‘100x100 짐 배치하기’ 탐구의 수치적 해석

30405 범준환

1. 동기

작년 화학I 시간과 물리학Ⅱ 시간에 엔트로피와 관련된 책을 읽고, '직접 만든 시뮬레이터로 엔트로피 증가 법칙 체험하기'라는 주제로 탐구를 진행했다. 가로 세로 100칸의 격자가 있는 정사각형 방에 대각선에 일렬로 10개의 짐(Bags)을 놔둔 다음, 시간이 지날 때마다 각 짐은 상하좌우 무작위 방향으로 한 칸씩 움직인다면 시간이 지나면 지날수록 짐들이 일렬로 있었다는 정보는 희미해지고, 흩어진 짐들이 다시 원래 상태로 돌아올 확률은 극히 희박하다는 결론을 파이썬으로 직접 제작한 시뮬레이터로 확인할 수 있었다.

이 탐구가 '실습'이라면, 이론적인 부분은 어떨까? 엔트로피 법칙을 눈으로 확인했다면 수치로 확인할 수 없을까? 이러한 궁금증을 가지고 있던 중, *고급 물리학*(2015, 대전광역시교육청) 교과서의 '복잡한 현상의 물리' 부분을 읽게 되었다. 이 부분의 내용을 기반으로, 엔트로피에 대한 이해를 심화시키며 물리학Ⅱ에서의 탐구를 더 파헤쳐보자.

2. 탐구내용

겹침수란 무엇인가?

우리 세계는 미시 세계와 거시 세계가 동시에 존재한다. 예를 들어 초중고 수학 시간에 단골로 등장하는 문제 상황인 파란색 4개 구슬, 빨간색 4개가 주머니 속에 담겨있을 때의 구슬 뽑기를 생각해보자. 수학 시간에서는 주머니 속에서 구슬 하나를 뽑으면 무조건 빨간 구슬이거나 파란 구슬 둘 중 하나의 상황 뿐이다. 이를 거시 상태라고 한다. 거시 상태란, 계의 거시적인 양을 기준으로 구별되는 상태를 말한다. 하지만 실제 세계에서는 다르다. 같은 빨간 구슬이더라도 흠집이 나 있을 수도 있고, 크기가 좀 더 작을 수도, 또는 더 둥글둥글한 구슬일수도 있다. 이렇게 그 계의 구성 요소들 각각의 상태를 구별하여 나타나는 상태를 미시 상태라고 한다.

그렇다면 어떤 구슬을 뽑을 때의 경우의 수는 거시 상태를 고려할 때와 미시 상태를 고려할 때는 서로 다를 것이다. 거시 상태를 고려한다면 빨간색 구슬을 뽑을 때 1가지, 파란색 구슬을 뽑을 때 1가지, 총 2가지 경우의 수 뿐이지만, 미시 상태를 고려한다면 모두 다른 8개의 구슬이므로 8가지의 경우의 수가 존재한다. 거시 상태의 파란색 구슬에 해당하는 경우의 수는 4가지, 거시 상태의 빨간색 구슬에 해당하는 경우의 수 역시 4가지다.

이와 같이 한 거시 상태에 대응되는 미시 상태들의 수를 그 거시 상태의 겹침수라고 한다. 식은 다음과 같다.

$$\Omega(N,n) = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$$

빨간색 구슬에 대응하는 겹침수는 $\Omega(4,1) = 4$가지임을 알 수 있다.

겹침수 증가 법칙이란 무엇인가?

엔트로피 증가 법칙은 결국 계가 열역학적 과정을 거쳐 최종적으로 평형 상태에 이르는 것을 말한

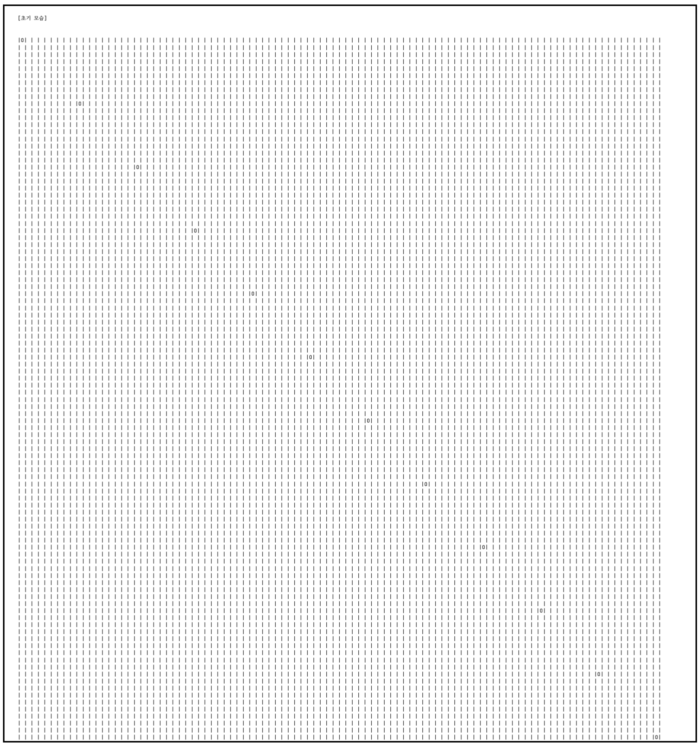
다. 이때 겹침수는 계가 최종적으로 평형 상태에 이를 때 어떠한 상태에 도달할 것인가를 결정하는 데 역할을 한다. 겹침수를 이용하여 계산하는 확률은

$$P(N,n) = \frac{\Omega(N,n)}{\Omega(\text{전체})}$$

이다. 해당 겹침수가 클수록 확률도 커지는 것이 알려져 있다.

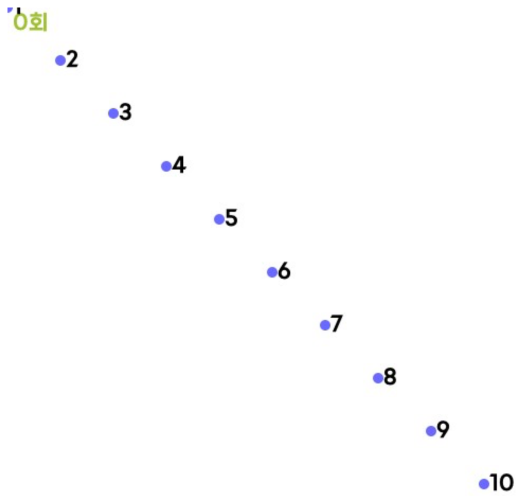
100x100 시뮬레이션의 상황별 겹침수 계산하기

작년 시뮬레이션의 초기 상태는 아래와 같이 10개의 짐들이 대각선 방향으로 일렬로 위치하는 모습이었다. (*물리학II 주제탐구 - 직접 만든 시뮬레이터로 엔트로피 증가 법칙 체험하기*에서 가져옴)



작년 탐구를 거시 상태의 관점으로 진행하여, 각 짐은 모두 같다는 전제를 바탕으로 탐구했었다. 이때 계산했던 100x100 격자에 10개의 짐을 놓는 경우의 수는 ${}_{100}C_{10} = 17310309456440$로, 위의 [초기 상태]로 배열될 경우의 수는 그 중 하나이므로 $\frac{1}{17310309456440} = 5.7769042e{-}14\%$라는 극소의 확률이 나왔었다. [초기 상태]로 배열될 확률은 그렇지 않을 확률 $\frac{17310309456439}{17310309456440}$보다 현저히 작으므로 계의 상태는 확률이 더 높은 방향으로 나아간다는 엔트로피 증가 법칙에 의해 대각선으로 배치된 짐들은 여러 방향으로 확산된다.

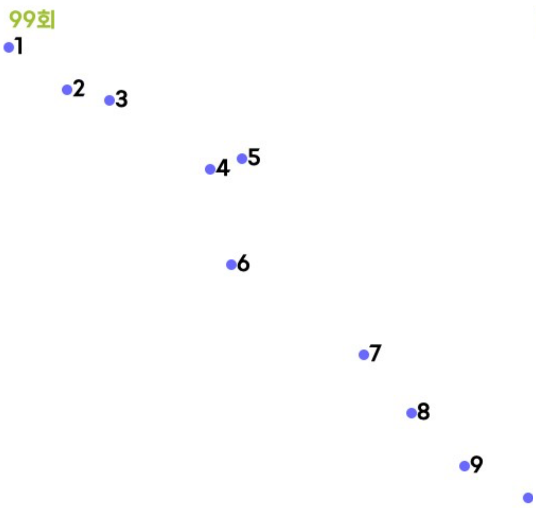
미시 상태의 관점에서 바라보면 어떨까? 각 짐은 모두 다른 짐이다. 작년 탐구에서 각 위치에 짐이 없으면 빈칸, 있으면 O 표시로 방의 모습을 나타냈는데, 이제 각 짐에 번호를 붙여보자. 작년은 파이썬 구현체였다면, 이번에는 시각적 구현을 가능하게 하는 언어인 '프로세싱'으로 구현한다.

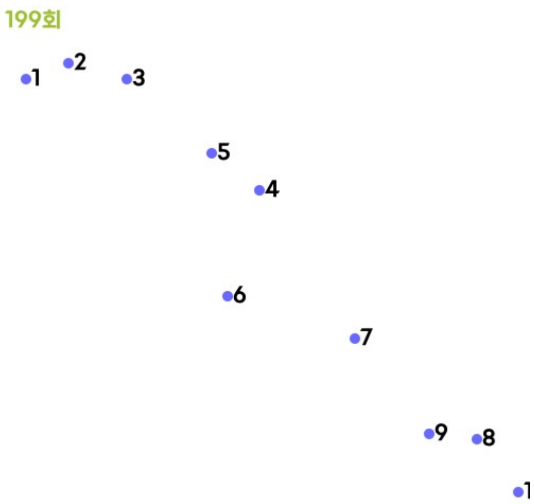


0회 실행의 모습이다. 왼쪽 위에 연두색 글씨로 n회 실행이 표시되고, 각 짐은 파란색 원으로 표시된다. 짐 번호는 짐 오른편에 검은색 글씨로 표시된다. 이전 탐구와 똑같은 초기 상태를 가지고, 똑같이 100x100(실제 캔버스는 해상도를 위해 500x500이다. 대신 짐이 한 번 이동할 때 5픽셀씩 이동한다)이다. 이렇게 0개의 짐을 대각선으로 배치하는 거시 상태에 대응하는 미시 상태의 수인 겹침수는 $\Omega = 10! = 3628800$이다. 따라서 겹침수를 이용한 확률은

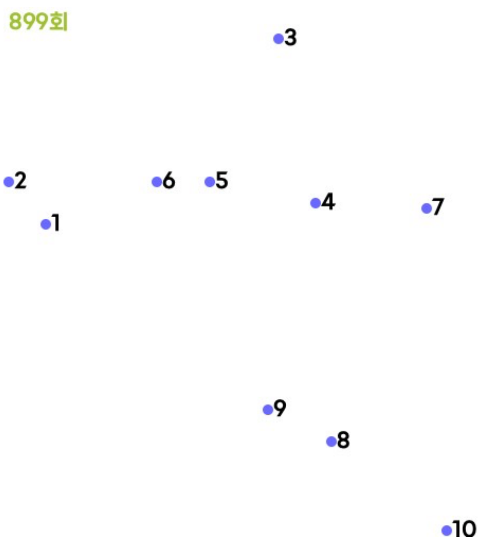
$$P_0 = \frac{3628800}{17310309456440\ \times 3628800} = \frac{1}{17310309456440} = 0.0000000000000577\ldots\%$$

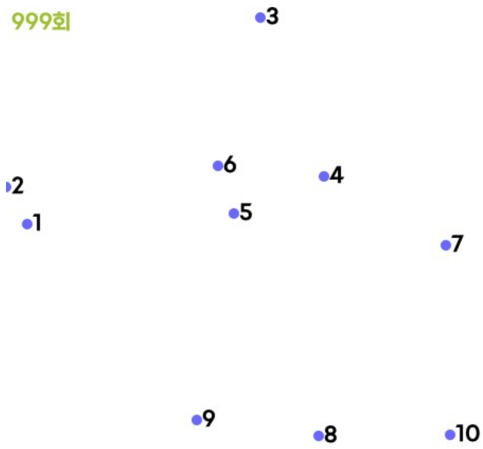
이다.



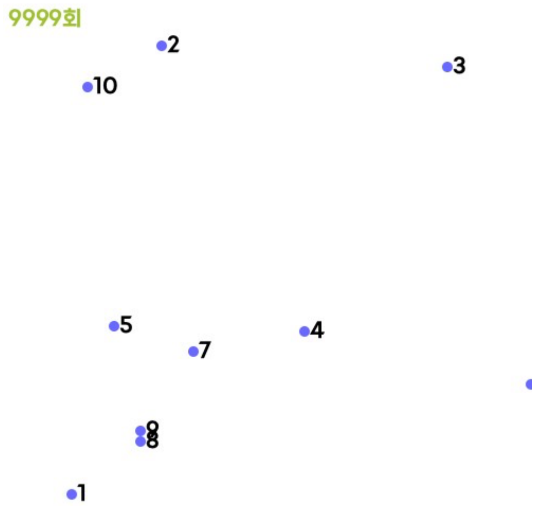


위는 99회, 199회 진행한 모습이다. 대각선 형태에서 무작위 배치로 나아가고 있는 모습을 알 수 있다.





899회, 999회 정도 되니 대각선으로 있었던 모습을 거의 알 수 없도록 배치된 모습을 확인할 수 있다.



9999회가 되어서는 거의 무작위로 배치되어 있다.

처음에 일렬로 늘어서 있던 모습은 진행이 거듭될수록 흔적을 찾아보기 어렵다는 결론을 재확인할 수 있다(이전 탐구의 결론). 0회 실행이 아닌 상태의 확률을 계산하자.

$$P_L = \frac{17310309456440\ \times 3628800 - 1}{17310309456440\ \times 3628800} = \frac{62815650955529471999}{62815650955529472000} = 0.9999\ldots\%$$

또한 각각의 통계적 엔트로피를 계산하면,

$$S_0 = k \ln 3628800 = \ 2.08592\ldots \times\ 10^{-22}$$
$$S_L = k \ln 6281565095552947199 = \ 5.97754\ldots \times\ 10^{-22}$$

이므로, 0회 실행의 엔트로피인 S_0보다 나머지 상황의 통계적 엔트로피인 S_L가 더 크므로, 평형 상태에 있지 않은 계이므로 엔트로피가 증가하는 방향으로 최종 평형 상태에 도달하므로 0회 실행에서 퍼지어 나간 상태가 되는 것을 알 수 있다. 따라서 통계적 엔트로피로 엔트로피 증가 법칙을 확인할 수 있다.

3. 느낀 점

작년에 했던 탐구를 인터렉티브 미디어 아트에 쓰이는 언어인 Processing으로 더 알아보기 쉽도록 재구성한 다음, 앞에서 내렸던 결론을 고급 물리학에만 있는 겹침수와 통계적 엔트로피, 그리고 볼츠만의 식을 이용해 재확인하였다. 이전에는 엔트로피 증가 법칙이라는 게 수치가 없어서 막연하고 모호하게만 느껴졌는데, 이번 탐구로 실제 엔트로피 값과 확률을 확인하면서 엔트로피에 대한 이해를 더 높일 수 있었다. 또한 거시 상태와 미시 상태에 대한 이해도 할 수 있어서 지금까지 접했던 확률 문제 상황을 미시 상태로 다시 다뤄 각각의 겹침수를 계산해보고 싶다는 계획을 세우게 된다.