac{dy}{dx}$ de: $sen^4(x+y) + \cos\left(x^2y^3\right) = 7$

Solución. $4sen^3(x+y)\cos(x+y)\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) - \left(3x^2y^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy^3\right)sen\left(x^2y^3\right) = 0$

$$\left(4sen^3(x+y)\cos(x+y) - 3x^2y^2sen\left(x^2y^3\right)\right)\frac{dy}{dx} = 2xy^3sen\left(x^2y^3\right) - 4sen^3(x+y)\cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^3sen\left(x^2y^3\right) - 4sen^3(x+y)\cos(x+y)}{4sen^3(x+y)\cos(x+y) - 3x^2y^2sen\left(x^2y^3\right)}$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

41. Derivar con respecto a x la siguiente función: $\dfrac{y}{x} = 1 + \csc\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Solución. $\dfrac{xy'-y}{x^2} = -\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{y-xy'}{y^2}\right)$

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = -\left(\frac{1}{y}\right)\csc\left(\frac{x}{y}\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{xy'}{y^2}\right)\csc\left(\frac{x}{y}\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x} - \left(\frac{x}{y^2}\right)\csc\left(\frac{x}{y}\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)\right)y' = \frac{y}{x^2} - \left(\frac{1}{y}\right)\csc\left(\frac{x}{y}\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$y' = \frac{\dfrac{y}{x^2} - \left(\dfrac{1}{y}\right)\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)}{\dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{x}{y^2}\right)\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)}$$

se multiplican numerador y denominador por $\dfrac{y}{x}$ y se tiene que:

$$y' = \frac{\left(\dfrac{y}{x^2} - \left(\dfrac{1}{y}\right)\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{x}{y^2}\right)\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \frac{\left(\dfrac{y}{x^2} - \left(\dfrac{1}{y}\right)\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{y}{x^2} - \left(\dfrac{1}{y}\right)\csc\left(\dfrac{x}{y}\right)\cot\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)} \quad \therefore \quad y' = \frac{y}{x}$$

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

42. Obtener $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para la función dada por $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$.

Solución. De la derivación en forma paramétrica se sabe que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{t^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{3t^{\frac{2}{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}}$$

ahora se deriva nuevamente para obtener la segunda derivada; así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\dfrac{2}{18}t^{-\frac{7}{6}}}{\dfrac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}} \quad \therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}t^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{t^2}}$$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

43. Dadas las siguientes ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{t^3}{4} \\ y = ang\tan t \end{cases}$

Obtener $\frac{dy}{dx}$ para el valor $y = \frac{\pi}{4}$.

Solución. $\frac{dx}{dt} = 2t + \frac{3t^2}{4}$ y $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2 + 1}$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t^2+1}}{2t + \frac{3t^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{\left(t^2+1\right)\left(8t+3t^2\right)}$$

Para $y = \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} = ang\tan t \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{4} = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{4}{2(11)} \quad \therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{2}{11}$$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

44. Obtener la derivada de la función:

$$y = e^{2x\sqrt{6-x}}$$

Solución. $\frac{dy}{dx} = e^{2x\sqrt{6-x}}\left[2x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} + \sqrt{6-x}\,(2)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{2x\sqrt{6-x}}\left[\frac{-x+2(6-x)}{\sqrt{6-x}}\right]$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x\sqrt{6-x}}\left(\frac{-x+12-2x}{\sqrt{6-x}}\right) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(12-3x)e^{2x\sqrt{6-x}}}{\sqrt{6-x}}$$

LOS COORDINADORES

45. Obtener la derivada de la siguiente función para $x = -1$:

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

Solución. $y' = e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{-1}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$

$$\left. y' \right|_{x=-1} = \frac{1}{(-1)^2 e^{\frac{1}{-1}}} \quad \therefore \quad \left. y' \right|_{x=-1} = e$$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

46. Determinar la derivada de la función:

$$f(x) = e^{sen^2(1-3x^2)}$$

Solución. $f'(x) = e^{sen^2(1-3x^2)} 2sen(1-3x^2)\cos(1-3x^2)\cdot(-6x) \quad \therefore \quad f'(x) = -6x\, e^{sen^2(1-3x^2)} sen2(1-3x^2)$

LOS COORDINADORES

47. Derivar la función:

$$y = 5^{ang\cot\sqrt{x}}$$

Solución. $\dfrac{dy}{dx} = 5^{ang\cot\sqrt{x}} \ln 5 \left(-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1} \right) \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5^{ang\cot\sqrt{x}}}{2\left(\sqrt{x}\right)(x+1)} \ln 5$

LOS COORDINADORES

48. Calcular la derivada de la función:

$$e^x \cos y + e^y senx = 1$$

Solución. $-e^x\, seny\, \dfrac{dy}{dx} + e^x \cos y + e^y \cos x + e^y sen\, x \dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\left(-e^x seny + e^y senx\right)\frac{dy}{dx} = -e^x \cos y - e^y \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x \cos y + e^y \cos x}{-e^x seny + e^y senx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cos y + e^y \cos x}{e^x seny - e^y senx}$$

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

49. Derivar la siguiente función:

$$y = \ln \frac{2 - 3x}{4 + 7x}$$

Solución. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{(4+7x)(-3)-(2-3x)(7)}{(4+7x)^2}}{\dfrac{2-3x}{4+7x}} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-12-21x-14+21x}{(4+7x)(2-3x)} \quad\therefore\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{26}{8+2x-21x^2}$

LOS COORDINADORES

50. Obtener la derivada de la función:

$$y=\ln\sec\sqrt{2+x^2}$$

Solución. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sec\sqrt{2+x^2}\tan\sqrt{2+x^2}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}}{\sec\sqrt{2+x^2}} \quad\therefore\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\tan\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$

LOS COORDINADORES

51. Determinar la derivada de

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Solución. Se aplica la derivada de una función dentro de una raíz cuadrada y:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\dfrac{(1+\cos x)(senx)-(1-\cos x)(-senx)}{(1+\cos x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}}}{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{senx+senx\cos x+senx-senx\cos x}{2(1+\cos x)^2\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$f'(x)=\frac{2senx}{2(1+\cos x)(1-\cos x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{senx}{1-\cos^2 x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{senx}{sen^2 x} \quad\therefore\quad f'(x)=\csc x$$

Otra forma de obtener la derivada es mediante las propiedades de la función logarítmica. Así:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{2}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)\right] \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{senx}{1-\cos x}-\frac{-senx}{1+\cos x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{senx+senx\cos x+senx-senx\cos x}{1-\cos^2 x}\right) \quad\therefore\quad f'(x)=\csc x$$

LOS COORDINADORES

52. Obtener la derivada de:

$$f(x) = \log \cot \frac{3}{x}$$

Solución. De manera directa se tiene que:

$$f'(x) = \frac{-\csc^2 \frac{3}{x} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right)}{\cot \frac{3}{x}} \log e \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \cdot \frac{-\frac{1}{sen^2 \frac{3}{x}}}{\frac{\cos \frac{3}{x}}{sen \frac{3}{x}}} \log e \quad \therefore \quad f'(x) = \frac{3}{x^2 sen \frac{3}{x} \cos \frac{3}{x}} \log e$$

LOS COORDINADORES

53. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x - \frac{6}{\sqrt{x}}$ en el punto $P(4, 9)$.

Solución. Se deriva y:

$$y' = 3 - \frac{\sqrt{x}(0) - 6\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow y' = 3 + \frac{3}{x\sqrt{x}}$$

se evalúa en el punto dado y se obtiene:

$$y'|_P = 3 + \frac{3}{4\sqrt{4}} = 3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$ que es la pendiente de la recta tangente en el punto dado.

mediante la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, se obtiene:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad (y - 9) = \frac{27}{8}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad 8y - 72 = 27x - 108 \quad \therefore \quad 27x - 8y - 36 = 0$$

ALUMNA: DANIELA GARCÍA RUBÍ

54. Sea $f(x) = (x^2 - 1)^4$. Determinar la pendiente de la recta normal a f en el punto $P\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Solución. Aplicando la derivada a la función f se tiene: $f'(x) = 4(x^2 - 1)^3 (2x) = 8x(x^2 - 1)^3$

La pendiente m_T de la recta tangente en P es: $m_T = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{16}$

Por lo tanto la pendiente de la recta normal es: $m_N = \frac{-1}{m_T} = \frac{-1}{-\frac{27}{16}} = \frac{16}{27} \quad \therefore \quad m_N = \frac{16}{27}$

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ

55. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las curvas siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el punto $(-2, 5)$.
b) $y = \tan 2x$ en el punto $(0, 0)$.

Solución.

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 4 \quad ; \quad m_T = 3x^2 + 4x - 4 \quad ; \quad m_T\big|_{(-2,5)} = 0$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - y_0 = m_T\left(x - x_0\right) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = 0 \quad \therefore \quad y = 5$$

Ecuación de la normal:

$$y - y_0 = m_N\left(x - x_0\right) \quad ; \quad m_N = -\frac{1}{m_T} \quad \Rightarrow \quad m_N = -\frac{1}{0} \text{ no existe. Entonces } \quad x = -2$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sec^2 2x \quad ; \quad m_T = 2\sec^2 2x \quad ; \quad m_T\big|_{(0,0)} = 2$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - y_0 = m_T\left(x - x_0\right) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = 2\left(x - 0\right) \quad \therefore \quad y = 2x$$

Ecuación de la recta normal:

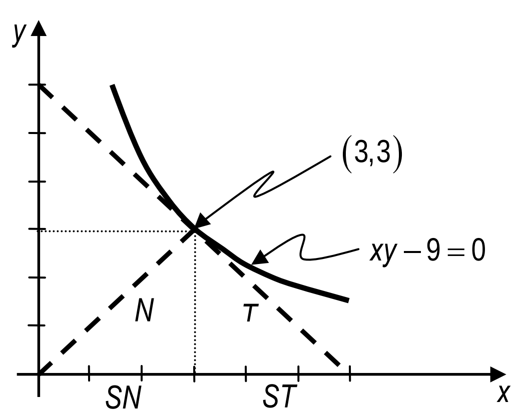
$$y - y_0 = m_N\left(x - x_0\right) \quad ; \quad m_N = -\frac{1}{2} \quad ; \quad y - 0 = -\frac{1}{2}\left(x - 0\right) \quad \therefore \quad y = -\frac{x}{2}$$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

56. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal, así como las longitudes de la subtangente y la subnormal en el punto $P(3, 3)$, de la curva que tiene por ecuación:

$$xy - 9 = 0$$

Solución. La gráfica de la curva, con su tangente y su normal en el punto dado son:



Ecuación de la recta tangente: Se despeja la variable "y" y se deriva:

$$y=\frac{9}{x} \;\; ó \;\; y=9x^{-1} \;\; \Rightarrow \;\; y'=-9x^{-1-1}=-9x^{-2} \;\; \Rightarrow \;\; y'\big|_P=-9(3)^{-2}=-\frac{9}{(3)^2}=-1 \;\; ; \;\; m_T=-1$$

la ecuación de la recta tangente es:

$$y-y_o=m_T\left(x-x_o\right) \;\; \Rightarrow \;\; y-3=-1(x-3) \;\; \Rightarrow \;\; y-3=-x+3 \;\; \therefore \;\; x+y-6=0$$

Ecuación de recta la normal: $m_N=-\dfrac{1}{m_T}$; $m_N=-\dfrac{1}{-1} \;\Rightarrow\; m_N=1$

Entonces, la ecuación de la normal es:

$$y-3=1(x-3) \;\; ; \;\; y-x=0 \;\; ó \;\; x-y=0$$

Las longitudes de la normal y la tangente, así como las de la subtangente y la subnormal, son, de acuerdo con la figura:

$$N=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2} \;\; ; \;\; T=3\sqrt{2} \;\; ; \;\; ST=3=SN$$

ALUMNA: RHAMID HORTENSIA RODRÍGUEZ DE LA TORRE

57. Determinar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva de ecuación $y=ang\cos 3x$, en el punto $P_1\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Solución. Primero se obtendrá la derivada de la función.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \;\; \Rightarrow \;\; m_T=\frac{dy}{dx}\bigg|_{P_1}$$

de donde $y-y_1=m(x-x_1)$ y para $P_1\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$; $m_T=-\dfrac{3}{\sqrt{1}}=-3$ por lo que la ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{\pi}{2}=-3\left(x-0\right) \;\; \Rightarrow \;\; y-\frac{\pi}{2}=-3x \;\; \Rightarrow \;\; 3x+y-\frac{\pi}{2}=0 \;\; \Rightarrow \;\; 6x+2y-\pi=0$$

$$m_N=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{m_T} \;\; \Rightarrow \;\; m_N=\frac{1}{3}$$

entonces la ecuación de la recta normal es:

$$y-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}(x-0) \;\; \Rightarrow \;\; 3y-\frac{3\pi}{2}=x \;\; \Rightarrow \;\; x-3y+\frac{3\pi}{2}=0 \;\; \therefore \;\; 2x-6y+3\pi=0$$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

58. Obtener las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva de ecuación $y=e^{\frac{x}{3}}$, en el punto $P_1(3,\ e)$.

Solución. Primero se obtiene la derivada de la función.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} \quad \Rightarrow \quad m_T=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_1} \quad ; \quad \text{para } P_1=(3,e) \quad m_T=\frac{e^{\frac{3}{3}}}{3}=\frac{e}{3}$$

y la ecuación de una recta esta dada por $y-y_1=m(x-x_1)$; $y-e=\frac{e}{3}(x-3)$

$$3y-3e=ex-3e \quad \therefore \quad ex-3y=0 \quad \text{ecuación de la recta tangente.}$$

Además $m_N=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{m_T} \quad \Rightarrow \quad m_N=-\frac{3}{e}$

$$y-e=-\frac{3}{e}(x-3) \quad \Rightarrow \quad ey-e^2=-3x+9 \;\therefore\; 3x+ey-e^2-9=0 \quad \text{ecuación de la recta normal.}$$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

59. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas dadas, en el punto $t=2$.

$$x=\frac{t}{1+t} \quad ; \quad y=1-t^2$$

Solución. Para $t=2$; $x=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$ y $y=1-(2)^2=-3$

Para las ecuaciones paramétricas se sabe que: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dy}{dt}=-2t \quad ; \quad \frac{dx}{dt}=\frac{1+t-t}{(1+t)^2}=\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2t}{\frac{1}{(1+t)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=(-2t)(1+t)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-2t^3-4t^2-2t \quad \Rightarrow \quad m_T=-2t^3-4t^2-2t$$

$$m_T=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-2(2)^3-4(2)^2-2(2)=-36$$

Entonces la ecuación de la recta tangente es:

$$y-(-3)=-36\left(x-\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y+3=-36x+24 \quad \therefore \quad 36x+y=21$$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

60. Obtener los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal y donde es vertical. La función está expresada paramétricamente por:

$$x = 2 - t$$
$$y = 6 - t - 2\sqrt{4-2t}$$

Solución.

Para las ecuaciones paramétricas se sabe que: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

$\dfrac{dx}{dt} = -1$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = -1 + \dfrac{2}{\sqrt{4-2t}}$, entonces $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1+\frac{2}{\sqrt{4-2t}}}{-1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4-2t}}$

Para que la recta tangente sea horizontal:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{4-2t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{\sqrt{4-2t}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-2t} = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2t = 4$$
$$-2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Para que la recta tangente sea vertical: $\quad \sqrt{4-2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 2$

Se sustituye en x y y , se llega a:

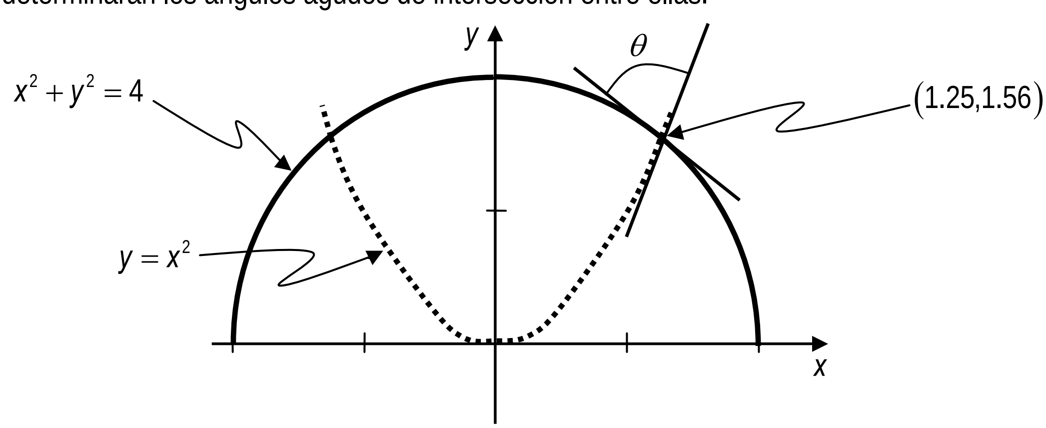
$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - 0 = 2 \quad ; \quad y = 6 - 0 - 2\sqrt{4-2(0)} = 2 \qquad \therefore \quad$ En $\quad P(2, 2) \quad$ la tangente es horizontal.

$t = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - 2 = 0 \quad ; \quad y = 6 - 2 - 2\sqrt{4-2(2)} = 4 \qquad \therefore \quad$ En $\quad Q(0,\ 4) \quad$ la tangente es vertical.

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

61. Calcular el valor del ángulo agudo de intersección entre las curvas $\quad y = x^2 \quad y \quad x^2 + y^2 = 4 \quad$ y trazar las curvas y los ángulos considerados.

Solución. Primero se grafican las curvas y en los puntos de intersección se trazan las tangentes, cuyas pendientes determinarán los ángulos agudos de intersección entre ellas.



Se obtienen las pendientes de las tangentes a las curvas dadas en el punto $\quad (1.25,1.56) \quad$ y:

$$y = x^2 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad ; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1.25,1.56)} = 2.5$$

$$x^2+y^2=4 \quad ; \quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad ; \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad ; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1.25.1.56)}=-0.8$$

mediante la fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas si se conocen sus pendientes, se tiene que:

$$\theta = ang\tan\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} \quad ; \quad \theta = ang\tan\frac{-0.8-2.5}{1+(-0.8)(2.5)} \quad \Rightarrow \quad \theta = ang\tan\frac{-3.3}{-1} \quad \therefore \quad \theta = 73.14^0$$

En el otro punto, en el segundo cuadrante, por simetría el ángulo agudo, es el mismo.

LOS COORDINADORES

62. Obtener el ángulo agudo θ de intersección entre las curvas de ecuaciones:

$$y = 3x^2+2x+1 \quad \text{y} \quad y = 2x^2+x+7$$

Solución. Las curvas se cortan en;

$$3x^2+2x+1=2x^2+x+7 \quad ; \quad 3x^2-2x^2+2x-x+1-7=0$$

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-3 \quad \text{y} \quad x_2=2$$

Con los puntos obtenidos, se determina la pendiente de las rectas tangentes a las curvas para x_1:

$$y_1 = 3x^2+2x+1 \quad ; \quad y_1{}'=6x+2 \quad \Rightarrow \quad y_1{}'(-3)=-18+2=-16 \quad \Rightarrow \quad m_1=-16$$

$$y_2 = 2x^2+x+7 \quad ; \quad y_2{}'=4x+1 \quad \Rightarrow \quad y_2{}'(-3)=-12+1 \quad \Rightarrow \quad m_2=-11$$

El ángulo de intersección entre las curvas está dado por:

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{-11+16}{1+(-16)(-11)}=\frac{5}{177}=0.028 \quad ; \quad \tan\theta=0.028 \quad \Rightarrow \quad \theta_1=1.618^0$$

Para $x_2=2$:

$$y_1 = 3x^2+2x+1 \quad ; \quad y_1{}'=6x+2 \quad \Rightarrow \quad y_1{}'(2)=12+2=14 \quad \Rightarrow \quad m_1=14$$

$$y_2 = 2x^2+x+7 \quad ; \quad y_2{}'=4x+1 \quad \Rightarrow \quad y_2{}'(2)=8+1 \quad \Rightarrow \quad m_2=9$$

El ángulo de intersección entre las curvas está dado por:

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{9-14}{1+(9)(14)}=\left|\frac{-5}{127}\right|=0.0394 \quad ; \quad \tan\theta=0.0394 \Rightarrow \theta_2=2.255^0$$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

63. Determinar el ángulo agudo θ de intersección entre las curvas de ecuaciones:

$$y_1=\sec x \qquad y_2=\csc x$$

en el punto de intersección del primer cuadrante.

Solución. Se debe obtener el punto de intersección:

$$\sec x=\csc x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos x}=\frac{1}{senx} \quad \Rightarrow \quad \frac{senx}{\cos x}=1 \quad \Rightarrow \quad \tan x=1$$

$$x = ang\tan(1) \quad \Rightarrow \quad x = 45° = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad y = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad ; \quad P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

Ahora se obtiene la pendiente de la recta tangente a cada curva en el punto de intersección:

$$\frac{dy_1}{dx} = \sec x \tan x \quad ; \quad m_1 = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)(1) = \sqrt{2}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\csc x \cot x \quad ; \quad m_2 = -\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sqrt{2}\right)(1) = -\sqrt{2}$$

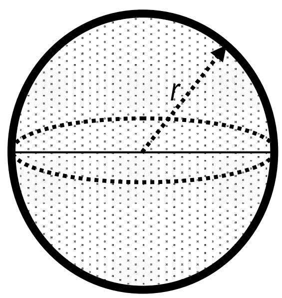
Se sabe que $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$; $\tan\theta = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1 + \left(\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1-2} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}$

$$\therefore \quad \theta = ang\tan\left(2\sqrt{2}\right) = 70.528°$$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

64. Un balón esférico pierde aire a razón constante de $2\ \dfrac{cm^3}{s}$. ¿Con qué rapidez decrece el radio del balón cuando su diámetro es de $1\,m$?

Solución. Una figura con el balón se muestra acontinuación:



De los datos proporcionados y de la gráfica, se tiene que $\dfrac{dv}{dt} = 2\ \dfrac{cm^3}{s}$ y $v = \dfrac{4}{3}\pi\ r^3$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} \quad ; \quad \frac{dv}{dr} = 4\pi r^2 \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

De los datos dados $D = 1\,m$ y $r = 50\ cm$, entonces;

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(50)^2}2 = \frac{1}{2\pi(2500)} = \frac{1}{5000\pi}$$

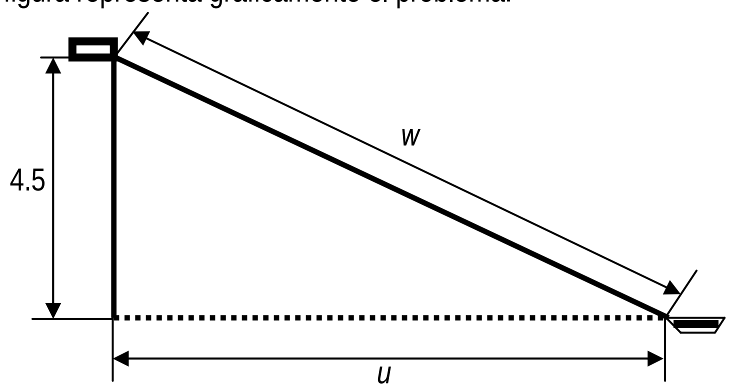
Por lo tanto, la rapidez a la que decrece el radio del balón cuando su diámetro es de $1\,m$ es:

$$\frac{dr}{dt} = 0.00006366\frac{cm}{s}$$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

65. Para aproximar un bote al muelle se emplea un cabrestante. La cuerda está atada al bote en un punto a $4.5\,m$ por debajo del cabrestante. Si éste tira de la cuerda a razón de $10\ \frac{m}{\min}$. Determinar la rapidez a la que se está aproximando el bote al muelle cuando falta un minuto para llegar a él.

Solución. La siguiente figura representa gráficamente el problema.



Las variables involucradas se relacionan mediante el teorema de Pitágoras, es decir: $w^2 = u^2 + 4.5^2$

Se deriva implícitamente con respecto al tiempo y: $2w\frac{dw}{dt} = 2u\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{w}{u}\frac{dw}{dt}$

De los datos se tiene que $\frac{dw}{dt} = 10\ \frac{m}{\min}$; además en $t = 1\min \quad \Rightarrow \quad w = 10\,m$

Entonces $u = \sqrt{10^2 - 4.5^2} \quad \Rightarrow \quad u \approx 8.93\,m$

Se sustituyen valores en $\frac{du}{dt}$ y:

$$\frac{du}{dt} = \frac{w}{u}\frac{dw}{dt} = \frac{10\,m}{8.93\,m}10\ \frac{m}{\min} \quad \therefore \quad \frac{du}{dt} \approx 11.2\ \frac{m}{\min}$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

66. Un tumor en el cuerpo de una persona es de forma esférica y cuando el radio del tumor es de $0.5\,cm$ éste crece a una taza de $0.001\,cm$ por día. Determinar la taza de crecimiento del volumen del tumor en ese tiempo. ¿Cuál es la taza de crecimiento del área de su superficie?

Solución. Se considera una esfera con radio igual a 0.5 cm y como se sabe $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

se tiene una taza de crecimiento de 0.001 cm por día; entonces $\frac{dr}{dt} = 0.001\frac{cm}{d}$

Por lo tanto si se deriva el volumen con respecto al tiempo, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} \quad y \quad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

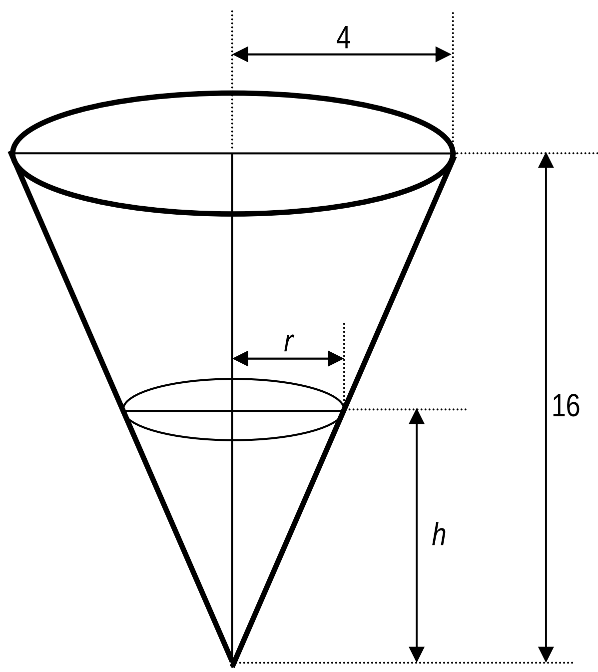
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$; al sustituir valores $\frac{dV}{dt} = 4\pi(0.25)(0.001) \quad \therefore \quad \frac{dV}{dt} \approx 0.00314\ \frac{cm^3}{d}$

Para calcular la taza de crecimiento del área de su superficie, se toma la expresión para calcular el área y se deriva. Así:

$$A = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 8\pi(0.5)(0.001) \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} \approx 0.01256 \frac{cm^2}{d}$$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA GUTIERREZ

67. A un tanque cónico de radio $R = 4\left[m\right]$ y altura $H = 16\left[m\right]$, como se muestra en la figura, le entra un volumen de agua a razón de $2\left[\frac{m^3}{\min}\right]$. Determinar la rapidez de cambio de la altura "h" del agua cuando ésta se encuentra a $5\left[m\right]$ del vértice.



Solución. La rapidez de cambio de la altura h, que es lo que se pide calcular, se puede expresar como:

$$\frac{dh}{dt}$$

para calcular el volumen de un cono se utiliza la expresión: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

para relacionar a las variables h y r, a partir de la figura, se usan triángulos semejantes. Luego:

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{h} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{4}$$

Se sustituye la relación anterior en la fórmula del volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{16} h \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{48}\pi h^3$$

Se deriva esta última expresión con respecto a h con lo que se obtiene: $\frac{dV}{dh} = \frac{1}{16}\pi h^2$

Y a partir de la regla de la cadena se establece que:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dh}{dt}=\frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}}$$

Como dato del problema se tiene que: $\frac{dV}{dt}=2\ \frac{m^3}{\min}$; luego $\frac{dh}{dt}=\frac{2}{\frac{1}{16}\pi h^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt}=\frac{32}{\pi h^2}$

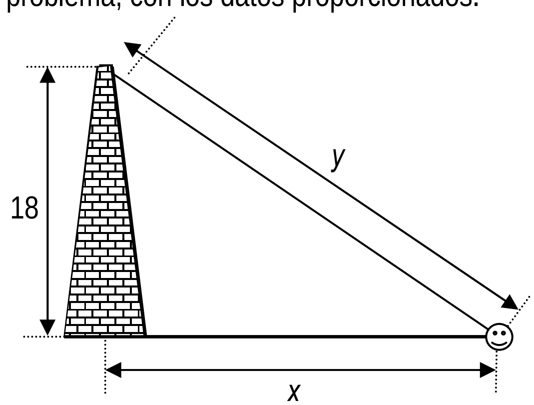
dado que la rapidez de cambio pedida es para una altura $h=5\ m$;

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}=\frac{32}{\pi\ (5)^2} \Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}=\frac{32}{25\pi} \Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}\approx 0.4074\ \frac{m}{\min}$$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

68. Un hombre camina hacia la base de una torre de $18\,m$ de altura a razón de $7.5\ \frac{km}{h}$. Determinar la rapidez de variación de la distancia con que se acerca al extremo superior de la torre cuando está a $24\ m$ de la base.

Solución. La figura modela este problema, con los datos proporcionados.



La rapidez de cambio de la distancia con que se acerca el hombre al extremo superior de la torre se puede expresar como: $\frac{dy}{dt}$. Se establece una relación entre las variables x y y por medio del teorema de Pitágoras, esto es, $y=\sqrt{(18)^2+x^2} \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{324+x^2}$

Se deriva la expresión anterior con respecto a x ; se obtiene $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{324+x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{324+x^2}}$

A partir de la regla de la cadena establecemos la siguiente relación: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

como dato del problema, se tiene que: $\frac{dx}{dt}=7.5\ \frac{km}{h}=7500\ \frac{m}{h}$

ahora se sustituye $\frac{dy}{dt}=\frac{x}{\sqrt{324+x^2}}$ y $\frac{dx}{dt}=7500\ \frac{m}{h}$ en $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{x}{\sqrt{324+x^2}}\right)(7500) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=\frac{7500\,x}{\sqrt{324+x^2}}$$

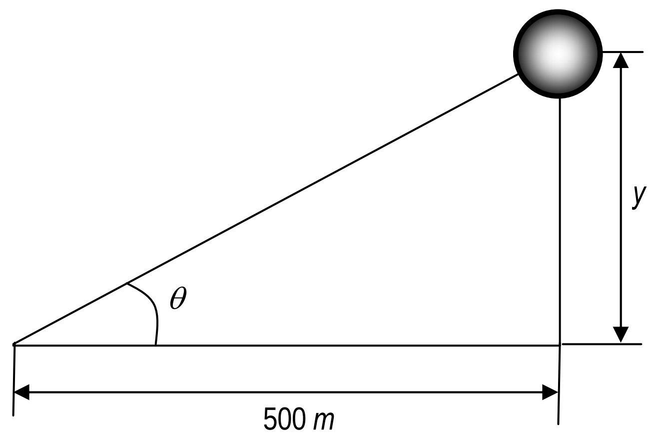
Dado que la rapidez de cambio pedida es para una distancia $x=24\ m$ de la base, entonces:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=24}=\frac{7500(24)}{\sqrt{324+(24)^2}}=\frac{180000}{\sqrt{324+576}}=\frac{180000}{\sqrt{900}}=\frac{180000}{30}=6000\ \frac{m}{h} \quad \therefore \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=24}=6\ \frac{km}{h}$$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

69. Un globo de aire caliente que se eleva verticalmente es rastreado por un localizador que se encuentra a $500\ m$ del punto del despegue medidos horizontalmente. En el instante de que el ángulo localizador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo se está incrementando a razón de $0.14\ \frac{rad}{\min}$. ¿Con qué velocidad se eleva el globo en ese instante?

Solución. La siguiente figura muestra en forma gráfica el problema:



De acuerdo con los datos proporcionados, $\frac{d\theta}{dt}=0.14\ \frac{rad}{\min}$; se tiene que determinar $\frac{dy}{dt}$

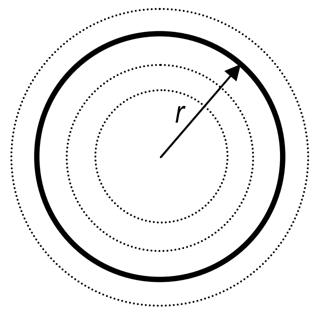
De la figura se tiene que $\tan\theta=\frac{y}{500}$; entonces se despeja "y" y se obtiene $\frac{dy}{dt}$; luego,

$$y=500\ \tan\theta \quad ; \quad \frac{dy}{dt}=500\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=500(\sec^2\frac{\pi}{4})(0.14) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dt}=140\ \frac{m}{\min}$$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA GUTIERREZ

70. Una piedra se deja caer a un estanque y produce ondas de agua que forman círculos concéntricos. El radio de una curva es de $40t$ centímetros a los t segundos. Calcular la rapidez de cambio del área del círculo en: $t=1s$; $t=2s$; $t=3s$.

Solución. Un modelo geométrico sería:



El radio viene dado por: $r = 40t\ cm$

Se deriva con respecto a t para obtener su variación: $\frac{dr}{dt} = 40\ \frac{cm}{s}$

Por otro lado, el área del círculo está dado por: $A = \pi r^2$

Se deriva implícitamente y se sustituyen valores, de donde:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 80\pi t \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 3200\pi t$$

La rapidez de cambio pedida es entonces;

$$\text{Para } t = 1s; \quad \frac{dA}{dt} = 3200\pi(1) = 3200\pi \ \frac{cm^2}{s}$$

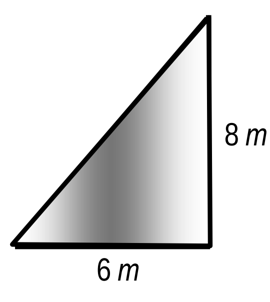
$$\text{Para } t = 2\,s; \quad \frac{dA}{dt} = 3200\pi(2) = 6400\pi \ \frac{cm^2}{s}$$

$$\text{Para } t = 3\,s; \quad \frac{dA}{dt} = 3200\pi(3) = 9600\pi \ \frac{cm^2}{s}$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

71. En una placa metálica en forma de triángulo rectángulo, sometida a cambios de temperatura, el cateto horizontal disminuye $1\ cm$ por minuto y el vertical aumenta $2\ cm$ por minuto. Determinar la rapidez de variación de su área a los 2 minutos.

Solución. La figura de la placa se muestra a continuación:



Sea "x" la base del triángulo, "y" su altura y "t" el tiempo transcurrido. De los datos proporcionados se conoce $\frac{dx}{dt} = -1\frac{cm}{\min}$ y $\frac{dy}{dt} = 2\frac{cm}{\min}$. Además, el área es igual a: $A = \frac{1}{2}xy$

Se deriva con respecto al tiempo y:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}(2x-y)$$

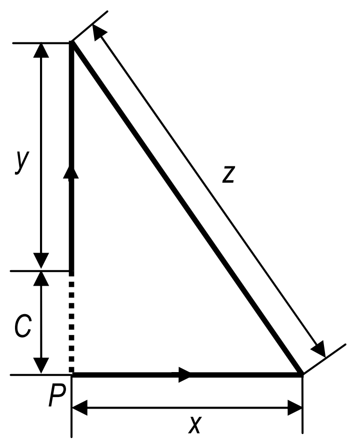
Al considerar $t=2\text{ min}$; $x=6-0.02=5.98\,m$ y $y=8+0.04=8.04\,m$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=2}=\frac{1}{2}\left[2(5.98)-8.04\right]\quad\therefore\quad\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=2}=1.96\ \frac{m^2}{\min}$$

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

72. Una mujer que trota con una rapidez constante de $10\ \frac{km}{h}$ pasa por un punto P hacia el norte; 10 minutos más tarde un hombre que trota a $9\ \frac{km}{h}$ pasa por el mismo punto hacia el Este. Determinar qué tan rápido varía la distancia entre los dos corredores, 20 minutos después de que el hombre pasa por el punto P.

Solución. De manera esquemática se tiene que:



Se requiere determinar $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=20}$. La relación de velocidad es $v=\frac{d}{t}$, por lo que despejando a la distancia, $d=vt$. Esta relación permite obtener la distancia C que se recorre la mujer transcurridos 10 minutos después de pasar por el punto P, es decir $C=\left(10\ \frac{km}{h}\right)\left(\frac{1}{6}\ h\right)=\frac{10}{6}\ km\quad\Rightarrow\quad C=\frac{5}{3}km$

20 minutos después de que el hombre pasa por el punto P, la mujer ha recorrido una distancia de $y+\frac{5}{3}\ km$ y el hombre una distancia de $x\ km$. Si se relacionan las distancias recorridas se obtiene $z^2=x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2$

Ahora se deriva con respecto al tiempo: $2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2\left(y+\frac{5}{3}\right)\frac{dy}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{dz}{dt}=\frac{x}{z}\frac{dx}{dt}+\frac{y+\frac{5}{3}}{z}\frac{dy}{dt}$

De los datos se sabe que $\frac{dy}{dt}=10\ \frac{km}{h}$ y $\frac{dx}{dt}=9\ \frac{km}{h}$; de donde

Como la rapidez es constante, $v=\frac{d}{t} \Rightarrow d=v\,t$; luego $x=9t$ y $y=10t$. Por lo que:

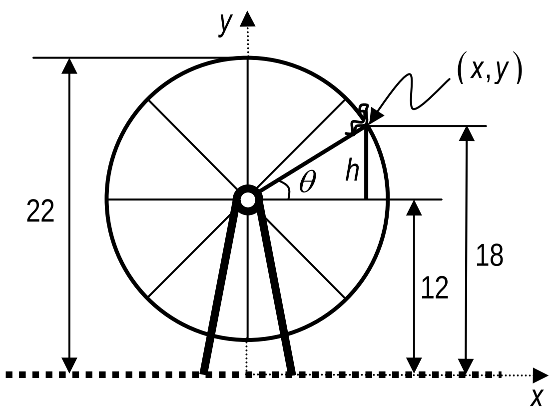
$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}=\frac{9x+10\left(y+\frac{5}{3}\right)}{z}=\frac{81t+10\left(10t+\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{81t^2+\left(10t+\frac{5}{3}\right)^2}}$$

Valuando en $t=20\text{ min}=\frac{1}{3}h$: $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}=\frac{81\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(10\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{81\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(10\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}\right)^2}}=\frac{77}{\sqrt{34}} \quad \therefore \quad \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}=13.2\ \frac{km}{h}$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

73. Una rueda de la fortuna con un radio $10\ m$ da una vuelta cada 3 min. Si el centro de la rueda está a $12\ m$ del piso, determinar la rapidez con que asciende el pasajero cuando se encuentra a $18\ m$ del piso.

Solución. La figura con los datos correspondientes, es la siguiente:



Solución. La velocidad angular es: $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{3}\ \frac{rev}{\min} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi}{3}\ \frac{rad}{\min} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}\approx 2.094\ \frac{rad}{\min}$

En la figura se aprecia que el radio es igual a $r=10\ m$, que $h=6\ m$ y que la abscisa del punto donde se encuentra el pasajero es igual a $x=\sqrt{10^2-6^2}=8\ m$. De la misma figura se puede obtener:

$h=10sen\theta \quad \Rightarrow \quad y=12+10sen\theta$.

Se tiene que determinar $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=18[m]}$. Se emplea la regla de la cadena $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{dy}{d\theta}=10\cos\theta=10\left(\frac{8}{10}\right)=8$ y $\frac{d\theta}{dt}=\omega\approx 2.094\ \frac{rad}{\min}$

Por lo tanto, $\frac{dy}{dt}=8(2.094) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dt}\approx 16.752\ \frac{m}{\min}$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

74. Por medio de diferenciales, obtener un valor aproximado de $\sqrt{27}$.

Solución. La función a utilizar es $y=\sqrt{x}$, para la cual se hace: $x=25 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{25}=5 \quad y \quad dx=2$
Por lo que:

$$y+dy=\sqrt{x+dx} \quad \Rightarrow \quad 5+dy=\sqrt{27}$$

se calcula la diferencial, se determina su valor y se le suma 5 , para obtener $\sqrt{27}$. Entonces:

$$y=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad dy=\frac{2}{2\sqrt{25}} \quad \Rightarrow \quad dy=0.2$$

$$5+0.2=\sqrt{27} \quad \therefore \quad \sqrt{27}=5.2$$

En la calculadora el valor es 5.196 , con una diferencia de 6 milésimas con respecto al valor obtenido con la diferencial.

LOS COORDINADORES

75. Por medio de diferenciales obtener el valor aproximado de $\tan 44^{\circ}$.

Solución. La función a aproximar es $y=\tan x$. Si se hace:

$$x=45^{\circ} \quad \Rightarrow \quad y=\tan 45^{\circ}=1 \quad y \quad dx=1^{\circ}=0.01745\ rad$$

$$y=\tan x \quad \Rightarrow \quad y-dy=\tan\left(x-dx\right) \quad \Rightarrow \quad 1-dy=\tan 44^{\circ}$$

Luego, se obtiene la diferencial de la función, se evalúa y se resta al valor de 1 para obtener el valor buscado.

$$y=\tan x \quad \Rightarrow \quad dy=\sec^2 x\, dx \quad \Rightarrow \quad dy=\sec^2 45^{\circ}\left(0.01745\right) \quad \Rightarrow \quad dy=0.0349$$

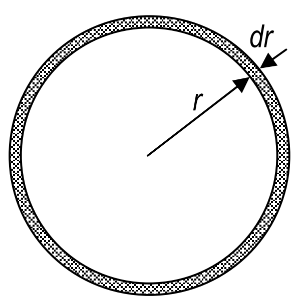
$$\tan 44^{\circ}=1-0.0349 \quad \therefore \quad \tan 44^{\circ}=0.9651$$

En una calculadora, el resultado con cuatro cifras decimales es de 0.9657, por lo que el error al utilizar la diferencial es de 6 diezmilésimas.

LOS COORDINADORES

76. Mediante la diferencial, calcular la cantidad aproximada de material de un cascarón esférico cuyo radio interno mide $25\,cm$ y cuyo espesor es de $1\,cm$.

Solución. Una sección transversal es la siguiente:



El volumen del cascarón esférico es: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

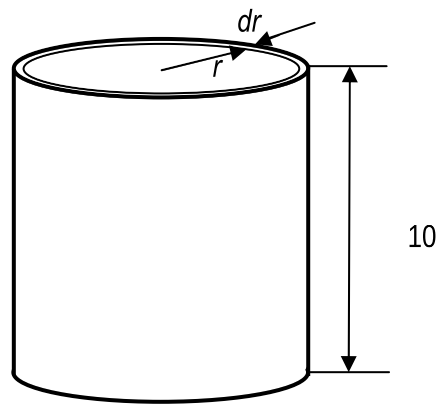
Con diferenciales se obtiene el incremento de volumen que es la cantidad aproximada de material necesario para su construcción; de esta forma:

$$dV=4\pi\, r^2dr \;\Rightarrow\; dV=4\pi(25)^2(1) \;\Rightarrow\; dV=7{,}853.98\ \ cm^3$$

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA GUTIERREZ

77. Un tubo cilíndrico tendrá un espesor metálico de $6\ cm$. El radio interno es de $3\ m$ y la altura de $10\,m$. Obtener la cantidad aproximada del material que se empleará para su construcción, empleando diferenciales.

Solución. La figura con sus datos y magnitudes variables es:



La fórmula de un volumen del cilindro es $V=\pi r^2h$; $h=10$; $V=10\pi r^2$.

Se calcula la diferencial $dV=20\pi rdr$ y se sustituyen los valores dados; luego:

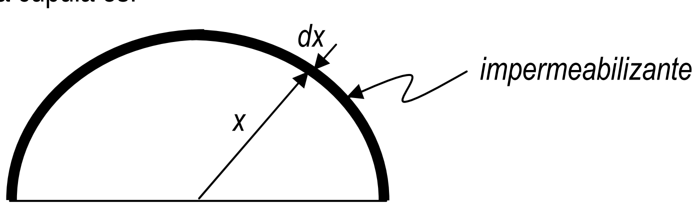
$$dV=20\pi rdr \quad\Rightarrow\quad dV=20\pi(3)(0.06) \quad\therefore\quad dV=11.31$$

Por lo tanto, la cantidad aproximada de material es de $11.31\,m^3$.

ALUMNO: PABLO A. LORENZANA GUTIERREZ

78. A una cúpula semiesférica con radio exterior de $5\,m$, se le aplica un impermeabilizante especial que tiene un espesor de $1\,cm$. ¿Cuánto se gasta de manera aproximada (mediante diferenciales) en impermeabilizante si el litro cuesta $\$100.00$? Calcular también la cantidad exacta que se invierte, así como el porcentaje de error que se comete al utilizar la diferencial en lugar del valor exacto.

Solución. Una sección de la cúpula es:



La cantidad aproximada de impermeabilizante se obtiene con el incremento aproximado del volumen, que se obtiene con la diferencial del volumen. Entonces:

$$V = \frac{2}{3}\pi\, x^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 2\pi\, x^2 dx \quad \Rightarrow \quad dV = 2\pi\left(5\right)^2\left(0.01\right) \quad \Rightarrow \quad dV = 1.5708\; m^2$$

$$dV = 1.5708\; m^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 1570.8\; dm^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 1570.8\; litros$$

$$G\left(aprox\right) = 1570.8 \times 100 = \$157{,}080.00$$

Ahora se calcula el valor exacto del volumen de material de la siguiente forma:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi\left(5\right)^3 = 261.7994\; m^3 \quad y \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi\left(5.01\right)^3 = 263.3733\; m^3 \quad ; \quad \Delta V = V_2 - V_1 = 1.5739 \quad m^3$$

$$\Delta V = 1.5739\; m^3 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 1573.9\; dm^3 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 1573.9\; litros$$

$$G\left(exacto\right) = 1573.9 \times 100 = \$\,157{,}390.00$$

El error que se comete se calcula como:

$$P_E = \frac{G\left(E\right) - G\left(A\right)}{G\left(E\right)} \times 100 \quad ; \quad P_E = \frac{157390 - 157080}{157390} \times 100 \quad P_E = 0.2\ \% \quad \text{de error.}$$

LOS COORDINADORES

VARIACIÓN DE FUNCIONES

1. Demostrar que la función $f(x)=4x^2-20x+29$ satisface el teorema de Rolle en el intervalo $[1,\ 4]$ y determinar el o los valores que lo satisfacen.

Solución. La función es derivable en cada punto de su dominio (por ser un polinomio) y es continua.
Se verifica que $f(1)=f(4)$:

$$f(1)=4(1)^2-20(1)+29=33-20=13$$

$$f(4)=4(4)^2-20(4)+29=64-80+29=13$$

Por lo tanto se cumple con las condiciones del teorema; entonces existe $c\in[0,\ 4]$ tal que; $f'(c)=0$.
Se deriva y se iguala a cero:

$$f'(x)=8x-20 \quad ; \quad f'(c)=8c-20=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

Por lo tanto el valor que cumple con el teorema de Rolle es $c=\frac{5}{2}\in[1,4]$.

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

2. Determinar si el teorema de Rolle es aplicable a las funciones dadas en el intervalo $[0,\ 4]$; en caso de serlo, determinar el o los valores de x en que se verifica. De no ser aplicable, explicar por qué.

$$a)\quad f(x)=\frac{x^2-4x}{x-2} \quad ; \quad b)\quad f(x)=\frac{x^2-4x}{x+2}$$

Solución. $a)$ $f(x)=\frac{x^2-4x}{x-2}$ es discontinua para $x=2$ y $2\in[0,\ 4]$ *;* por ello no es aplicable el Teorema de Rolle.

$b)$ $f(x)=\frac{x^2-4x}{x+2}$ es una función racional continua para todo valor $x\neq-2$, además es continua en el intervalo $[0,\ 4]$, por lo tanto se satisface la primera condición del teorema de Rolle. Al derivar se obtiene $f'(x)=\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$, donde se observa que la función es derivable para todo valor $x\neq-2$, por lo cual es derivable en el intervalo $(0,\ 4)$ y se cumple la segunda condición del Teorema.

Finalmente, $f(a)=f(0)=\frac{0}{2}=0$; $f(b)=f(4)=\frac{0}{6}=0 \Rightarrow f(0)=f(4)$, se cumple la tercera condición del teorema de Rolle, por lo cual sí es aplicable.
Se iguala a cero la derivada y:

$$f'(x)=\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2} \quad ; \quad x^2+4x-8=0 \quad ; \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=-2+2\sqrt{3}\approx1.46 \\ x_2=-2-2\sqrt{3}\approx-5.46 \end{cases}$$

Como se observa, solamente el valor $x_1 \approx 1.46 \in [0,4]$, luego en él se cumple el teorema.

ALUMNO: PABLO LORENZANA GUTIERREZ

3. Dada la función $f(x) = 4x^3 - 9x$, verificar si se cumplen las condiciones del teorema de Rolle para el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, determinar en qué puntos se cumple.

Solución. Por ser una función polinomial es continua y diferenciable para todos los valores; para determinar si se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle, falta verificar que se cumpla que $f(a) = f(b)$

$$f(a) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(-\frac{3}{2}\right) = 4\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{27}{2} = 0$$

$$f(b) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{27}{2} = 0 \quad \therefore \quad \text{se cumple}$$

Se deriva y se iguala a cero por lo que:

$f'(x) = 12x^2 - 9$; $f'(x) = 12x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

para este caso los dos valores están en el intervalo y se verifica en ellos el teorema: $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

4. Verificar que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle para $[-1, 2]$, y determinar él o los valores para los cuales se verifica el teorema.

Solución. La función $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ es continua para toda $x \in R$, por tanto es continua para $[-1, 2]$. Se deriva la función dada y se obtiene que $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Se observa que $f'(x)$ existe para toda $x \in R$, y por lo tanto $f(x)$ es derivable en $(-1,2)$. Los valores en los extremos son:

$f(a) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$ y $f(b) = (2)^3 - 2(2)^2 - (2) + 2 = 0$. Por lo tanto; $f(a) = f(b)$

Se determinan los valores donde la derivada se hace cero y:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} \frac{4 + \sqrt{28}}{6} \approx 1.55 \\ \frac{4 - \sqrt{28}}{6} \approx -0.22 \end{cases}$$

que son los valores para los cuales se cumple el teorema de Rolle.

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

5. Determinar si es aplicable el Teorema de Rolle a la función $f(x)=\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{8}$ en el intervalo $[-2,\ 2]$, y en caso afirmativo, obtener los valores de x donde se satisface.

Solución. Para $f(x)$ debe cumplir con ser continua y derivable en el intervalo; y además, debe cumplir que $f(a)=f(b)$.

Se trata de una función polinomial por lo que es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2,2)$.

$$f(-2)=\frac{16}{16}-\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad ; \quad f(2)=\frac{16}{16}-\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad ; \text{ Por lo tanto } f(-2)=f(2).$$

De acuerdo con el teorema de Rolle debe existir por lo menos un valor $x_0\in[-2,\ 2]$ tal que, $f'(x_0)=0$

Se deriva la función dada y se iguala a cero:

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-x\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x\left(x^2-1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0,\ x=\pm\ 1$$

Como estos valores se encuentran dentro del intervalo, son los que satisfacen el teorema de Rolle.

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

6. Determinar si es aplicable el teorema de Rolle a la función dada en el intervalo $[-2\pi,2\pi]$, en el caso afirmativo, determinar el o los valores de x donde se verifica el teorema. Si no es aplicable explicar por qué no lo es.

$$f(x)=2sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Solución. La función $f(x)=2sen\left(\frac{x}{2}\right)$ es continua para toda $x\in R$; por lo tanto es continua para $[-2\pi,2\pi]$.

La derivada es $f'(x)=2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, en donde $f'(x)$ existe para toda $x\in R$; por lo tanto $f(x)$ es derivable en $(-2\pi,2\pi)$. Además:

$$f(a)=f(-2\pi)=2sen\left(\frac{-2\pi}{2}\right)=2(0)=0 \quad y \quad f(b)=f(2\pi)=2sen\left(\frac{2\pi}{2}\right)=2(0)=0$$

por lo tanto: $f(a)=f(b)$.

Se buscan los valores donde la derivada se hace cero:

$$f'(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=2ang\cos(0) \quad\Rightarrow\quad x=\begin{cases}\pi\\-\pi\end{cases}$$

valores para los cuales se cumple el teorema de Rolle.

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

7. Investigar si se cumplen las condiciones del teorema de Rolle para la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si\, x<1 \\ 2x-3 & si\, x\geq 1 \end{cases}$$

en el intervalo $\left[-2,\ \frac{5}{2}\right]$; si es así, determinar el o los valores de x para los cuales se satisface el teorema.

Solución. Las funciones polinomiales son continuas en $\mathbb{R}$; se analiza el punto con $x=1$, que es donde podría presentarse discontinuidad; tenemos:

$$f(1)=2(1)-3=-1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} = \lim_{x\to 1^+}(2x-3)=-1 \quad y \quad \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-2\right)=-1 \qquad \therefore \quad \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

por lo tanto es continua en el intervalo: $\left[-2,\ \frac{5}{2}\right]$.

Se determina si la función es derivable:

Por la izquierda: $f(x)=x^2-2 \;\Rightarrow\; f'_-(x)=2x \;\Rightarrow\; f'_-(1)=2$

Por la derecha: $f(x)=2x-3 \;\Rightarrow\; f'_+(x)=2 \;\Rightarrow\; f'_+(1)=2$

Luego $f'_+(x)=f'_-(x)$, por lo que es derivable en $\mathbb{R}$; por tanto derivable en el intervalo $\left(-2,\frac{5}{2}\right)$.

Para que cumpla con las condiciones del teorema de Rolle se debe cumplir que $f(-2)=f\left(\frac{5}{2}\right)$

$$f(-2)=(-2)^2-2=2 \quad y \quad f\left(\frac{5}{2}\right)=2\left(\frac{5}{2}\right)-3=2 \text{ ; por lo tanto } f(-2)=f\left(\frac{5}{2}\right).$$

Entonces por el teorema de Rolle, existe $c\in\left[-2,\ \frac{5}{2}\right]$, tal que; $f'(c)=0$; se deriva la función dada y:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x<1 \\ 2 & si\ \ x\geq 1 \end{cases} \quad ; \quad f'(c)=2c=0 \;\Rightarrow\; c=0$$

Por lo tanto, el valor donde la derivada $f'(c)=0$ es en $x=0$, que pertenece al intervalo dado.

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

8. Dada la función $f(x)=x^3-5x^2-3x$ verificar que es aplicable el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para el intervalo $[1,3]$.

Solución. Como la función es continua en el intervalo dado y su derivada existe en cualquier punto del intervalo (ya que se trata de una función polinomial), por el teorema del valor medio, existe un valor c en el intervalo dado, tal que:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ , es decir,}$$

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3)^3-5(3)^2-3(3)-(1)^3+5(1)^2+3(1)}{2}=\frac{-20}{2}=-10$$

Se deriva la función dada para obtener el valor c que satisface $f'(c)=-10$;

$$f'(c)=3c^2-10c-3=-10 \quad \Rightarrow \quad 3c^2-10c+7=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{6}$$

$$c_1=\frac{10+4}{6} \quad \Rightarrow \quad c_1=\frac{7}{3} \qquad y \qquad c_2=\frac{10-4}{6} \quad \Rightarrow \quad c_2=1$$

Ambos valores pertenecen al intervalo por lo que en ambos se cumple el torema.

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

9. Investigar si la siguiente función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial y en caso afirmativo, decir en qué puntos del intervalo se cumple.

$$f(x)=+\sqrt{x-1} \quad ; \quad [2,5]$$

Solución. Se trata de una función algebraica cuya domino está dado por: $x-1\geq 0 \Rightarrow D_f=[1,\infty)$ y, como las funciones algebraicas son continuas en su dominio, entonces es continua en el intervalo $[2,5]\subset D_f$. También es posible afirmar, dadas las condiciones de la función, que es la parte superior de la parábola $y^2=x-1$, que es derivable en el intervalo $(2,5)$. Entonces cumple las condiciones del teorema y debe existir cuando menos un valor "α", en el intervalo, para el cual se cumpla que: $f'(\alpha)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Se obtienen los valores de α correspondientes a esta expresión:

$$b-a=3 \quad ; \quad f(b)=+\sqrt{5-1} \quad \Rightarrow \quad f(b)=2 \qquad y \qquad f(a)=+\sqrt{2-1} \quad \Rightarrow \quad f(a)=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{3}$$

$$f'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha-1}} \quad ; \quad \frac{1}{2\sqrt{\alpha-1}}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{\alpha-1}=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha-1=\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{13}{4}=3.25$$

Por lo tanto el teorema se cumple para $\alpha=3.25\in[2,5]$

LOS COORDINADORES

10. Determinar para qué puntos la curva definida por $f(x)=x^3-6x^2+9x$ tiene máximos y/o mínimos, así como el valor de éstos.

Solución. Se determinan los valores para los cuales la primera derivada de la función es igual a cero.

$$f'(x)=3x^2-12x+9 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-12x+9=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3 \quad y \quad x_2=1$$

Estos valores se sustituyen en la función original a fin de determinar las coordenadas de los puntos críticos.

$$f(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)=27-54+27=0 \quad \text{y} \quad f(1)=(1)^3-6(1)^2+9(1)=1-6+9=4$$

Con lo que se tiene: $P_1(3,\ 0)\ \ y\ \ P_2(1,\ 4)$

Para cada punto se tomará un valor de x anterior y uno posterior con el fin de ver los cambios de signo en el valor de la derivada.

Para $x_1 = 3$ se toma $x = 2$ y $x = 4$:

$$f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 \quad \text{y} \quad f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 48 - 48 + 9 = 9$$

Por lo que para $P_1(3,\ 0)$ la función tiene un mínimo relativo.

Para $x_2 = 1$ se toma $x = 0$ y $x = 2$:

$$f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 9 = 9 \quad \text{y} \quad f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$$

Por lo que para $P_2(1,\ 4)$ la función tiene un máximo relativo.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

11. Determinar, por el método de la primera derivada, los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x - 8$$

Solución. Derivando la función dada e igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = x^2 - x - 6 \quad ; \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -2$$

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, se obtiene el signo de la derivada en el entorno de dichos puntos. Así:

Para $x_1 = 3$; $\begin{matrix} f'(2) = 4 - 2 - 6 = -4 \\ f'(4) = 16 - 4 - 6 = 6 \end{matrix}$; por lo que en $x_1 = 3$ se tiene un valor mínimo.

Para $x_2 = -2$; $\begin{matrix} f'(-3) = 9 + 3 - 6 = 6 \\ f'(-1) = 1 + 1 - 6 = -4 \end{matrix}$; por lo que en $x_2 = -2$ se tiene un valor máximo.

Para estos puntos críticos la función toma los siguientes valores:

$f(3) = \frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18 - 8 = -\frac{43}{2}$, por lo que el mínimo relativo se encuentra en el punto $P_1\left(3,\ -\frac{43}{2}\right)$.

$f(-2) = -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 - 8 = -\frac{2}{3}$, por lo que el máximo relativo se encuentra en el punto $P_2\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$.

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

12. Para la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, determinar los extremos absolutos con el criterio de la primera derivada. Trazar la gráfica de la función.

Solución. La función dada es continua en todo su dominio; se obtiene su derivada y se iguala a cero para obtener sus puntos críticos:

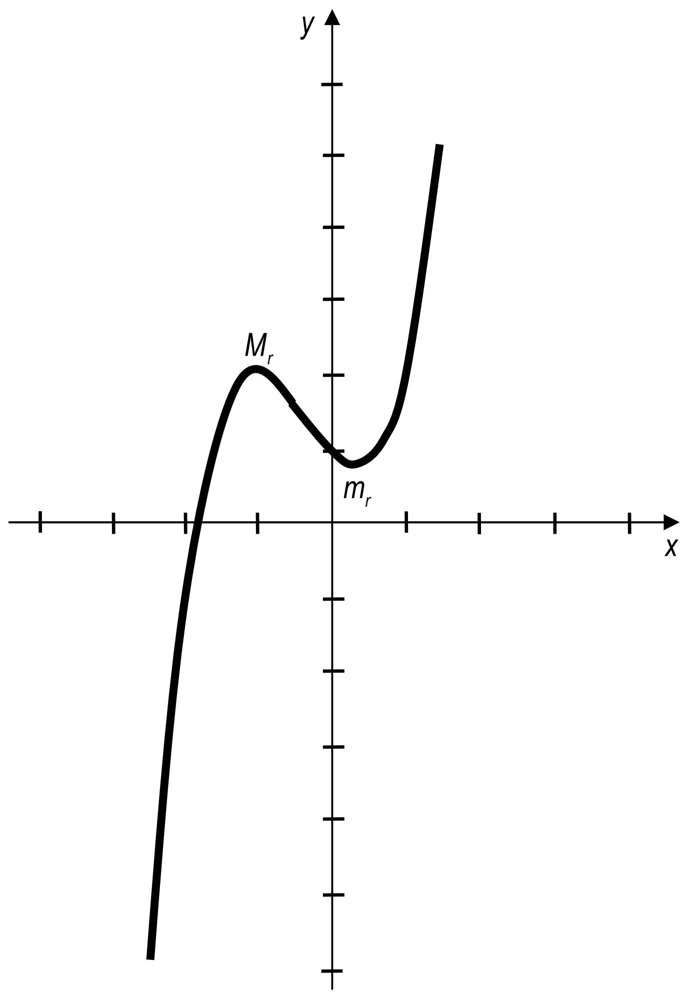
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -1$$

Se sustituyen estos valores en la función dada con lo que se obtiene:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{22}{27} \quad ; \quad f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)+1=2 \quad ; \quad \begin{matrix} P_1\left(\frac{1}{3},\frac{22}{27}\right) \\ P_2\left(-1,-2\right) \end{matrix}$$

Para $x=-1$; $\begin{matrix} x=-2 \Rightarrow f'(-2)=3(-2)^2+2(-2)-1=7>0 \\ x=0 \Rightarrow f'(0)=3(0)^2+2(0)-1=-1<0 \end{matrix}$ $\therefore$ $P_2(-1,-2)$ (M_r, máximo relativo)

Para $x=\frac{1}{3}$; $\begin{matrix} x=0 \Rightarrow f'(0)=-1<0 \\ x=1 \Rightarrow f'(1)=3(1)^2+2(1)-1=4>0 \end{matrix}$ $\therefore$ $P_1\left(\frac{1}{3},\frac{22}{27}\right)$ (m_r, mínimo relativo)



ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

13. Sea la función $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$. Determinar los intervalos en que es creciente y decreciente, así como los valores donde hay máximos y mínimos.

Solución. Se deriva la función dada:

$$f'(x)=\frac{\left[(x-1)(x-2)^2\right]^{-\frac{2}{3}}\left[2(x-1)(x-2)+(x-2)^2\right]}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{\left[2(x-1)(x-2)+(x-2)^2\right]}{3\sqrt[3]{\left[(x-1)(x-2)^2\right]^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\left[2(x-1)+(x-2)\right](x-2)}{(x-2)(3)\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{2x-2+x-2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}$$

Se iguala a cero $f'(x)$ para obtener los valores críticos:

$$f'(x)=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}=0 \quad ; \quad 3x-4=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{3}$$

Si se iguala a cero el denominador, se llegaría a valores donde la derivada no existe, que también puede conducir a puntos críticos y a extremos relativos. Así

$$3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}$$

Por lo tanto los puntos críticos son: $x_1=1,\quad x_2=\frac{4}{3}\quad y \quad x_3=2$

Se analizan los intervalos donde la función es creciente o decreciente

Intervalo	$3x-4$	$(x-1)^2$	$x-2$	$f'(x)$	Creciente o decreciente
$(-\infty,1)$	$-$	$+$	$-$	$+$	Creciente
$\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	Creciente
$\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$	$+$	$+$	$-$	$-$	Decreciente
$(2,\ \infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	Creciente

Por lo tanto, la función es creciente en $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$ y $(2,\infty)$, y decreciente en $\left(\frac{4}{3},2\right)$.

Para $x=1$ la función no tiene máximo ni mínimo.

Para $x=\frac{4}{3}$ la función tiene un máximo relativo en el punto $\left(\frac{4}{3},\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

Para $x=2$ la función tiene un mínimo relativo en el punto $(2,0)$

ALUMNA: IRENE MONTSERRAT RUBALCABA

14. Obtener los valores máximos y mínimos de la función $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\left(x^2-8\right)$, mediante el criterio de la primera derivada. Trazar la gráfica de la función.

Solución. Se deriva la función dada, se iguala a cero o bien se determina para qué valores no existe; se obtiene:

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}(2x)+\left(x^2-8\right)\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{6x^2+2\left(x^2-8\right)}{3x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f'(x)=\frac{8x^2-16}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{8x^2-16}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow 8x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{8x^2-16}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$$

Los valores críticos son $x_1=-\sqrt{2}$; $x=0$; $x=\sqrt{2}$ y sus correspondientes valores de la función son:

$$x=-\sqrt{2} \Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(-\sqrt{2}\right)^2-8\right] \Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right)=2^{\frac{1}{3}}(2-8) \Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right)=-6\sqrt[3]{2}\approx-7.56$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=0^{\frac{2}{3}}\left(0^2-8\right) \Rightarrow f(0)=0$$

$$x=\sqrt{2} \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-8\right] \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=2^{\frac{1}{3}}(2-8) \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=-6\sqrt[3]{2}\approx-7.56$$

Se analizan los intervalos siguientes para ver si la función es creciente o decreciente en ellos:

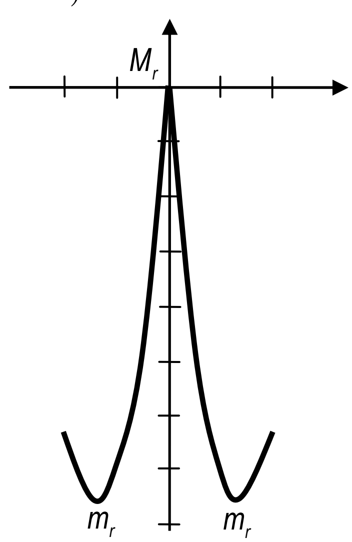
$$\left(-\infty,\ -\sqrt{2}\right) \quad ; \quad f'(-8)=\frac{8(-8)^2-16}{3(-8)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f'(-8)=\frac{496}{-6} \Rightarrow f'(-8)=-\frac{248}{3} \quad \therefore \quad \text{es decreciente}$$

$$\left(-\sqrt{2},\ 0\right) \quad ; \quad f'(-1)=\frac{8(-1)^2-16}{3(-1)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f'(-1)=\frac{-8}{-3} \Rightarrow f'(-1)=\frac{8}{3} \quad \therefore \quad \text{es creciente}$$

$$\left(0,\ \sqrt{2}\right) \quad ; \quad f'(1)=\frac{8(1)^2-16}{3(1)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f'(1)=\frac{-8}{3} \Rightarrow f'(1)=-\frac{8}{3} \quad \therefore \quad \text{es decreciente}$$

$$\left(\sqrt{2},\ \infty\right) \quad ; \quad f'(8)=\frac{8(8)^2-16}{3(8)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f'(8)=\frac{496}{6} \Rightarrow f'(8)=\frac{248}{3} \quad \therefore \quad \text{es creciente}$$

Por lo tanto la función tiene un mínimo relativo en $(-1.414,-7.56)$, un máximo relativo (en forma de pico) en $(0,0)$ y un mínimo relativo en $(1.414,-7.56)$.



15. Mediante el criterio de la primera derivada, determinar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$$

Solución. Se deriva la función dada:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

$$f'(x) \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2}} \to \infty \quad ; \quad 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Por lo que $x=-1$ y $x=0$ dan origen a los puntos críticos $P(-1,-3)$ y $Q(0,0)$

$$\text{Análisis en } \; P(-1,\ -3) \quad ; \quad \begin{cases} x=-2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2)<0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0 \end{cases} \quad \therefore \quad m_r\,(-1,-3)$$

$$\text{Análisis en } \; Q(0,0) \quad ; \quad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0 \\ x=1 \quad \Rightarrow \quad f'(1)>0 \end{cases} \quad \therefore \quad \text{no hay extremos}$$

Por lo que en $P(-1,\ -3)$ hay un mínimo relativo.

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

16. Obtener los valores críticos de la función $f(\beta)=\cos\beta+|\beta|$ y determinar si hay un máximo o mínimo absoluto en el valor de $\beta=0$.

Solución. Como $\cos\beta$ y $|\beta|$ son derivables en $\mathbb{R}-\{0\}$, entonces la función f no es derivable en 0. Por lo que en ese valor se presenta un punto crítico. La derivada es igual a:

Para $\quad \beta>0 \;\; ; \;\; f'(\beta)=(\cos\beta+\beta)'=-sen\beta+1$

Pero para $\quad \beta<0 \;\; ; \;\; f'(\beta)=(\cos\beta-\beta)'=-sen\beta-1$

De donde $f'(\beta)=0 \;\; ; \;\; -sen\beta+1=0 \;\; ó \;\; -sen\beta-1=0 \quad \Rightarrow \quad sen\beta=\pm1 \quad \therefore \quad \beta=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \;\; ; \;\; n\in\mathbb{Z}$

Por lo tanto los puntos críticos son: $\beta=0$ y $\beta=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \;\; ; \;\; n\in\mathbb{Z}$

Se analiza el signo de la derivada antes y después del valor $\beta=0$ y se tiene que:

$$\beta=-\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0 \quad y \quad \beta=\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)>0 \qquad \therefore \quad \text{mínimo relativo } \; (0,1)$$

Y como $f\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\left|\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n\right|>1$; $n\in\mathbb{Z}$, esto demuestra que $f(0)=1$ es un mínimo absoluto.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

17. Determinar los máximos y mínimos de la función $f(\theta)=\begin{cases}\theta^2-4 & si\ \ \theta<3\\ 8-\theta & si\ \ 3\le\theta\end{cases}$.

Solución. Se deriva y se tiene que:

$$f'(\theta)=\begin{cases}2\theta & si\ \ \theta<3\\ -1 & si\ \ 3\le\ \theta\end{cases}$$

Se obtienen los puntos críticos;

$f'=0$ cuando $\theta=0$; por lo tanto, en cero hay un punto crítico de f .

Como $f_-'(3)=6$ y $f_+'(3)=-1$, $f'(3)$ no existe, por lo que en $\theta=3$ hay un punto crítico de f .

Se aplica el criterio de la primera derivada y el resultado se resume en la siguiente tabla.

Intervalo y puntos	$f(\theta)$	$f'(\theta)$	Característica
$(-\infty,0)$		$-$	Decreciente
$\theta=0$	-4	0	Mínimo local $(0,-4)$
$(0,3)$		$+$	Creciente
$\theta=3$	5	No existe	Máximo local $(3,5)$
$(3,\infty)$		$-$	Decreciente

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

18. Determinar los valores extremos absolutos de la función $f(\alpha)=1+12|\alpha|-3\alpha^2$ en el intervalo $[-1,\ 4]$.

Solución. La función f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, porque $|\alpha|$ no es derivable en $\alpha=0$. Esto demuestra que 0 es un valor crítico. También -1 y 4 son valores críticos porque son puntos extremos del intervalo, donde pudiera presentarse un máximo o un mínimo absoluto. La derivada está dada por:

$$f'(\alpha)=\left(1+12\alpha-3\alpha^2\right)'=12-6\alpha \quad si \quad \alpha>0 \ \ y \ \ f'(\alpha)=\left(1-12\alpha-3\alpha^2\right)'=-12-6\alpha \quad si \quad \alpha<0$$

de donde $\alpha_1=-2$ y $\alpha_2=2$

El conjunto de valores críticos es $\{0,\ -1,\ 4,\ 2\}$, porque -2 está excluido del dominio dado de f .

Se evalúa la función en cada punto crítico y:

$f(0)=1$; $f(-1)=10$; $f(4)=1$ y $f(2)=13$

Por lo tanto se tiene el máximo absoluto en $(2,13)$ y los mínimos absolutos en $(0,1)$ y $(4,1)$.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

19. Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$. Graficar los resultados obtenidos.

Solución. Cabe recordar cómo se calcula la derivada de la función valor absoluto. Considérese la función siguiente:

$$y=|u| \quad ; \quad u=f(x) \quad ; \quad |u|=\sqrt{u^2} \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{u}{\sqrt{u^2}}\frac{du}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{u}{|u|}\frac{du}{dx}$$

Si se aplica esto a la función dada, entonces la derivada está dada por:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{\left|x^2-2x-3\right|}(2x-2) \quad ; \quad (x+1)(x-3)(2x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad f(-1)=0 \quad ; \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=4 \quad ; \quad x=3 \quad \Rightarrow \quad f(3)=0$$

Luego, los puntos críticos son: $(-1,0)$; $(1,4)$; $(3,0)$

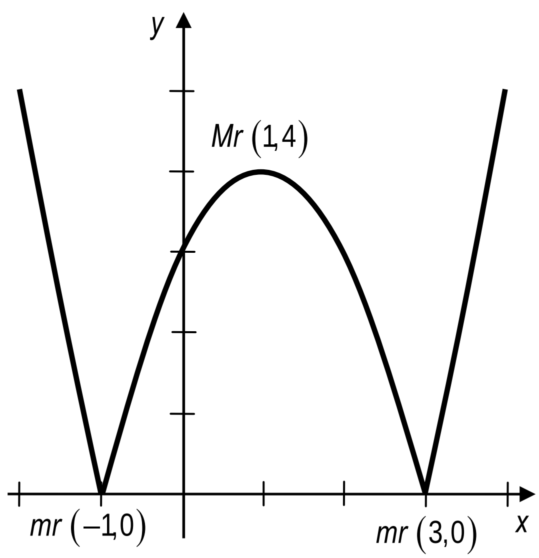
Se utiliza el criterio de la primera derivada para analizar la naturaleza de los puntos críticos y se llega a:

Para $x=-1$; $\begin{cases} x=-2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2)<0 \\ x=0 \quad \Rightarrow \quad f'(0)>0 \end{cases}$ $\therefore$ mínimo relativo $(-1,0)$

Para $x=1$; $\begin{cases} x=0 \quad \Rightarrow \quad f'(0)>0 \\ x=2 \quad \Rightarrow \quad f'(2)<0 \end{cases}$ $\therefore$ Máximo relativo $(1,4)$

Para $x=3$; $\begin{cases} x=2 \quad \Rightarrow \quad f'(2)<0 \\ x=4 \quad \Rightarrow \quad f'(4)>0 \end{cases}$ $\therefore$ mínimo relativo $(3,0)$

La gráfica de la función con los extremos se muestra a continuación:



LOS COORDINADORES

20. Para la función definida por $f(x)=x^3-x^2+1$, obtener los puntos críticos y determinar la naturaleza de los mismos.

Solución. Se deriva la función y se iguala a cero:

$$f'(x)=3x^2-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x(3x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \;\; y \;\; x_2=\frac{2}{3}$$

Se evalúan los valores encontrados en la función dada:

$$f(0)=0^3-0^2+1=1 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=0.85185$$

Por lo cual, los puntos críticos son: $P_1(0,\ 1)$ y $P_2\left(\frac{2}{3},\ 0.85185\right)$

Por el criterio de la segunda derivada se tiene:

$$f''(x)=6x-2$$

$f''(0)=6(0)-2=-2<0$, por lo tanto, en el punto $P_1(0,\ 1)$ se tiene un valor máximo.

$f''\left(\frac{2}{3}\right)=6\left(\frac{2}{3}\right)-2=2>0$, por lo tanto, para el punto $P_2\left(\frac{2}{3},\ 0.85185\right)$ se tiene un valor mínimo.

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

21. Para la función definida por $f(x)=x^4-8x^2+7$, obtener los puntos críticos, así como los máximos y mínimos relativos, mediante el criterio de la segunda derivada.

Solución. Se deriva la función y se iguala a cero:

$$f'(x)=4x^3-16x=0 \quad \Rightarrow \quad x^3-4x=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(x^2-4\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x(x+2)(x-2)=0$$

Los valores de x que anulan la derivada son:

$$x_1=-2 \quad ; \quad x_2=0 \quad ; \quad x_3=2$$

Se evalúan en la función dada obteniendo:

$$f(-2)=(-2)^4-8(-2)^2+7=-9 \quad ; \quad f(0)=0^4-8(0)^2+7=7 \quad ; \quad f(2)=2^4-8(2)^2+7=-9$$

Por lo tanto, los puntos críticos son: $P_1(-2,\ -9)$; $P_2(0,\ 7)$ y $P_3(2,\ -9)$

Por el criterio de la segunda derivada se tiene:

$$f''(x)=12x^2-16$$

Entonces:

$f''(-2)=12(-2)^2-16=32>0$ $\therefore$ el punto $P_1(-2,\ -9)$ corresponde a un mínimo relativo.

$f''(0)=12(0)^2-16=-16<0$ $\therefore$ el punto $P_2(0,\ 7)$ corresponde a un máximo relativo.

$f''(2)=12(2)^2-16=32>0$ $\therefore$ el punto $P_3(2,\ -9)$ corresponde a un mínimo relativo.

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ-RUBIO MENDOZA

22. Sea $f(x)=12+2x^2-x^4$. Usar el criterio de la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos relativos de f.

Solución. Se obtienen la primera y segunda derivadas y:

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) \quad \text{Y} \quad f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1-3x^2)$$

Se emplea la expresión de f' para obtener los valores críticos que resultan ser: 0, 1 y -1. Los valores de f'' en estos números son:

$$f''(0) = 4 > 0 \quad ; \quad f''(1) = -8 < 0 \quad ; \quad f''(-1) = -8 < 0$$

Los valores correspondientes de la función son $f(0) = 12$, $f(1) = 13$ y $f(-1) = 13$.

Por el criterio de la segunda derivada, la función tiene un mínimo relativo en $(0,12)$ y dos máximos relativos en $(1,13)$ y $(-1,13)$.

ALUMNA: DANIELA IVETTE GARCÍA RUBÍ

23. Obtener los máximos y mínimos de la función con el criterio de la segunda derivada.

$$f(x) = sen x + sen x \cos x$$

Solución. Derivando la función dada:

$$f'(x) = \cos x + (sen x)(-sen x) + (\cos x)(\cos x) = \cos x - sen^2 x + \cos^2 x$$

$$f'(x) = \cos x - (1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

Realizando el cambio de variable $u = \cos x$:

$$2u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2} \ y \ u_2 = -1$$

$$\text{con } u_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ y con } u_2 = -1 \Rightarrow -1 = \cos x \Rightarrow x = \pi .$$

Sustituyendo los valores de x en la función para obtener sus correspondientes ordenadas, tenemos:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{\pi}{3} + sen\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, el punto crítico es $P_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

$f(\pi) = sen\pi + sen\pi\cos\pi = 0$, el punto crítico es $P_2(\pi, 0)$

Por el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = 4\cos x(-sen\ x) - sen\ x = -4\cos x sen\ x - sen\ x = -sen\ x(4\cos x + 1)$$

Evaluando los puntos críticos en la segunda derivada:

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sen\frac{\pi}{3}\left(4\cos\frac{\pi}{3} + 1\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} < 0$, se trata de un valor máximo.

$f''(\pi) = -sen\ \pi(4\cos\pi + 1) = 0$, por lo tanto se tiene un posible punto de inflexión, no es máximo ni mínimo.

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

24. Determinar, por el método de la segunda derivada, los máximos y mínimos de la función dada y graficarla:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$$

Solución. Se obtiene la primera y segunda derivada de la función:

$$y = x^{\frac{8}{3}} - 8x^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad y' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{16}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad y \quad y'' = \frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}} + \frac{16}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

Para determinar los puntos críticos, se hace $y' = 0$;

$$\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{16}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8x^2 - 16}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad ; \quad \begin{cases} 8x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{2} \quad y \quad x = \sqrt{2} \\ 3x^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

Los valores de la función para estos resultados son los siguientes:

Para $x = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad y = (-1.4142)^{\frac{8}{3}} - 8(-1.4142)^{\frac{2}{3}} = 2.52 - 10.08 = -7.56$

Para $x = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad y = (1.4142)^{\frac{8}{3}} - 8(1.4142)^{\frac{2}{3}} = 2.52 - 10.08 = -7.56$

Por el criterio de la segunda derivada:

$$y''(\sqrt{2}) = \frac{40}{9}(1.4142)^{\frac{2}{3}} + \frac{16}{9(1.4142)^{\frac{4}{3}}} = 5.6 + 1.12 = 6.72 > 0 \quad \therefore \quad \text{se trata de un mínimo.}$$

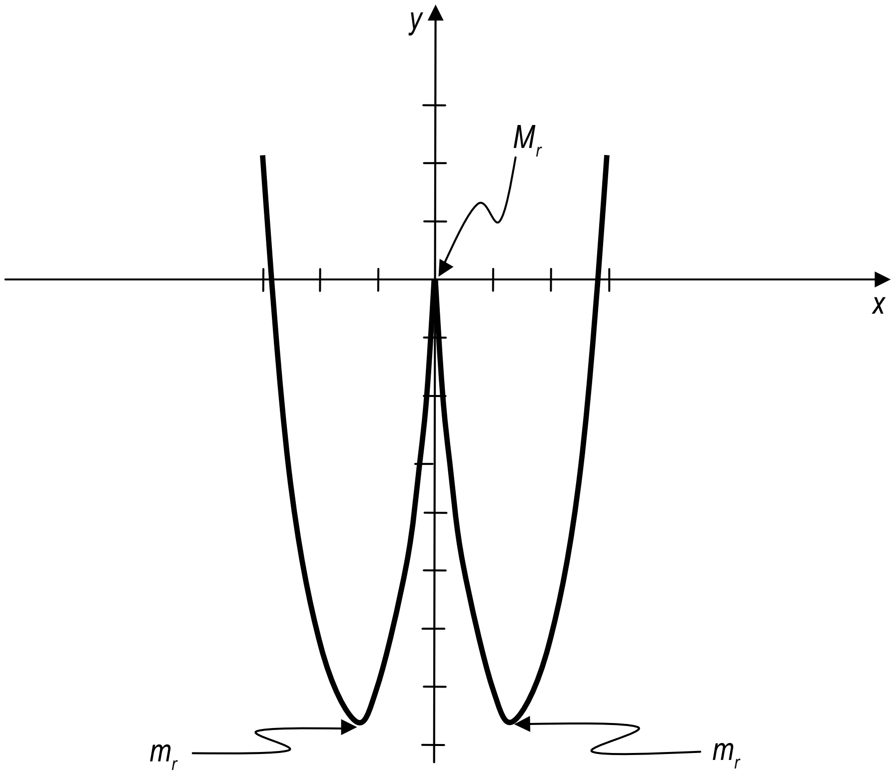
$$y''(-\sqrt{2}) = \frac{40}{9}(-1.4142)^{\frac{2}{3}} + \frac{16}{9(-1.4142)^{\frac{4}{3}}} = 5.6 + 1.12 = 6.72 > 0 \quad \therefore \quad \text{se trata de un mínimo.}$$

Para el caso en que $x = 0$, y' y y'' no existen. Se utiliza el método de la primera derivada y:

Para $x = -1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{8}{3}$ (positivo) y para $x = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{8}{3}$ (negativo)

Luego en $x = 0$ se tiene un máximo relativo en forma de "pico".

Por lo que su gráfica es:



ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

25. Obtener dos números positivos cuya suma sea 120, de tal manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Solución. El producto $P = ab^2$ debe ser máximo. De los datos del problema se tiene: $a + b = 120$ $\Rightarrow$ $a = 120 - b$

Se sustituye el valor de "a" en el producto, se deriva éste y se iguala a cero, de donde:

$$P = (120 - b)b^2 \quad \Rightarrow \quad P = 120b^2 - b^3 \quad ; \quad \frac{dP}{db} = 240b - 3b^2 \quad ; \quad 3b(b - 80) = 0 \quad \begin{cases} b = 0 \\ b = 80 \end{cases}$$

El valor de $b = 0$ no tiene sentido ya que el producto es nulo, luego, para el valor $b = 80$, la segunda derivada y su signo son:

$$\frac{d^2P}{db^2} = 240 - 6b \quad ; \quad \left.\frac{d^2P}{db^2}\right|_{b=80} = 240 - 6(80) = -240 < 0 \quad \therefore \quad \text{máximo relativo}$$

Por lo tanto: $b = 80 \quad \Rightarrow \quad a = 120 - b = 40$

ALUMNA: IRENE MONTSERRAT RUBALCABA

26. La reacción a dos drogas como función del tiempo (horas) está dada por:

$$R_1(x) = xe^{-x} \quad y \quad R_2(x) = xe^{-2x}$$

Determinar cuál tiene la reacción máxima.

Solución. Para $R_1(x) = xe^{-x}$, se obtienen las dos primeras derivadas y:

$$R_1'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$R_1''(x) = -(1-x)e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}\left[(1-x)+1\right] = -e^{-x}(2-x)$$

Se iguala la primera derivada a cero para obtener los puntos críticos

$$e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

se sustituye ese valor en la segunda derivada y se tiene que:

$R_1''(1) = -e^{-1}(2-1) = -0.36788$ valor que como es negativo se concluye que hay un máximo

Para $R_2(x) = xe^{-2x}$, derivando se obtiene:

$$R_2'(x) = -2xe^{-2x} + e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad R_2'(x) = e^{-2x}(1-2x)$$

$$R_2''(x) = -2(1-2x)e^{-2x} - 2e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad R_2''(x) = -2e^{-2x}\left[(1-2x)+1\right] \Rightarrow \quad R_2''(x) = e^{-2x}(4x-4)$$

Se iguala la primera derivada a cero para obtener los puntos críticos

$$e^{-2x}(1-2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Se sustituye ese valor en la segunda derivada y se tiene que:

$R_2''\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1}(2-4) = -0.73576$ valor que como es negativo se concluye que hay un máximo

Se evalúan $R_1(x)$ y $R_2(x)$ en sus respectivos valores obtenidos y se llega a:

$$R_1(1) = 1 \cdot e^{-1} \quad \Rightarrow \quad R(1) = \frac{1}{e} \qquad ; \qquad R_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2e}$$

Por lo tanto R_1 tiene la reacción máxima

ALUMNA: IRENE MONTSERRAT RUBALCABA

27. Una empresa de computadoras calcula que el costo semanal de producir x computadoras personales, está dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada computadora producida se vende en 2,800 dólares. Determinar la producción mensual que rendirá las máximas utilidades y la mayor ganancia posible por semana.

Solución. Los ingresos están dados por la función $G(x) = 2800x$ y la función de utilidades U está dada por la diferencia entre los ingresos y los costos $U(x) = G(x) - C(x)$

Es decir $U(x) = 2800x - \left(x^3 - 3x^2 - 80x + 500\right) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500$

Al derivar la función de utilidades se obtendrán los puntos críticos de U para obtener la ganancia máxima, por lo que se tiene:

$$U'(x) = -3x^2 + 6x + 2880$$

Ahora se iguala la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$U'(x) = -3\left(x^2 - 2x - 960\right) = 0 \quad ; \quad x^2 - 2x - 960 = (x-32)(x+30) = 0$$

Los puntos son $x_1 = -30$ y $x_2 = 32$. Se toma el resultado positivo debido a que el negativo no es posible.

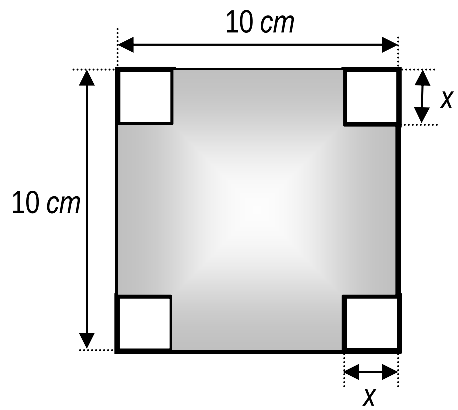
Se evalúa el resultado en la segunda derivada para verificar que efectivamente es el máximo:

$U''(x) = -6x + 6$, al evaluar resulta que: $U''(32) = -176$

Dado que el resultado es negativo se confirma que se tiene un máximo.
Las 32 computadoras que se producen semanalmente hacen que se obtenga la siguiente máxima ganancia por semana: $U(32) = 61{,}964$ Dólares. Pero la producción mensual deberá de ser cuatro veces la semanal, por lo que se tiene una producción de 128 computadoras personales al mes

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ

28. Se quiere construir una caja cuadrada, de acuerdo al diseño mostrado, Determinar cuánto debe medir cada corte para que el volumen de la caja sea máximo.



Solución. De la figura mostrada se tiene que el volumen de la caja es:

$$V = (10-2x)^2(x) \;\Rightarrow\; V = \left(100-40x+4x^2\right)(x) \;\Rightarrow\; V = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

Se deriva y se iguala acero:

$$V' = 12x^2 - 80x + 100 \;\Rightarrow\; 12x^2 - 80x + 100 = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 20x + 25 = (x-5)(3x-5) = 0$$

Por lo tanto $x_1 = 5$ y $x_2 = \dfrac{5}{3}$

Se calcula la segunda derivada de V y se sustituyen los valores de x para determinar su naturaleza:

$V'' = 24x - 80$; $V''(5) = 40 > 0$ $\therefore$ mínimo relativo. No es el valor buscado.

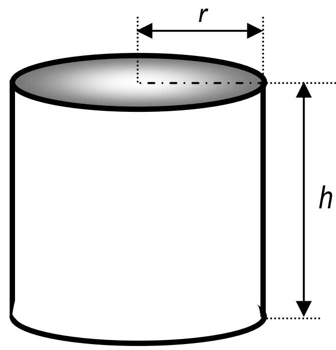
$V''\left(\dfrac{5}{3}\right) = 24\left(\dfrac{5}{3}\right) - 80 = -40 < 0$ $\therefore$ máximo relativo (volumen máximo).

Por lo tanto $x = \dfrac{5}{3}\,cm$ debe medir cada corte para que el volumen de la caja sea máximo

ALUMNA: IRENE MONTSERRAT RUBALCABA

29. Se debe construir un recipiente metálico en forma de cilindro circular recto, con $64\ cm^3$ de volumen. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de metal requerido para su construcción sea mínima: $a)$ para el recipiente sin tapa y $b)$ para el recipiente con tapa.

Solución. A continuación se muestra el modelo geométrico:



$a)$ Recipiente sin tapa: $V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{64}{\pi r^2}$

El área de la lata sin tapa, que es la cantidad de material, es igual a: $A = \pi r^2 + 2\pi r h$

Se sustituye el valor de h , se tiene que:

$$A = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{64}{\pi r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \pi r^2 + \frac{128}{r}$$

Para obtener el área mínima, que equivale a cantidad mínima de material, se deriva con respecto a r y se iguala a cero. Así,

$$A' = 2\pi r - \frac{128}{r^2} \Rightarrow A' = \frac{2\pi r^3 - 128}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2.7311 \quad \text{y} \quad h = \frac{64}{\pi(2.7311)^2} = 2.7311$$

Para este valor de $"r"$, la derivada segunda determina la naturaleza. Así:

$$A'' = \frac{r^2\left(6\pi r^2\right) - \left(2\pi r^3 - 128\right)(2r)}{r^4} \quad \Rightarrow \quad A'' = \frac{2\pi r^4 + 256r}{r^4} \quad ; \quad A''\Big|_{r=2.7311} > 0 \quad \therefore$$

mínimo relativo $\begin{cases} r = 2.7311\, cm \\ h = 2.7311\, cm \end{cases}$

$b)$ Para el recipiente con tapa: $V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{V}{\pi r^2} \quad ; \quad h = \dfrac{64}{\pi r^2}$

El área de la lata con tapa es igual $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Se sustituye h y se tiene que:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{(64)}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad A' = 2\pi r^2 + \frac{128}{r}$$

Se deriva con respecto a r y se iguala a cero:

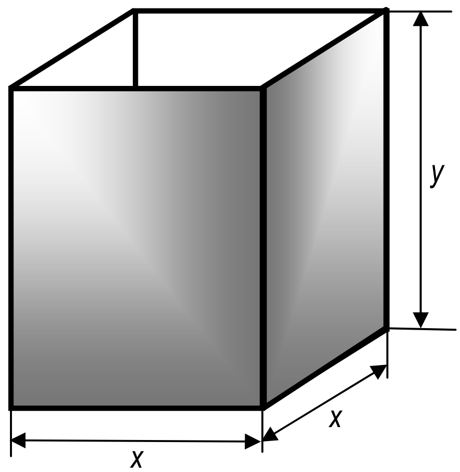
$$A' = 4\pi r - \frac{128}{r^2} \Rightarrow A' = \frac{4\pi r^3 - 128}{r^2} = 0 \quad ; \quad r = 2.1677 \quad \text{y} \quad h = \frac{64}{\pi(2.1677)^2} = 4.3354$$

La segunda derivada es:

$$A'' = \frac{r^2\left(12\pi r^2\right) - \left(4\pi r^3 - 128\right)(2r)}{r^4} \quad \Rightarrow \quad A'' = \frac{4\pi r^4 + 256r}{r^4} \quad ; \quad A''\Big|_{r=2.1677} > 0 \quad \therefore$$

mínimo relativo $\begin{cases} r = 2.1677\ cm \\ h = 4.3354\ cm \end{cases}$

30. Se desea construir una caja de $108\,dm^3$ de volumen sin tapa y de base cuadrada. Determinar las dimensiones que debe de tener dicha caja para que la cantidad de material ocupado en su construcción sea mínima.



Solución. Primero se debe determinar la función a minimizar; en este caso será la función que define el área total de las caras de la caja.

El área de la base queda definida por: $A_{base} = x^2$

Ahora se determinará el área de una de las caras de la caja.

Primero se necesita el valor de la altura y en función del lado de la base x.

$$V = x^2 y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{V}{x^2} = \frac{108}{x^2} \quad ; \quad A_{cara} = x\left(\frac{108}{x^2}\right) = \frac{108}{x}$$

Finalmente el área de la caja es:

$$A_T(x) = A_{base} + 4A_{cara} = x^2 + 4\left(\frac{108}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad A_T(x) = x^2 + \frac{432}{x}$$

A continuación se busca el valor de x para el cual la función anterior es mínima:

$$A_T'(x) = 2x - \frac{432}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{432}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^3 = \frac{432}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{216} = 6\ dm$$

Ahora se verificará si este valor corresponde a un mínimo:

$$A_T''(x) = 2 + \frac{864}{x^3} \quad \Rightarrow \quad A_T''(6) = 2 + \frac{864}{(6)^3} = 2 + \frac{864}{216} = 2 + 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad A_T''(6) > 0$$

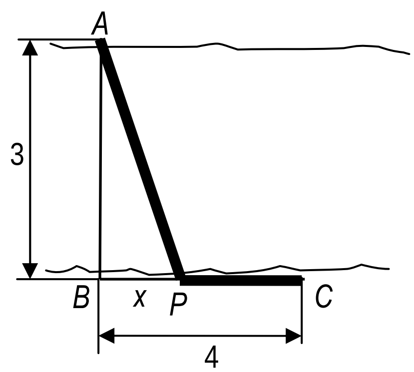
Por lo tanto con $x = 6\ dm$ se tiene el área mínima. Ahora se obtendrá el valor de y.

$$y = \frac{108}{(6)^2} = \frac{108}{36} = 3\ dm$$

Con lo cual el área mínima es de: $A_{T\min} = (6)^2 + \dfrac{432}{6} = 36 + 72 = 108\ dm^2$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

31. Los puntos A y B están en la riveras opuestas de un rió de $3\ km$ de ancho. El punto C esta en la misma rivera que B, pero $4\ km$ a la derecha de B. Telmex quiere tender cable telefónico de A a C, pero es 50% más caro el cable que va por debajo del agua que el superficial. Determinar la ruta más económica, así como el precio total del cableado si el cable que va por debajo del agua cuesta $\$200{,}000\ por\ km$ y $\$100{,}000$ el superficial.



Solución. De los datos que proporciona el problema se tiene que:
P será el punto de la rivera donde el cable pasa de acuático a superficial y estará a $x\ km$ de B, y a $(4-x)\ km$ de C.
El costo $C(x)$ del cable está dado por:

$$C(x)=200000\sqrt{9+x^2}+100000(4-x)$$

Al derivar se encuentra que: $C'(x)=\dfrac{200000x}{\sqrt{9+x^2}}-100000$

Se iguala la derivada a cero para determinar los puntos críticos:

$$\frac{200000x}{\sqrt{9+x^2}}-100000=0 \quad\Rightarrow\quad 200000x=100000\sqrt{9+x^2} \quad\Rightarrow\quad 2x=\sqrt{9+x^2}$$

$$2x=\sqrt{9+x^2} \quad\Rightarrow\quad 4x^2=9+x^2 \quad\Rightarrow\quad 3x^2=9 \quad\Rightarrow\quad x^2=3$$

Por lo tanto los puntos críticos están en:

$$x_1=\sqrt{3}\approx 1.732 \quad y \quad x_2=-\sqrt{3}\approx -1.732$$

La respuesta negativa no daría sentido al problema, por lo tanto en $x_1 \approx 1.732$ se tendrá el mínimo costo que es de:

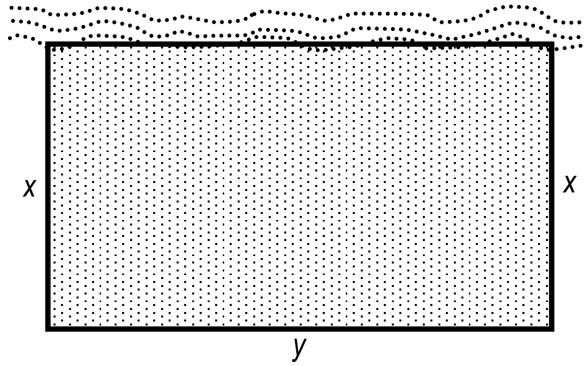
$$C(1.73)=200000\sqrt{9+(1.73)^2}+100000(4-1.73)=200000(3.463)+100000(2.27) \quad\therefore\quad C(x)\approx \$\,919{,}600$$

Por lo tanto el punto P esta a $1.73\,km$ de B, y el costo del cableado será de $\$\,919{,}600$ aproximadamente.

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

32. Un campo rectangular a la orilla del río debe ser cercado. Del lado del río no es necesaria ninguna reja pero de su lado opuesto la reja cuesta $\$120$ por metro. En los lados perpendiculares al río cuesta sólo $\$80$ por

metro. Si se tienen $\$36,000$ pesos y se nos dice que todo lo que cerquemos será nuestro, determinar el máximo terreno rectangular que podemos cercar con ese dinero.



Solución. Sea "x" el lado perpendicular al río y "y" el lado paralelo al río, el área del terreno está dada por: $A = xy$

El costo de la cerca es: $80x + 80x + 120y = 36000 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{36000 - 160x}{120} = 300 - \dfrac{4}{3}x$. Se sustituye el valor de y en la ecuación del área y se tiene que: $A(x) = x\left(300 - \dfrac{4}{3}x\right) = 300x - \dfrac{4}{3}x^2$

Hay que determinar el valor para el cual el área es máxima, por lo tanto se deriva la expresión del área y se iguala a cero, de donde: $A'(x) = 300 - \dfrac{8}{3}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{8}{3}x = 300 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{900}{8} = 112.5\ m$, valor que pertenece al punto crítico. Y como la segunda derivada es: $A''(x) = -\dfrac{8}{3} < 0$, entonces el, área es máxima.

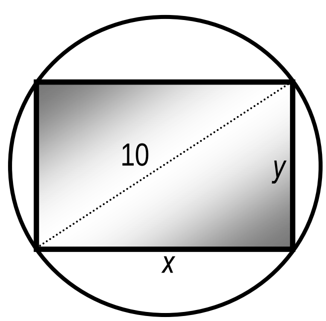
Con lo cual $y = 300 - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{900}{8}\right) = 300 - 150 = 150$.

El terreno que se puede cercar es de $112.5\ m \times 150\ m$ y un área de $Área = (112.5)(150) = 16875\ m^2$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ

33. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de $5\ cm$ de radio.

Solución. Obsérvese la siguiente figura:



Si x es la base del rectángulo, su altura y es igual a: $y = \sqrt{100 - x^2}$

Por lo que su área está dada por $A = x\sqrt{100 - x^2}$, que será la función $f(x)$ que se pretende maximizar. Luego

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2} \quad ; \quad f'(x) = x\frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7.07$$

$$f'(x) \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt{100 - x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 10$$

Con los valores negativos no tiene sentido trabajar y con el valor de 10 no hay rectángulo, luego, con el valor $x \approx 7.07$ se tiene el área máxima. Para verificar esto, se evalúa la derivada antes y después del valor. Así:

$x = 5\sqrt{2} = 7.07$

cuando $x < 5\sqrt{2}$, $2x^2 < 100$ y $f'(x)$ es positiva.

cuando $x > 5\sqrt{2}$, $2x^2 > 100$ y $f'(x)$ es negativa

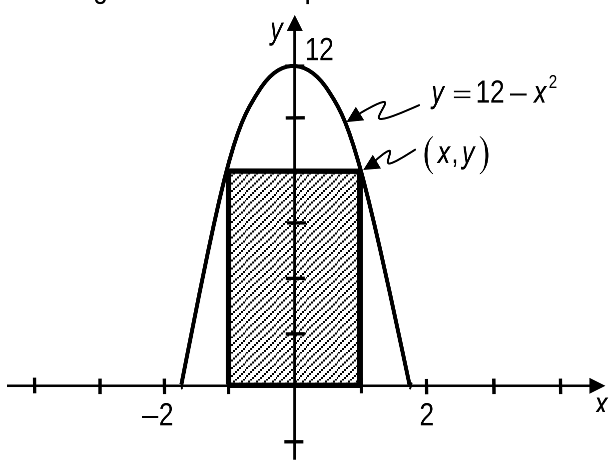
Puesto que el signo de la derivada cambia de $+ a -$, la función tiene un valor máximo $f\left(5\sqrt{2}\right) = \left(5\sqrt{2}\right)\sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 50$ por lo tanto, las dimensiones de este rectángulo de área máxima son:

$x = 5\sqrt{2} \approx 7.07\ cm$ y $y = 5\sqrt{2} \approx 7.07\ cm$, con lo cual dicho rectángulo es en realidad un cuadrado.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

34. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que se encuentra inscrito en la región limitada por la parábola $y = 12 - x^2$ y el eje de las abscisas, si se sabe que uno de los lados se encuentra alojado en dicho eje y los vértices del lado paralelo están sobre la parábola.

Solución. En la figura se observa un rectángulo inscrito en la parábola.



De los datos del problema se sabe que $y = 12 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -(y - 12)$ es una parábola vertical que abre hacia abajo y cuyo vértice es $V(0,\ 12)$. El área del rectángulo está dada por $A = 2xy$; como; $y = 12 - x^2$, se sustituye en la expresión del área y se llega a: $A = 2x\left(12 - x^2\right) \quad \Rightarrow \quad A = 24x - 2x^3$

Se deriva con respecto a x y se iguala a cero:

$$\frac{dA}{dx} = 24 - 6x^2 \quad ; \quad 6x^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \quad y \quad y = 8$$

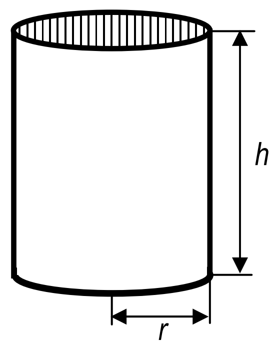
$$\frac{d^2A}{dx^2} = -12x \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=2} = -12(2) = -24 \quad \text{por lo tanto es un máximo.}$$

Dimensiones del rectángulo de área máxima: $base = 2x = 4\,u$ y $altura = 8\,u$

El área máxima es: $A_{\max} = 4(8) = 32\ u^2$

ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

35. Se requiere construir un recipiente cilíndrico circular recto que tenga un volumen de $24\pi\ cm^3$, de tal manera que su costo sea mínimo. Se sabe que el recipiente no tiene tapa y el costo del material de la base es 3 veces mayor que el material del cuerpo. Determinar las dimensiones del recipiente y decir cuál será su costo mínimo si el material del cuerpo cuesta $\$\,2/cm^2$.



Solución. Tenemos los siguientes datos: $V_c = 24\pi\ cm^3$ y $C_C = \$\,2\,/\,cm^2$

El costo total es el costo de las piezas multiplicado por sus respectivas áreas: $C_T = 2\left(2\pi r\right)h + 6\pi r^2$

De la expresión del volumen de un cilindro circular recto, se tiene que:

$$\pi r^2 h = 24\pi \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24\pi}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24}{r^2}$$

resultado que se sustituye en el costo y: $C_T\left(r\right) = 2\left(2\pi r\right)\dfrac{24}{r^2} + 6\pi r^2 = \dfrac{96\pi}{r} + 6\pi r^2$

Se deriva la ecuación del costo para obtener los valores críticos y empleando el criterio de la segunda derivada para determinar su naturaleza, tenemos:

$$C_T{}'\left(r\right) = -\frac{96\pi}{r^2} + 12\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-96\pi + 12\pi r^3}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 12\pi r^3 = 96\pi \quad \therefore \quad r = 2$$

$$C_T{}''\left(r\right) = \frac{192\pi}{r^3} + 12\pi \quad ; \quad r = 2 \quad \Rightarrow \quad C''\left(2\right) > 0 \quad \therefore \quad \text{Costo mínimo}$$

De donde $h = \dfrac{24}{4} = 6$

Luego las dimensiones del recipiente son $r = 2\ cm$ y $h = 6\ cm$

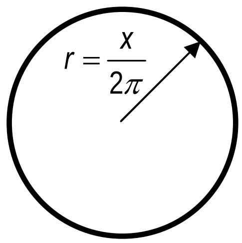
y el costo mínimo: $C_T(r) = \dfrac{96\pi}{2} + 6\pi \cdot 4 = 48\pi + 24\pi \quad \Rightarrow \quad C_{T_{\min}} = 72\pi \approx \$\,226.19$

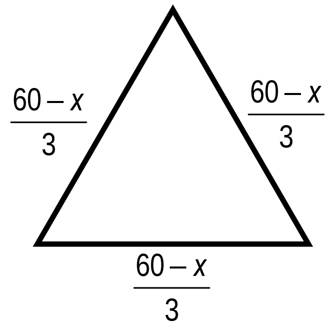
ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

36. Una cuerda de $60\,cm$ de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes va a doblarse en forma de circunferencia y la otra en forma de triángulo equilátero. Determinar cómo se debe cortar la cuerda para que la

suma de las áreas del círculo y del triángulo que se forman se máxima, y cómo se debe cortar para que sea mínima.

Solución. Se denotará a "x" como el pedazo de cuerda que corresponde a la circunferencia, por lo tanto la otra parte será de longitud $60-x$, la cual corresponde al triángulo equilátero.





Para obtener el área de la circunferencia se tiene que el perímetro es igual a: $2\pi r=x$, de donde: $r=\frac{x}{2\pi}$

por lo que el área queda como: $A_C=\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}$

Para obtener el área del triángulo se tiene que el perímetro es igual a: $3s=60-x$, donde: $s=\frac{60-x}{3}$

por fórmula se tiene que: $A_t=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{60-x}{3}\right)^2 \Rightarrow A_t=\frac{\sqrt{3}}{36}(60-x)^2$

Entonces la suma de las áreas es: $A_T=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}(60-x)^2$

Se deriva esta suma, se iguala a cero para obtener los puntos críticos:

$$A'_T=\frac{x}{2\pi}-\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)(60-x) \quad ; \quad A'_T=\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{18}\right)x-\frac{10\sqrt{3}}{3}=0 \quad \therefore \quad x=\frac{10\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)}\approx 22.61$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa en el valor crítico obtenido:

$A''_T=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{18}$; como siempre es positiva, el punto critico es un mínimo.

Para que la suma de las áreas sea mínima $x=22.61\,cm$ y el otro pedazo de cuerda debe ser de $37.39\,cm$, para el triángulo. Luego, la suma mínima de las áreas es:

$$A_T=\frac{(22.61)^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}(60-22.61)^2 \Rightarrow A_T=40.681+67.262 \quad \therefore \quad A_T\approx 107.943\,cm^2$$

A debe alcanzar su máximo valor en la frontera al no haber otros número críticos. Si $x=0$, entonces la cuerda se usa para formar un triangulo

$$A=\frac{\sqrt{3}}{36}(60)^2=173.21\,cm^2$$

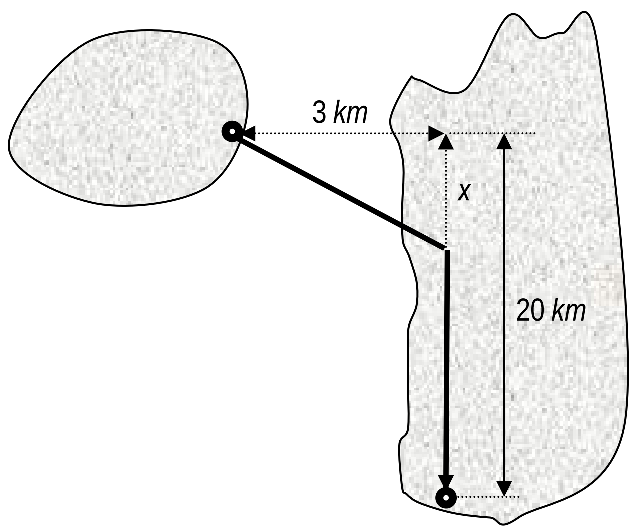
y si $x=60$ toda la cuerda se usa para formar una circunferencia

$A = \frac{1}{4\pi}(60)^2 = 286.48\ \ cm^2$ que conduciría al valor máximo, es decir,

$$A_T = 286.48 + 0 \quad \therefore \quad A_T \approx 286.48\ cm^2$$

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHÁVEZ

37. Algunas aves vuelan más lento sobre agua que sobre tierra. Un ave vuela con velocidades constantes de $6\ km/h$ sobre agua y de $10\ km/h$ sobre tierra. Emplear la información de la figura para determinar la trayectoria que debe seguir el ave a fin de minimizar el tiempo total de vuelo entre la playa de una isla y su nido situado en la playa de otra isla.



Solución. La distancia recorrida por el ave que se mueve a velocidad constante en función del tiempo está dada por la relación $d = vt$, de donde se obtiene que $t = \frac{d}{v}$.

El tiempo de vuelo entre la playa y el nido está dado por $t_T = t_m + t_t$, en donde t_T es el tiempo total, t_m es el tiempo que vuela sobre el mar y t_t el tiempo que vuela sobre la tierra.

A partir de la figura se tiene que: $d_m = \sqrt{9 + x^2}$ y $d_t = 20 - x$

Se sustituyen las distancias y los valores dados de velocidad sobre el agua y sobre la tierra en la función del tiempo y:

$$t_T = \frac{d_m}{v_m} + \frac{d_t}{v_t} \quad \Rightarrow \quad t_T = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{6} + \frac{20 - x}{10}$$

Se deriva la función del tiempo con respecto a la variable x y se iguala a cero:

$$\frac{dt_T}{dx} = \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{10} \quad ; \quad \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad 10x = 6\sqrt{9 + x^2}$$

$$(5x)^2 = \left(3\sqrt{9 + x^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 25x^2 = 9\left(9 + x^2\right) \quad \Rightarrow \quad 16x^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{81}{16}} = \pm\frac{9}{4}$$

Como no puede haber distancias negativas, la distancia x buscada es $x=\frac{9}{4}=2.25\ \ km$

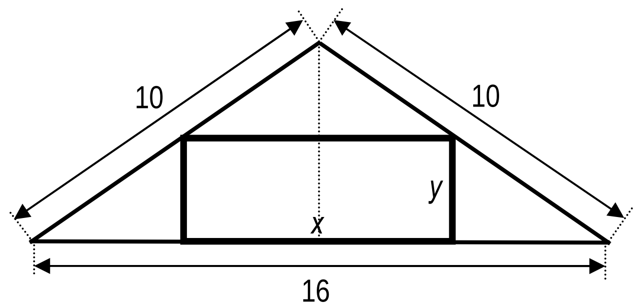
Se sustituye el resultado anterior para obtener las distancias sobre el agua y sobre la tierra,

$$d_m=\sqrt{9+(2.25)^2}\ \Rightarrow\ d_m=3.75\ km \quad \text{y} \quad d_t=20-2.25\ \Rightarrow\ d_t=17.75\ km$$

Con la segunda derivada se verificaría que se trata de un tiempo mínimo.

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

38. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en el triángulo de la figura:



Solución. La función a maximizar es $A = xy$

Se deja dicha función en términos de una sola variable.

Con el teorema de Pitágoras se obtiene la altura "h" del triángulo

$$100=64+h^2 \quad \Rightarrow \quad h=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$$

Por medio de triángulos semejantes se tiene que:

$$\frac{6}{8}=\frac{y}{8-\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}=\frac{y}{8-\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad 24-\frac{3}{2}x=4y \quad \Rightarrow \quad 48-3x=8y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{48-3x}{8}$$

Así la función queda:

$$A(x)=x\left(\frac{48-3x}{8}\right) \quad \Rightarrow \quad A(x)=\frac{48x-3x^2}{8} \quad \Rightarrow \quad A(x)=-\frac{3}{8}x^2+6x$$

Ahora se obtiene el valor de x para el cual la función es máxima.

$$A'(x)=-\frac{3}{4}x+6 \Rightarrow -\frac{3}{4}x+6=0 \Rightarrow \frac{3}{4}x=6 \Rightarrow x=8$$

Se comprueba si este valor corresponde a un máximo.

$$A''(x)=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad A''(8)<0$$

Por lo tanto con $x=8$ se tiene el área máxima.

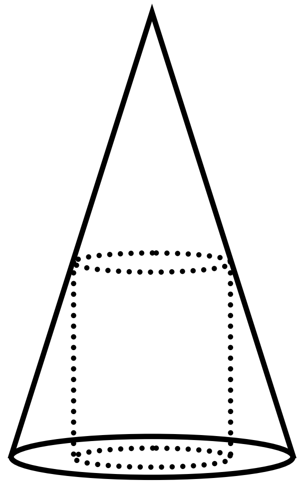
Ahora se obtiene el valor de y, que equivale a: $y=\frac{48-3(8)}{8}=\frac{48-24}{8}=\frac{24}{8}=3$

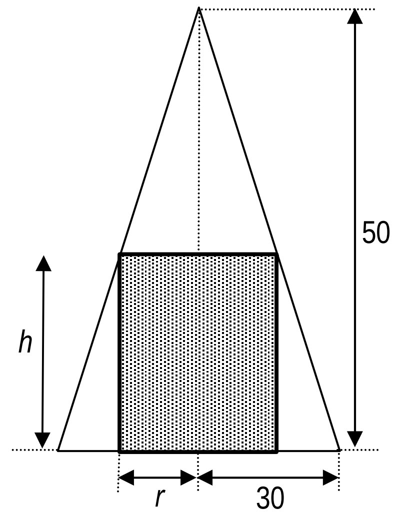
Con lo cual el área máxima es: $A_{\max}=(8)(3)=24\ u^2$

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

39. Determinar el radio r y la altura h del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto cuyo radio de la base es $30\,cm$ y su altura $50\,cm$.

Solución. Para determinar la función volumen del cilindro, que relacione a las variables y a los datos, se analiza la siguiente figura.





Por triángulos semejantes se tiene que: $\dfrac{h}{30-r}=\dfrac{50}{30} \;\Rightarrow\; h=\dfrac{5}{3}(30-r)$

Se sustituye este valor en la expresión del volumen del cilindro y tenemos:

$$V_C=\pi r^2 h \quad\Rightarrow\quad V_C=\pi r^2\left[\frac{5}{3}(30-r)\right] \;\Rightarrow\; V_C=\frac{5\pi r^2}{3}(30-r) \;\Rightarrow\; V_C=50\pi r^2-\frac{5\pi r^3}{3}$$

Se deriva la función del volumen del cilindro con respecto al radio r y se iguala a cero, de donde:

$$\frac{dV_C}{dr}=100\pi r-5\pi r^2 \quad;\quad 100\pi r-5\pi r^2=0 \;\Rightarrow\; r\pi(100-5r)=0 \;\Rightarrow\; r(100-5r)=0$$

las dos soluciones posibles son: $r=0$ y $100-5r=0 \;\Rightarrow\; r=\dfrac{100}{5}=20$

La primera solución se descarta, ya que si el radio del cilindro fuera igual a cero el volumen del cilindro sería también igual a cero, es decir, que no habría cilindro.

Luego $r=20\ cm$ es el radio que hace máximo el volumen del cilindro. Para obtener la altura del cilindro se utiliza la función que relacionaba ambas variables:

$$h=\frac{5}{3}(30-r) \quad;\quad h=\frac{5}{3}(30-20) \;\Rightarrow\; h=\frac{50}{3}\approx 16.67$$

Para verificar si este volumen es máximo, se obtiene $\dfrac{d^2V}{dr^2}$ y se determina su signo. Así:

$$\frac{d^2V_C}{dr^2}=100\pi-10\pi r \quad;\quad \left.\frac{d^2V_C}{dr^2}\right|_{r=20}=-100\pi<0 \quad\therefore\quad \text{volumen máximo}$$

ALUMNO: EDGAR ENRIQUE CÁRDENAS BÁRCENAS

40. Estudiar la variación de la función $y=(x-1)^3+1$.

Solución.

Intersecciones. Para determinar las intersecciones de la curva que representa a la gráfica de la función con cada uno de los ejes coordenados, se hace cero por separado cada una de las variables. Así se tiene:

i) Con el eje y: $x=0 \Rightarrow y=0 \therefore$ Corta al eje y en el origen

ii) Con el eje x: $y=0 \Rightarrow x=0 \therefore$ Corta al eje x en el origen

Simetrías. Para estudiar la posible simetría de la curva con respecto a cada uno de los ejes coordenados o con respecto al origen, se sustituyen las variables x y y por $-x$ y $-y$ y si la función no se altera, entonces existe simetría. Así,

i) Simetría con el eje x: Se cambia y por $-y$. Se tiene $-y=(x-1)^3+1$

Como se altera la función, no hay simetría.

ii) Simetría con el eje y: Se cambia x por $-x$. Se tiene $y=(-x-1)^3+1$

Como se altera la función, no hay simetría.

iii) Simetría con el origen: Se cambia x por $-x$ y y por $-y$. Se tiene $-y=(-x-1)^3+1$

Como se altera la función, no hay simetría.

Asíntotas. Estas, si existen, se determinan de la siguiente forma:

i) Asíntotas verticales. No tiene, ya que no existe ningún valor real al cual tienda x que haga que el límite de la función no exista.

ii) Asíntotas horizontales. No tiene, ya que el límite de la función, cuando la variable x tiende a infinito, no existe.

Extensión. Aquí, lo que se hace es despejar cada una de las variables y determinar el dominio de la función obtenida. De esta manera

i) Extensión en x: $y=(x-1)^3+1 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

ii) Extensión en y: De la función, se puede ver que $y\in\mathbb{R}$.

Extremos relativos, puntos de inflexión y concavidad.

Se obtienen la primera y la segunda derivadas. De esta forma se tiene que

$$y=(x-1)^3+1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx}=3(x-1)^2 \quad ; \quad 3(x-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \text{(Valor crítico)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6(x-1) \quad ; 6(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \text{(Posible punto de inflexión)}$$

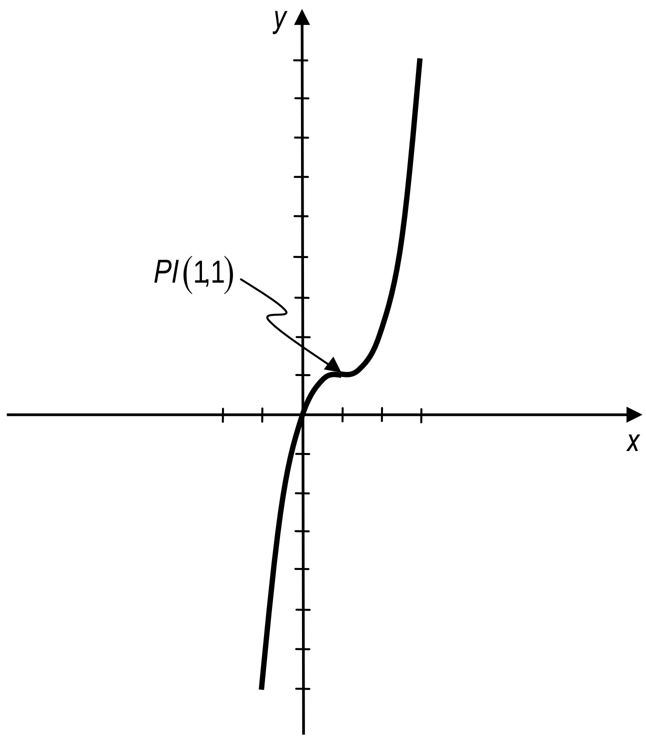
Ahora se construye la tabla:

x	y	y'	y''	Característica
$(-\infty,1)$	creciente	$+$	$-$	
$x=1$	P. de Inflexión	0	0	P.I $(1,1)$
$(1,\infty)$	creciente	$+$	$+$	

De la tabla se puede apreciar que la curva es creciente en el intervalo $(-\infty,\infty)$; es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,1)$, y cóncava hacia arriba en $(1,\infty)$. No se tienen máximos ni mínimos relativos. Finalmente, tiene un punto de inflexión en $(1,1)$.

Representación gráfica.

Con la información obtenida en los puntos anteriores se procede al trazo aproximado de la gráfica.



ALUMNA: RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE

41. Estudiar la variación de la función $y = 2x^2 - x^4$.

Solución.

Intersecciones.

i) Con el eje y : $x = 0 \Rightarrow y = 0 \therefore$ Corta al eje y en el origen

ii) Con el eje x : $y = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$ (donde corta al eje x)

Simetrías.

i) Simetría con el eje x: Se cambia y por $-y$. Se tiene $-y = 2x^2 - x^4$
Como se altera la función, no hay simetría.

ii) Simetría con el eje y: Se cambia x por $-x$. Se tiene $y = 2x^2 - x^4$
Como no se altera la función, la curva es simétrica con respecto al eje y.

iii) Simetría con el origen: Se cambia x por $-x$ y y por $-y$. Se tiene $-y = 2x^2 - x^4$
Como se altera la función, no hay simetría.

Asíntotas.

i) Asíntotas verticales: No tiene, ya que no existe ningún valor real al cual tienda x y que haga que el límite de la función no exista.

ii) Asíntotas horizontales: No tiene, ya que el límite de la función, cuando la variable tiende a infinito, no existe.

Extensión.

i) Extensión en x : $y = 2x^2 - x^4 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

iii) Extensión en y : De la función, se puede ver que $y \in \mathbb{R}$.

Extremos relativos, puntos de inflexión y concavidad.

$$y = 2x^2 - x^4 \;;\; \frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3 \;;\; 4x - 4x^3 = 0 \;\Rightarrow\; 4x\left(1 - x^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{(puntos críticos)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 12x^2 \;;\; 4 - 12x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{4}{12} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ x = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \text{(posibles puntos de inflexión)}$$

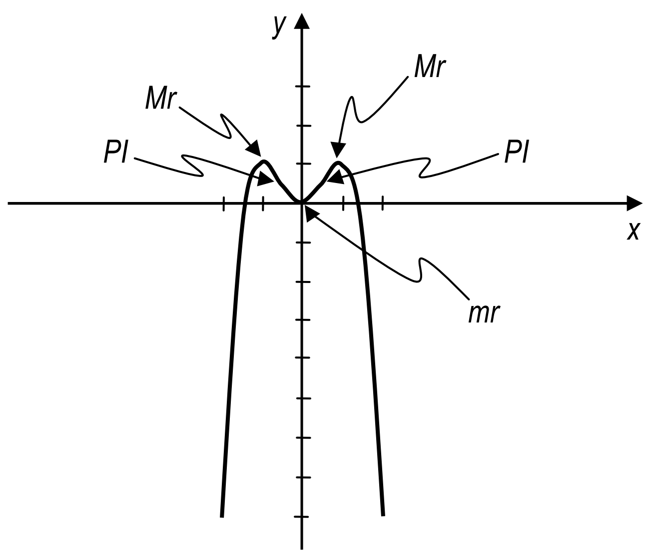
Ahora se construye la tabla:

x	y	y'	y''	CARACTERÍSTICA
$\left(-\infty, \; -1\right)$	creciente	$+$	$-$	
$x = -1$	máximo	0	$-$	M.r. $\left(-1, 1\right)$
$\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	decreciente	$-$	$-$	
$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	P. de inflexión		0	P.I. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \; 0.5556\right)$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \; 0\right)$	decreciente	$-$	$+$	
$x = 0$	mínimo	0	$+$	m.r. $\left(0, \; 0\right)$
$\left(0, \; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	creciente	$+$	$+$	
$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	P. de inflexión		0	P.I. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \; 0.5556\right)$
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \; 1\right)$	creciente	$+$	$-$	
$x = 1$	máximo	0	$-$	M.r. $\left(1, 1\right)$
$\left(1, \; \infty\right)$	decreciente	$-$	$-$	

De la tabla se puede decir que la curva que representa a la función dada es creciente en los intervalos $\left(-\infty, \; -1\right)$ y $\left(0, 1\right)$; decreciente en los intervalos $\left(-1, \; 0\right)$ y $\left(1, \; \infty\right)$. Es cóncava hacia abajo en los intervalos

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, y cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Tiene dos máximos relativos en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$. Finalmente tiene dos puntos de inflexión en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0.5556\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0.5556\right)$.

Representación gráfica.
Con la información obtenida en los puntos anteriores se procede al trazo aproximado de la gráfica.



ALUMNA: RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE

42. Estudiar la variación de la función $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Solución.

Intersecciones.

Con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = -1$

Con el eje x: $y = 0 \therefore$ No hay intersección

Simetrías.

Simetría con el eje x: Se cambia y por $-y$. Se tiene $-y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Como se altera la función, no hay simetría.

Simetría con el eje y: Se cambia x por $-x$. Se tiene $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Como no se altera la función, la curva es simétrica con respecto al eje y.

Simetría con el origen: Se cambia x por $-x$ y y por $-y$. Se tiene $-y=\dfrac{1}{x^2-1}$

Como se altera la función, no hay simetría.

Asíntotas.

Asíntotas verticales. $x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1,\quad x_2=-1$. Estas dos rectas son asíntotas verticales ya que $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x^2-1}\to\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}\to\infty$ (no existen)

Asíntotas horizontales. Se obtiene el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$

por lo que la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la función.

Extensión.

Extensión en x: $y=\dfrac{1}{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad x\in\mathbb{R}-\{1,\ -1\}$

Extensión en y:

$$yx^2-y=1 \qquad x=\sqrt{\frac{y+1}{y}} \quad\Rightarrow\quad y\in\mathbb{R}-(-1,\ 0]$$

Extremos relativos, puntos de inflexión y concavidad.

Se obtienen la primera y la segunda derivadas.

$$y=\frac{1}{x^2-1}\quad;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\quad;\quad -2x=0 \ \text{ y } \ \left(x^2-1\right)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0,\quad x_2=-1,\quad x_3=1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}\quad;\quad \left(x^2-1\right)^3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-1,\quad x_2=1$$

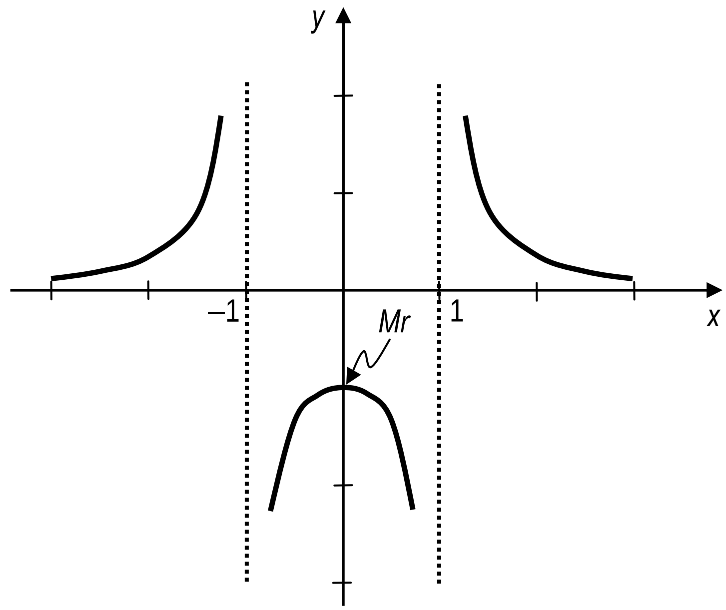
Se construye la tabla correspondiente

x	y	y'	y''	CARACTERÍSTICA
$(-\infty,-1)$	creciente	$+$	$+$	
$x=-1$	Asíntota			
$(-1,\ 0)$	creciente	$+$	$-$	
$x=0$	máximo	0	$-$	M.r. $(0,\ -1)$
$(0,\ 1)$	decreciente	$-$	$-$	
$x=1$	Asíntota			
$(1,\ \infty)$	decreciente	$-$	$+$	

De la tabla se puede decir que la curva que representa a la función dada es creciente en el intervalo $(-\infty,\ 0)$; decreciente en el intervalo $(0,\ \infty)$. Es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1,\ 1)$ y cóncava hacia arriba en $(-\infty,\ -1)$ y $(1,\ \infty)$, y tiene un máximo relativo en $(0,\ -1)$.

Representación gráfica.

Con la información obtenida en los puntos anteriores se procede al trazo aproximado de la gráfica.



ALUMNA: RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE

43. Estudiar la variación de la función $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Solución.

Intersecciones.

i) Con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \therefore$ Corta al eje y en el origen

ii) Con el eje x: $y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \therefore$ Corta al eje x en el origen

Simetrías.

i) Simetría con el eje x: Se cambia y por $-y$. Se tiene $-y = \dfrac{4x}{x^2+1}$

Como se altera la función, no hay simetría.

ii) Simetría con el eje y: Se cambia x por $-x$. Se tiene $y = \dfrac{-4x}{x^2+1}$

Como se altera la función, no hay simetría.

iii) Simetría con el origen: Se cambia x por $-x$ y y por $-y$. Se tiene $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$

Como no se altera la función, la curva es simétrica con respecto al origen.

Asíntotas.

i) Asíntotas verticales. No tiene, ya que no existe ningún valor real al cual tienda x y que haga que el límite de la función no exista.

ii) Asíntotas horizontales. Se obtiene el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x^2+1} = 0$ por lo que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

Extensión. Aquí, se despeja cada una de las variables y se determina el dominio de la función obtenida. De esta manera:

i) Extensión en x: $y = \dfrac{4x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

ii) Extensión en y: $\quad yx^2-4x+y=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4y^2}}{2y}$

$$16-4y^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4-y^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad (2-y)(2+y)\geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2-y\geq 0 \quad \Rightarrow \quad y\leq 2 \\ 2+y\geq 0 \quad \Rightarrow \quad y\geq -2 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad -2\leq y\leq 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2-y\leq 0 \quad \Rightarrow \quad y\geq 2 \\ 2+y\leq 0 \quad \Rightarrow \quad y\leq -2 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \text{no tiene}$$

Por lo tanto, $y\in[-2,2]$. y por el denominador, $y\neq 0$

Extremos relativos, puntos de inflexión y concavidad.

Se obtienen la primera y la segunda derivadas; de esta forma se tiene:

$$y=\frac{4x}{x^2+1} \quad ; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4\left(x^2+1\right)-4x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \quad ; \quad \left(1-x^2\right)=0 \quad \Rightarrow x=1 \quad ; \quad x=-1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-8x\left(x^2+1\right)^2-4\left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)(2x)}{\left(x^2+1\right)^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8x^3-24x}{\left(x^2+1\right)^3} \quad ;$$

$$8x^3-24x=0 \quad \Rightarrow \quad 8x\left(x^2-3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad ; \quad x=\sqrt{3} \quad ; \quad x=-\sqrt{3}$$

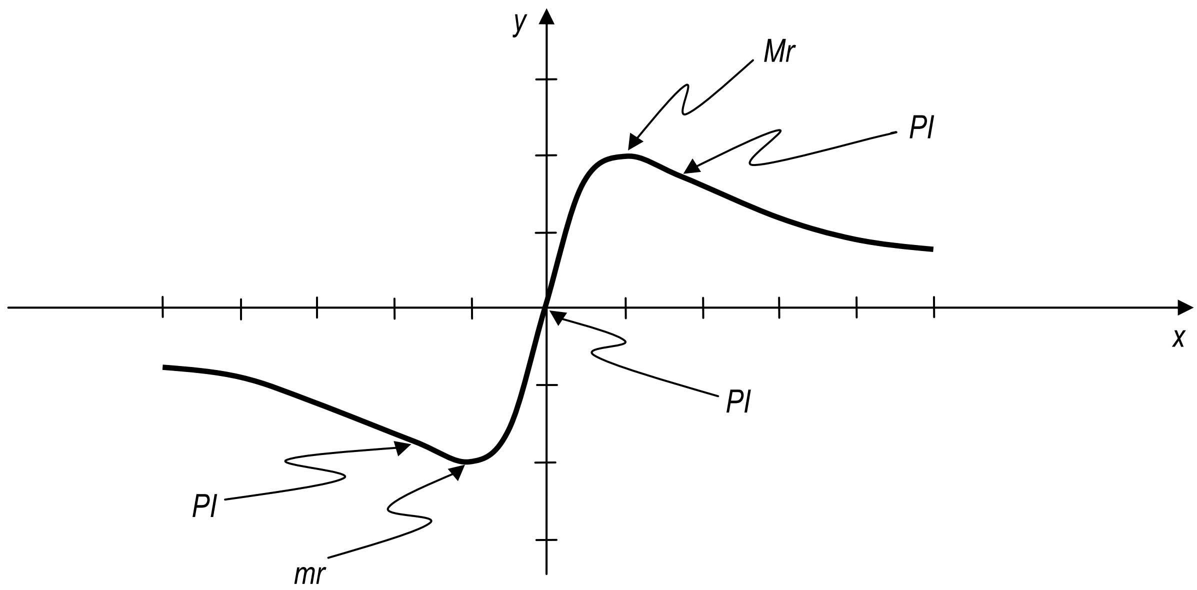
Ahora se construye la tabla correspondiente

x	y	y'	y''	CARACTERÍSTICA
$\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$	decreciente	$-$	$-$	
$x=-\sqrt{3}$	P. de inflexión		0	P.I. $\left(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right)$
$\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$	decreciente	$-$	$+$	
$x=-1$	mínimo	0	$+$	m.r. $(-1,\ -2)$
$(-1,\ 0)$	creciente	$+$	$+$	
$x=0$	P. de inflexión		0	P.I. $(0,\ 0)$
$(0,\ 1)$	creciente	$+$	$-$	
$x=1$	máximo	0	$-$	M.r. $(1,\ 2)$
$\left(1,\ \sqrt{3}\right)$	decreciente	$-$	$-$	
$x=\sqrt{3}$	P. de inflexión		0	P.I. $\left(\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$
$\left(\sqrt{3},\ \infty\right)$	decreciente	$-$	$+$	

De la tabla se puede decir que la curva que representa a la función dada es creciente en los intervalos $(-1,\ 1)$; decreciente en los intervalos $(-\infty,\ -1)$ y $(1,\ \infty)$. Es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$ y $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$, y cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ y $\left(\sqrt{3},\ \infty\right)$. Tiene un máximo relativo en $(1,\ 2)$ y un mínimo relativo en $(-1,\ -2)$. Finalmente tiene tres puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right)$, $(0,\ 0)$ y $\left(\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$.

a) Representación gráfica.

Con la información obtenida en los puntos anteriores se procede al trazo aproximado de la gráfica.



ALUMNA: RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE

44. Estudiar y analizar la variación de la función:

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}$$

Solución.

Intersecciones.

Con el eje $y: \; x=0 \;\; \Rightarrow \;\; y=0$

Con el eje $x: \; y=0 \;\; \Rightarrow \;\; x=0$

Simetrías.

Simetría con el eje $x: \;\; y\to -y \;\; \Rightarrow \;\; -y=\frac{x^2}{x^2-1}$ $\quad\therefore$ no hay simetría

Simetría con el eje $y: \;\; x\to -x \;\; \Rightarrow \;\; y=\frac{x^2}{x^2-1}$ $\quad\therefore$ sí hay simetría

Simetría con el origen: $x\to -x,\, y\to -y \;\; \Rightarrow \;\; -y=\frac{x^2}{x^2-1}$ $\quad\therefore$ no hay simetría

Asíntotas.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x=1}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{0}\to\infty$ y $\lim\limits_{x\to\,-1}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{0}\to\infty$

Por lo tanto $x=1$ y $x=-1$ son asíntotas verticales

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+0}=1$$ por lo que $y=1$ es una asíntota horizontal.

Extensión.

Extensión con el eje x ; $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, por lo tanto $x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$

a) Extensión con el eje y

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad x^2 y - y - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{y-1} \geq 0$$

Por lo tanto $y \in (-\infty,\ 0] \cup (1,\ \infty)$

Extremos relativos, puntos de inflexión y concavidad.

Se deriva la función y se obtienen los puntos críticos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad ; \quad \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$(x^2-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Se evalúan los puntos críticos en la ecuación original:

$y(0) = \dfrac{(0)^2}{(0)^2 - 1} = 0$ y, como ya se determinó, en $x = -1$ y $x = 1$ no hay valor de la función ya que se presentan asíntotas verticales.

Se obtiene la segunda derivada y redeterminan los posibles puntos de inflexión:

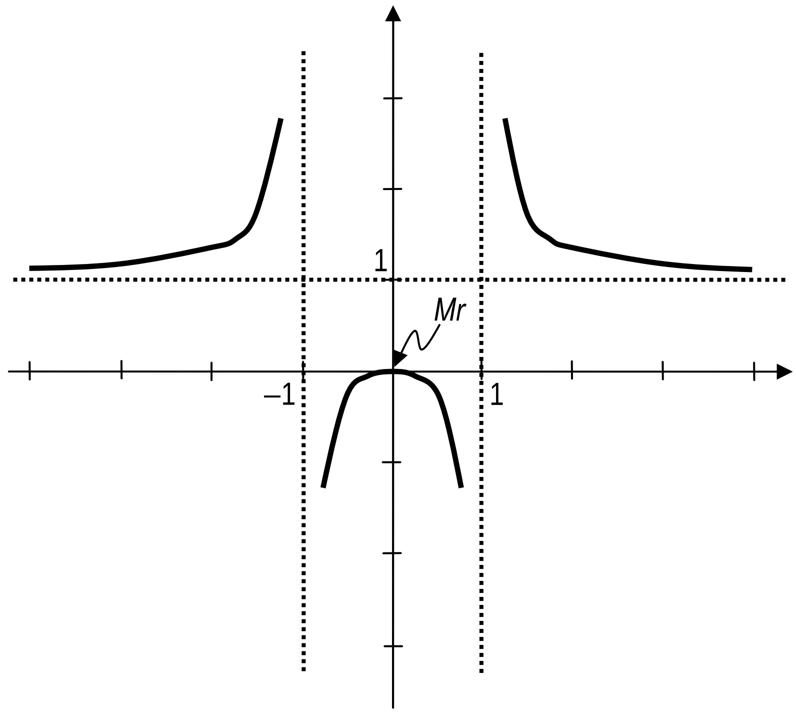
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x^2-1)^2(-2) + 2x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x^2 + 2 + 8x^2}{(x^2-1)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3}$$

No existen valores reales que anulen la segunda derivada, por lo que no hay puntos de inflexión.

Tabla:

x	y	y'	y''	Característica
$(-\infty,\ -1)$	Creciente	$+$	$+$	
$x = -1$				Asíntota vertical
$(-1,\ 0)$	Creciente	$+$	$-$	
$x = 0$			$-$	$\mathrm{Mr}(0,0)$
$(0,\ 1)$	Decreciente	$-$	$-$	
$x = 1$				Asíntota vertical
$(1,\ \infty)$	Decreciente	$-$	$+$	

Representación gráfica.



ALUMNO: HUGO MENDIETA PACHECO

45. Estudiar la variación de la siguiente función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Solución.
Intersecciones.
Con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \therefore$ corta al eje y en el origen.
Con el eje x: $y = 0 \Rightarrow x = 0 \therefore$ corta al eje x en el origen.
Simetrías.
Con el eje x: $-y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$, por lo que no hay simetría.
Con el eje y: $y = -\frac{x^3}{x^2 - 4}$, por lo que no hay simetría
Con el origen: $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$, por lo que sí hay simetría con el origen.
Asíntotas.
Asíntotas verticales: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$; $\lim_{x \to -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} \to \infty$ y $\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} \to \infty$
por lo que las asíntotas verticales son: $x = -2$ y $x = 2$.
Asíntotas horizontales: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} \to \infty$ (no existe) $\therefore$ no tiene asíntotas horizontales.

Extensión.

Extensión en x : $y=\dfrac{x^3}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$.

Extensión en y : $y \in R$

Extremos relativos, puntos de inflexión y concavidad.

Se obtiene la primera y segunda derivada de la función:

$$y'=\frac{(x^2-4)(3x^2)-x^3(2x)}{(x^2-4)^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x^2-12)=0 \\ (x^2-4)^2=0 \end{cases}$$

Por lo que hay puntos críticos en:

$x=-\sqrt{12}\approx -3.46$; $x=0$; $x=\sqrt{12}\approx 3.46$; en $x=-2$ y $x=2$ hay asíntotas verticales.

Se deriva nuevamente para obtener los posibles puntos de inflexión:

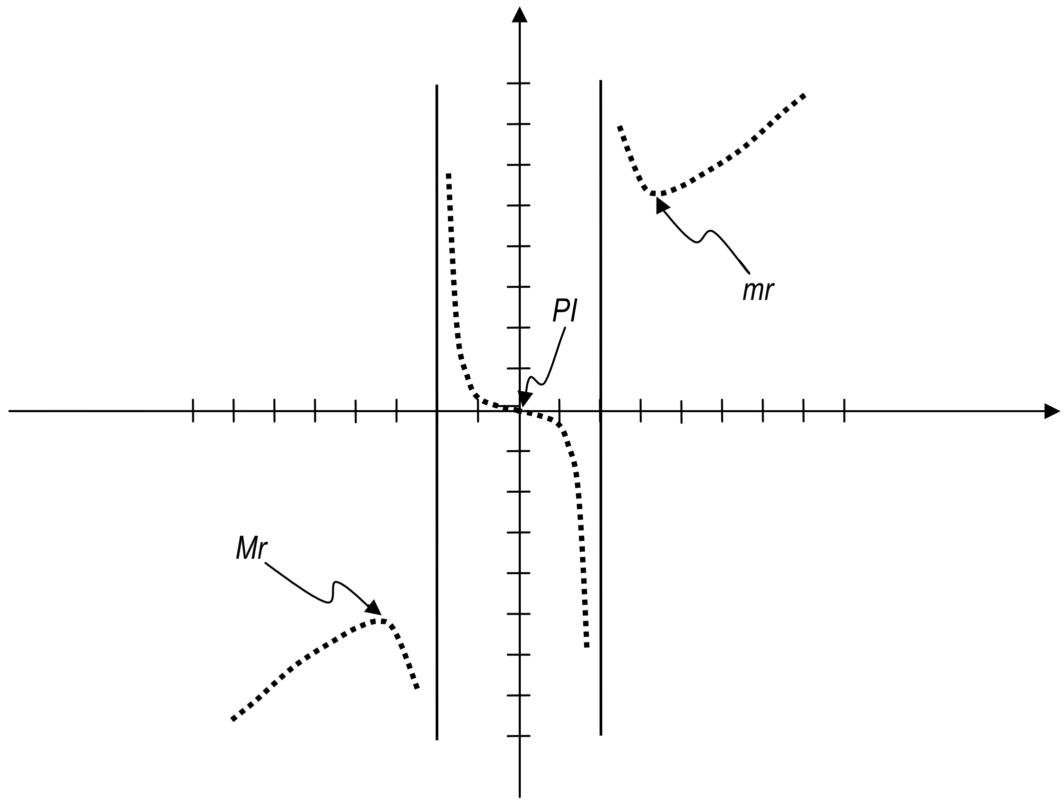
$$y''=\frac{(x^2-4)^2(4x^3-24x)-(x^4-12x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} \quad \Rightarrow \quad y''=\frac{4x^5-16x^3-24x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3}$$

$$y''=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3} \quad ; \quad 8x(x^2+12)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x\approx -3.46 \\ x=0 \\ x\approx 3.46 \end{cases} \quad \text{(posibles puntos de inflexión)}$$

Ahora se construye la tabla:

x	y	y'	y''	Características
$(-\infty,\ -3.46)$	creciente	$+$	$-$	Cóncava hacia abajo
$x=-3.46$	Máximo	0	$-$	Mr $(-3.46,\ -5.18)$
$(-3.46,\ -2)$	decreciente	$-$	$-$	Cóncava hacia abajo
$x=-2$	Asíntota			
$(-2,\ 0)$	decreciente	$-$	$+$	Cóncava hacia arriba
$x=0$	Punto de Inflexión	0	0	P. I. $(0,\ 0)$
$(0,\ 2)$	decreciente	$-$	$-$	Cóncava hacia abajo
$x=2$	Asíntota			
$(2,\ 3.46)$	decreciente	$-$	$-$	Cóncava hacia abajo
$x=3.46$	Mínimo	0	$+$	mr $(3.46,\ 5.18)$
$(3.46,\ \infty)$	Creciente	$+$	$+$	Cóncava hacia arriba

La gráfica aproximada de la función es:



ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

SUCESIONES Y SERIES

1. Escribir los 5 primeros términos y el décimo de la siguiente sucesión

$$\left\{ (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3n-1} \right\}$$

Solución. Para determinar los términos sólo se sustituye n por el término que se busca, es decir, se sustituye n por: $1,\ 2,\ 3\ 4,\ 5\ y\ 10$.

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{1+1} \frac{1^2}{3(1)-1} = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{2+1} \frac{2^2}{3(2)-1} = -\frac{4}{5}$$

$$n=3 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{3+1} \frac{3^2}{3(3)-1} = \frac{9}{8}$$

$$n=4 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{4+1} \frac{4^2}{3(4)-1} = -\frac{16}{11}$$

$$n=5 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{5+1} \frac{5^2}{3(5)-1} = \frac{25}{14}$$

$$n=10 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{10+1} \frac{10^2}{3(10)-1} = -\frac{100}{29}$$

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHAVEZ

2. Determinar si converge o diverge la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{2n}{1-4n} \right\}$$

Solución. Se tiene que $\{a_n\} = \left\{ \frac{2n}{1-4n} \right\}$. Se calcula el límite del término enésimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1-4n} = \frac{\infty}{-\infty} \quad \text{(indeterminado)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1-4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{4n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{n} - 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ converge a $-\frac{1}{2}$.

LOS COORDINADORES

3. Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ converge o diverge

Solución. Para que una sucesión sea convergente debe existir su límite cuando $n \to \infty$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1+0 = 1$$

Por lo tanto la sucesión converge al valor 1 .

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHAVEZ

4. Determinar si las siguientes sucesiones convergen o divergen.

$$i)\quad \{f(n)\} = \left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\} \quad ; \quad ii)\quad \{f(n)\} = \left\{\frac{3}{2n} + \frac{2n^2-7n+6}{4n^2-5n+1}\right\}$$

Solución. Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión es convergente y converge al valor L . Si el límite no existe, entonces la sucesión es divergente.

$$i)\quad \{f(n)\} = \left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n}} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0} \to \infty$$

Como el límite no existe entonces la sucesión diverge.

$$ii)\quad \{f(n)\} = \left\{\frac{3}{2n} + \frac{2n^2-7n+6}{4n^2-5n+1}\right\} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n} + \frac{2n^2-7n+6}{4n^2-5n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n+6}{4n^2-5n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}}{\dfrac{2n}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^2}{n^2}-\dfrac{7n}{n^2}+\dfrac{6}{n^2}}{\dfrac{4n^2}{n^2}-\dfrac{5n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{7}{n}+\dfrac{6}{n^2}}{4-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 0 + \frac{2-0+0}{4-0+0} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión converge al valor $\dfrac{1}{2}$.

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

5. Determinar la naturaleza de la siguiente sucesión:

$$\{c_n\} = \left\{\frac{3n^2-5}{\sqrt[3]{8n^6+7}}\right\}$$

Solución. Se investiga si existe el límite y en caso afirmativo su valor:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5}{\sqrt[3]{8n^6 + 7}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(indeterminado)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5}{\sqrt[3]{8n^6 + 7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{8n^6+7}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{8n^6}{n^6} + \frac{7}{n^6}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{\sqrt[3]{8 + \frac{7}{n^6}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

Luego, la sucesión converge al valor de $\frac{3}{2}$.

LOS COORDINADORES

6. Dada la sucesión $\frac{1}{n^2}$, determinar su naturaleza, dar sus primeros diez términos y determinar si es acotada.

Solución. Primero se determinará si existe el límite de dicha sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como existe el límite la sucesión es convergente al valor 0.
Se desarrollan los primeros términos de la sucesión y tenemos:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}$$

Con esto se observa que la sucesión es monótona decreciente
También se observa que la sucesión es acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1 ; por lo tanto la sucesión es acotada.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

7. Dada la sucesión $\frac{n}{2n+1}$, determinar si es convergente o divergente, dar sus primeros diez términos e investigar si es acotada.

Solución. Se determina si existe el límite de dicha sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}$$

Sí existe el límite, por lo tanto la sucesión es convergente al valor $\frac{1}{2}$.
Se desarrollan los primeros términos de la sucesión y se tiene que:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17}, \frac{9}{19}, \frac{10}{21}$$

Se observa que la sucesión es monótona creciente.

También se ve que la sucesión es acotada inferiormente por $\frac{1}{3}$ y superiormente por $\frac{1}{2}$, por lo que es acotada.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

8. Determinar el término enésimo de la sucesión que tiene como primeros cinco términos los siguientes:

$$\frac{1}{1}, -\frac{7}{2}, \frac{25}{6}, -\frac{79}{24}, \frac{241}{120}$$

Solución. Aquí se trata de realizar ejercicios numéricos hasta lograr la fórmula que define a los términos de la sucesión. En este caso, se ve que los numeradores equivalen a $3^n - 2$ y los denominadores son producto de $n!$. Luego la sucesión queda definida como:

$$(-1)^{n-1}\frac{3^n - 2}{n!}$$

LOS COORDINADORES

9. Determinar si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{10n+1}$$

Solución. Cuando se presenten este tipo de series, en ocasiones es conveniente separarla para proceder a su análisis:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{10n+1}$$

Si se calcula el límite del término enésimo de la primera, se obtiene que: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10n+1} = \frac{1}{10} \neq 0$; por lo tanto es divergente. Por lo que, independientemente del carácter de la segunda, la serie en estudio es divergente.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

10. Demostrar que las siguientes dos series son divergentes:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \ldots \quad y \quad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3 = 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$$

Solución. Se obtiene en ambas series el límite del término enésimo cuando $n \to \infty$ y se llega a:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = 1 \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(3) = 3 \neq 0$$

Como en ambos casos el límite es diferente de cero, por la prueba de la divergencia se concluye que las series son divergentes.

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

11. Aplicar la prueba de la divergencia a cada una de las siguientes series y determinar si son divergentes:

$$i)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \quad ; \quad ii)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad ; \quad iii)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad iv)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$$

Solución. Se obtiene el límite del término enésimo a_n . Tenemos:

$i)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, por lo que la serie diverge.

$ii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, luego el criterio no decide, por lo que la serie puede ser convergente o divergente.

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, luego el criterio no decide, por lo que la serie puede ser convergente o divergente.

$iv)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} \to \infty$, por lo que la serie diverge.

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

12. A partir de la prueba de la divergencia, determinar si la siguiente serie es divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3+1}$$

Solución. Como el límite del término enésimo de la serie es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, la serie es divergente ya que el límite de su término enésimo es diferente de cero.

LOS COORDINADORES

13. Demostrar que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ es divergente.

Solución. Si se desarrolla la serie queda como: $1+(-1)+1+(-1)+...+1+(-1)+...$. Se obtienen las sumas parciales y se llega a:

$$S_1=1 \quad ; \quad S_2=1-1=0 \quad ; \quad S_3=1-1+1=1 \quad ; \quad S_4=1-1+1-1=0 \quad \cdots$$

Nótese que $S_k=1$ si k es impar y $S_k=0$ si k es par. Como la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ oscila entre 0 y 1, resulta que $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe y por lo tanto, la serie infinita diverge.

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

14. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ es convergente o divergente.

Solución. Se obtienen algunos términos de la sucesión de sumas parciales:

$$S_1=\frac{1}{2} \quad ; \quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad ; \quad S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \quad ; \quad S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

Después se obtiene una función que describa el comportamiento de los resultados anteriores:

$S_n=\frac{2^n-1}{2^n}$ que equivale a la suma parcial enésima. Se obtiene el límite de la función anterior cuando $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Como el límite existe se asegura que la serie es convergente y que el resultado de su suma es 1.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

15. Para la serie dada, obtener los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales y determinar una expresión para la suma parcial enésima S_n . Analizar el carácter de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Solución. Los primeros cuatro términos de la sucesión $\{s_n\}$ son:

$$S_1=\frac{1}{2} \quad ; \quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3} \quad ; \quad S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4} \quad ; \quad S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

Se descompone el término enésimo en fracciones racionales como sigue:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1=A(n+1)+Bn \quad \Rightarrow \quad 1=An+A+Bn \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

Como se observa es una serie telescópica y en el desarrollo de sus sumandos se ve que su suma parcial enésima y el límite de ésta son $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{n+1} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Por lo tanto la serie es convergente al valor 1 .

ALUMNA: IRENE RUBALCABA MONTSERRAT

16. Para la serie dada, identificar qué tipo de serie es, determinar su carácter y, en caso de ser convergente, calcular su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Solución. Se procede a descomponer esta expresión en la suma de dos fracciones racionales, con el siguiente procedimiento:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(2n+3) + B(2n+1)$$

$$1 = 2An + 3A + 2Bn + B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = 2A + 2B \\ 1 = 3A + B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2A + 2B = 0 \\ -6A - 2B = -2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad -4A = -2 \quad \therefore \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego, algunos términos de la serie son:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{5} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{5} - \frac{\frac{1}{2}}{7} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{7} - \frac{\frac{1}{2}}{9} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{9} - \frac{\frac{1}{2}}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3} \right) + \cdots$$

El segundo sumando de cada término se cancela con el primero del siguiente por lo que la suma parcial enésima "S_n" es igual a la suma del primer sumando del primer término más el segundo del término enésimo. Así, se llega a:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{4n+6} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{4n+6-6}{6(4n+6)} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{4n}{24n+36} \quad \therefore \quad S_n = \frac{n}{6n+9}$$

Se trata de una "serie telescópica" convergente cuya suma es:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{6n}{n} + \frac{9}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6 + \frac{9}{n}} = \frac{1}{6}$$

LOS COORDINADORES

17. Determinar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}$.

Solución. La serie se puede rescribir como $S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ y se observa que es una serie geométrica de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ donde $a = 4$ y $r = \frac{1}{3}$. Como $|r| < 1$ entonces la serie es convergente.

El valor de la suma está dado por $S_n = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{4}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{\frac{2}{3}} = \dfrac{12}{2} = 6$.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

18. Determinar si la siguiente serie infinita converge o diverge.

$$3 + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{4^{n-1}}$$

Solución. Algunos de sus términos son:

$$S = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} \quad ; \quad \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{3}{4^2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{3}{4^3}}{\frac{3}{4^2}} = \frac{1}{4}$$

Es la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$ con $a = 3$ y $r = \frac{1}{4} < 1$ y por lo tanto es convergente. Su suma es:

$$\mathrm{S} = \frac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

19. Probar que la serie cuyos primeros términos son los siguientes, es geométrica y calcular su suma:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$$

Solución. Si se divide cada término entre el inmediato anterior se tiene que;

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2}$$

por lo que se trata de una serie geométrica con su razón $r=\frac{1}{2}$ y $a=\frac{5}{2}$. Como $r=\frac{1}{2}<1 \quad \therefore$ se trata de una serie convergente y su suma es igual a:

$$S=\frac{a}{1-r} \quad ; \quad S=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}} \quad ; \quad S=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad S=5$$

LOS COORDINADORES

20. Demostrar que la siguiente serie converge y calcular su suma.

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}$$

Solución. Si se divide cada término entre el inmediato anterior, se tiene que:

$$\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{\frac{2}{3^2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{\frac{2}{3^3}}{\frac{2}{3^2}}=\frac{1}{3} \quad \cdots$$

por lo que la serie es una serie geométrica con $a=2$ y $r=\frac{1}{3}<1$, entonces la serie es convergente y su suma está dada por:

$$S=\frac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$$

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

21. Determinar si la siguiente serie infinita converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{37}{(100)^n}=0.37+0.0037+0.000037\cdots+\frac{37}{(100)^n}+\cdots$$

Solución. Se divide cada término entre el anterior y:

$$\frac{0.0037}{0.37}=0.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.000037}{0.0037}=0.01$$

La serie converge por que es una serie geométrica con $r=0.01<1$ y $a=0.37$. La suma es

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{0.37}{1-0.01}=\frac{0.37}{0.99}=\frac{37}{99}$$

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

22. Determinar la suma de la siguiente serie geométrica

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\ ...$$

Solución. La serie se puede expresar también como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+...$$

Se trata de una serie geométrica cuya razón es $r=\frac{1}{10}<1$ y por lo tanto convergente. Como $a=\frac{5}{10}$,

entonces su suma es $S=\frac{a}{1-r} \Rightarrow S=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} \Rightarrow S=\frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} \Rightarrow S=\frac{5}{9}$

ALUMNA: RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE

23. Verificar que se cumpla lo siguiente

$$0.666666666 \quad .... =\frac{2}{3}$$

Solución. El número anterior se puede expresar como

$$0.666666666\ \ ...=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+...$$

que a su vez, se puede expresar como;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+...$$

que es una serie geométrica con $a=\frac{6}{10}$ y $r=\frac{1}{10}<1$; por lo tanto convergente. Su suma entonces es:

$$S=\frac{a}{1-r} \Rightarrow S=\frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} \Rightarrow S=\frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} \Rightarrow S=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

ALUMNA: RHAMID H. RODRÍGUEZ DE LA TORRE

24. Determinar la fracción que representa el número racional $2.3\overline{51}$.

Solución. Este decimal periódico se puede expresar como una serie de la siguiente forma:

$$\frac{23}{10}+\frac{51}{1\,000}+\frac{51}{100\,000}+\frac{51}{10\,000\,000}+\frac{51}{1\,000\,000\,000}+...$$

la cual, después del primer término, tiene la forma de una serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$, con r dado por:

$$\frac{ar}{a} = r \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{51}{100\,000}}{\frac{51}{1000}} = \frac{1}{100} = \quad ; \quad \frac{ar^2}{ar} = r \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{51}{10\,000\,000}}{\frac{51}{100\,000}} = \frac{1}{100}$$

luego $a = \dfrac{51}{1000}$ y $r = \dfrac{1}{100} < 1$ por lo que es convergente y su suma está dada por:

$$S = \frac{\frac{51}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\frac{51}{1000}}{\frac{99}{100}} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{51}{990}$$

Así que $2.3\overline{51} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{51}{990} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{17}{330} = \dfrac{759 + 17}{330} = \dfrac{776}{330} \quad \therefore \quad 2.3\overline{51} = \dfrac{388}{165}$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

25. Mediante la serie geométrica convergente $\dfrac{7}{10^2} + \dfrac{7}{10^4} + \dfrac{7}{10^6} + \cdots$ y su suma "S" , expresar como un cociente de enteros el decimal periódico $0.070707\dots$

Solución. Para conocer la razón de la serie geométrica dada se hace lo siguiente:

$$\frac{\frac{7}{10^4}}{\frac{7}{10^2}} = \frac{1}{10^2} \quad ; \quad \frac{\frac{7}{10^6}}{\frac{7}{10^4}} = \frac{1}{10^2} \qquad \therefore \quad r = \frac{1}{10^2} < 1$$ (convergente) . Además, $a = \dfrac{7}{10^2}$

La suma "S" de la serie que representa al decimal periódico dado como un cociente de enteros es entonces:

$$0.070707\ldots = S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{7}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{7}{99} \quad \therefore \quad 0.070707\ldots = \frac{7}{99}$$

LOS COORDINADORES

26. Determinar si la siguiente serie diverge o converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right)$$

Solución. Esta serie se puede separar como $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}}_{Serie\ 1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{Serie\ 2}$

Se tiene que la serie 1 es una serie geométrica convergente con $a=1$ y $r=\frac{1}{5}<1$, y la serie 2 es una serie armónica divergente. Por lo tanto la suma de ambas da como resultado una serie divergente.

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

27. El tercer término de una serie geométrica es $\frac{63}{4}$ y el sexto es $\frac{1701}{32}$. Calcular el quinto término.

Solución. Como esta es una serie geométrica, su enésimo término se determina por la expresión $a_n = ar^{n-1}$. Así,

$$a_3 = ar^{3-1} = ar^2 \quad y \quad a_6 = ar^{6-1} = ar^5$$

con los valores conocidos para estos dos términos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.:

$$\begin{cases} \frac{63}{4} = ar^2 \\ \frac{1701}{32} = ar^5 \end{cases} \quad ; \quad \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{\frac{1701}{32}}{\frac{63}{4}} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}$$

Se sustituye el valor de r en la primera ecuación, $\frac{63}{4} = ar^2$, se obtiene: $\frac{63}{4} = a\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 7$

Por lo tanto el enésimo término de esta serie es: $a_n = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

De donde el quinto término es: $a_5 = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{5-1} = \frac{567}{16}$

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

28. Una pelota se suelta desde $16\ m$ de altura. Cada vez que llega al suelo rebota 0.81 de la altura anterior. Determinar cuánto recorre la pelota hasta detenerse.

Solución. Cada vez que la pelota bota recorre el 0.81 de la distancia anterior, esto es:
Después del primer rebote la pelota alcanza una altura de: $d = 16 \cdot 0.81$
Después del segundo rebote la pelota alcanza una altura de: $d = (16 \cdot 0.81) \cdot 0.81$
Después del tercer rebote la pelota alcanza una altura de: $d = (16 \cdot 0.81 \cdot 0.81) \cdot 0.81$
Por lo tanto sólo se multiplica n veces por 0.81; esto equivale a elevarlo a la enésima potencia.

$$d = 16\,(0.81)^n$$

Además, se debe sumar al total cada nueva parte de la serie, por lo tanto:

$$d = \sum_{n=0}^{\infty} 16\,(0.81)^n$$

Como se puede apreciar, se tiene una serie geométrica con $a=16$ y $r=0.81<1$ por lo que es convergente. Su suma es toda la longitud que recorre la pelota, esto es:

$$d = S = \sum_{n=1}^{\infty} 16\left(0.81\right)^{n} = \frac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{16}{1-0.81} = 84.21 \;\; m$$

que es la respuesta buscada.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

29. Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}$.

Solución. La serie anterior es una serie "p" de la forma $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^{p}}$ donde $k=1$ y $p=3$.

Como $p>1$ la serie es convergente.

ALUMNO: BOGDAD ROBERTO C. ESPINOSA VARGAS

30. Determinar si la serie $S = 5 + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{5}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{5}{\sqrt{n}}$ converge o diverge.

Solución. La serie dada es una serie "p" con $p = \frac{1}{2} < 1$, por lo tanto es divergente.

ALUMNO: RAFAEL ANDRÉS NOLASCO CASTREJÓN

31. Determinar si la siguiente serie infinita converge o diverge.

$$s = 7 + \frac{7}{\sqrt[3]{2}} + \frac{7}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{7}{\sqrt[3]{n}} + \cdots$$

Solución. De acuerdo con las series tipo p , se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, es divergente ya que $p = \frac{1}{3} < 1$.

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

32. Determinar si las siguientes series convergen o divergen:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^{n}} \qquad ; \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$$

Solución. Se aplica el criterio de comparación en las dos series y se tiene que:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^{n}} \quad ; \quad \forall n \geq 1 \quad ; \quad \frac{1}{2+5^{n}} < \frac{1}{5^{n}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$ es una serie geométrica convergente con $r=\frac{1}{5}<1$

Por lo tanto, la serie en estudio es convergente.

$$ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}-1} \quad ; \quad \forall n\geq 2 \quad ; \quad \frac{3}{\sqrt{n}-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ es una serie "p" divergente con $p=\frac{1}{2}<1$

Por lo tanto, la serie en estudio es divergente.

ALUMNO: RAFAEL LIMA GUERRERO

33. Determinar si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)$$

Solución. Se analizan los sumandos como dos series por separado:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-2}$$

El primer sumando corresponde a la serie armónica divergente y para el segundo se utiliza el criterio de comparación, de donde:

$$\frac{1}{n-2}>\frac{1}{n}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-2}$ es una serie divergente ya que su término enésimo es mayor al de la serie armónica divergente.

Este tipo de series al llegar a valores muy grandes el sumando "-2" no resulta significativo, por lo que es una resta que tiende a cero. Por lo anterior se puede asegurar que llega a un límite y que por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)$ es convergente.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

34. Determinar el carácter de la siguiente serie, mediante el criterio de comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{3}+1}}$$

Solución. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ es una serie "p", con $p=\frac{3}{2}>1$, por lo que es convergente.

Si se compara su término enésimo con el de la serie en estudio, se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Como los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ son menores que los de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; entonces, la suma de la primera serie es menor que la suma de la segunda y si ésta última es convergente, entonces la primera también será convergente.

LOS COORDINADORES

35. Investigar la convergencia o divergencia de la siguiente serie, mediante el criterio de comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ 2^n}$$

Solución. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2} < 1$ y por lo tanto convergente. Si se comparan los términos enésimos, se llega a:

$$\frac{1}{n\ 2^n} < \frac{1}{2^n}$$

Dado que el término $\frac{1}{2^n}$ es mayor que el término $\frac{1}{n\ 2^n}$, entonces la serie en estudio es convergente.

LOS COORDINADORES

36. Investigar la convergencia o divergencia de la siguiente serie mediante el criterio de la comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\ n}{n}$$

Solución. Si se compara su término enésimo con el correspondiente de la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se tiene que: $\frac{\ln\ n}{n} > \frac{1}{n}$; entonces la suma de la serie en estudio es mayor que la suma de la serie armónica y como ésta es divergente, entonces la serie estudiada es divergente.

LOS COORDINADORES

37. Determinar la convergencia o divergencia de la siguiente serie, mediante el criterio del límite de la comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

Solución. Si se compara esta serie con la serie armónica divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, se llega a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} > 0$$

por lo tanto la serie en estudio es divergente.

LOS COORDINADORES

38. Determinar la naturaleza de la siguiente serie a partir del criterio del límite del cociente de la comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

Solución. Si se compara con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, que es una serie geométrica convergente con $r = \frac{1}{2} < 1$, se obtiene:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = 1 > 0$, por lo tanto la serie dada es convergente.

LOS COORDINADORES

39. Investigar la naturaleza de la siguiente serie, a través del límite del cociente de la comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 6}$$

Solución. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica cuya razón $r = \frac{1}{2} < 1$, por lo que es convergente. Y si se calcula el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^n+6}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n}{2^n}}{\dfrac{2^n}{2^n}+\dfrac{6}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{6}{2^n}}=\frac{1}{1}=1>0$$

Por lo tanto, la serie en estudio es convergente.

LOS COORDINADORES

40. Utilizar el criterio de las series de signos alternados para determinar si la siguiente serie, conocida como la armónica alternada, es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Solución. El límite del término enésimo es $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Además, se debe cumplir que $a_n\geq a_{n+1}$; esto implica que el término enésimo como función es decreciente para todo valor de la variable mayor o igual a uno. Así:

$f(x)=\frac{1}{x}$; $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0 \quad \forall \quad x\geq 1$. Por lo tanto la serie es convergente.

LOS COORDINADORES

41. Determinar el carácter de la siguiente serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}$$

Solución. Una de las condiciones de convergencia de las series de signos alternados es que el límite del término enésimo debe ser igual a cero; entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{1}{1}=1\neq 0$$

se concluye que la serie en estudio es divergente.

LOS COORDINADORES

42. Determinar el carácter de la serie dada mediante el criterio de Leibniz, y en caso de ser convergente, investigar si es absoluta o condicionalmente convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n}$$

Solución. Se calcula el límite del término enésimo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}}=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0$$

Al cumplirse esta condición, ahora se tendrá que ver si se cumple que $a_n \geq a_{n+1}$, lo que se puede verificar al analizar la función cuya regla de correspondencia viene dada por el término enésimo de la serie y ver que se trate de una función decreciente. Así:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}\quad ;\quad f'(x)=\frac{\left(x^2+x\right)(2)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\quad ;\quad f'(x)=\frac{-2x^2-2x-1}{\left(x^2+x\right)^2}<0\quad \forall\quad x\geq 1$$

Por lo tanto, la serie en estudio es convergente. Si se analiza el valor absoluto del término enésimo de la serie, se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}$. Si se compara con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que es la armónica divergente, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{n^2+n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2>0$$

Por lo que la serie es divergente. Finalmente se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n}$ es condicionalmente convergente.

LOS COORDINADORES

43. Determinar por el criterio del cociente si la siguiente serie converge o diverge: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n+1}$

Solución. Por el límite del término enésimo, se tiene que: $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4\neq 0$ por lo que es divergente. De acuerdo con el criterio del cociente o de D'Alembert, se tiene que:

$$a_{n+1}=\frac{4(n+1)}{n+2}\quad ;\quad a_n=\frac{4n}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{4(n+1)}{n+2}}{\dfrac{4n}{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}}=1$$

Por lo tanto el criterio del cociente no decide.

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ RUBIO-MENDOZA

44. Determinar si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Solución. Por el criterio de D'Alembert se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+2)}{3^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+3} = \frac{1}{3} < 1$$

Como $L = \frac{1}{3} < 1$, entonces la serie es convergente.

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ RUBIO-MENDOZA

45. Determinar el carácter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

Solución. Se aplica el criterio de D'Alembert y tenemos:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \frac{10^n(n+1)!}{10^{n+1}(n)!} = \frac{(n+1)!}{10\ n!} = \frac{(n+1)n!}{10n!} = \frac{n+1}{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty$$

El límite no existe, por lo tanto la serie es divergente.

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ RUBIO-MENDOZA

46. Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Solución. Para determinar su convergencia o divergencia se aplicará el criterio de D'Alembert. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\in}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)\,n!\,n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

y como $e > 1$ la serie diverge.

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHAVEZ

47. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge.

Solución. Se utiliza el criterio de convergencia del cociente o de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad ; \quad a_{n+1} = (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \quad ; \quad a_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{(n+1)\frac{3}{4}}{n} = \frac{3(n+1)}{4n} = \frac{3n+3}{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{4n} = \frac{3}{4} < 1$$

Como $L < 1$, por lo tanto la serie converge.

ALUMNA: MARÍA PAULA DÁVILA MERCADO

48. Determinar el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ 8^n}{n\ !}$$

Solución. Se utiliza el criterio del cociente o de D'Alembert y se tiene que:

$$a_n = \frac{n\,8^n}{n!} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)8^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)8^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n\,8^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)8^{n+1}}{(n+1)!\,n\,8^n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)8^n\ 8}{(n+1)n!\,n\ 8^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{8}{n}\right| = 0 < 1 \qquad \therefore \quad \text{la serie en estudio es convergente.}$$

LOS COORDINADORES

49. Utilizar el criterio de la raíz para determinar la naturaleza de la siguiente serie de signos alternados:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{n}$$

Solución. Se obtiene el límite de la raíz y:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

Por lo que la serie es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.

LOS COORDINADORES

50. Determinar el intervalo de convergencia de la siguiente serie, mediante el criterio de la raíz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n}$$

Solución. Sea $a_n=\frac{(x-2)^n}{n^n}$. Entonces por el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{n^n}\right|}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|x-2|=0<1$$

Por lo tanto, al ser este límite menor que 1 independientemente del valor de x, la serie converge en $x\in\mathbb{R}$.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

51. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-3}$$

Solución.

$$a_n=\frac{x^n}{n^2-3}\quad;\quad a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2-3}\quad;\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2-3}}{\frac{x^n}{n^2-3}}=\frac{x\left(n^2-3\right)}{(n+1)^2-3}=\frac{x\left(n^2-3\right)}{n^2+2n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\left(n^2-3\right)}{n^2+2n-2}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{2}{n^2}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}} = |x|$$

Si $|x|<1 \;\Rightarrow\; -1<x<1$, entonces la serie es convergente.

Si $|x|>1 \;\Rightarrow\; x<-1 \;\cup\; x>1$, entonces la serie es divergente

Si $|x|=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$ el criterio no decide; entonces habrá que determinar la naturaleza de la serie con estos dos valores. Entonces:

$$x=-1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-3}=0 \quad ; \quad f(n)=\frac{1}{n^2-3} \quad ; \quad f'(n)=-\frac{2n}{\left(n^2-3\right)^2}<0 \quad \forall \quad n\ge 1$$

por lo que la serie es convergente.

$$x=1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3}$$

Si se compara con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ que es una serie "p" con $p=2>1$ convergente. Entonces,

como $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2-3}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-3}=1>0$, la serie es convergente.

Se concluye entonces que el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-3}$ es $x\in[-1,1]$

ALUMNA: DANIELA GONZÁLEZ RUBIO-MENDOZA

52. Determinar el intervalo de convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Solución. $a_n=\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ y $a_{n+1}=\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}$. Por el criterio de la razón o de D'Alembert se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}\frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{(n+1)}{n}|x+2|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}|x+2|=\frac{1}{3}|x+2|.$$

$\frac{1}{3}\left|x+2\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|x+2\right|<3 \;\Rightarrow\; -3<x+2<3 \;\Rightarrow\; -5<x<1 \;\therefore$ intervalo de convergencia y el radio de convergencia es "2" .

$\frac{1}{3}\left|x+2\right|>1 \;\Rightarrow\; \left|x+2\right|>3 \;\Rightarrow\; x+2<-3 \;\cup\; x+2>3 \;\Rightarrow\; x<-5 \;\cup\; x>1 \;\therefore$ divergente

Para determinar qué sucede en los extremos de este intervalo, se sustituyen los valores en el término general. Así:

Para $x=-5$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(-5+2\right)^{n}}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(-3\right)^{n}}{3^{n+1}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(-3\right)^{n+1}}{3^{n+1}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(-1\right)^{n+1}$, que resulta ser una serie divergente, según el criterio del término enésimo. Si $x=1$, se obtiene la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(3\right)^{n}}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n$, la cual es divergente . De modo que el intervalo de convergencia de la serie original es $\left(-5,\,1\right)$.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

53. Determinar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^{n}x^{n}}{\sqrt{n+1}}$$

Solución. Sea $a_{n}=\frac{\left(-3\right)^{n}x^{n}}{\sqrt{n+1}}$ y $a_{n+1}=\frac{\left(-3\right)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$. Entonces, por el criterio de la razón o de D’Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-3\right)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\left(-3\right)^{n}x^{n}}\right|=3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\left|x\right|=3\left|x\right|$$

$3\left|x\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|x\right|<\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3} \;\therefore$ intervalo de convergencia

$3\left|x\right|>1 \;\Rightarrow\; \left|x\right|>\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x<-\frac{1}{3} \;\cup\; x>\frac{1}{3} \;\therefore$ divergente

El radio de convergencia es de $\frac{1}{3}$, y por lo tanto la serie converge en $\left(-\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}\right)$. Ahora se analiza que ocurre en los extremos de este intervalo; se tiene que:

$x=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; a_{n}=\frac{(-3)^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n+1}}$. Éste es el término general de una serie alternada, por lo que aplicando el criterio correspondiente tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0 \quad y \quad f'\left(n\right)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{n+1}}}{n+1}=-\frac{1}{2\left(n+1\right)^{\frac{3}{2}}}<0 \quad \forall x\geq 1$$

por lo tanto es una serie alternada convergente.

$x = -\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a_n = \dfrac{(-3)^n \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Éste es el término de una serie positiva que, por el criterio de comparación, se tiene que:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ es una serie "p" con $p = \dfrac{1}{2} < 1$ por lo que es divergente. Y como $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ es divergente.

Finalmente, el intervalo de convergencia de la serie original es $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

54. Determinar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^n}{n\,6^n}$$

Solución. Al aplicar el criterio del cociente, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)6^{n+1}}}{\dfrac{(x-6)^n}{n\,6^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,6^n(x-6)^{n+1}}{(n+1)\,6^{n+1}(x-6)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,6^n(x-6)^n(x-6)}{(n+1)\,6^n\,6(x-6)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x-6)}{6(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n+6}|x-6| = \frac{1}{6}|x-6|$$

De acuerdo con el criterio:

$\dfrac{1}{6}|x-6| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-6| < 6 \quad \Rightarrow \quad -6 < x-6 < 6 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 12$, intervalo de convergencia

Si $\dfrac{1}{6}|x-6| > 1 \quad \Rightarrow \quad |x-6| > 6 \quad \Rightarrow \quad -6 < x-6 \quad \cup \quad x-6 > 6 \quad \Rightarrow \quad 0 < x \quad \cup \quad x > 12$, divergencia

Si $\dfrac{1}{6}|x-6| = 1 \quad \Rightarrow \quad |x-6| = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-6=-6 & \therefore \quad x=0 \\ x-6=6 & \therefore \quad x=12 \end{cases}$, entonces el criterio no decide.

Se analizará ahora la serie en estos valores extremos:

Si $x = 0$ la serie resultante es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es la serie armónica divergente.

Si $x = 12$ la serie resultante es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que es la serie armónica alternada que es convergente.

Finalmente se concluye que el intervalo de convergencia de la serie en estudio es $x \in (0,12]$.

LOS COORDINADORES

55. Determinar el intervalo de convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$$

Solución. Sea $a_n = \dfrac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$ y $a_{n+1} = \dfrac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2 - (n+1) + 1}$. Se aplica el criterio de la razón o de D'Alembert y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2-(n+1)+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{e^{nx}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n^2+2n+1-n-1+1}\left|e^x\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\left|e^x\right| = \left|e^x\right|$$

$\left|e^x\right| < 1 \;\Rightarrow\; 0 < e^x < 1 \;\Rightarrow\; x < 0 \;\therefore$ intervalo de convergencia

$\left|e^x\right| > 1 \;\Rightarrow\; e^x > 1 \;\Rightarrow\; x > 0 \;\therefore$ divergente

$\left|e^x\right| = 1 \;\Rightarrow\; e^x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\therefore$ criterio no decide

Para $x = 0$ la serie toma la forma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$.

Por el criterio de comparación, empleando la serie $"p"$ convergente con $p = 2$ y se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2-n+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\leftarrow\infty}\frac{n^2}{n^2-n+1} = 1 \succ 0 \quad \therefore \quad \text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1} \text{ es convergente}$$

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es: $(-\infty,\ 0]$.

ALUMNO: GABRIEL CALDERÓN OCHOA

56. Determinar la función f que esté representada por la serie de potencias:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$$

Solución. Si $|x| < 1$, entonces la serie es una serie geométrica con $r = -x$ y tiene como suma

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Esta serie corresponde a la representación de serie de potencias para la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, en el intervalo $(-1,\ \ 1)$.

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

57. Determinar la serie de Maclaurin para la función $f(x)=senx$ y determinar para qué valores de "x" es convergente.

Solución. Para determinar la serie de Maclaurin, se determinan las primeras derivadas de la función y se evalúan en $x=0$, es decir;

$$\begin{array}{lcl} f(x)=senx & ; & f(0)=0 \\ f'(x)=\cos x & ; & f'(0)=1 \\ f''(x)=-senx & ; & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-\cos x & ; & f'''(0)=-1 \\ f^{IV}(x)=senx & ; & f^{IV}(0)=0 \end{array}$$

Las siguientes derivadas de la función se repiten, siguiendo el mismo patrón. Por lo tanto, si se sustituyen en la serie de Maclaurin:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^n(n)}{n!}x^n+\cdots$$

$$senx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\ !}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Se utiliza el criterio de D'Alembert y

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2(n+1)+1}}{[2(n+1)+1]!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!\,x^{2n+3}}{(2n+3)!\,x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\left|x^2\right|=0<1$$

por lo que la serie obtenida es convergente $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

ALUMNA: GABRIELA BERENICE VERA PADILLA

58. Obtener la serie de Maclaurin para la función $f(x)=e^x$ y probar que es convergente para todo valor real de "x" .

Solución. Si $f(x)=e^x$, entonces la enésima derivada de f es $f^{(k)}(x)=e^x$ y $f^{(k)}(0)=e^0=1$, por lo tanto la serie de Maclaurin será:

$$f(x)=e^x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Por lo tanto $f(x) = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$

Si se aplica el criterio de D'Alembert se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0 < 1 \quad \therefore \quad \text{serie convergente} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces, la serie representa a la función $f(x) = e^{x}$ para todo valor real de "x" .

ALUMNA: DAISY TESSIE REYES CHAVEZ

59. Obtener el desarrollo de la serie de potencias de Maclaurin para representar a la función $f(x) = \cos 2x$ y determinar para qué valores de "x" la representa:

Solución. La Serie de Maclaurin está dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0)x^4}{4!} + \cdots + \frac{f^{n}(0)x^n}{n!} + \cdots$$

Para la función dada:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \cos 2x & \Rightarrow & f(0) = 1 \\
f'(x) = -2\,sen\,2x & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -4\cos 2x & \Rightarrow & f''(0) = -4 \\
f'''(x) = 8\,sen\,2x & \Rightarrow & f'''(0) = 0 \\
f^{IV}(x) = 16\cos 2x & \Rightarrow & f^{IV}(0) = 16 \\
f^{V}(x) = -32\,sen\,2x & \Rightarrow & f^{V}(0) = 0 \\
f^{VI}(x) = -64\cos 2x & \Rightarrow & f^{VI}(0) = -64
\end{array}$$

Entonces la serie es la siguiente:

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

Si se utiliza el criterio del cociente para determinar su intervalo de convergencia, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{2n+2}x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!\,2^{2n+2}x^{2n+2}}{(2n+2)!\,2^{2n}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^2\,x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{4n^2+6n+2}x^2 = 0 < 1$$

Por lo tanto, la serie de potencias representa a la función para todo valor real de "x" .

LOS COORDINADORES

60. Obtener los primeros cuatro términos de la serie de Taylor con $a = 1$ para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{3 - x}$$

Solución. De acuerdo con la serie de Taylor, se obtienen las primeras derivadas de la función.

$$f(x) = \frac{1}{3-x} \qquad \Rightarrow \qquad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(3-x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(3-x)^3} \qquad \Rightarrow \qquad f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(3-x)^4} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(1) = \frac{3}{8}$$

La serie de Taylor está dada por:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

luego:

$$f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3\ !}$$

$$f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

ALUMNO: RAÚL PULIDO MARTÍNEZ