

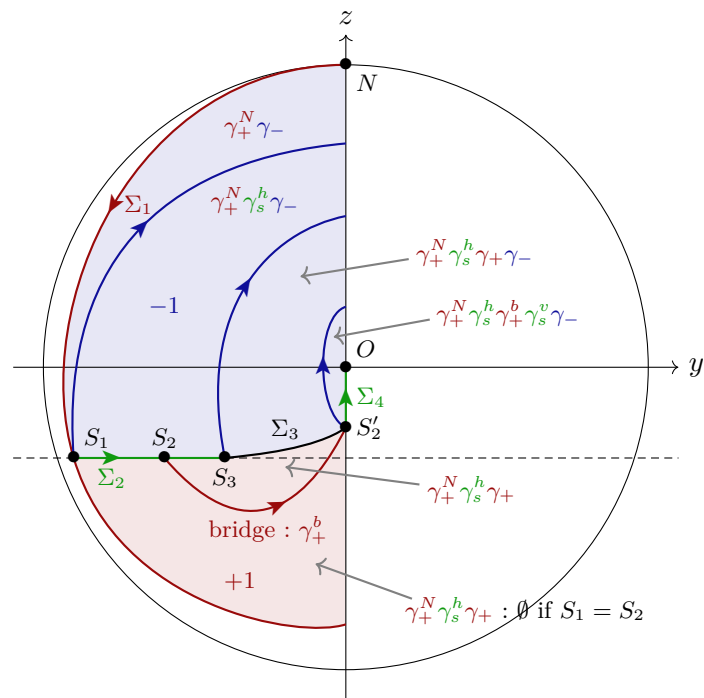


Département Sciences du Numérique

Contrôle optimal

Olivier Cots

10 mars 2023



Avant-propos

Dans le numéro 83 (juillet 2007) de MATAPLI¹, Jean-Michel Coron² et Emmanuel Trélat³ définissent en quelques lignes la théorie du contrôle :

Un **système de contrôle** est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle. La **théorie du contrôle** analyse les propriétés de ce système dans le but de l'amener d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères : c'est l'étape de réalisation de la commande. Les systèmes abordés sont multiples et leurs origines très diverses (mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...). L'objectif peut être aussi de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (**contrôle optimal**). Pour le modéliser, on peut avoir recours à des **équations différentielles**, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques.

Tout le monde sait maintenir en équilibre un balai sur son doigt (problème du pendule inversé). En revanche il est beaucoup plus difficile de maintenir en équilibre sur son doigt un double pendule inversé, c'est-à-dire un système composé de deux balais l'un sur l'autre, surtout si l'on ferme les yeux. La théorie du contrôle permet pourtant de le faire. Mais pour réaliser effectivement cet équilibre, mieux vaut disposer d'un bon modèle et savoir résoudre des équations.

L'objectif de ce cours est de présenter des techniques d'analyse et de résolution de problèmes de *contrôle optimal* dans les équations différentielles ordinaires non linéaires. On suppose la donnée d'un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle. Résoudre un problème de contrôle optimal consiste à déterminer une trajectoire avec le contrôle associé permettant de rejoindre une cible finale donnée ou non, en partant d'une configuration initiale elle-même donnée ou non. Cette paire trajectoire-contrôle doit de plus être optimale au sens qu'elle doit minimiser un certain critère. La valeur du critère pour une paire trajectoire-contrôle donnée représente ce que coûte d'appliquer tel contrôle le long de la trajectoire. Avant de résoudre un tel problème de contrôle optimal, il faut d'abord savoir si la cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Le Chapitre 1 introduit les notions essentielles de solution et contrôlabilité des systèmes dynamiques contrôlés. Dans le Chapitre 2, nous donnons une définition générale d'un problème de contrôle optimal et nous présentons de nombreux exemples avec la solution associée pour

1. <http://smai.emath.fr/spip.php?article27>

2. Laboratoire de Mathématique, équipe AN-EDP, Université Paris-Sud, Bât. 425 91405 Orsay Cedex, jean-michel.coron@math.u-psud.fr

3. Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, et Institut Universitaire de France, F-75005, Paris, France emmanuel.trelat@upmc.fr

mettre en avant les différences de structure des contrôles optimaux. Dans le Chapitre 3, nous supposons l'absence de contraintes sur le contrôle. Dans ce cas, nous obtenons des conditions nécessaires d'optimalité que nous pouvons qualifier de faible. Nous présentons ces conditions ainsi que les preuves s'appuyant sur le Chapitre 1. Nous donnons ensuite de nombreux exemples et exercices dans les cadres classiques du calcul des variations, de la géométrie riemannienne et autres. Dans le Chapitre 4, nous présentons le résultat le plus important du cours, c'est-à-dire le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP). Le PMP fournit un ensemble de conditions nécessaires d'optimalité dont on peut tirer profit afin de définir des algorithmes de résolution numériques des problèmes de contrôle optimal. Ainsi, dans le Chapitre 5, nous présentons la méthode indirecte de tir s'appuyant sur le PMP.

Ce support de cours est destiné aux élèves de 2^e année du département Sciences du Numérique de l'ENSEEIH à Toulouse. Il est très fort probable que de nombreuses coquilles ou de nombreux manques soient présents.

Table des matières

Avant-propos	i
Chapitre 1. Systèmes contrôlés	1
1.1 Introduction	1
1.2 Solutions des systèmes contrôlés	3
1.3 Flot d'un système contrôlé	5
1.4 Application Entrée-Sortie	8
1.5 Ensemble accessible et contrôlabilité	8
1.6 Caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers	10
1.7 Calcul de contrôles singuliers et système hamiltonien	13
Chapitre 2. Problèmes de contrôle optimal	17
2.1 Introduction	17
2.2 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal	18
2.3 Exemples	21
Chapitre 3. Principe du maximum faible	29
3.1 Problème de Mayer avec conditions terminales	29
3.2 Problème de Lagrange avec conditions aux limites simples	31
3.3 Problème de Bolza à temps final libre et conditions terminales	33
3.4 Condition de Legendre et conservation du hamiltonien	37
3.5 Exemples	39
3.6 Exercices	42
3.6.1 Calcul des variations	42
3.6.2 Contrôle optimal	46
Chapitre 4. Principe du Maximum de Pontryagin	53
4.1 Principe du Maximum de Pontryagin	53
4.2 Exemples de maximisation de hamiltoniens	56
4.3 Exemples de conditions de transversalité	59
4.4 Exercices	60
Chapitre 5. Méthode indirecte de tir	63
5.1 Introduction par l'exemple	63
5.2 La démarche générale : condition aux limites simples	64
5.3 Exemple avec conditions aux limites sous-dimensionnées	66
Bibliographie	69
Index	71

Systèmes contrôlés

1.1	Introduction	1
1.2	Solutions des systèmes contrôlés	3
1.3	Flot d'un système contrôlé	5
1.4	Application Entrée-Sortie	8
1.5	Ensemble accessible et contrôlabilité	8
1.6	Caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers	10
1.7	Calcul de contrôles singuliers et système hamiltonien	13

L'analyse d'un problème de contrôle optimal se déroule par étape : avant de déterminer une trajectoire optimale joignant un état initial à une cible, il faut s'assurer que cette cible soit atteignable. C'est le problème de *contrôlabilité*, que nous effleurons dans ce chapitre. L'introduction de la notion d'*application Entrée-Sortie* nous permet d'obtenir une caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers, fondamentale pour la suite.

1.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre¹ des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles ordinaires sur lesquelles on peut agir au cours du temps. Ces systèmes que l'on peut commander sont au coeur de l'automatique [12], mais aussi, et c'est ce qui nous intéresse ici, au coeur de la théorie du contrôle optimal [20].

Systèmes dynamiques. Nous reprenons ici la description du mathématicien V. Arnold, de son livre [2] sur les équations différentielles ordinaires. La théorie des équations différentielles ordinaires est l'un des principaux instruments des mathématiques. Elle permet d'étudier quantité de processus d'évolution *déterministes*, *finis* et *différentiables*.

On dit qu'un processus est *déterministe* si toute son évolution et son passé sont définis de façon unique par son état présent. L'ensemble de tous les états de ce processus s'appelle *espace des phases*. Ainsi, en mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont l'avenir et le passé sont univoquement définis par les positions et les vitesses initiales de tous les points du système. L'espace des phases d'un tel système mécanique est un ensemble dont les éléments sont constitués par l'ensemble des positions et vitesses de tous les points du système considéré. En mécanique quantique, le mouvement des particules n'est pas un processus déterministe.

Un processus est de *dimension finie* s'il en est de même de son espace des phases, c'est-à-dire si est fini le nombre des paramètres indispensables à la description de son état. Tel est en mécanique classique par exemple, le cas d'un système constitué d'un nombre fini de points

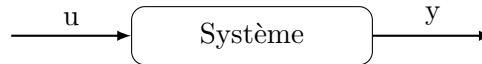
1. Ce chapitre s'inspire fortement de [12] et [20].

matériels ou de corps solides. La dimension de l'espace des phases est de $6n$ pour un système de n points matériels et de $12n$ pour un système de n solides. Les mouvements des fluides en hydrodynamique, les vibrations de la corde de la membrane, la propagation des ondes en optique et en acoustique sont des exemples de processus qu'il est impossible de décrire dans un espace des phases de dimension finie.

Un processus est *différentiable* si son espace des phases est muni d'une structure de variété différentiable², et ses changements d'états dans le temps, définis par des fonctions différentiables. Les coordonnées et les vitesses des points d'un système mécanique sont différentiables par rapport au temps. Les mouvements étudiés en théorie du choc ne sont pas différentiables.

En mécanique classique donc, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires, tandis que d'autres procédés seront nécessaires en mécanique quantique, en théorie de la chaleur, en hydrodynamique, en théorie de l'élasticité, en optique, en acoustique et en théorie du choc.

Systèmes dynamiques contrôlés. Les systèmes contrôlés (ou commandés) peuvent être de natures variées : système mécanique (moteur, robot, drone, satellite, avion), processus chimique (réacteur, colonne de distillation), circuit électrique ou électronique, gestion de portefeuille (économie), contrôle quantique (imagerie médicale)... Un tel système résulte d'une relation entrée/sortie où l'entrée u représente le contrôle (ou commande) qui nous permet d'agir sur le système et la sortie y représente ce que l'on observe du système, généralement sous forme de mesures prises par intervalle de temps. On peut représenter cette relation par le schéma suivant :



Les enjeux sont ici d'analyser le comportement du système via la sortie y , en fonction de l'entrée u et de synthétiser les lois de commande à imposer en entrée afin d'obtenir un comportement souhaité. Nous utilisons une description interne du système, décrit par une modélisation mathématique des phénomènes physiques agissant sur le système. Il s'agit de l'approche par représentation d'état, en opposition à l'approche par représentation par fonction de transfert.

Nous considérons donc que le système au temps t est décrit par son *état* $x(t)$ et on modélise l'évolution du vecteur $x(t)$ au cours du temps par un *système commandé* de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)). \end{cases} \quad (1.1)$$

Typiquement, pour chaque instant t , $x(t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , $u(t)$ un vecteur de \mathbb{R}^m et $y(t)$ un vecteur de \mathbb{R}^p . On appelle *loi de commande* une fonction $t \mapsto u(t)$, définie sur un intervalle $[t_0, \tau_u[$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ l'instant initial à partir duquel on commence à agir sur le système et $\tau_u \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $t_0 < \tau_u$ un instant limite après lequel la loi de commande n'est plus définie. À une loi de commande $u(\cdot)$ donnée³ est associée une équation différentielle ordinaire [8]

$$\dot{x}(t) = f_{u(\cdot)}(t, x(t)), \quad t \in [t_0, \tau_u[, \quad (1.2)$$

2. Nous ne définissons pas dans ce cours la notion de variété différentiable, qui est à la base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle, et permet en autres, de faire du calcul différentiel sur des variétés.

3. On écrit $u(\cdot)$ et non u pour l'instant pour insister sur le fait que c'est une fonction du temps et non pas un vecteur de \mathbb{R}^m .

où on note $f_{u(\cdot)}(t, x(t)) := f(t, x(t), u(t))$. Ainsi une fonction $x(\cdot)$ est solution de **l'équation différentielle commandée** $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ s'il existe une loi de commande $u(\cdot)$ telle que $x(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f_{u(\cdot)}(t, x(t))$.

Les premières questions essentielles portent sur l'analyse du comportement dynamique du système et d'autre part sur la synthèse des lois de commande. En ce qui concerne le premier point, les questions sont les suivantes :

- **Contrôlabilité** ou (commandabilité). Est-il possible de trouver une commande $u(\cdot)$ qui amène un système, d'un état initial donné $x(t_0)$, à un état terminal quelconque x_f , au temps final $t = t_f$?
- **Observabilité**. La connaissance partielle de l'état $y(t)$ et la connaissance du contrôle $u(t)$ pour tout $t \in [t_0, \tau_u[$, permet-elle de déterminer l'état $x(\cdot)$ pour tout $t \in [t_0, \tau_u[$ (ou de manière équivalente, l'état initial $x(t_0)$) ?

Pour la synthèse des lois de commande, les premières questions sont :

- **Planification de trajectoires**. Si la réponse à la question de la contrôlabilité est positive, comment calculer la loi de commande réalisant le transfert de l'état initial à la cible, en temps fixé ?
- **Planification de trajectoires optimales**. Si la réponse à la question de la contrôlabilité est positive, comment calculer la loi de commande, si elle existe, qui réalise le transfert de l'état initial à la cible tout en minimisant un critère donné ? On entre ici dans la théorie du contrôle optimal.
- **Stabilisation**. Comment construire, si possible, un contrôle $u(\cdot)$ qui stabilise asymptotiquement le système (1.1) autour d'un état d'équilibre x_e , c'est-à-dire tel que, pour toute condition initiale $x(t_0)$, on ait $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$?

1.2 Solutions des systèmes contrôlés

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , Π un ouvert de \mathbb{R}^m et une application de classe C^1

$$\begin{aligned} f: \Omega \times \Pi &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u). \end{aligned}$$

On considère l'équation différentielle contrôlée (ou *système contrôlé*) de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \quad (\Sigma_u)$$

Remarque 1.2.1. Attention, dans la définition de f , les variables x et u sont des vecteurs de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement. Alors que dans l'équation différentielle contrôlée, x et u sont des fonctions du temps, c'est $x(t)$ et $u(t)$ qui sont des vecteurs de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement. C'est pourquoi, pour ne pas confondre, on note parfois $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$ les fonctions d'état et de contrôle qui dépendent du temps.

Remarque 1.2.2. Nous nous restreignons pour le moment aux systèmes **autonomes**, c'est-à-dire que l'application f ne dépend pas explicitement du temps t . Dans ce cas, nous pouvons fixer l'origine des temps, *i.e.* l'instant initial t_0 . Nous fixons classiquement $t_0 = 0$.

Il est important de préciser à quelle classe de fonctions appartiennent les lois de commande $u(\cdot)$. En pratique, celles-ci peuvent être extrêmement irrégulières, en particulier discontinues (par

exemple, si l'action est contrôlée par un interrupteur). La classe choisie doit donc couvrir ces possibilités mais elle doit aussi permettre d'assurer l'existence de solutions pour l'équation (1.2). Nous supposons donc qu'une loi de commande $u(\cdot)$ est une fonction définie sur un intervalle $[0, \tau_u[$, avec $\tau_u \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, **mesurable et essentiellement bornée**⁴, c'est à dire dans l'espace $L^\infty([0, \tau_u[, \mathbb{R}^m)$ et à valeurs dans Π , i.e. dans $L^\infty([0, \tau_u[, \Pi)$. On notera

$$\mathcal{U} := \left\{ u(\cdot) \in L^\infty([0, \tau_u[, \Pi) \mid \tau_u \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \right\}$$

cet espace, qui contient donc l'ensemble des **lois de commandes admissibles** pour (Σ_u) .

Remarque 1.2.3. On identifie les contrôles de \mathcal{U} qui coïncident presque partout pour la mesure de Lebesgue.

Avec une telle classe de lois de commande, l'équation (1.2) ne vérifie pas les hypothèses classiques du théorème de Cauchy-Lipschitz assurant l'existence et l'unicité de solution maximale ; en particulier, $t \mapsto f_{u(\cdot)}(t, x)$ **n'est pas nécessairement continue**. Il nous faut donc généraliser la notion de solution d'une telle équation puis donner un résultat qui remplace le théorème de Cauchy-Lipschitz.⁵

Définition 1.2.1 – Solution de (Σ_u)

Fixons une loi de commande $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, définie sur $[0, \tau_u[$. On appelle solution de (Σ_u) tout couple $(I, x(\cdot))$, où I est un sous-intervalle de $[0, \tau_u[$ et $x(\cdot) : I \rightarrow \Omega$ est une fonction **absolument continue**⁶, telle que pour tout t, t_0 dans I :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) \, ds.$$

En particulier, $x(\cdot)$ satisfait $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ **presque partout** sur I . D'autre part, une solution est dite **maximale** si elle n'admet pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand.

Remarque 1.2.4. Très souvent en pratique, la dérivée de $x(\cdot)$ est (presque partout) bornée sur chaque sous-intervalle fini, ceci vient du fait que le second membre f de l'équation (Σ_u) est fonction de contrôles supposés essentiellement bornés et fonction de l'état x qui lui est continu (puisque absolument continu). Ainsi, les solutions sont en fait localement lipschitziennes, et pas seulement absolument continues.

Avec ces définitions, on a la généralisation suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz [19].

Théorème 1.2.2 – Existence et unicité de solutions maximales

Supposons f de classe C^1 sur $\Omega \times \Pi$, Ω ouvert de \mathbb{R}^n , Π ouvert de \mathbb{R}^m et fixons une condition initiale $x_0 \in \Omega$. Alors, pour toute commande $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, définie sur $[0, \tau_u[$, il existe une unique solution maximale $x(\cdot)$ (au sens de la définition 1.2.1) de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, définie sur un intervalle I inclus dans $[0, \tau_u[$ et contenant 0, telle que $x(0) = x_0$.

4. $L^\infty([0, \tau_u[, \mathbb{R}^m) = \{u : [0, \tau_u[\rightarrow \mathbb{R}^m \mid u \text{ mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ t.q. } \|u(t)\| \leq C \text{ p.p. sur } [0, \tau_u[\}$.

5. cf. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Carathéodory%27s_existence_theorem&oldid=993657825.

6. $x \in AC([0, \tau_u[, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow x \in L^1([0, \tau_u[, \mathbb{R}^n)$ et $\exists y \in L^1([0, \tau_u[, \mathbb{R}^n) : \forall t \in [0, \tau_u[, x(t) = x(0) + \int_0^t y(s) \, ds$. L'application x est dérivable presque partout et sa dérivée est dans L^1 (i.e. est intégrable au sens de Lebesgue).

1.3 Flot d'un système contrôlé

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , Π un ouvert de \mathbb{R}^m , $x_0 \in \Omega$, et une application de classe C^1 , $f: \Omega \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, u) \mapsto f(x, u)$. Ces hypothèses assurent d'après le Théorème 1.2.2, que pour tout contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, défini sur $[0, \tau_u[$, avec $\tau_u \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, il existe une unique solution maximale que l'on notera $\Phi(\cdot, x_0, u(\cdot))$ (ou parfois $x(\cdot, x_0, u(\cdot))$), définie sur un intervalle I de la forme $[0, t_u[$, avec $t_u \leq \tau_u$, telle que $x(0) = x_0$, et vérifiant presque partout l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f_{u(\cdot)}(t, x(t))$. Si par exemple $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\tau_u = +\infty$ et si le temps limite t_u est fini, *i.e.* $t_u < +\infty$, alors la trajectoire part à l'infini quand t tend vers t_u d'après le critère de maximalité (ou théorème d'échappement), cf. [10, Section V.2.6] ou [8, Théorème 2.5.3]. Par exemple, si on considère le système $\dot{x} = x^2 + u$ avec comme condition initiale $x(0) = 0$, alors on voit que pour $u(\cdot) \equiv 1$ défini sur tout \mathbb{R} , *i.e.* $\tau_u = \infty$, la trajectoire solution associée $t \mapsto \tan t$ explose en $t_u = \pi/2$. Elle n'est donc définie que sur l'intervalle $[0, t_u[$ avec $t_u < \tau_u$. On introduit la définition suivante qui fait disparaître les difficultés introduites par les temps t_u et τ_u .

Définition 1.3.1 – Ensemble des contrôles admissibles

Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $x_0 \in \Omega$. On note \mathcal{U}_{t, x_0} l'ensemble des **contrôles admissibles** sur $[0, t]$ avec x_0 comme condition initiale, c'est-à-dire les contrôles $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tels que $\Phi(\cdot, x_0, u(\cdot))$ est bien définie sur $[0, t]$.

Ainsi, l'application Φ est définie sur $\mathcal{D} := \{(t, x_0, u(\cdot)) \mid t \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \Omega, u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t, x_0}\}$. On définit alors pour $t \geq 0$, le **flot** du système contrôlé (Σ_u) , par l'application partielle Φ_t :

$$\begin{aligned} \Phi_t: \quad \mathcal{D}_t &\longrightarrow \Omega \\ (x_0, u(\cdot)) &\longmapsto \Phi_t(x_0, u(\cdot)) := \Phi(t, x_0, u(\cdot)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

avec $\mathcal{D}_t := \{(x_0, u(\cdot)) \mid (t, x_0, u(\cdot)) \in \mathcal{D}\}$. Concernant la régularité du flot, nous avons :

Théorème 1.3.2 – Régularité et différentielle du flot

Supposons f de classe C^1 sur $\Omega \times \Pi$, avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et Π un ouvert de \mathbb{R}^m , et considérons une solution $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$ de (Σ_u) associée à la commande $\bar{u}(\cdot)$, tels que $(T, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{D}$, $\bar{x}_0 := \bar{x}(0)$.

Alors il existe un voisinage de $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$ dans $\Omega \times \mathcal{U}$ sur lequel, pour tout $t \in [0, T]$, l'application Φ_t est bien définie. De plus Φ_t est de classe C^1 sur ce voisinage et sa différentielle en $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$ est donnée pour tout $\delta x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta u(\cdot) \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$ par :

$$\Phi'_t(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \cdot (\delta x_0, \delta u(\cdot)) =: \delta x(t),$$

où $\delta x(t)$ est la solution au temps t de

$$\dot{\delta x}(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta x(s) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta u(s), \quad \delta x(0) = \delta x_0.$$

► Voir [19, Théorème 1] pour la démonstration. Comparer à [8, Théorème 4.3.1]. ■

Corollaire 1.3.3

Supposons f de classe C^1 sur $\Omega \times \Pi$, avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et Π un ouvert de \mathbb{R}^m . Soient $t \geq 0$ et $x_0 \in \Omega$. Alors \mathcal{D}_t est un ouvert de $\Omega \times \mathcal{U}$ et \mathcal{U}_{t,x_0} est un ouvert de \mathcal{U} .

Nous pouvons donner une explication intuitive du Théorème 1.3.2. Considérons donc une solution $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$ de (Σ_u) associée à la commande $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ et notons $\bar{x}_0 := \bar{x}(0)$. On a $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{D}_T$. Soit maintenant une paire $(\delta x_0, \delta u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ telle que $(\bar{x}_0 + \delta x_0, \bar{u}(\cdot) + \delta u(\cdot)) \in \mathcal{D}_T$. On note $\bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot) + \dots$ la solution de condition initiale $\bar{x}_0 + \delta x_0$ associée au contrôle $\bar{u}(\cdot) + \delta u(\cdot)$, où $\delta x(\cdot)$ est la variation à l'ordre 1 et le reste regroupe les variations d'ordres supérieurs. Autrement dit, $\delta x(t) = \Phi'_t(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \cdot (\delta x_0, \delta u(\cdot))$ pour tout $t \in [0, T]$. Calculons $\delta x(t)$ pour $t \in [0, T]$ fixé. Pour tout $s \in [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{x} + \delta x + \dots)(s) &= f(\bar{x}(s) + \delta x(s) + \dots, \bar{u}(s) + \delta u(s)) \\ &= f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta x(s) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta u(s) + \dots \end{aligned}$$

et $\bar{x}_0 + \delta x_0 = \bar{x}(0) + \delta x(0) + \dots$. Ainsi, puisque $\dot{\bar{x}}(s) = f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))$, on obtient que $\delta x(t)$ est la solution au temps t de

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta x(s) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta u(s), \\ \delta x(0) = \delta x_0. \end{cases}$$

Cette équation différentielle étant affine, la solution est donnée par

$$\delta x(t) = R(t, 0) \delta x_0 + \int_0^t R(t, s) B(s) \delta u(s) ds,$$

avec $B(s) := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(s), \bar{u}(s))$ et où $R(t, t_0)$ est la résolvante [8] de l'équation différentielle homogène : $\delta \dot{x}(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta x(s)$.



Exercice 1.3.1. Retrouver l'expression de la différentielle de Φ_t à partir de l'équation intégrale

$$\Phi_t(x_0, u(\cdot)) = x_0 + \int_0^t f(\Phi_s(x_0, u(\cdot)), u(s)) ds. \quad \square$$

Le Théorème 1.3.2 montre que, autour d'une solution donnée, l'étude d'une équation différentielle commandée se ramène à l'étude d'une équation différentielle commandée linéaire. Introduisons alors la notion d'équation linéarisée.

Définition 1.3.4 – Équation linéarisée

Soit $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$ une solution de (Σ_u) associée à la commande $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. L'équation différentielle sur $[0, T]$

$$\dot{\delta x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t)) \cdot \delta u(t),$$

pour $\delta u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ fixé, est appelé **équation linéarisée** de (Σ_u) autour de $(x(\cdot), u(\cdot))$.

Un cas particulier très intéressant est celui où le système est linéarisé autour d'un couple d'équilibre, c'est-à-dire d'un couple $(x_e, u_e) \in \Omega \times \Pi$ tel que $f(x_e, u_e) = 0$. L'état x_e est alors une solution stationnaire de (Σ_u) associée à la commande constante u_e et le système linéarisé de (Σ_u) autour de (x_e, u_e) est linéaire et autonome si l'on considère une variation de commande de la forme $\delta u(\cdot) := K\delta x(\cdot)$:

$$\dot{\delta x}(t) = (A + BK)\delta x(t), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e).$$

Nous obtenons alors que le schéma suivant commute :

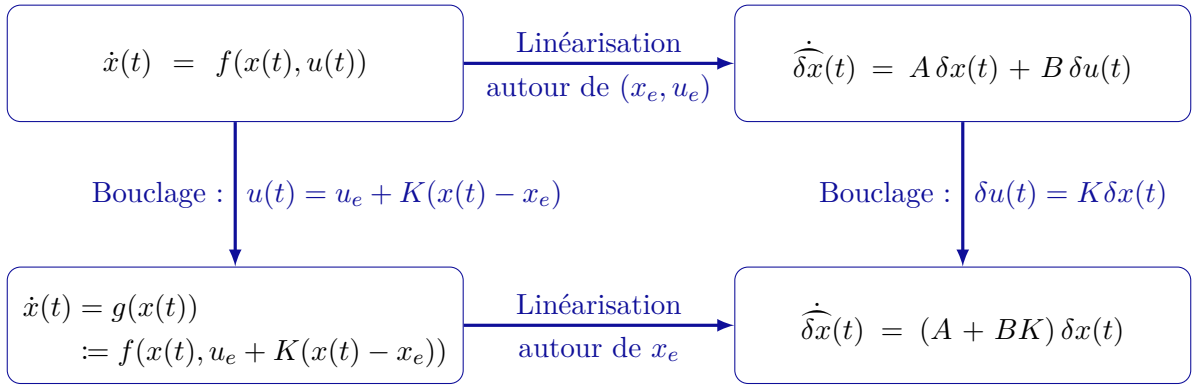


FIGURE 1.1 – Bouclage par retour d'état et linéarisation autour de points d'équilibre.

Dépendance par rapport à l'instant initial. Considérons un système contrôlé non autonome de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.4)$$

telle que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{I} \times \Omega \times \Pi$, où \mathcal{I} est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et Π un ouvert de \mathbb{R}^m . On note $x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ ou $\Phi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ la solution vérifiant la dynamique (1.4) et la condition initiale $x(t_0) = x_0$. La différentielle de l'application partielle $t_0 \mapsto x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$, où $x_0 \in \Omega$ et $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ sont fixés, en un point $\bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ est l'application qui à $\delta t_0 \in \mathbb{R}$ associe

$$\delta x(\cdot) := \frac{\partial x}{\partial t_0}(\cdot, \bar{t}_0, x_0, u(\cdot)) \cdot \delta t_0,$$

la solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t), u(\cdot)) \cdot \delta x(t), \\ \delta x(\bar{t}_0) = -f(\bar{t}_0, x_0, u(\bar{t}_0)) \delta t_0, \end{cases}$$

où $\bar{x}(t) := x(t, \bar{t}_0, x_0, u(\cdot))$.

Remarque 1.3.1. On adoptera la notation $\mathcal{U}_{t, t_0, x_0}$ pour l'ensemble des contrôles admissibles sur $[t_0, t]$ associés à la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Cette notation est utile dans le cas non autonome.

1.4 Application Entrée-Sortie

Pour simplifier les notations, nous écrirons la plupart du temps à partir de maintenant u à la place de $u(\cdot)$. On se souviendra que c'est une fonction du temps. Nous revenons aussi au système autonome (Σ_u) .

Définition 1.4.1 – Application Entrée-Sortie

On appelle application **Entrée-Sortie** en temps $t \geq 0$ et au point $x_0 \in \Omega$, l'application partielle

$$\begin{aligned} E_{t,x_0}: \mathcal{U}_{t,x_0} &\longrightarrow \Omega \\ u &\longmapsto E_{t,x_0}(u) := \Phi(t, x_0, u). \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.2 – Différentielle de l'application Entrée-Sortie

Soit $x_0 \in \Omega$, $t \geq 0$ et $\bar{u} \in \mathcal{U}_{t,x_0}$. Alors E_{t,x_0} est de classe \mathcal{C}^1 et sa différentielle en \bar{u} suivant le vecteur $\delta u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$ est donnée par :

$$E'_{t,x_0}(\bar{u}) \cdot \delta u = \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}(x_0, \bar{u}) \cdot \delta u = \int_0^t R(t, s) B(s) \delta u(s) ds,$$

où R est la résolvante de l'équation linéarisée de (Σ_u) autour de $(\Phi(\cdot, x_0, \bar{u}), \bar{u})$ et où $B(s) := \partial_u f(\Phi(s, x_0, \bar{u}), \bar{u}(s))$.

Exemple 1.4.1. Considérons un système linéaire autonome de la forme

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R}). \quad (\Sigma_{u,L})$$

Alors on a

$$E_{t,x_0}(u) = \Phi_t(x_0, u) = \Phi(t, x_0, u) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds,$$

(ici $R(t, s) = e^{(t-s)A}$) qui est affine en u et dont la différentielle est donnée par

$$E'_{t,x_0}(u) \cdot \delta u = \int_0^t e^{(t-s)A} B \delta u(s) ds.$$

□

1.5 Ensemble accessible et contrôlabilité

On s'intéresse ici à la question suivante : étant donné le système (Σ_u) et une condition initiale $x_0 \in \Omega$, où peut-on aller en temps fini $t \geq 0$, en faisant varier le contrôle u ? On définit tout d'abord la notion d'ensemble accessible.

Définition 1.5.1 – Ensemble accessible

L'**ensemble accessible** (ou atteignable) en temps $t \geq 0$ depuis $x_0 \in \Omega$ pour le système (Σ_u) , noté $\mathcal{A}(t, x_0)$, est l'ensemble des solutions au temps t pour tout $u \in \mathcal{U}_{t,x_0}$:

$$\mathcal{A}(t, x_0) := \{\Phi(t, x_0, u) \mid u \in \mathcal{U}_{t,x_0}\} = \text{Im } E_{t,x_0}.$$

Sous de “bonnes hypothèses”⁷, l’ensemble accessible $\mathcal{A}(x_0) := \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}(t, x_0)$ est d’intérieur non vide. Les Figures 1.2 et 1.3 montrent, sous ces hypothèses, de possibles ensembles accessibles (cf. [1]) tandis que la Figure 1.4 exhibe des cas impossibles.

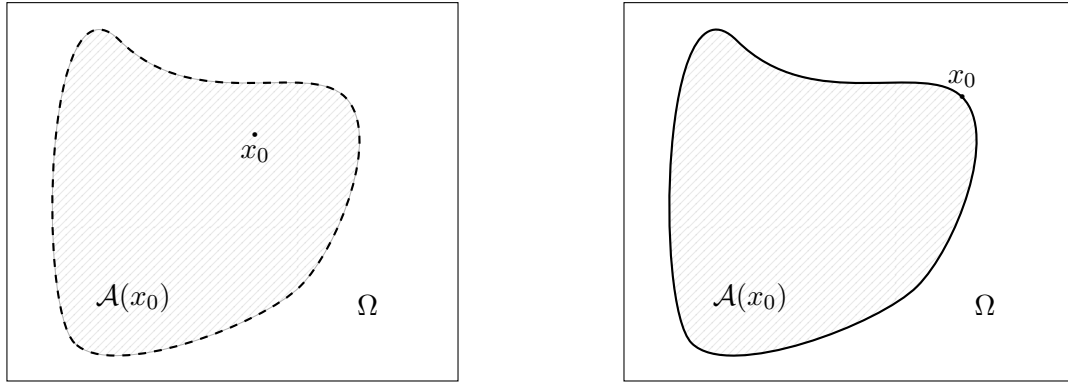


FIGURE 1.2 – Ensembles accessibles possibles ouvert (gauche) ou à bord lisse (droite).

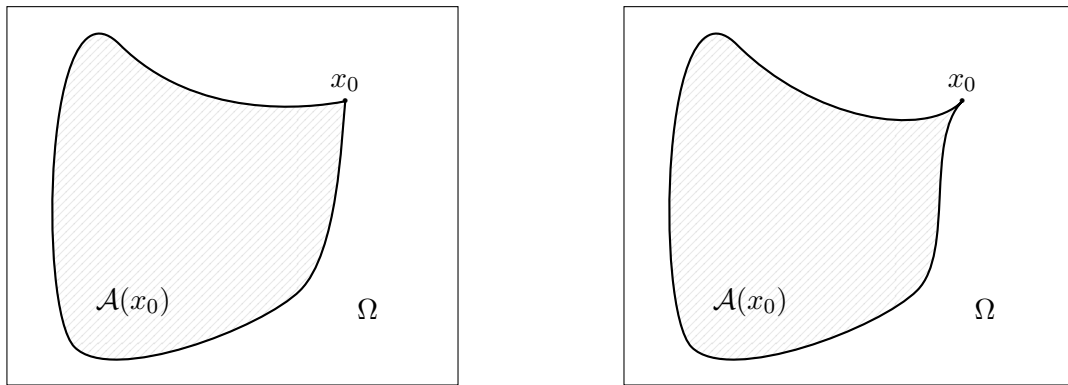


FIGURE 1.3 – Ensembles accessibles possibles ayant des bords non-lisses.

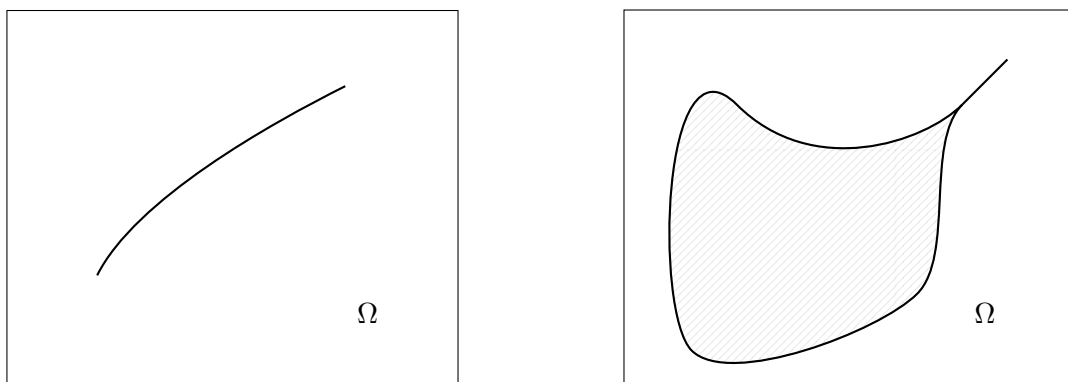


FIGURE 1.4 – Ensembles accessibles non possibles.

7. “Bracket generating system”, cf. [1].

Définition 1.5.2 – Contrôlabilités

- Le système (Σ_u) est **contrôlable** depuis $x_0 \in \Omega$ en temps $t > 0$ si $\mathcal{A}(t, x_0) = \Omega$.
- Le système (Σ_u) est **complètement contrôlable** en $t > 0$ si $\mathcal{A}(t, x_0) = \Omega$ pour tout $x_0 \in \Omega$.
- Le système (Σ_u) est **localement contrôlable** en $x_0 \in \Omega$ en temps $t > 0$ autour de $x_1 \in \Omega$ si⁸ $x_1 \in \text{Int}(\mathcal{A}(t, x_0))$.

Remarque 1.5.1. Si E_{t,x_0} est surjective alors (Σ_u) est contrôlable depuis x_0 en temps t . Si $E'_{t,x_0}(u)$ est surjective alors (Σ_u) est localement contrôlable autour de $E_{t,x_0}(u)$, cf. Proposition 1.6.2.

Théorème 1.5.3 – Critère de contrôlabilité de Kalman

Le système linéaire $(\Sigma_{u,L})$ est complètement contrôlable pour tout temps $t > 0$ si et seulement si

$$\text{rank} [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n.$$

► Voir [9, Corollaire II.6]. ■

1.6 Caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers

On considère dans cette section un triplet $(t, x_0, u) \in \mathcal{D}$.

Définition 1.6.1 – Contrôle régulier, singulier

Le contrôle u est dit **régulier** si $E'_{t,x_0}(u)$ est surjective. Sinon, il est dit **singulier**.

D'après [7, Théorème 5.0.2] de l'application ouverte non linéaire, nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.6.2

Si u est un contrôle régulier pour E_{t,x_0} , alors (Σ_u) est localement contrôlable en x_0 autour de $E_{t,x_0}(u)$ en temps t .

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 1.6.3

Si $E_{t,x_0}(u) \in \text{Front}(\mathcal{A}(t, x_0))$, alors le contrôle u est singulier.

Remarque 1.6.1. Un système contrôlé peut être localement contrôlable le long d'une trajectoire singulière (*i.e.* associée à un contrôle singulier) : $\dot{x} = u^3$, $u \equiv 0$ singulier.

8. On note $\text{Int}(A)$ l'intérieur de A et $\text{Front}(A)$ sa frontière.

On peut synthétiser les propriétés des contrôles singuliers et réguliers de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u \text{ régulier} &\Rightarrow E_{t,x_0} \text{ est localement ouverte en } u \\
 &\Rightarrow \mathcal{A}(t, x_0) \text{ est localement ouvert au point } E_{t,x_0}(u) \\
 &\Rightarrow (\Sigma_u) \text{ est localement contrôlable en } x_0 \text{ autour de } E_{t,x_0}(u) \text{ en temps } t.
 \end{aligned}$$

Par contraposée, on a

$$E_{t,x_0}(u) \in \text{Front}(\mathcal{A}(t, x_0)) \Rightarrow u \text{ singulier}$$

mais attention, on peut avoir u singulier et $\mathcal{A}(t, x_0)$ localement ouvert en $E_{t,x_0}(u)$.

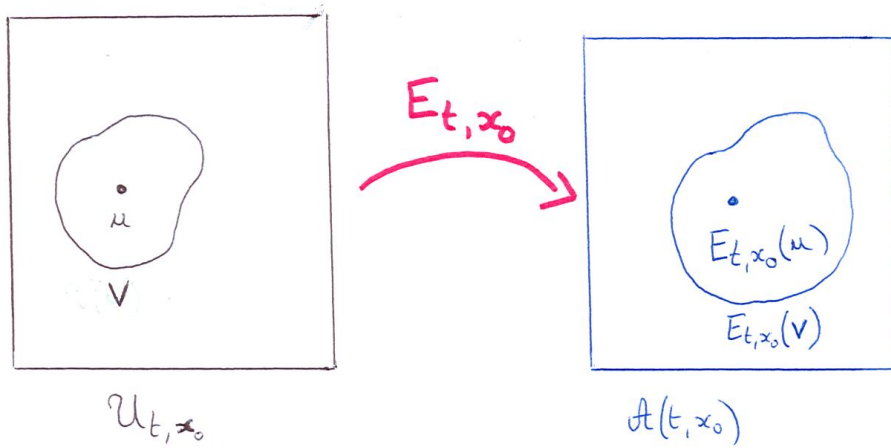


FIGURE 1.5 – Illustration du cas u régulier. L'ensemble V est un voisinage ouvert de u . Dans le cas régulier $E_{t,x_0}(V)$ est un voisinage ouvert de $E_{t,x_0}(u)$.

Définissons ce que l'on appelle le pseudo-hamiltonien associé au système (Σ_u) .

Définition 1.6.4 – Pseudo-hamiltonien

Le **pseudo-hamiltonien** associé au système (Σ_u) est la fonction

$$\begin{aligned}
 H: \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \times \Pi &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, p, u) &\longmapsto H(x, p, u) := p \cdot f(x, u).
 \end{aligned}$$

Nous avons alors la caractérisation suivante des contrôles singuliers.

Théorème 1.6.5 – Caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers

Supposons u singulier sur $[0, t]$ et notons $x(\cdot) := \Phi(\cdot, x_0, u)$ la trajectoire associée. Il existe alors une application $p: [0, t] \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ absolument continue t.q. pour $s \in [0, t]$ p.p. :

$$\dot{x}(s) = \frac{\partial H}{\partial p}[s], \quad \dot{p}(s) = -\frac{\partial H}{\partial x}[s], \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u}[s],$$

où H est le pseudo-hamiltonien associé au système (Σ_u) et où $[s] := (x(s), p(s), u(s))$. On appelle $p(s)$ le **vecteur adjoint** à $x(s)$.

► Par définition E'_{t,x_0} n'est pas surjective. Ainsi, $\exists \lambda \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ orthogonal au sous-espace vectoriel $\text{Im } E'_{t,x_0}(u)$, i.e. t.q. $\forall \delta u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$

$$\lambda \cdot (E'_{t,x_0}(u) \cdot \delta u) \stackrel{\text{cf. 1.4.2}}{=} \lambda \cdot \int_0^t R(t, s) B(s) \delta u(s) \, ds = 0,$$

avec $B(s) := \partial_u f(x(s), u(s))$ et où $R(t, s)$ est la résolvante de l'équation différentielle linéaire homogène $\dot{X}(\tau) = \partial_x f(x(\tau), u(\tau)) \cdot X(\tau)$, $X(s) = I_n$. Posons

$$p(s) := \lambda R(t, s) \in (\mathbb{R}^n)^*$$

pour tout $s \in [0, t]$.⁹ Alors, tout d'abord $p(s) \neq 0$ car $\lambda \neq 0$. Ensuite, on a :

$$\dot{p}(s) = \lambda \frac{\partial R}{\partial t_0}(t, s) = -\lambda R(t, s) A(s) = -p(s) A(s) = -\frac{\partial H}{\partial x}[s],$$

cf. la Remarque 1.6.2, qui s'appuie sur la différentielle d'une solution d'une équation différentielle par rapport à l'instant initial, cf. Section 1.3. Et enfin on a :

$$\int_0^t p(s) B(s) \delta u(s) \, ds = 0,$$

et comme ceci est vrai pour tout $\delta u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$ on peut conclure :

$$\Rightarrow p(\cdot) B(\cdot) \perp L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m) := L_m^\infty, \text{ car } L_m^\infty \subset L_m^2.$$

$$\Rightarrow p(\cdot) B(\cdot) = 0, \text{ car } \overline{L_m^\infty} = L_m^2.$$

$$\Rightarrow \forall s \in [0, t] \text{ p.p., } p(s) B(s) = p(s) \partial_u f(x(s), u(s)) = \partial_u H[s] = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 1.6.2. Faisons le rappel suivant. Soit $R(t, s)$ la résolvante solution de

$$\dot{X}(\tau) = A(\tau)X(\tau) =: g(X(\tau)), \quad X(s) = I_n.$$

Alors $\partial_{t_0} R(t, s) = -R(t, s) A(s)$ car c'est la solution au temps t de l'équation linéarisée

$$\begin{cases} \widehat{\delta X}(\tau) = g'(X(\tau)) \cdot \delta X(\tau) = A(\tau) \delta X(\tau), \\ \delta X(s) = -g(X(s)) = -A(s)X(s) = -A(s). \end{cases}$$

Remarque 1.6.3. On peut considérer p comme un vecteur de \mathbb{R}^n et utiliser le produit scalaire usuel. Le pseudo-hamiltonien s'écrit alors $H(x, p, u) = (p | f(x, u))$ et le système pseudo-hamiltonien devient

$$\dot{x}(s) = \nabla_p H(x(s), p(s), u(s)), \quad \dot{p}(s) = -\nabla_x H(x(s), p(s), u(s)),$$

ce qui peut s'écrire, en posant $z := (x, p)$, sous la forme :

$$\dot{z}(s) = J \nabla H(z(s), u(s)) =: \vec{H}(z(s), u(s)), \quad J := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

9. Le vecteur adjoint est donc défini de manière rétrograde.

Interprétation géométrique du vecteur adjoint. Soit un triplet $(T, x_0, u) \in \mathcal{D}$. Supposons que $E_{T,x_0}(u) \in \text{Front}(\mathcal{A}(T, x_0))$. Alors u est un contrôle singulier sur $[0, T]$, il est aussi singulier sur $[0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$ et de plus $p(t)$ est orthogonal à $\text{Im } E'_{t,x_0}(u)$, voir Figure 1.6. En particulier, $\text{Im } E'_{t,x_0}(u)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de codimension supérieure ou égale à 1. En effet, on a pour tout contrôle $\delta u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$:

$$p(t) \cdot (E'_{t,x_0}(u) \cdot \delta u) = p(t) \cdot \int_0^t R(t, s) B(s) \delta u(s) ds,$$

avec $p(t) = \lambda R(T, t)$, d'où en prolongeant δu par 0 sur $]t, T]$,

$$p(t) \cdot (E'_{t,x_0}(u) \cdot \delta u) = \lambda \cdot \int_0^T R(T, s) B(s) \delta u(s) ds = \lambda \cdot (E'_{T,x_0}(u) \cdot \delta u) = 0.$$

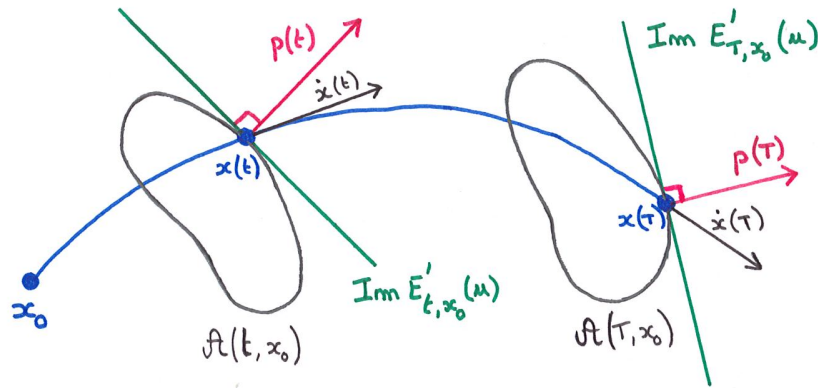


FIGURE 1.6 – Interprétation géométrique du vecteur adjoint.

1.7 Calcul de contrôles singuliers et système hamiltonien

On s'intéresse à la résolution de $\partial_u H(x, p, u) = 0$. Pour $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ donné, si $\partial_u H(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) = 0$ et si $\partial_{uu}^2 H(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ est inversible, alors d'après le théorème des fonctions implicites [7, Théorème 3.3.1], on peut trouver une fonction implicite, notée $u_s(x, p)$, telle que localement

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u_s(x, p)) = 0,$$

et vérifiant $u_s(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{u}$. En définissant sur ce voisinage le hamiltonien $h(z) := H(z, u_s(z))$, $z := (x, p)$, on obtient

$$h'(z) = \frac{\partial H}{\partial z}(z, u_s(z)) + \frac{\partial H}{\partial u}(z, u_s(z)) u'_s(z) = \frac{\partial H}{\partial z}(z, u_s(z))$$

puisque $\partial_u H(z, u_s(z)) = 0$. Si cela est vrai pour tout $s \in [0, t]$ et si la même fonction implicite u_s est définie au voisinage de tout point $(x(s), p(s))$, $x(\cdot)$ étant la trajectoire associée au contrôle singulier u et $p(\cdot)$ le vecteur adjoint associé, alors le système

$$\dot{x}(s) = \frac{\partial H}{\partial p}[s], \quad \dot{p}(s) = -\frac{\partial H}{\partial x}[s], \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u}[s],$$

dans le Théorème 1.6.5, est équivalent au **système hamiltonien**

$$\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t)), \quad \vec{h}(z) := (\partial_p h(z), -\partial_x h(z)).$$

Exemple 1.7.1. Considérons deux exemples¹⁰ pour lesquels $\partial_{uu}^2 H(x, p, u)$ est inversible et calculons le contrôle singulier.

- Considérons un pseudo-hamiltonien de la forme $H(x, p, u) := H_0(x, p) + u p_1 + 0.5 u^2 p_2$ avec x, p dans \mathbb{R}^2 , u dans \mathbb{R} et où H_0 est une fonction lisse de (x, p) . On a alors $\partial_u H(x, p, u) = 0$ ssi $p_1 + u p_2 = 0$ donc le contrôle singulier est de la forme $u_s(x, p) = -p_1/p_2$ si $p_2 \neq 0$.
- Considérons un pseudo-hamiltonien de la forme $H(x, p, u) = H_0(x, p) + \sum_{i=1}^m u_i H_i(x, p) + 0.5 \|u\|^2 p_n$ avec $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ et où les H_0, H_1, \dots, H_m sont des fonctions lisses de (x, p) . Posons $\Phi := (H_1, \dots, H_m)$. On a alors $\partial_u H(x, p, u) = 0$ ssi $\Phi + p_n u = 0$ donc le contrôle singulier est de la forme $u_s(x, p) = -\Phi(x, p)/p_n$ si $p_n \neq 0$. \square

Introduisons l'opération suivante :

Définition 1.7.1 – Crochet de Poisson

Soient f et g deux fonctions lisses sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On note pour $z := (x, p) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$:

$$\{f, g\}(z) := g'(z) \cdot \vec{f}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i}(z) \frac{\partial g}{\partial x_i}(z) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \frac{\partial g}{\partial p_i}(z).$$

Le crochet $\{f, g\}$ s'appelle le **crochet de Poisson** de f et g .

Remarque 1.7.1. Si on considère p comme un vecteur de \mathbb{R}^n , le crochet de Poisson s'écrit

$$\begin{aligned} \{f, g\}(z) &= (\nabla g(z) | J \nabla f(z)) = (\nabla g(z))^T J \nabla f(z) \\ &= (\nabla_x g(z) | \nabla_p f(z)) - (\nabla_p g(z) | \nabla_x f(z)), \end{aligned}$$

où J est définie dans la Remarque 1.6.3.

Proposition 1.7.2

Le crochet de Poisson est bilinéaire et possède les propriétés suivantes.

- *Antisymétrie* : $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
- *Dérivation* : $\{f h, g\} = f \{h, g\} + h \{f, g\}$.
- *Identité de Jacobi* : $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$.

► Voir par exemple [15] pour la démonstration. \blacksquare

Exemple 1.7.2. Considérons le pseudo-hamiltonien

$$H(x, p, u) = p_1 \frac{1}{2} x_2^2 + p_2 u$$

avec $u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ et $p \in \mathbb{R}^2$. Supposons que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)) = p_2(t) = 0$$

10. Les deux pseudo-hamiltoniens sont associés à des systèmes augmentés, cf. Définition 2.2.5.

presque partout sur un intervalle d'intérieur non vide et considérons les hypothèses du Théorème 1.6.5 vraies. Alors p.p.

$$\frac{d}{dt}p_2(t) = \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x(t), p(t), u(t)) = p_1(t) x_2(t) = 0.$$

En dérivant $t \mapsto p_1(t) x_2(t)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}(p_1(t) x_2(t)) = \dot{p}_1(t) x_2(t) + p_1(t) \dot{x}_2(t) = \alpha u(t) = 0, \quad \alpha = p_1(t) \neq 0.$$

Le contrôle est donc $u \equiv 0$. □

Exemple 1.7.3. Considérons un pseudo-hamiltonien de la forme

$$H(x, p, u) = H_0(x, p) + u H_1(x, p),$$

avec $u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ et où H_0 et H_1 sont des fonctions lisses de (x, p) . Ainsi,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = H_1(x, p).$$

On note $z := (x, p)$. Si $H_1(z(t)) = 0$ sur un intervalle de temps I non réduit à un point alors pour tout temps $t \in I$, toutes les dérivées (on suppose qu'elles existent) de $t \mapsto H_1(z(t))$ sont égales à 0. En dérivant suffisamment de fois, nous allons faire apparaître le contrôle, ce qui nous donnera sa valeur. Soit $t \in I$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_1(z(t)) &= H'_1(z(t)) \cdot \dot{z}(t) \\ &= \{H, H_1\}(z(t)) && \text{d'après la Définition 1.7.1} \\ &= \{H_0, H_1\}(z(t)) + u(t) \{H_1, H_1\}(z(t)) && \text{car le crochet est linéaire} \\ &= \{H_0, H_1\}(z(t)) && \text{car le crochet est anti-symétrique} \\ &:= H_{01}(z(t)). \end{aligned}$$

Le contrôle n'apparaît pas, on dérive donc une seconde fois :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_{01}(z(t)) &= H'_{01}(z(t)) \cdot \dot{z}(t) \\ &= \{H, H_{01}\}(z(t)) \\ &= \{H_0, H_{01}\}(z(t)) + u(t) \{H_1, H_{01}\}(z(t)) && \text{par linéarité} \\ &:= H_{001}(z(t)) + u(t) H_{101}(z(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, le contrôle est de la forme

$$\bar{u}(z(t)) = -\frac{H_{001}(z(t))}{H_{101}(z(t))}$$

si $H_{101}(z(t)) \neq 0$. Si $H_{101}(z(t)) = 0$, il faut dériver encore et encore. □

Problèmes de contrôle optimal

2.1	Introduction	17
2.2	Formulation générale d'un problème de contrôle optimal	18
2.3	Exemples	21

Maintenant, en plus d'un système contrôlé, on se donne un problème de minimisation. Donnons un exemple introductif. Parmi toutes les solutions du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ reliant une condition initiale à une cible finale, en un temps t_f donné, trouver une trajectoire et son contrôle qui minimisent un certain critère. Une telle trajectoire, si elle existe, est dite optimale pour ce coût (ou ce critère). L'existence de trajectoires optimales dépend de la régularité du système, du coût et de la classe des contrôles considérée (voir par exemple [4]). Nous supposons dans ce manuscrit, le cas échéant, l'existence de trajectoires optimales.

2.1 Introduction

D'un point de vue global, un problème de contrôle optimal se formule sur une variété différentiable M , mais notre point de vue est local et on travaille sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Introduisons la problématique du contrôle optimal sur un exemple. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , Π un ouvert de \mathbb{R}^m , $x_0 \in \Omega$, et une application de classe C^1

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \Pi &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u). \end{aligned}$$

Ces hypothèses assurent d'après le Théorème 1.2.2, que pour tout temps $t_f > 0$, toute condition initiale $x_0 \in \Omega$ et tout contrôle¹ $u \in \mathcal{U}_{t_f, x_0}$, il existe une unique solution définie sur $[0, t_f]$ vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$ et vérifiant presque partout sur $[0, t_f]$ l'équation différentielle contrôlée $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Cette solution est simplement la restriction de la solution maximale $t \mapsto \Phi(t, x_0, u)$ à l'intervalle $[0, t_f]$. On rappelle que l'on peut aussi utiliser la notation $x(t, x_0, u)$ à la place de Φ et que $E_{t_f, x_0}(u) = \Phi(t, x_0, u)$.

Soit $t_f > 0$. Soient de plus f^0 une fonction de classe C^1 sur $\Omega \times \Pi$ et g une fonction de classe C^1 sur Ω , toutes deux à valeurs dans \mathbb{R} . Pour toute paire état-contrôle $(x, u) \in L^\infty([0, t_f], \Pi) \times AC([0, t_f], \Omega)$, on définit son coût par un critère de la forme :

$$J(x, u) := g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) \, dt.$$

Soit une condition initiale donnée $x_0 \in \Omega$. Soient maintenant X_f un sous-ensemble de Ω (par exemple une sous-variété de \mathbb{R}^n incluse dans Ω) que l'on cherche à atteindre et un sous-ensemble $U \subset \Pi$ fermé représentant les contraintes imposées sur le contrôle.

1. On rappelle que \mathcal{U}_{t, x_0} est l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, t]$ depuis x_0 .

Un exemple de problème de contrôle optimal est le suivant : on souhaite déterminer le contrôle $u \in \mathcal{U}_{t_f, x_0}$ à valeurs dans U tel que la trajectoire associée $x(\cdot) := \Phi(\cdot, x_0, u)$ vérifie la condition terminale $x(t_f) \in X_f$ et tel que la paire (x, u) minimise le critère J . Ce problème de contrôle optimal (à temps final et condition initiale fixés) peut se réécrire de manière synthétique sous la forme suivante :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \min J(x, u) \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) \in X_f, \end{cases}$$

ou encore sous la forme équivalente :

$$\min \left\{ J(x, u) \mid u \in \mathcal{U}_{t_f, x_0} \cap U^{\mathbb{R}}, \quad x(t_f) \in X_f, \quad x(\cdot) = \Phi(\cdot, x_0, u) \right\}.$$

Puisque $x(\cdot) = \Phi(\cdot, x_0, u)$ est définie de manière unique par la donnée de u , car $t_0 = 0$ et x_0 est fixé, nous pouvons réécrire le problème sous la forme réduite suivante

$$\min \left\{ F(u) \mid u \in \mathcal{U}_{t_f, x_0} \cap U^{\mathbb{R}}, \quad E_{t_f, x_0}(u) \in X_f \right\},$$

où on définit $F(u) := J(\Phi(\cdot, x_0, u), u)$ et on rappelle que $E_{t_f, x_0}(u) = \Phi(t_f, x_0, u)$.

Une solution (globale) au problème (P_1) est définie ainsi. Une paire état-contrôle (\bar{x}, \bar{u}) est dite admissible pour (P_1) si $\bar{u} \in \mathcal{U}_{t_f, x_0} \cap U^{\mathbb{R}}$, si $\bar{x}(\cdot) = \Phi(\cdot, x_0, \bar{u})$ et si $\bar{x}(t_f) \in X_f$. Elle est solution de (P_1) (ou optimale) si pour toute autre paire état-contrôle (x, u) admissible : $J(\bar{x}, \bar{u}) \leq J(x, u)$.

2.2 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal

On s'intéresse dans ce manuscrit aux problèmes de contrôle optimal sous la forme suivante :

Définition 2.2.1 – Problème de contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal dans sa formulation la plus générale s'écrit :

$$(OCP) \quad \begin{cases} \min J(x, u, t_0, t_f) := g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) \, dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ c(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0_{\mathbb{R}^p}, \end{cases}$$

où f , f^0 , g et c sont au moins de classe \mathcal{C}^1 , avec

- $f: \mathcal{I} \times \Omega \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f^0: \mathcal{I} \times \Omega \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$,
- $g: \mathcal{I} \times \Omega \times \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c: \mathcal{I} \times \Omega \times \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \leq 2(n+1)$,

où \mathcal{I} est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , Π un ouvert de \mathbb{R}^m , $U \subset \Pi$ fermé et où la fonction c est une **submersion** en tout point de $c^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$, c-a-d $c'(t_0, x_0, t_f, x_f)$ est surjective pour tout point (t_0, x_0, t_f, x_f) vérifiant $c(t_0, x_0, t_f, x_f) = 0$.

Le problème de contrôle optimal est dit à **temps final libre** si t_f n'est pas fixé, sinon on parle de problème à **temps final fixé**. Dans le premier cas, t_f est une inconnue du problème, on notera donc le coût $J(x, u, t_f)$ (on suppose t_0 fixé). De même, la temps initial t_0 peut être une variable d'optimisation. Dans ce cas, le critère s'écrira sous la forme $J(x, u, t_0)$ (en supposant t_f fixé) et on parle de problème à **temps initial libre**. Si t_0 est fixé on parle de problème à **temps initial fixé**. Si t_0 et t_f sont libres on note $J(x, u, t_0, t_f)$.

Remarque 2.2.1. Si le contrôle u est fixé et si t_f est à optimiser par exemple, alors le problème de contrôle optimal devient un simple problème d'optimisation en dimension finie.

On définit une solution (globale) au problème (OCP) ainsi :

Définition 2.2.2 – Solution de (OCP)

Un 4-uplet $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_0, \bar{t}_f)$ est dit **admissible** si

- $(\bar{t}_0, \bar{t}_f) \in \mathcal{I}^2$,
- $\bar{u} \in L^\infty([\bar{t}_0, \bar{t}_f], \Pi)$, $u(t) \in U$ sur $[\bar{t}_0, \bar{t}_f]$,
- $\bar{x} \in AC([\bar{t}_0, \bar{t}_f], \Omega)$, $\bar{x} = \Phi(\cdot, \bar{t}_0, \bar{x}(t_0), \bar{u})$ et
- $c(\bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_f, \bar{x}(\bar{t}_f)) = 0$.

Il est **solution** de (OCP) (ou **optimal**) si pour tout autre 4-uplet (x, u, t_0, t_f) admissible : $J(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_0, \bar{t}_f) \leq J(x, u, t_0, t_f)$.

Remarque 2.2.2. On adaptera la définition quand certains paramètres seront fixés, parmi le temps initial, la condition initiale ou le temps final.

Définition 2.2.3

La formulation du problème de contrôle optimal (OCP) est dite de **Bolza**, ou encore de **Mayer–Lagrange**. Il existe deux autres formulations ; celle de **Lagrange** ($g \equiv 0$) et celle de **Mayer** ($f^0 \equiv 0$).

Proposition 2.2.4

Les trois formulations : Bolza, Mayer et Lagrange, sont équivalentes.

► Voir [4] pour la démonstration. ■

Le problème important du **temps minimal** correspond à $f^0 \equiv 1$ et $g \equiv 0$ ou bien à $f^0 \equiv 0$ et $g(t_0, x_0, t_f, x_f) = t_f$. Le temps final t_f étant bien entendu libre dans ce cas. On peut toujours se ramener à un problème à temps final fixé en normalisant l'intervalle de temps de $[t_0, t_f]$ à $[0, 1]$ par exemple, puis en ajoutant t_f au variables d'état. Si on note $s \in [0, 1]$ le nouveau temps, alors la dynamique pour la nouvelle variable d'état est $\dot{t}_f(s) = 0$ et on laisse $t_f(0)$ et $t_f(1)$ libres. Un autre point de vue est le suivant. Une fois l'intervalle de temps normalisé, on pourrait laisser t_f comme un paramètre à optimiser dans la formulation du problème de contrôle optimal mais cette formulation à paramètres n'est pas incluse dans la Définition 2.2.1.



Exercice 2.2.1. Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad c(x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

sous les hypothèses habituelles. Montrer que l'on peut ramener le problème sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ au lieu de $[0, t_f]$, en faisant un changement de variable adapté. Attention, le changement de variable peut avoir des conséquences sur le critère, la contrainte différentielle et la contrainte $c = 0$. \square

D'une formulation de Lagrange à Mayer. Commençons par un exercice.



Exercice 2.2.2. Soit le problème de Lagrange suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad c(x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

sous les hypothèses habituelles. On introduit l'état augmenté $\tilde{x} := (x, x^0)$ et le système augmenté $\tilde{f}(\tilde{x}, u) := (f(x, u), f^0(x, u))$. En utilisant l'état et le système augmentés, montrer que l'on peut écrire le problème de contrôle optimal ci-dessus sous la forme d'un problème de Mayer. Vous donnerez la formulation du problème de Mayer en faisant attention à ne pas oublier la condition initiale pour l'état augmenté. \square

Voyons ce que donne le passage d'une formulation de Lagrange à une formulation de Mayer. Supposons donc que $g \equiv 0$ et considérons :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \min J(x, u, t_0, t_f) := \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ c(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

Introduisons la définition suivante qui nous servira dans la démonstration du principe du maximum faible, principe qui permet d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité, cf. Chapitre 3.

Définition 2.2.5 – Système augmenté

On note $\tilde{x} := (x, x^0)$ l'*état augmenté* et $\tilde{f} := (f, f^0)$ le *système augmenté* tel que $\tilde{f}(t, \tilde{x}, u) := (f(t, x, u), f^0(t, x, u))$.

Le problème (P₂) est alors équivalent au problème suivant sous forme de Mayer.

$$(P_3) \quad \begin{cases} \min \tilde{J}(\tilde{x}, u, t_0, t_f) := x^0(t_f) \\ \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x^0(t_0) = 0 \text{ (critère initial)}, \quad c(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

Le pseudo-hamiltonien (comparer à la Définition 1.6.4) associé au système augmenté s'écrit

$$H(t, \tilde{x}, \tilde{p}, u) := \tilde{p} \cdot \tilde{f}(t, \tilde{x}, u) = p \cdot f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u),$$

où $\tilde{p} := (p, p^0)$ et puisque ce pseudo-hamiltonien ne dépend pas de x^0 on l'écrit $H(t, x, p, p^0, u)$.

On donne donc la définition suivante :

Définition 2.2.6 – Pseudo-hamiltonien associé au problème (OCP)

Le **pseudo-hamiltonien**² associé au problème de contrôle optimal (OCP) est la fonction

$$\begin{aligned} H: \mathcal{I} \times \Omega \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^* \times \Pi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p, p^0, u) &\longmapsto H(t, x, p, p^0, u) := p \cdot f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u). \end{aligned}$$

2.3 Exemples

Exemple 2.3.1 (Transfert orbital). L'une des activités historiques en contrôle optimal de l'équipe APO de l'INP-ENSEEIH & IRIT, est l'analyse de problèmes de transfert orbital de satellites. L'un des problèmes physiques étudiés ces dernières années, en collaboration avec le Centre National d'Études Spatiales (CNES) de Toulouse, est le transfert d'un satellite autour de la Terre d'une orbite basse vers une orbite géostationnaire à l'aide d'un moteur à poussée faible. Les moteurs chimiques qui ont une poussée forte, permettent de réaliser le transfert en quelques manœuvres. L'utilisation de moteurs plus récents à propulsion électro-ionique à poussée faible permet la réduction significative des coûts liés à la consommation de carburant.

Dans ce problème, on connaît les orbites initiale et finale ainsi que la dynamique du satellite. L'objectif est alors de déterminer le contrôle (ou loi de commande), c'est-à-dire la poussée du moteur, à tous les instants, permettant de réaliser le transfert en minimisant la consommation de carburant. Le Principe du Maximum de Pontryagin (cf. Chapitre 4) indique alors que le contrôle optimal est de type **Bang-Bang**, c'est-à-dire ici que le moteur est par intervalle soit éteint, soit à pleine poussée.

Modélisation du problème. Le satellite est assimilé à un point matériel de masse m , soumis à l'attraction terrestre et à une force de propulsion F , dépendante du temps t . En première approximation, le système s'écrit

$$\ddot{r}(t) = -\mu \frac{r(t)}{\|r(t)\|^3} + \frac{F(t)}{m(t)},$$

2. On peut trouver dans la littérature la terminologie hamiltonien ou pré-hamiltonien au lieu de pseudo-hamiltonien.

où $r(t)$ désigne le vecteur position du satellite à l'instant t dans un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre, μ la constante de gravitation de la Terre et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Le système libre $F \equiv 0$ correspond aux équations de Kepler. Pratiquement, la poussée est limitée, *i.e.* $\|F\| \leq F_{\max}$ et on peut changer son orientation. La propulsion se fait par éjection de matière, à vitesse v_e et il faudrait rajouter au système l'équation de la masse $\dot{m}(t) = -F(t)/v_e$, ce que nous ne faisons pas dans cet exemple. Nous considérons la masse constante. L'état du système est donc $x := (r, v)$. Il vérifie à chaque instant t :

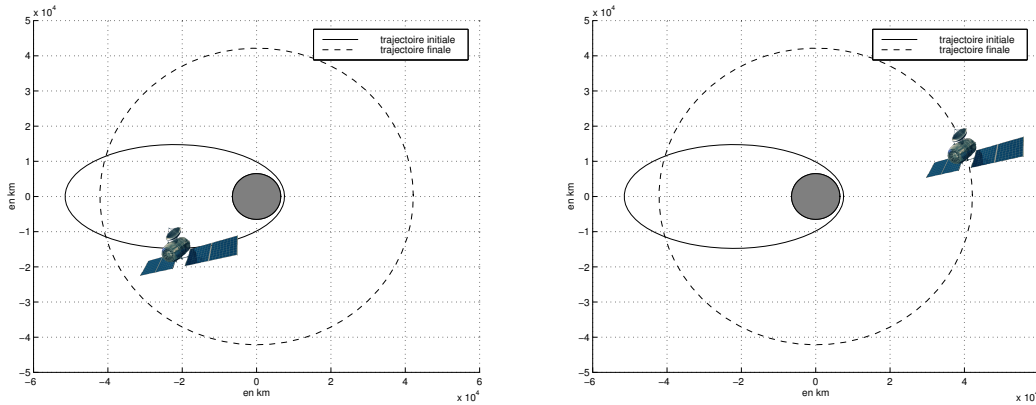
$$\dot{r}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = -\mu \frac{r(t)}{\|r(t)\|^3} + \frac{F(t)}{m}$$

et l'on contrôle la poussée de l'engin F au cours du temps. Puisque nous considérons des poussées faibles, nous récrivons $F := \varepsilon u$, de sorte que $u := (u_1, u_2, u_3)$ est soumis à la contrainte $\|u\| \leq 1$ et tel que $\varepsilon > 0$ petit soit la poussée maximale.

Deux questions fondamentales.

1. Soient x_0 une orbite initiale et x_f une orbite terminale, existe-t-il un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée joigne x_0 à x_f en un temps fini t_f ? **C'est le problème de contrôlabilité.**
2. Si la condition de la question précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant x_0 à x_f en temps fini qui de plus minimise la consommation de carburant? Et s'il existe, comment le calculer? **C'est le problème de contrôle optimal.**

Un résultat. Les données sont les suivantes. Le satellite a une masse $m = 1500$ Kg. Il doit être transféré autour de la Terre ($\mu = 398600.47 \text{ km}^3 \text{s}^{-2}$) d'une orbite initiale elliptique basse, excentrique et inclinée (le satellite est lancé par une fusée) à une orbite finale géostationnaire dans le plan équatorial, en utilisant une poussée maximale de $\varepsilon = 10$ N (Newton), tout en minimisant la consommation de carburant.



Le critère ou encore la fonction coût à minimiser (*i.e.* la consommation de carburant) dépend ici du contrôle $u(\cdot)$ appliqué et du temps de transfert t_f . La fonction coût est simplement la norme L^1 du contrôle, *i.e.*

$$\int_0^{t_f} \|u(t)\| dt \rightarrow \min,$$

le temps final t_f étant fixé. Le contrôle optimal (de type Bang-Bang) ainsi que sa trajectoire associée se trouve Figure 2.1.

□

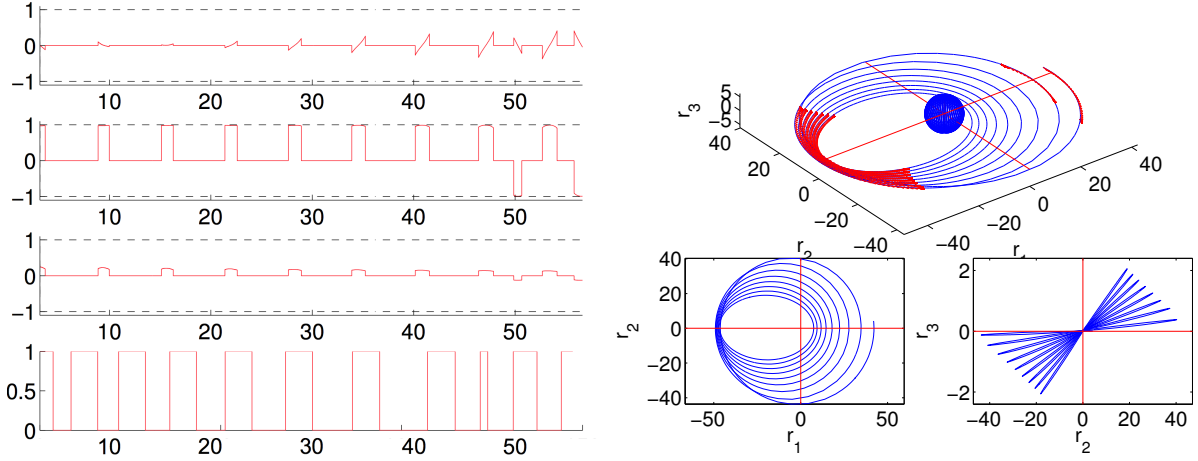


FIGURE 2.1 – Le contrôle optimal (sous-graphes de gauche) est donné en fonction du temps pour les trois composantes u_1 , u_2 , u_3 et la norme $\|u\|$, respectivement de haut en bas. La trajectoire optimale est représentée sur les sous-graphes de droite. On retrouve la trajectoire (en bleu) autour de la Terre en trois dimensions (sous-graphe du haut), et les projections sur (r_1, r_2) et (r_2, r_3) (sous-graphes du bas). Les flèches rouges indiquent l'activité du contrôle qui est clairement localisée autour des apogées et des deux derniers périgées.

Exemple 2.3.2 (Problème temps optimal linéaire). Voici un exemple de problème linéaire, temps minimal et à conditions aux limites simples :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) := t_f \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, U est un polytope convexe compact de \mathbb{R}^m , A et B sont des matrices constantes d'ordre respectivement $n \times n$ et $n \times m$, et où x_0 et x_f sont fixés. Un tel problème est appelé un **problème temps-optimal linéaire**. \square

Exemple 2.3.3 (Problème linéaire-quadratique). Les problèmes linéaire-quadratiques sont très populaires en automatique par exemple. On peut par exemple chercher à stabiliser un pendule inversé à la verticale, ou encore un robot Lego segway, cf. Figure 2.2. On considère un système linéaire avec un coût quadratique :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (R u(t) | u(t)) + (P x(t) | u(t)) + (Q x(t) | x(t)) \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, x_0 et t_f sont fixés, où A , B , P , Q et R sont des matrices constantes de dimensions adaptées, R et Q sont symétriques, et $(\cdot | \cdot)$ représente le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . Un tel problème est appelé un **problème linéaire-quadratique**. \square

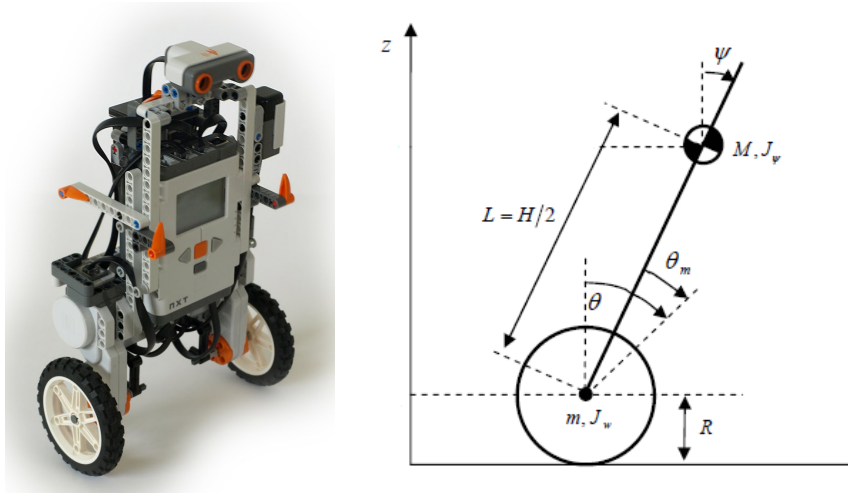


FIGURE 2.2 – Robot Lego segway.

Exemple 2.3.4 (Calcul des variations). Considérons un système contrôlé sans contraintes sous sa forme la plus simple $\dot{x}(t) = u(t)$, avec $\Pi = \mathbb{R}^n$. Supposons que les conditions aux limites soient elles aussi simples, *i.e.* $x(0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$, avec $t_f > 0$ fixé. Ce problème de contrôle optimal se réduit en un problème standard de **calcul des variations** :

$$\min_x \int_0^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f,$$

où $L := f^0$ est un ce que l'on appelle un **lagrangien**. D'un point de vue contrôle optimal, il s'écrit :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \end{cases}$$

Exemple de lagrangien : $L(x, u) = T(u) - V(x) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - V(x)$, V un potentiel. □

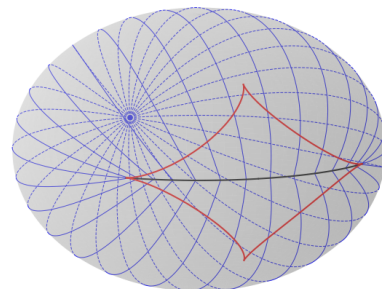
Exemple 2.3.5 (Géométrie riemannienne). But : recherche de plus courts chemins.

$$\min \int_0^{t_f} \sqrt{g_{x(t)}(\dot{x}(t))} dt, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f.$$

Métrique riemannienne :

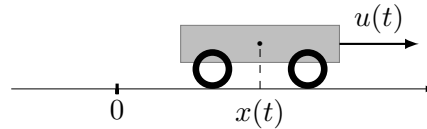
$$g_x(v) = v^T A(x) v,$$

où $A(x)$ est une matrice définie positive et $x \mapsto A(x)$ est lisse.



□

Exemple 2.3.6 (Contrôle optimal lisse (chariot sur rail ou double intégrateur)). Considérons un chariot se déplaçant sur un rail, dont on peut contrôler l'accélération par l'intermédiaire d'une force u . On choisit de représenter l'état q du chariot par la position de son centre x et sa vitesse v .



On suppose que la masse du chariot est constante et unitaire, et qu'il n'y a pas de frottements. La dynamique s'écrit : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = u(t)$. Cherchons à minimiser l'énergie du transfert, *i.e.* $\int_0^{t_f} u^2(t) dt$, avec comme conditions aux limites $x(0) = -1$, $v(0) = 0$, $x(t_f) = 0$ et $v(t_f) = 0$, en prenant $t_f = 1$. Dans ce cas, le contrôle optimal est lisse. Le résultat est donné Figure 2.3.

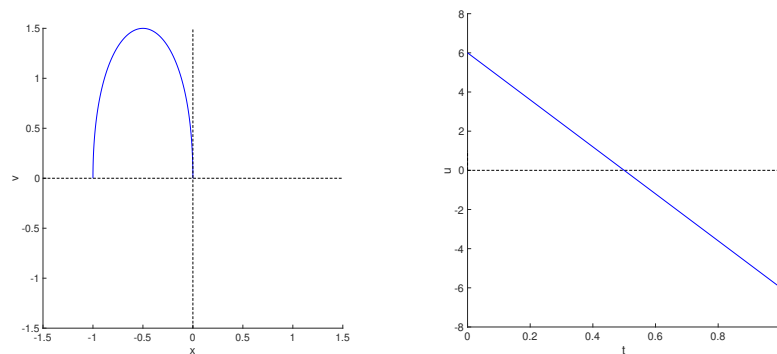


FIGURE 2.3 – Pour le problème à **énergie min**, le contrôle optimal est **lisse**.

On peut remplacer le critère énergie par le temps de transfert. Le problème à temps minimal s'écrit :

$$(P_4) \quad \begin{cases} \min J(x, u, t_f) := t_f \\ \dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ (x(0), v(0)) = (-1, 0), \quad (x(t_f), v(t_f)) = (0, 0). \end{cases}$$

Dans ce cas, le contrôle optimal n'est pas lisse. Il possède une discontinuité, cf. Figure 2.4.

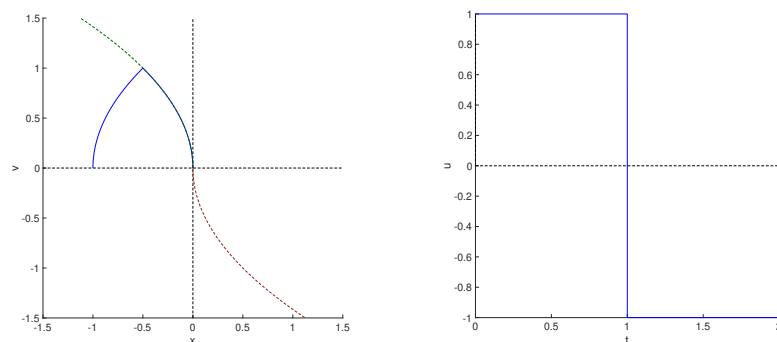


FIGURE 2.4 – Pour le problème à **temps min**, le contrôle optimal est **Bang-Bang** ($u = +1$ puis $u = -1$). Sur la sous-figure de gauche : (Bleu) Traj. dans le plan de phase. (Rouge) $x = \frac{1}{2}v^2$, $v < 0$. (Vert) $x = -\frac{1}{2}v^2$, $v > 0$. □

Exemple 2.3.7 (Contrôle bang-bang (problème de Rayleigh)). Considérons le problème de temps minimal, *i.e.* $\min t_f$, pour le système de contrôle de Rayleigh [14] :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)(1.4 - 0.14x_2(t)^2) + u_1(t),$$

avec les conditions aux limites $x_1(0) = x_2(0) = -5$, $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ et avec la contrainte sur le contrôle $|u_1(\cdot)| \leq 4$. Ce problème possède une unique solution, de nature Bang-Bang ; $u_1(\cdot)$ est discontinu et commute entre les valeurs -4 et $+4$. On remarque que $|u_1(t)| = 4$, pour tout $t \in [0, t_f]$, $t_f \approx 3.67$. La trajectoire et le contrôle solution sont présentés Figure 2.5.

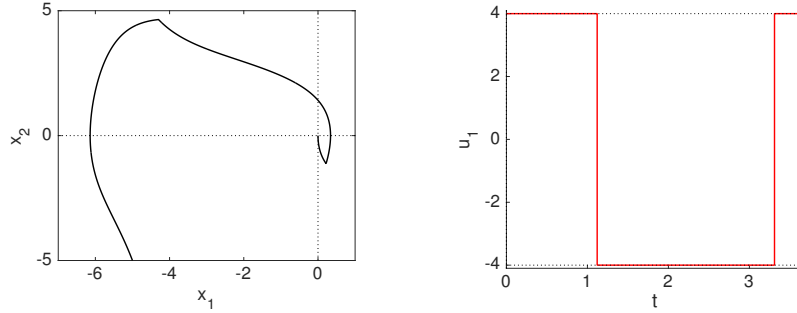


FIGURE 2.5 – Problème de Rayleigh. (Gauche) Trajectoire. (Droite) Contrôle. \square

Exemple 2.3.8 (Convergence presque-partout du contrôle régularisé (problème de Rayleigh)). Nous allons maintenant régulariser le problème de Rayleigh afin de rendre le contrôle optimal lisse. Nous utilisons la régularisation présentée dans [18]. On introduit un nouveau contrôle $u_2(\cdot)$ et un paramètre $\varepsilon > 0$ petit :

$$\dot{x}_1^\varepsilon(t) = x_2^\varepsilon(t) + \varepsilon u_2^\varepsilon(t), \quad \dot{x}_2^\varepsilon(t) = -x_1^\varepsilon(t) + x_2^\varepsilon(t)(1.4 - 0.14x_2^\varepsilon(t)^2) + u_1^\varepsilon(t),$$

avec les mêmes conditions aux limites que pour l'exemple précédent. Le contrôle $u^\varepsilon(\cdot) := (u_1^\varepsilon(\cdot), u_2^\varepsilon(\cdot))$ satisfait la contrainte $u_1^\varepsilon(\cdot)^2 + u_2^\varepsilon(\cdot)^2 \leq 16$. D'après [18, Théorème 1], la solution de ce problème notée $(x^\varepsilon(\cdot), u^\varepsilon(\cdot), t_f^\varepsilon)$ est telle que :

- t_f^ε converge vers t_f ,
- $x^\varepsilon(\cdot)$ converge uniformément vers $x(\cdot)$,
- $u_1^\varepsilon(\cdot)$ converge vers $u_1(\cdot)$ et $u_2^\varepsilon(\cdot)$ converge vers 0 **presque partout** sur $[0, t_f]$,

où $(x(\cdot), u_1(\cdot), t_f)$ est la solution du problème de Rayleigh. On peut observer ceci Figure 2.6.

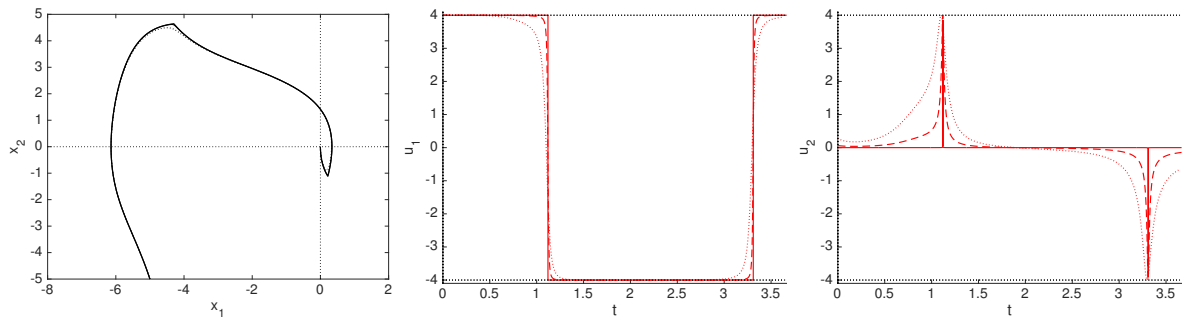


FIGURE 2.6 – Problème de Rayleigh régularisé, avec $\varepsilon = 1e^{-5}$, 0.01 et 0.05. Le temps final est normalisé à t_f^0 pour l'affichage. (Gauche) Trajectoire. (Milieu) $u_1^\varepsilon(\cdot)$. (Droite) $u_2^\varepsilon(\cdot)$. \square

Exemple 2.3.9 (Problème de Goddard et contrôle Bang-Singulier-Bang). On s'intéresse ici au problème centenaire de Goddard [11], étudié aussi bien théoriquement que numériquement à de nombreuses reprises, voir [13, 17] par exemple.



L'objectif est de maximiser l'altitude finale d'une fusée en vol vertical en un temps donné :

$$(P_G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max h(t_f) \\ \dot{h}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m(t)} (c u(t) - D(v(t), h(t))) - g_0, \\ \dot{m}(t) = -u(t), \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, \\ h(t_0) = h_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad m(t_0) = m_0, \\ m(t_f) = m_f, \end{array} \right.$$

avec $t_0 = 0$, $q_0 := (h_0, v_0, m_0) = (0, 0, m_0)$, et où $h(t)$ est l'altitude au temps t , $v(t)$ est la vitesse, $m(t)$ la masse de la fusée, $D(h, v)$ la force de traînée, g_0 la constante de gravité, c l'impulsion spécifique et $u(t)$ la poussée du moteur. La structure optimale dépend du temps final fixé t_f .

On reprend les conditions expérimentales de l'article [13]. On sait alors que pour $t_f = 20$, la structure de la solution est Bang-Bang avec deux arcs. La poussée est maximale durant le premier arc, *i.e.* $u(\cdot) \equiv u_{\max}$, puis lors du deuxième arc, $u(\cdot) \equiv 0$. La trajectoire au cours du temps avec la loi de commande est donnée Figure 2.7. Pour $t_f \approx 206$, la structure optimale est Bang-Singulière-Bang avec trois arcs, le premier $u(\cdot) \equiv u_{\max}$, puis $u(\cdot) \in [0, u_{\max}]$ (on note $u_s(\cdot)$ ce contrôle) et enfin $u(\cdot) \equiv 0$, cf. Figure 2.8.

□

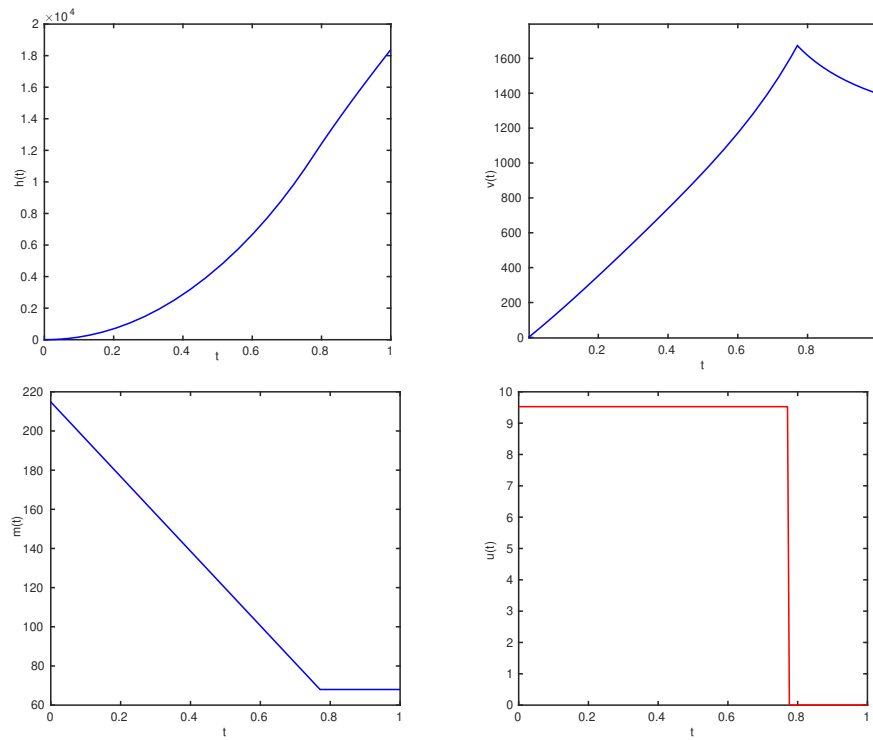


FIGURE 2.7 – Altitude, vitesse et masse de la fusée et poussée du moteur en fonction du temps normalisé. Ici $t_f = 20$.

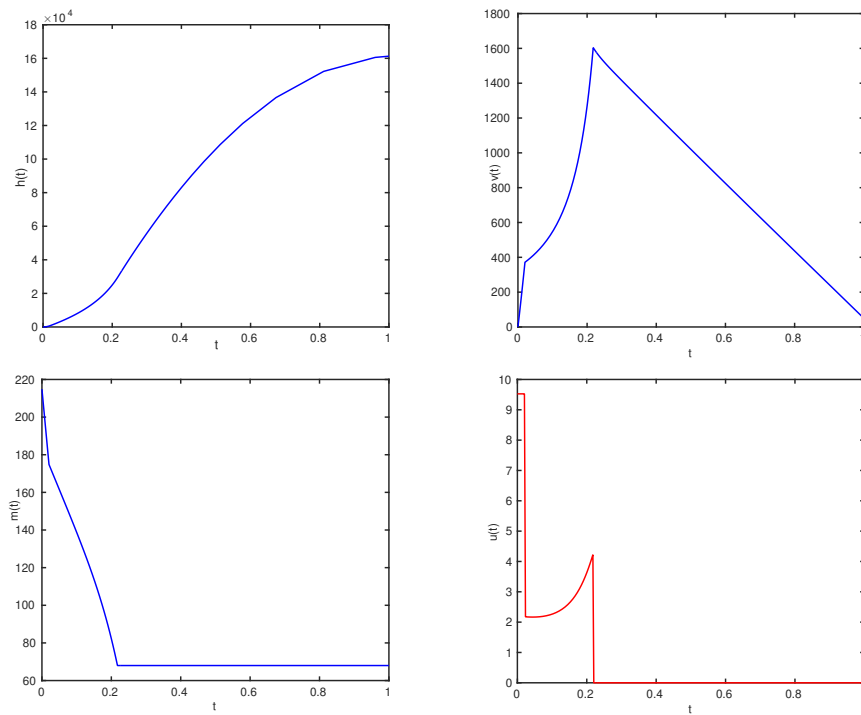


FIGURE 2.8 – Altitude, vitesse et masse de la fusée et poussée du moteur en fonction du temps normalisé. Ici $t_f \approx 206$.

Principe du maximum faible

3.1	Problème de Mayer avec conditions terminales	29
3.2	Problème de Lagrange avec conditions aux limites simples	31
3.3	Problème de Bolza à temps final libre et conditions terminales	33
3.4	Condition de Legendre et conservation du hamiltonien	37
3.5	Exemples	39
3.6	Exercices	42
3.6.1	Calcul des variations	42
3.6.2	Contrôle optimal	46

Dans ce chapitre, nous allons donner des conditions nécessaires d'optimalité que l'on peut qualifier de faible par comparaison avec le Principe du Maximum de Pontryagin présenté au Chapitre 4. Pour le principe faible, nous supposons que $U = \Pi$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle ou encore que U est ouvert.

3.1 Problème de Mayer avec conditions terminales

Nous commençons avec un problème sous la forme de Mayer et des conditions terminales seulement. La condition initiale, le temps initial et le temps final sont fixés. Nous considérons un système autonome donc nous pouvons fixer $t_0 = 0$.

Hypothèse H1. Soit un système contrôlé autonome $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, où f est une application lisse de $\Omega \times U$ dans \mathbb{R}^n , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et U un **ouvert**¹ de \mathbb{R}^m . Considérons de plus deux applications g et c lisses de Ω dans, respectivement, \mathbb{R} et \mathbb{R}^p , $p \leq n$. On suppose que c est une submersion sur $c^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$. On considère enfin $t_f \geq 0$ et $x_0 \in \Omega$.

Remarque 3.1.1. Le qualificatif lisse veut dire suffisamment régulière. On peut supposer que les applications sont au moins de classe \mathcal{C}^1 . On peut aussi affaiblir cette hypothèse et supposer seulement que f et f^0 sont \mathcal{C}^0 par rapport à u .

On définit le problème de contrôle optimal de Mayer avec conditions terminales par :

$$(P_M) \quad \begin{cases} \min J(x, u) := g(x(t_f)) \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad c(x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire le problème sous la forme suivante :

$$(P_M) \equiv \min \{ (g \circ E_{t_f, x_0})(u) \mid u \in \mathcal{U}_{t_f, x_0}, (c \circ E_{t_f, x_0})(u) = 0_{\mathbb{R}^p} \},$$

1. Il n'y a pas de contraintes sur le contrôle car U est un ouvert. Il n'y a donc pas de raison de distinguer U de Π . On peut donc considérer que $U = \Pi$.

où \mathcal{U}_{t_f, x_0} et E_{t_f, x_0} sont définis Sections 1.3 et 1.4 respectivement. Rappelons que \mathcal{U}_{t_f, x_0} est un ouvert de l'ensemble des contrôles admissibles, cf. Corollaire 1.3.3. Nous avons alors les conditions nécessaires d'optimalité suivantes.

Proposition 3.1.1 – Conditions nécessaires, problème de Mayer

Si (x, u) est solution du problème (P_M) sous les hypothèses (H1), alors il existe un vecteur adjoint $p(\cdot) \in AC([0, t_f], (\mathbb{R}^n)^*)$, un réel $p^0 \in \{-1, 0\}$ et une forme linéaire $\lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$, tels que $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$, et les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [0, t_f]$ p.p. :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)), \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)),\end{aligned}$$

où $H(x, p, u) := p \cdot f(x, u)$ est le pseudo-hamiltonien associé à (P_M) et $x(\cdot) := \Phi(\cdot, x_0, u)$. Les conditions terminales $c(x(t_f)) = 0$ sont vérifiées et on a la condition de transversalité :

$$p(t_f) = (p^0 g'(x(t_f)) + \lambda \circ c'(x(t_f))) .$$

► Le problème (P_M) est équivalent au problème

$$\min \{ (g \circ E)(u) \mid u \in \mathcal{U}_{t_f, x_0}, (c \circ E)(u) = 0_{\mathbb{R}^p} \}$$

où on a noté $E := E_{t_f, x_0}$ et où \mathcal{U}_{t_f, x_0} est un ouvert de $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$, cf. Corollaire 1.3.3, sachant que $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ est un espace de Banach. Posons

$$\begin{aligned}L: \mathcal{U}_{t_f, x_0} \times (\mathbb{R}^p)^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \lambda, \lambda^0) &\longmapsto L(u, \lambda, \lambda^0) := \lambda^0 (g \circ E)(u) + \lambda \cdot (c \circ E)(u).\end{aligned}$$

D'après [7, Théorème 5.0.3], si u est optimal, alors il existe une paire $(\lambda, \lambda^0) \in (\mathbb{R}^p)^* \times \mathbb{R}$ telle que $(\lambda, \lambda^0) \neq (0, 0)$ et on peut par homogénéité fixer $\lambda^0 \in \{-1, 0\}$. De plus, pour tout $\delta u \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$:

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u, \lambda, \lambda^0) \cdot \delta u = (\lambda^0 g'(E(u)) + \lambda \circ c'(E(u))) \cdot (E'(u) \cdot \delta u) =: \Psi \cdot \delta x(t_f) = 0,$$

où l'on a défini $\Psi := \lambda^0 g'(E(u)) + \lambda \circ c'(E(u))$ et $\delta x(t_f) := E'(u) \cdot \delta u$. On pose $p^0 := \lambda^0$.

* Voyons pour les trois premières équations de la proposition. Si $\Psi = 0$ alors elles sont vérifiées en posant $p(t) = 0$. Si $\Psi \neq 0$, alors u est singulier pour E et on applique le Théorème 1.6.5. On a dans les deux cas, $p(t) = \Psi R(t_f, t)$, où R est la résolvante associée à l'équation linéarisée.

* Pour le reste de la proposition, quelque soit la valeur de Ψ , on a $p(t_f) = \Psi$ par définition de p et $(p, p^0) \neq (0, 0)$ car sinon $(p(t_f), p^0) = (0, 0)$ donc $\lambda \circ c'(E(u)) = 0$, ce qui implique alors que $\lambda = 0$, car c est une submersion sur $c^{-1}(\{0\})$, et ceci est impossible car alors on aurait $(\lambda, \lambda^0) = (0, 0)$, ce qui n'est pas. ■

Donnons deux exemples où $\Psi = p(t_f) = 0$, Ψ étant définie dans la démonstration de la Proposition 3.1.1. Remarquons que dire que $\Psi = 0$ revient à dire que $x(t_f)$ vérifie la condition nécessaire d'optimalité à l'ordre 1 (CN1) du problème :

$$\min_{x \in \Omega} \{g(x) \mid c(x) = 0\}. \quad (3.1)$$

Exemple 3.1.1. Soit le problème de Mayer défini par $\Omega = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, $f(x, u) = u$, $c(x) \equiv 0$ et $x_0 = -1$. Le pseudo-hamiltonien est $H(x, p, u) = pu$. Ainsi, $\partial_u H(x, p, u) = p = 0$ implique que $p(t) = 0$, donc $p^0 = -1$. La condition de transversalité est $p(t_f) = -2x(t_f)$. Puisque $p(t_f) = 0$, on trouve que $x(t_f) = 0$, ce qui est bien le minimum de g sur \mathbb{R} . Remarquons que l'on peut choisir n'importe quel contrôle nous amenant en 0 en temps t_f . Tous ces contrôles admissibles ont le même coût. \square

Exemple 3.1.2. Soit le problème de Mayer défini par $\Omega = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2$, $g(x) = x_1$, $f(x, u) = u$, $c(x) = \|x\|^2 - 1$ et $x_0 = 0$. Le pseudo-hamiltonien est $H(x, p, u) = pu$. Ainsi, $\partial_u H(x, p, u) = p = 0$ implique que $p(t) = 0$. La condition de transversalité est $p(t_f) = (-1, 0) + 2\lambda x(t_f)$. Puisque $p(t_f) = 0$, on trouve que $x_2(t_f) = 0$ et $2\lambda x_1(t_f) = 1$. La condition finale $c(x(t_f)) = 0$ implique que $x_1(t_f) = \pm 1$, c-a-d qu'il y a deux solutions à la CN1 de (3.1), mais puisque l'on cherche à minimiser $g(x) = x_1$, la solution est $x_1(t_f) = -1$. Au final, on obtient que $x(t_f) = (-1, 0)$ et $\lambda = -1/2$. Comme dans l'exemple précédent, n'importe quel contrôle amenant l'état en $(-1, 0)$ en temps t_f est optimal. \square

3.2 Problème de Lagrange avec conditions aux limites simples

Nous donnons maintenant les conditions nécessaires d'optimalité faibles pour un problème de Lagrange avec conditions aux limites simples, sans contraintes sur le contrôle et où t_0 , x_0 et t_f sont fixés. Rappelons qu'au Chapitre 4, le Principe du Maximum de Pontryagin généralisera toutes les conditions nécessaires que nous donnons dans ce chapitre. Ici, nous incrémentons les problèmes en plusieurs étapes dans un souci de présentation.

Hypothèse H2. Soit un système contrôlé autonome $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, où f est une application lisse de $\Omega \times U$ dans \mathbb{R}^n , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et U un **ouvert** de \mathbb{R}^m . Considérons de plus une application f^0 lisse de $\Omega \times U$ dans \mathbb{R} , un scalaire $t_f \geq 0$ et deux points x_0, x_f dans Ω .

On définit le problème de Lagrange avec conditions aux limites simples par :

$$(P_L) \quad \begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

Nous pouvons écrire le problème sous la forme suivante :

$$(P_L) \equiv \min \left\{ (\Pi_{x_0} \circ \widetilde{E}_{t_f, \widetilde{x}_0})(u) \mid u \in \widetilde{\mathcal{U}}_{t_f, \widetilde{x}_0}, E_{t_f, x_0}(u) = x_f \right\},$$

où $\widetilde{\mathcal{U}}_{t_f, \widetilde{x}_0}$ est l'ensemble des contrôles admissibles pour le système augmenté, cf. Définition 2.2.5, et où $\widetilde{E}_{t_f, \widetilde{x}_0}$ est l'application Entrée-Sortie associée au système augmenté. Nous avons

aussi introduit la projection $\Pi_{x^0}(\tilde{x}) = x^0$, avec $\tilde{x} = (x, x^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Introduisons l'ensemble accessible augmenté $\tilde{\mathcal{A}}(t, \tilde{x}_0) := \text{Im } \tilde{E}_{t, \tilde{x}_0}$. Alors, nécessairement

$$\tilde{E}_{t_f, \tilde{x}_0}(u) \in \text{Front}(\tilde{\mathcal{A}}(t_f, \tilde{x}_0)),$$

car sinon, nous pourrions baisser le coût, voir l'illustration Figure 3.1. En effet sinon, il existerait un voisinage du point $\tilde{x}(t_f) = \tilde{E}_{t_f, \tilde{x}_0}(u) = (x(t_f), x^0(t_f))$ dans $\tilde{\mathcal{A}}(t_f, \tilde{x}_0)$ contenant un point (y, y^0) tel que $y^0 < x^0(t_f)$, ce qui contredirait l'optimalité du contrôle u . Ainsi, d'après le Corollaire 1.6.3, u est un contrôle singulier pour l'application Entrée-Sortie augmentée. On peut alors appliquer le Théorème 1.6.5 mais avec le système augmenté.

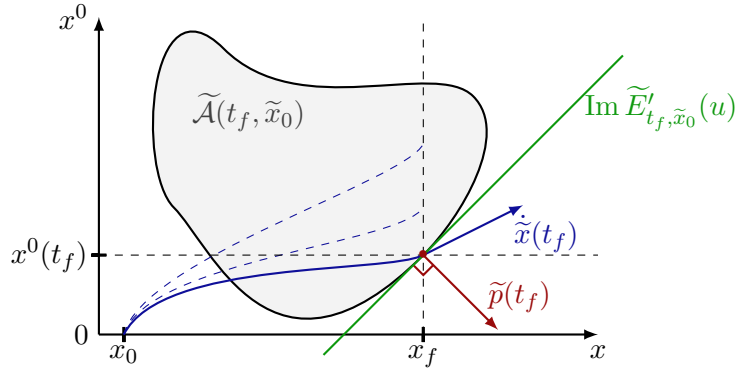


FIGURE 3.1 – Sur cet exemple, on a $p^0 \neq 0$.

Ceci nous mène aux conditions nécessaires d'optimalité suivantes.

Proposition 3.2.1 – Conditions nécessaires, problème de Lagrange

Si (x, u) est une solution du problème (P_L) sous les hypothèses (H2), alors il existe un vecteur adjoint $p(\cdot) \in AC([0, t_f], (\mathbb{R}^n)^*)$, un réel $p^0 \in \{-1, 0\}$, tels que $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$, et tels que les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [0, t_f]$ p.p. :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{aligned}$$

où $H(x, p, p^0, u) := p \cdot f(x, u) + p^0 f^0(x, u)$ est le pseudo-hamiltonien associé à (P_L) , i.e. au système augmenté et où $x(\cdot) := \Phi(\cdot, x_0, u)$.

Remarque 3.2.1. On rappelle l'idée du système augmenté. L'idée est de voir le critère intégrale comme la valeur $x^0(t_f)$ et donc de se ramener à un problème de type Mayer avec la condition terminale $\tilde{c}(\tilde{x}(t_f)) = x(t_f) - x_f \in \mathbb{R}^n$, avec \tilde{c} définie sur \mathbb{R}^{n+1} . On se ramène alors à un problème de Mayer avec conditions terminales, cf. Section 3.1. On peut remarquer qu'il n'y a pas de conditions de transversalité dans la Proposition 3.2.1, simplement parce que la condition de transversalité de la Proposition 3.1.1 appliquée au problème de Mayer associé s'écrit $\tilde{p}(t_f) = (\lambda, p^0)$ et n'apporte donc aucune information pertinente.



Exercice 3.2.1. La preuve de la Proposition 3.2.1 est laissée en exercice. On pourra utiliser le passage d'une formulation de Lagrange à Mayer, cf. (P₃). On retiendra que la preuve consiste essentiellement en appliquer KKT puis appliquer la caractérisation des contrôles singuliers. \square

Remarque 3.2.2. Le choix de fixer $p^0 \leq 0$ est arbitraire. On aurait très bien pu choisir $p^0 \geq 0$. Cela changerait alors simplement l'orientation du vecteur adjoint p .

Remarque 3.2.3. Si $E'_{t_f, x_0}(u)$ est surjective, i.e. si u n'est pas un contrôle singulier pour l'application Entrée-Sortie non augmentée, alors $p^0 \neq 0$ (on a la qualification des contraintes). Si $E_{t_f, x_0}(u) \in \text{Front}(\mathcal{A}(t_f, x_0))$, alors u est singulier pour E_{t_f, x_0} et $p^0 = 0$, cf. Figure 3.2.

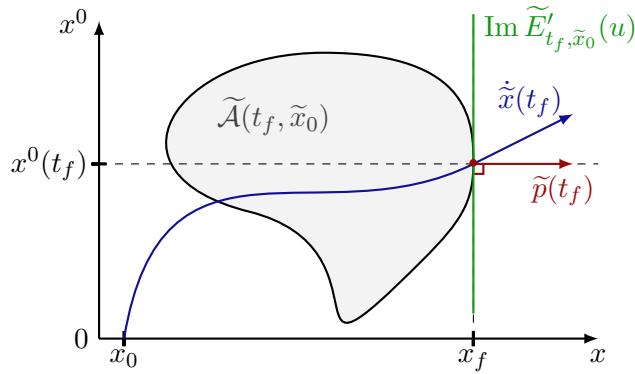


FIGURE 3.2 – Sur cet exemple, on a $p^0 = 0$.

3.3 Pb. de Bolza à temps final libre et conditions terminales

Généralisons un peu plus le problème de contrôle optimal. Considérons pour cela un système non autonome, un problème sous la forme de Bolza et fixons seulement t_0 et x_0 , c'est-à-dire que le temps final t_f est libre.

Hypothèse H3. Soit un système contrôlé non autonome $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ où f est une application lisse de $\mathcal{I} \times \Omega \times U$ dans \mathbb{R}^n , \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et U un **ouvert** de \mathbb{R}^m . Considérons de plus une application f^0 lisse sur $\mathcal{I} \times \Omega \times U$ et à valeurs dans \mathbb{R} et deux applications g et c lisses de $\mathcal{I} \times \Omega$ dans, respectivement, \mathbb{R} et \mathbb{R}^p , $p \leq n + 1$. On notera (t_f, x_f) l'argument des applications g et c . On suppose enfin que c est une submersion sur $c^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$. Soit $t_0 \in \mathcal{I}$ et $x_0 \in \Omega$.

On définit le problème de Bolza à temps final libre et conditions terminales par :

$$(P_B) \quad \begin{cases} \min J(x, u, t_f) := g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(t_0) = x_0, \quad c(t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

Nous pouvons écrire le problème (P_B) sous la forme suivante :

$$\min F(u, t_f) \quad \text{s.c.} \quad t_f \in \mathcal{I}, \quad u \in \mathcal{U}_{t_0, t_f, x_0} \text{ et } c(t_f, \Phi(t_f, t_0, x_0, u)) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

où s.c. signifie "sous contraintes", où $F(u, t_f) := J(\Phi(\cdot, t_0, x_0, u), u, t_f)$ avec $\Phi(\cdot, t_0, x_0, u)$ la solution maximale de $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$ et où $\mathcal{U}_{t_0, t_f, x_0}$ est

l'ensemble² des contrôles $u \in L^\infty([t_0, t_f], U)$ tels que $\Phi(\cdot, t_0, x_0, u)$ est bien définie sur $[t_0, t_f]$. Pour faire apparaître explicitement les dépendances aux variables à optimiser, on peut écrire le critère sous la forme :

$$F(u, t_f) = g(t_f, \Phi(t_f, t_0, x_0, u)) + \Pi_{x^0}(\tilde{\Phi}(t_f, t_0, \tilde{x}_0, u)),$$

où $\tilde{\Phi}$ est le flot associé au système augmenté et $\Pi_{x^0}(\tilde{x}) = x^0$ pour $\tilde{x} = (x, x^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Dans la formulation du problème de Bolza ci-avant, le temps final est libre, c'est donc une variable d'optimisation. Dans les conditions nécessaires, on s'attend donc à avoir une nouvelle condition à vérifier. Voyons d'où vient cette nouvelle condition. Introduisons la notation $x(t_f, u) := \Phi(t_f, t_0, x_0, u)$, t_0 et x_0 étant fixés. On pose

$$L(u, t_f, p^0, \lambda) := p^0 F(u, t_f) + \lambda \circ c(t_f, x(t_f, u))$$

le lagrangien associé au problème. Alors la solution doit vérifier (on omet les arguments)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial t_f} = p^0 \frac{\partial F}{\partial t_f} + \lambda \circ \left(\frac{\partial c}{\partial t_f} + \frac{\partial c}{\partial x_f} \cdot \dot{x} \right) = p^0 \frac{\partial g}{\partial t_f} + \lambda \circ \frac{\partial c}{\partial t_f} + p^0 f^0 + \left(p^0 \frac{\partial g}{\partial x_f} + \lambda \circ \frac{\partial c}{\partial x_f} \right) \cdot f \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial t_f} + p^0 f^0 + p(t_f) \cdot f, \end{aligned}$$

car $p(t_f) = \partial_{x_f} \xi$, avec $\xi = p^0 g + \lambda \cdot c$.

Proposition 3.3.1 – Conditions nécessaires, problème de Bolza

Si (x, u, t_f) est une solution du problème (P_B) sous les hypothèses (H3), alors il existe un vecteur adjoint $p(\cdot) \in AC([t_0, t_f], (\mathbb{R}^n)^*)$, un réel $p^0 \in \{-1, 0\}$ et une forme linéaire $\lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$ tels que $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$ et tels que les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [t_0, t_f]$ p.p. :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $H(t, x, p, p^0, u) := p \cdot f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le pseudo-hamiltonien associé à (P_B) et $x(\cdot) := \Phi(\cdot, t_0, x_0, u)$. Les conditions terminales $c(t_f, x(t_f)) = 0$ sont vérifiées et on a en plus les conditions de transversalité suivantes :

$$p(t_f) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) + \lambda \circ \frac{\partial c}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)), \tag{3.3}$$

Enfin, puisque le temps final est libre, si $u(\cdot)$ est continu en t_f , alors on a la condition suivante :

$$H[t_f] = - \left(p^0 \frac{\partial g}{\partial t_f}(t_f, x(t_f)) + \lambda \circ \frac{\partial c}{\partial t_f}(t_f, x(t_f)) \right), \tag{3.4}$$

où $[t] := (t, x(t), p(t), p^0, u(t))$.

2. On passe sous silence le fait que $\mathcal{U}_{t_0, t_f, x_0}$ soit un ensemble ouvert dans un Banach.

Remarque 3.3.1. Si l'on note la forme linéaire $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}^p)^*$ et si l'on fixe un vecteur $\delta x_f \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left(\lambda \circ \frac{\partial c}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) \right) \cdot \delta x_f = \lambda \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) \cdot \delta x_f \right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial c_i}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) \cdot \delta x_f,$$

donc

$$\lambda \circ \frac{\partial c}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial c_i}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)).$$

On rappelle que

$$\frac{\partial c}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial c_i}{\partial x_f}(t_f, x(t_f)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Définition 3.3.2 – Définitions importantes

- Une **extrémale** (faible) du problème (P_B) est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des **équations hamiltoniennes contraintes** (3.2).
- On parle de **BC-extrémale** (BC vient de “Boundary Conditions”) (faible) si l'extrémale vérifie en plus les **conditions aux limites** $c(t_f, x(t_f)) = 0$, $x(t_0) = x_0$, la **condition de transversalité** (3.3) et la **condition sur le hamiltonien** (3.4).
- Une extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ est dite **anormale** si $p^0 = 0$ et **normale** dans le cas contraire, i.e. $p^0 = -1$.

Remarque 3.3.2. Lorsque l'on résout en pratique les équations données par la Proposition 3.3.1, on explicite rarement la valeur de λ car si l'on détermine le vecteur adjoint, alors on peut retrouver facilement le multiplicateur λ . Ceci explique pourquoi dans la définition d'une extrémale, cf. Définition 3.3.2, λ n'apparaît pas.

Exemple 3.3.1. Soit un problème de Lagrange avec une contrainte terminale de la forme $c(x(t_f)) = 0_{\mathbb{R}^p}$, $p < n$ et c une submersion. Alors, la condition de transversalité $p(t_f) = \lambda \circ c'(x(t_f))$ signifie que $p(t_f) \perp T_{x(t_f)}M$, où $M := c^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n , cf. [7, Corollaire 4.4.1]. \square

Exemple 3.3.2. Reprenons l'Exemple 3.1.2 et ajoutons au critère, une partie intégrale de la forme

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u(t)\|^2 dt.$$

Soit donc le problème de Bolza défini par $\Omega = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2$, $g(x) = x_1$, $f^0(x, u) = \|u\|^2/2$, $f(x, u) = u$, $c(x) = \|x\|^2 - 1$ et $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$. Fixons de plus $t_f = 1$. Puisque le système est complètement contrôlable, nous devons retrouver la même valeur pour $x(t_f)$ qu'à l'exemple 3.1.2. Ce qui change dans ce nouveau cas, c'est que le contrôle optimal est unique. Voyons cela.

Le pseudo-hamiltonien est $H(x, p, u) = pu + p^0 \|u\|^2/2$. Ainsi, la condition de stationarité du pseudo-hamiltonien nous donne $\partial_u H(x, p, u) = p + p^0 u = 0$. Si $p^0 = 0$ alors $p = 0$ aussi ce qui est impossible. On a donc $p^0 = -1$ et le contrôle optimal vérifie donc $u = p$. La dynamique

sur le vecteur adjoint est $\dot{p} = 0$ donc p est constant. Notons w cette constante. La condition de transversalité est donc

$$p(t_f) = (-1, 0) + 2\lambda x(t_f) = w.$$

En résumé, nous sommes amenés à résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) = p(t), \\ \dot{p}(t) &= 0, \\ x(0) &= 0, \\ \|x(t_f)\| &= 1 \\ p_1(t_f) &= -1 + 2\lambda x_1(t_f), \\ p_2(t_f) &= 2\lambda x_2(t_f). \end{aligned}$$

Puisque $p(t) = w$ et $x(0) = 0$, on obtient $x(t) = wt$. Avec $t_f = 1$, on obtient $\|x(t_f)\| = \|w\| = 1$. La condition de transversalité devient $-1 + 2\lambda w_1 = w_1$ et $2\lambda w_2 = w_2$ qui se réécrit $w_1(1 - 2\lambda) = -1$ et $w_2(1 - 2\lambda) = 0$. Ceci implique que $w_2 = 0$. Puisque $\|w\| = 1$, on a $w_1 = \pm 1$. Il y a toujours 2 possibilités mais celle qui minimise le coût est $w_1 = -1$. En conclusion, on a $u(t) = p(t) = (-1, 0)$, $x(t) = (-t, 0)$, $p^0 = -1$ et $\lambda = 0$. \square

Exemple 3.3.3. Dans l'Exemple 3.1.2 la condition de transversalité nous donnait

$$p(t_f) = -g'(x(t_f)) + \lambda c'(x(t_f)) = (-1, 0) + 2\lambda x(t_f) = 0$$

et nous avons remarqué que ceci était la condition nécessaire d'optimalité à l'ordre 1 du problème de minimisation (3.1). En ajoutant un terme intégral dans le coût nous avons vu dans l'exercice précédent que la condition de transversalité devenait

$$p(t_f) = -g'(x(t_f)) + \lambda c'(x(t_f)) = (-1, 0) + 2\lambda x(t_f) = w.$$

Nous pouvons alors nous demander à quel problème de minimisation cette condition correspond. Dans l'exemple précédent, le terme intégral était

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \|u(t)\|^2 dt.$$

Le contrôle optimal vérifiait $u(t) = w$ et la trajectoire $x(t) = wt$. Introduisons le critère

$$F(w) := g(x(t_f)) + \frac{1}{2} \int_0^1 \|u(t)\|^2 dt = w_1 + \frac{1}{2} \|w\|^2.$$

Posons le problème

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} \{F(w) \mid c(w) = 1\}.$$

La CN1 de ce problème s'écrit

$$0 = -F'(w) + \lambda c'(w) = (-1, 0) - w + 2\lambda w,$$

ce qui correspond exactement à la condition de transversalité. \square

3.4 Condition de Legendre et conservation du hamiltonien

Condition de Legendre. Le long d'une extrémale est vérifiée la condition nécessaire à l'ordre 1

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0.$$

Appelons **condition d'Euler** cette condition. La condition d'Euler est obtenue à partir de la différentielle de l'application Entrée-Sortie, non-augmentée dans la formulation de Mayer et augmentée dans le cas Lagrange ou Bolza. On peut à partir de la différentielle d'ordre 2 de l'application Entrée-Sortie obtenir une nouvelle condition nécessaire. Celle-ci est appelée **condition de Legendre** (ou Legendre-Clebsch). Elle est démontrée dans [1, Proposition 20.4] et on peut trouver une version plus simple dans le cadre du calcul des variations dans [6, Théorème 2.10]. Ainsi pour être optimal, un contrôle $u(\cdot)$ associé à l'extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ doit vérifier la condition de Legendre

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \cdot (v, v) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}$$

Soit $t \in [t_0, t_f]$. On note $F_t(u) := H(t, x(t), p(t), p^0, u)$. Dire que les conditions d'Euler et de Legendre sont vérifiées au temps t , c'est dire que $u(t)$ vérifie les conditions nécessaires aux ordres 1 et 2 du problème de maximisation

$$\max_{u \in U} F_t(u). \quad (3.5)$$

Si de plus, la condition de Legendre est stricte, alors $u(t)$ vérifie la condition suffisante à l'ordre 2 d'optimalité locale pour le problème (3.5). **Attention**, même si la condition suffisante est vérifiée sur tout l'intervalle $[t_0, t_f]$ p.p., i.e. si

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \cdot (v, v) < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}$$

en aucun cas, cela est une condition suffisante d'optimalité locale pour le problème de contrôle optimal! Autrement dit, $u(\cdot)$ peut vérifier les conditions d'Euler et de Legendre stricte en tout temps mais ne pas être localement optimal pour le problème de contrôle optimal. Il faut une condition supplémentaire appelée **condition de Jacobi** [1]. Ceci même dans le cadre du calcul des variations [16].

Discussion sur la régularité des extrémales. Nous allons voir que dans le cas où la condition de Legendre est stricte, alors la régularité des applications f et f^0 nous donne la régularité des extrémales. Supposons f et f^0 de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$(t, z, p^0, u) \mapsto H(t, z, p^0, u) = p \cdot f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$$

est aussi de classe \mathcal{C}^k , avec $z := (x, p)$. Supposons $k \geq 2$, fixons p^0 et considérons un triplet $(\bar{t}, \bar{z}, \bar{u})$ tel que $\partial_u H(\bar{t}, \bar{z}, p^0, \bar{u}) = 0$ et $\partial_{uu}^2 H(\bar{t}, \bar{z}, p^0, \bar{u})$ est inversible. Si l'extrémale vérifie la condition de Legendre, alors $\partial_{uu}^2 H(\bar{t}, \bar{z}, p^0, \bar{u})$ est inversible si et seulement si l'extrémale vérifie la condition de Legendre stricte. Sous ces hypothèses, d'après le théorème des fonctions implicites, on a au voisinage de $(\bar{t}, \bar{z}, \bar{u})$ une fonction implicite $u_s(t, z)$ de classe \mathcal{C}^{k-1} telle que sur ce voisinage $\partial_u H(t, z, p^0, u_s(t, z)) = 0$. Considérons maintenant une extrémale (z, p^0, u) et

supposons que le contrôle vérifie $u(t) = u_s(t, z(t))$, avec u_s la fonction implicite de classe \mathcal{C}^{k-1} définie précédemment. Alors, le long de l'extrémale, on a

$$\dot{z}(t) = \vec{H}(t, z(t), u(t)) = \vec{H}(t, z(t), u_s(t, z(t)))$$

où l'on a introduit la notation

$$\vec{H}(t, z, u) := \left(\frac{\partial H}{\partial p}(t, z, p^0, u), -\frac{\partial H}{\partial x}(t, z, p^0, u) \right).$$

Posons

$$F(t, z) := \vec{H}(t, z, u_s(t, z))$$

et on se demande dans un premier temps quelle est la régularité de la fonction F . Par nos hypothèses, H est \mathcal{C}^k donc \vec{H} est \mathcal{C}^{k-1} . Par composition avec u_s , F est donc \mathcal{C}^{k-1} . Puisque, $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, alors la solution $t \mapsto z(t)$ est de classe \mathcal{C}^k .

Conservation du hamiltonien. Nous allons voir que dans le cadre précédent, le pseudo-hamiltonien est constant le long de l'extrémale. Par nos hypothèses, H est \mathcal{C}^k , donc

$$t \mapsto M(t) := H(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t)))$$

est de classe \mathcal{C}^{k-1} , car même si $z(\cdot)$ est de classe \mathcal{C}^k , u_s est lui de classe \mathcal{C}^{k-1} . On rappelle que l'on suppose $k \geq 2$. On a M de classe \mathcal{C}^{k-1} , on peut donc calculer sa dérivée :

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{\partial H}{\partial t}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))) + \frac{\partial H}{\partial z}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))) \cdot \dot{z}(t) \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial u}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))) \cdot \left(\frac{\partial u_s}{\partial t}(t, z(t)) + \frac{\partial u_s}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \dot{z}(t) \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))) + \frac{\partial H}{\partial z}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))) \cdot \dot{z}(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))), \end{aligned}$$

donc si le système augmenté est autonome, *i.e.* si H ne dépend pas de t , alors H est constant le long d'une extrémale.

Nous pouvons définir un véritable hamiltonien (c-a-d qui ne dépend pas de u) et refaire les calculs précédents de manière élégante, en faisant intervenir un crochet de Poisson, cf. Définition 1.7.1. Posons pour cela

$$h(t, z) := H(t, z, p^0, u_s(t, z)).$$

Alors l'extrémale vérifie aussi $\dot{z}(t) = \vec{h}(t, z(t))$, $\vec{h} := (\partial_p h, -\partial_x h)$, car $\partial_z h = \partial_z H + \partial_u H \cdot \partial_z u_s = \partial_z H$. Notons $h_t(z) := h(t, z)$ pour avoir une fonction seulement de la variable z . Au final,

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, z(t)) + \frac{\partial h}{\partial z}(t, z(t)) \cdot \dot{z}(t) \\ &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, z(t)) + h'_t(z(t)) \cdot \vec{h}_t(z(t)) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, z(t)) + \{h_t, h_t\}(z(t)) \\ &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, z(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, z(t), p^0, u_s(t, z(t))), \end{aligned}$$

par antisymétrie du crochet de Poisson.

3.5 Exemples

Dans l'exemple qui suit, nous montrons que la résolution des conditions nécessaires d'un problème de Lagrange à conditions aux limites simples revient à la résolution d'un problème aux deux bouts dans l'espace des phases, c'est-à-dire en (x, p) .

Exemple 3.5.1. Considérons le problème de contrôle optimal suivant.

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1] \text{ p.p.}, \\ x(0) = -1, \quad x(1) = 0, \end{cases}$$

avec $\forall t \in [0, 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}$. Appliquons les conditions nécessaires, cf. Proposition 3.2.1. Notons $H(x, p, p^0, u) := p(-x + u) + 0.5 p^0 u^2$, le pseudo-hamiltonien associé au problème étudié. Si u est optimal (avec x la trajectoire associée) alors il existe un vecteur adjoint p et un scalaire $p^0 \in \{0, 1\}$ tels que $(p, p^0) \neq 0$ et les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [0, 1]$ p.p. :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \partial_p H[t] = -x(t) + u(t), \\ \dot{p}(t) &= -\partial_x H[t] = p(t), \\ 0 &= \partial_u H[t] = p(t) + p^0 u(t), \end{cases}$$

où $[t] := (x(t), p(t), p^0, u(t))$. On ne peut pas avoir $p^0 = 0$ car sinon $p \equiv 0$ ce qui est impossible. Ainsi $p^0 = 1$ et $u(t) = p(t)$. On obtient ainsi le problème aux deux bouts suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -x(t) + p(t), \\ \dot{p}(t) &= p(t), \\ x(0) &= -1 =: x_0, \quad x(1) = 0 =: x_f, \end{cases}$$

et le contrôle a disparu. L'inconnue de ce problème aux deux bouts est le vecteur adjoint initial. En effet si l'on fixe $p_0 := p(0)$ alors d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, il existe une unique solution maximale $z := (x, p)$ vérifiant la dynamique (sur x et p) et la condition initiale $z(0) = (x_0, p_0)$. Le problème est donc de trouver p_0 tel que $x(1) = x_f$. Calculons la solution.

$$\dot{p}(t) = p(t) \implies p(t) = e^t p_0 \implies x(t) = (0.5 p_0 e^{2t} + C) e^{-t}.$$

Or $x(0) = x_0$ donc $x(t) = (0.5 p_0 (e^{2t} - 1) + x_0) e^{-t} = p_0 \operatorname{sh}(t) + x_0 e^{-t}$ et finalement, puisque $x(t_f) = x_f$ avec $t_f = 1$,

$$p_0 = \frac{x_f - x_0 e^{-t_f}}{\operatorname{sh}(t_f)} = \frac{e^{-1}}{\operatorname{sh}(1)} = \frac{2}{e^2 - 1} \approx 0.3130.$$

Remarque 3.5.1. Il faut bien comprendre qu'avec p_0 , on a tout ! On est donc passé de la recherche d'une loi de commande (ou contrôle) $u(\cdot)$ à un vecteur de \mathbb{R}^n . Ici $n = 1$. En effet, on a bien tout, car avec (x_0, p_0) , on peut calculer $(x(t), p(t))$ pour tout temps t et donc on a aussi le contrôle $u(t) = p(t)$ à chaque instant.

Remarque 3.5.2. Pour calculer p_0 , on a résolu le système affine en p_0 à 1 équation $S(p_0) = 0$, avec

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p_0 &\longmapsto S(p_0) := \Pi_x(z(t_f, x_0, p_0)) - x_f = p_0 \operatorname{sh}(t_f) + x_0 e^{-t_f} - x_f, \end{aligned}$$

où $z(\cdot, x_0, p_0)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = (-x(t) + p(t), p(t)), \quad z(0) = (x_0, p_0),$$

avec $z = (x, p)$ et où $\Pi_x(z) = x$. La fonction S est appelée **fonction de tir** (shooting). \square

Exemple 3.5.2 (Calcul des variations). Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) \, dt \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où $L := f^0$ est une application lisse appelée **lagrangien**, strictement convexe par rapport à la variable u , où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $t_f > 0$ est fixé. Notons $H(x, p, p^0, u) := p u + p^0 L(x, u)$ le pseudo-hamiltonien associé au problème. Si u est solution, avec x la trajectoire associée, alors il existe un covecteur (ou vecteur adjoint) p absolument continu et un scalaire $p^0 \in \{-1, 0\}$ tels que $(p, p^0) \neq 0$ et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}[t] = u(t), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}[t] = -p^0 \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), u(t)), \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u}[t] = p(t) + p^0 \frac{\partial L}{\partial u}(x(t), u(t)), \end{cases}$$

où $[t] := (x(t), p(t), p^0, u(t))$. Supposons que $p^0 = 0$. Alors $H = p u$ et la condition de maximisation du pseudo-hamiltonien n'a pas de solution si $p \neq 0$. D'un autre côté, s'il existe un temps $t \in [0, t_f]$ tel que $p(t) = 0$ alors $p \equiv 0$ puisque si $p^0 = 0$ alors $\dot{p}(t) = 0$. Alors, $(p, p^0) = (0, 0)$, ce qui est impossible. Donc $p^0 \neq 0$. On peut donc fixer $p^0 = -1$.

On a donc, puisque $\dot{x}(t) = u(t)$,

$$\dot{p}(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{et} \quad p(t) = \frac{\partial L}{\partial u}(x(t), \dot{x}(t)).$$

On retrouve ce qu'on appelle les **équations de Euler-Lagrange** [6, Théorème 2.5] :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0, \quad (3.6)$$

qui sont les conditions nécessaires du problème de calcul des variations dans sa formulation la plus classique :

$$\text{minimiser } \int_0^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t)) \, dt : x \in \mathcal{C}^1([0, t_f], \Omega), \quad x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \quad (3.7)$$

Enfin, puisque L est strictement convexe par rapport à u , on peut obtenir u en fonction de (x, p) ,³ que l'on note $u_s(x, p)$, cf. Exemple 1.7.1. On peut alors définir le véritable hamiltonien

$$h(x, p) := H(x, p, -1, u_s(x, p)) = p u_s(x, p) - L(x, u_s(x, p))$$

et les équations de Euler-Lagrange sont équivalentes aux **équations de Hamilton**

$$\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t)),$$

$$z = (x, p).$$

□

Exemple 3.5.3 (Principe fondamental de la dynamique). Considérons un point matériel de masse m évoluant dans un champ de force dérivant d'un potentiel. Le lagrangien associé est la fonction

$$L(x, v) := T(v) - V(x),$$

où $T(v) := \frac{1}{2}m\|v\|^2$ est **l'énergie cinétique** et $V(x)$ est **l'énergie potentielle** du point matériel. La position-vitesse du point matériel étant donnée par le couple (x, v) . Rappelons que l'énergie mécanique est donnée par :

$$E(x, v) := T(v) + V(x).$$

Voici quelques exemples d'énergies potentielles :

- énergie potentielle gravitationnelle (déplacement d'un satellite autour de la Terre) : $E_{\text{pg}}(r) = -G\frac{mM_T}{r} + \text{cste}$, où G est la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre et r la distance au centre de la Terre ;
- énergie potentielle de pesanteur (pendule) : $E_{\text{pp}}(\alpha) = -mgl\cos(\alpha) + \text{cste}$, où g est la pesanteur, l la longueur du pendule et α l'angle avec la verticale ;
- énergie potentielle élastique (ressort) : $E_{\text{pe}}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cste}$, où k est la raideur du ressort.

Hamilton observa que le mouvement de ce point matériel est solution d'un problème variationnel.

Proposition 3.5.1 – Principe Fondamental de la Dynamique

Les équations du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) :

$$m\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t)),$$

qui gouvernent le mouvement coïncident avec les équations de Euler-Lagrange (3.6) associé au lagrangien $L = T - V$.

► On a

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}(\nabla_v L(x(t), \dot{x}(t))) &= -\nabla V(x(t)) - \frac{d}{dt}(\nabla T(\dot{x}(t))) \\ &= -\nabla V(x(t)) - \frac{d}{dt}(m\dot{x}(t)), \end{aligned}$$

donc les équations de Euler-Lagrange correspondent aux équations du PFD. ■

3. Appliquer le théorème des fonctions implicites à $p - \partial_u L(x, u) = 0$.

Le vecteur adjoint⁴ est donné par $p = \nabla_v L(x, v) = mv$ donc celui-ci correspond à ce que l'on appelle la quantité de mouvement. Le hamiltonien correspond ici à l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} h(x, p) &= (p | v) - L(x, v) = \frac{1}{m} \|p\|^2 - L(x, \frac{1}{m}p) \\ &= \frac{1}{2m} \|p\|^2 + V(x) = T(v) + V(x) = E(x, v). \end{aligned}$$

Les équations de Euler-Lagrange nous donne le système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) = \frac{1}{m}p(t) = \nabla_p H(x(t), p(t)), \\ m\dot{v}(t) = \dot{p}(t) = -\nabla V(x(t)) = -\nabla_x H(x(t), p(t)). \end{cases}$$

Enfin, on retrouve la conservation du hamiltonien (on note $[t] := (x(t), p(t))$) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H[t] &= \frac{\partial}{\partial x} H[t] \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial}{\partial p} H[t] \cdot \dot{p}(t) \\ &= (\nabla_x H[t] | \nabla_p H[t]) - (\nabla_p H[t] | \nabla_x H[t]) = 0. \end{aligned}$$

□

3.6 Exercices

3.6.1 Calcul des variations

Les exercices de cette sous-section concernent la résolution de problèmes de calcul des variations. On pourra utiliser les équations de Euler-Lagrange (3.6). On appelle ici extrémale, une trajectoire x solution des équations de Euler-Lagrange (3.6).



Exercice 3.6.1 (cf. [5]).

1. Montrer que les extrémales de $L(t, x, v) := \sqrt{1 + v^2}$ sont affine (*i.e.* $\ddot{x} = 0$).

►

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t, x, v) = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}.$$

Soit x une extrémale, *i.e.* une trajectoire vérifiant l'équation de Euler-Lagrange. Alors (on omet l'argument t dans x et sa dérivée) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, \dot{x}) &= -\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = -\left(\frac{\ddot{x}\sqrt{1 + \dot{x}^2} - \dot{x} \frac{\dot{x}\ddot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}}{1 + \dot{x}^2} \right) \\ &= \frac{\ddot{x}}{(1 + \dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} (-1 - \dot{x}^2 + \dot{x}^2) = 0 \iff \ddot{x} = 0. \end{aligned}$$

4. Ce document est une version préliminaire ce qui explique certains mélanges : ici l'adjoint est écrit comme un vecteur de \mathbb{R}^n .

2. Montrer que l'équation de Euler-Lagrange pour le lagrangien $L(t, x, v) := x^2 + v^2$ est donnée par $\ddot{x} - x = 0$.

► L'équation de Euler-Lagrange nous donne

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, \dot{x}) = 2 \left(x - \frac{d}{dt} \dot{x} \right) = 2(x - \ddot{x}) = 0 \iff \ddot{x} - x = 0.$$

3. Trouver l'unique extrémale admissible (*i.e.* BC-extrémale) pour le problème :

$$\inf_x \left\{ J(x) := \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t)) dt \mid x \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), x(0) = 0, x(1) = 1 \right\}.$$


► Le lagrangien associé au problème est donné par $L(t, x, v) := x^2 + v^2$. D'après la question précédente les extrémales vérifient $\ddot{x}(t) - x(t) = 0$ pour tout temps $t \in [0, 1]$. Elles sont donc de la forme

$$x(t) = \lambda \cosh t + \mu \sinh t.$$

L'unique extrémale vérifiant les conditions aux limites $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$ est donnée par $\lambda = 0$ et $\mu = 1/\sinh 1$, c-a-d

$$x(t) = \frac{\sinh t}{\sinh 1}.$$

□

 **Exercice 3.6.2.** Soit $L(x, v) := \frac{1}{2} \|v\|^2$, avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Soient A, B dans \mathbb{R}^n et $T > 0$ dans \mathbb{R} . On considère le problème variationnel

$$\inf_x \left\{ J(x) := \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt \mid x \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n), x(0) = A, x(T) = B \right\}.$$

1. Trouver l'unique BC-extrémale.

► L'équation de Euler-Lagrange nous donne

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, \dot{x}) = -\frac{d}{dt} \dot{x} = -\ddot{x} = 0.$$

Ainsi les extrémales vérifient $x(t) = \lambda t + \mu$ où λ et μ sont deux constantes. Les conditions aux limites nous donne $x(0) = \mu = A$ et $x(T) = \lambda T + A = B$, c-a-d

$$x(t) = \frac{T-t}{T} A + \frac{t}{T} B.$$

Remarque. La trajectoire est le segment $[AB]$.

2. Calculer pour la BC-extrémale notée x :

$$l(x) := \int_0^T \|\dot{x}(t)\| dt.$$

► On a

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{T}(B - A).$$

Ainsi,

$$l(x) = \int_0^T \frac{\|B - A\|}{T} dt = \|B - A\|.$$

3. Que pensez-vous que $l(x)$ représente pour les points A et B ?

► C'est la longueur du segment $[AB]$, c-a-d la distance entre les points A et B !

□



Exercice 3.6.3. Soit le lagrangien $L(\alpha, \dot{\alpha}) := T(\dot{\alpha}) - V(\alpha)$, avec $T(\dot{\alpha}) := \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2$ et $V(\alpha) := -mgl \cos \alpha$, où m , g et l sont des constantes strictement positives.

1. Ecrire le hamiltonien $H(\alpha, p)$ associé à L en fonction de $I := ml^2$, $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$, α et p .

► Le hamiltonien est donné par $H(\alpha, p) = p\varphi(\alpha, p) - L(\alpha, \varphi(\alpha, p))$ où $\varphi(\alpha, p)$ est la solution de $p - \partial_{\dot{\alpha}}L(\alpha, \dot{\alpha}) = 0$, l'inconnue étant $\dot{\alpha}$. On a donc

$$p - ml^2\dot{\alpha} = 0 \iff \varphi(\alpha, p) = \dot{\alpha} = \frac{p}{ml^2} = \frac{p}{I}$$

et le hamiltonien est donné par

$$H(\alpha, p) = \frac{p^2}{I} - \left(\frac{p^2}{2I} + \omega^2 I \cos \alpha \right) = \frac{p^2}{2I} - \omega^2 I \cos \alpha.$$

Remarque. On aurait pu utiliser directement le fait que $H = T + V$.

2. Rappeler pourquoi H est constant le long de toute extrémale.

► H est constant le long de toute extrémale car le système est autonome, *i.e.* il ne dépend pas du temps.

3. Soit (α, p) une extrémale. Supposons que $H = h \in \mathbb{R}$ le long de cette extrémale. Montrer que :

$$\forall t : -\omega^2 I \cos \alpha(t) \leq h.$$

► Puisque le hamiltonien est constant le long de l'extrémale et puisque $I > 0$, on a pour tout temps t :

$$\frac{p(t)^2}{2I} = h + \omega^2 I \cos \alpha(t) \geq 0,$$

c-a-d $-\omega^2 I \cos \alpha(t) \leq h$.

4. Le cas limite entre les rotations et les oscillations est donné par $h = \omega^2 I$. Soit α_0 l'angle initial, c-a-d $\alpha(0) = \alpha_0$. Donner $\dot{\alpha}_0$ et p_0 , respectivement les vitesse et adjoint initiaux dans le cas limite.

►

$$\begin{aligned} H = \omega^2 I &= \frac{p_0^2}{2I} - \omega^2 I \cos \alpha_0 \iff p_0^2 = 2\omega^2 I^2(1 + \cos \alpha_0) \\ &\iff \dot{\alpha}_0^2 = 2\omega^2(1 + \cos \alpha_0). \end{aligned}$$

□

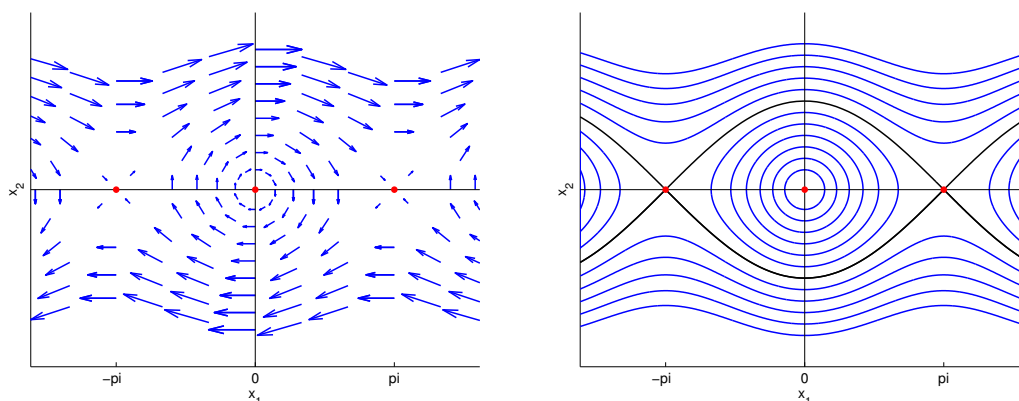


FIGURE 3.3 – Le champ de vitesses de phase du pendule est visible sur le sous-graphe de gauche. Les courbes de phase (ou orbites) en bleu sont données sur le sous-graphe de droite. Les courbes de phase fermées correspondent à des oscillations tandis que les autres correspondent aux rotations. Les courbes en noir sont appelées *séparatrices*. Enfin, on distingue trois points d'équilibre en rouge, 1 stable et 2 instables.

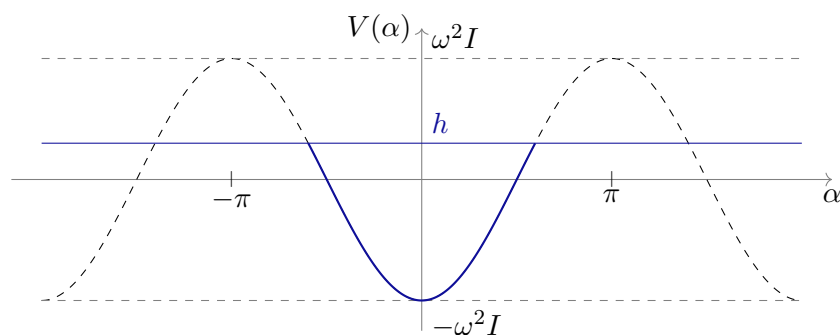


FIGURE 3.4 – Potentiel du pendule et oscillation.

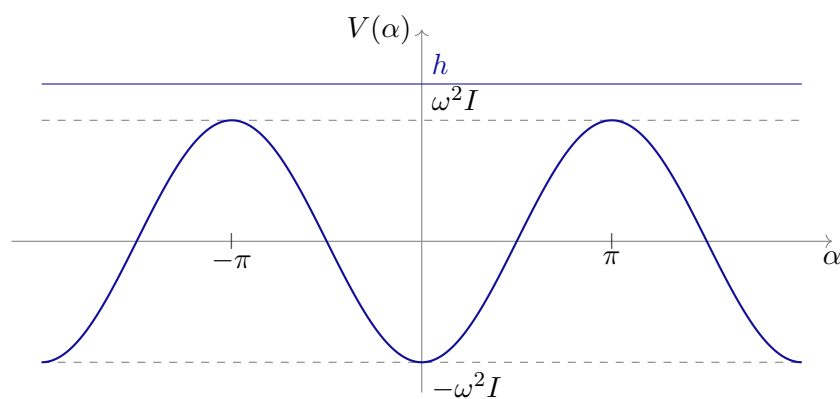



FIGURE 3.5 – Potentiel du pendule et rotation.

 **Exercice 3.6.4** (Paradoxe des jumeaux de Langevin). Soit $c > 0$ une constante réelle, on introduit le lagrangien

$$L(q, u) := c^2 u_2^2 - u_1^2$$

où l'on a noté⁵ $u := (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ le vecteur vitesse et $q := (x, t) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées. **Attention**, ici t est une variable d'état. On introduit le problème variationnel :


$$\sup_q \left\{ J(q) := \int_0^1 L(q(s), \dot{q}(s)) ds \mid q \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^2), q(0) = A, q(1) = B \right\}, \quad (3.8)$$

où $A := (0, 0)$ et $B := (\Delta x, \Delta t)$, et où Δx , et Δt sont deux constantes dans \mathbb{R}_+^* .

1. Le lagrangien L est-il autonome ?
2. Calculer l'unique BC-extrémale de (3.8), c-a-d l'extrémale vérifiant les conditions aux limites.
3. Soient q la BC-extrémale et $v \in]0, c[$. On suppose que $\Delta x = v\Delta t$. Calculer la **longueur** de q , $l(q) := \int_0^1 \sqrt{L(q(s), \dot{q}(s))} ds$, en fonction de c , Δt et le **facteur de Lorentz** $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.
4. On note $\tau := \frac{l(q)}{c}$. Que vaut $\frac{\tau}{\Delta t}$? A quel intervalle appartient $\frac{\tau}{\Delta t}$?
5. On note $C := (0, 2\Delta t)$. Soit $\bar{q} := (\bar{x}, \bar{t})$ la solution du problème variationnel (3.8) où l'on remplace la condition finale par $q(1) = C$. Donner $\bar{q}(s)$ et calculer la longueur $l(\bar{q})$.
6. **Paradoxe des jumeaux.** Igor part du point A et rejoint B à la vitesse constante $v \in]0, c[$, c-a-d en suivant la trajectoire q . Il fait demi-tour en B à la vitesse $-v$ (on précise que x est une coordonnée d'espace tandis que t est une coordonnée de temps) jusqu'à rejoindre le point C . Pendant ce temps, son frère jumeau Grichka est resté en $x = 0$, il a donc suivi la trajectoire \bar{q} . Sachant que l'âge de chacun des deux frères est la longueur du chemin qu'il parcourt divisée par c , quels sont les âges de Igor (en fonction de τ) et Grichka (en fonction de Δt) lorsqu'ils se retrouvent au point C ?
7. Qui est le plus âgé au point C ?
8. Soient $v = \frac{4}{5}c$ et $\Delta t = 25$ années. Quels âges ont Igor et Grichka en C ?

□

3.6.2 Contrôle optimal

 **Exercice 3.6.5** (Problème de contrôle optimal à conditions aux limites simples). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(q, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u(t)\|^2 dt, \\ \dot{q}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_1, \end{cases}$$

5. Plus classiquement, en Physique, les composantes de u sont notées dx et dt .

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , où $q := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et avec q_0 et q_1 dans \mathbb{R}^2 donnés, et $t_f > 0$ fixé.

1. Calculer la solution issue des conditions nécessaires données par la Proposition 3.2.1.

► On pose $H(q, p, u) = p \cdot u + p^0 \frac{1}{2} \|u\|^2$. La condition de maximisation implique $p^0 = -1$ car sinon $u \mapsto p \cdot u$ n'a de max que si $p = 0$, or $(p, p^0) \neq (0, 0)$. L'application partielle $u \mapsto H(x, p, u)$ est alors concave (strictement) donc la condition de maximisation est équivalente à la CN1 : $\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = p - u = 0$. Ainsi le contrôle maximisant est donné par $u[p] = p$. Les équations hamiltoniennes sont donc données par

$$\dot{q}(t) = p(t), \quad \dot{p}(t) = 0.$$

Ainsi $p(t) = \alpha$ et $q(t) = \alpha t + \beta$ où α et β sont deux constantes à déterminer. La condition initiale nous donne $q(0) = b = q_0$ et la condition terminale $q(t_f) = \alpha t_f + q_0 = q_1$, c-a-d $\alpha = (q_1 - q_0)/t_f$. Au final, on a

$$p(t) = \frac{q_1 - q_0}{t_f}, \quad u(t) = p(t), \quad q(t) = (q_1 - q_0) \frac{t}{t_f} + q_0, \quad p^0 = -1.$$

2. Donner, pour cette solution, la valeur de

$$\int_0^{t_f} \|u(t)\| \, dt.$$

►

$$\int_0^{t_f} \|u(t)\| \, dt = \int_0^{t_f} \frac{\|q_1 - q_0\|}{t_f} \, dt = \|q_1 - q_0\|.$$

3. Qu'avez vous (re)-démontré ?

► On vient de calculer la distance entre les points q_0 et q_1 .

□



Exercice 3.6.6 (Problème de contrôle optimal à conditions finales sous-dimensionnées). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(q, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u(t)\|^2 \, dt, \\ \dot{q}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_f) \in q_1 + \mathbb{R}v, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , où $q := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et avec $q_0 := (0, 0)$, $q_1 := (1, 0)$, $v := (0, 1)$, et $t_f > 0$ fixé.

1. Donner le 5-uplet $(u(\cdot), q(\cdot), p(\cdot), p^0, \lambda)$ solution des conditions nécessaires issues de la Proposition 3.3.1.

► Par les mêmes calculs qu'à l'exercice précédent, le système hamiltonien est donné par

$$\dot{q}(t) = p(t), \quad \dot{p}(t) = 0.$$

Ainsi $p(t) = \alpha$ et $q(t) = \alpha t + \beta$ où α et β sont deux constantes à déterminer. La condition initiale nous donne $q(0) = \beta = 0_{\mathbb{R}^2}$. La condition terminale peut s'écrire sous la forme $c(q) = x - 1$, où $q = (x, y)$. Si on note $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, alors la condition terminale nous donne $x(t_f) = \alpha_1 t_f = 1$, c-a-d $\alpha_1 = 1/t_f$. Enfin, la condition de transversalité nous donne $p(t_f) = \lambda \nabla c(q(t_f)) = (\lambda, 0) = \alpha$, c-a-d $\lambda = 1/t_f$ et $\alpha_2 = 0$. Au final, on a

$$p(t) = \left(\frac{1}{t_f}, 0\right), \quad u(t) = p(t), \quad \lambda = \frac{1}{t_f}, \quad q(t) = \left(\frac{t}{t_f}, 0\right), \quad p^0 = -1.$$

2. Faire un dessin dans le plan de la trajectoire solution avec les contraintes terminales. □



Exercice 3.6.7 (Problème de contrôle optimal à conditions finales sous-dimensionnées). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(q, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u(t)\|^2 dt, \\ \dot{q}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_f) \in q_1 + \mathbb{S}^1, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , où $q := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et avec $q_0 := (0, 0)$, $q_1 := (2, 0)$, et $t_f > 0$ fixé. On rappelle que \mathbb{S}^1 est la sphère de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

1. Donner le 5-uplet $(u(\cdot), q(\cdot), p(\cdot), p^0, \lambda)$ solution des conditions nécessaires issues de la Proposition 3.3.1.

2. Faire un dessin dans le plan de la trajectoire solution avec les contraintes terminales. □



Exercice 3.6.8. On note $c(t_f, x_f) = x_f - t_f^2$. Calculer la BC-extrémale du problème


$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) := \int_{-2}^{t_f} \sqrt{1 + u(t)^2} dt, \quad t_f > -2, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [-2, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(-2) = 0, \quad c(t_f, x(t_f)) = 0. \end{cases}$$

□

 **Exercice 3.6.9.** Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) := \int_0^{t_f} u^2(t) dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 0, \quad c(t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

avec $c(t_f, x_f) = x_f - t_f - 10$ et où $t_f > 0$ est libre. Calculer la BC-extrémale du problème. □

 **Exercice 3.6.10.** Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P_5) \quad \begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^1 \left(\frac{u(t)^2}{x(t)^2} - \ln(x(t)^2) \right) dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 1, \quad x(1) = e. \end{cases}$$

On fera l'hypothèse : $\forall t \in [0, 1], x(t) \neq 0$. On ne considère que le cas normal et on fixe la variable duale du coût : $p^0 = -\frac{1}{2}$. Soit $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ une BC-extrémale du problème (P₅).

1. Donner le pseudo-hamiltonien $H(x, p, u)$ du problème (P₅), l'équation différentielle vérifiée par $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$ et le contrôle optimal $\bar{u}(\cdot)$.

2. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on peut écrire $\bar{p}(t) \bar{x}(t)$ sous la forme $at + b$, avec a et b deux réels à déterminer ou donner en fonction de $\bar{p}(0)$.

3. Donner les expressions de $\bar{x}(\cdot)$ et $\bar{p}(\cdot)$ en fonction de t et $\bar{p}(0)$ et en déduire $\bar{p}(0)$. □

 **Exercice 3.6.11.** Soit le problème linéaire-quadratique suivant :

$$(LQR) \quad \begin{cases} \min J(x, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u(t)^T R u(t) + x(t)^T Q x(t)) dt, \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_f > 0$ sont fixés, où A, B, R et Q sont des matrices constantes de dimensions adaptées, et où R est **symétrique définie positive** et Q est **symétrique semi-définie positive**.

1. Donner le pseudo-hamiltonien $H(x, p, p^0, u)$ associé au problème (LQR).

2. Donner la dynamique adjointe (issue de la CN1) vérifiée par p .

3. Donner les conditions de transversalité vérifiée en t_f .

4. Montrer que pour tout extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$, $p^0 \neq 0$. On fixera ensuite $p^0 = -1$.

5. Montrer que le contrôle optimal vérifie $\bar{u}(x, p) = R^{-1} B^T p^T$ (p est un vecteur ligne).
6. Montrer que pour tout extrémale, le contrôle $t \mapsto u(t) = \bar{u}(x(t), p(t))$ est continu.

Soit le problème à valeur terminale (TVP) suivant :

$$\dot{S}(t) = S(t)BR^{-1}B^T S(t) - (S(t)A + A^T S(t) + Q), \quad S(t_f) = 0.$$

Nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse H4. Il existe une unique solution à (TVP) notée $t \mapsto S(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S(t)$ **symétrique** et définie sur tout l'intervalle $[0, t_f]$.

7. Calculer $\frac{d}{dt}(x(t)^T S(t)x(t))$ en fonction de $x(t)$, $S(t)$, $\dot{S}(t)$, A , B et $u(t)$. On pourra omettre l'argument t dans ce calcul et les calculs suivants.

8. Montrer que l'on peut écrire $J(x, u)$ sous la forme suivante (on omet t) :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T (SBR^{-1}B^T S)x + u^T Ru + 2u^T B^T Sx) dt + \frac{1}{2} x(0)^T S(0)x(0).$$

9. Montrer que

$$x^T (SBR^{-1}B^T S)x + u^T Ru + 2u^T B^T Sx = (u + R^{-1}B^T Sx)^T R(u + R^{-1}B^T Sx).$$

10. En déduire l'expression du contrôle optimal $u^*(t, x)$ en fonction de R , B , $S(t)$ et x et en déduire la valeur minimale du critère.

□



Exercice 3.6.12. Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) := t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x(t)^2 + u(t)^2) dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

avec $x_f > 0$ donné. Calculer les BC-extrémales du problème, pour le cas normal : $p^0 = -1$.

Rappel : La solution de l'équation différentielle $\ddot{y}(t) - y(t) = 0$, s'écrit sous la forme

$$y(t) = \alpha \cosh(t) + \beta \sinh(t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

ou bien de manière équivalente

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

car

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Pour mémoire on a également

$$\operatorname{argsh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad z \in \mathbb{R}.$$


□

 **Exercice 3.6.13.** Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := x(t_f), \\ \dot{x}(t) = -x(t)u(t) + \frac{1}{2}u(t)^2, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $x_0 > 0$ et $t_f > 0$ donnés. Calculer les BC-extrémales du problème. On montrera que $p(t) < 0$, $t \in [0, t_f]$, où p désigne l'état adjoint associé à x .

□

 **Exercice 3.6.14.** Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) := \int_0^{t_f} x^2(t) u^2(t) \, dt, \quad t_f > 0, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = \varepsilon, \quad x^2(t_f) - t_f^2 = 3 + \varepsilon^2, \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé, et où t_f est libre.

1. Écrire le pseudo-hamiltonien $H(x, p, p^0, u)$ du problème.
2. Montrer que $p^0 = 0 \Rightarrow p(\cdot) \equiv 0$. En déduire $p^0 \neq 0$. On fixe $p^0 = -1$.
3. Montrer que pour tout $t \in [0, t_f]$ tel que $x(t) \neq 0$, on a

$$\dot{x}(t) = \frac{c}{2x(t)}, \quad \dot{p}(t) = c \dot{x}(t),$$

où c est une constante à déterminer en fonction de $x(t)$ et $p(t)$.

4. Montrer que $c = 4t_f$.
5. Calculer $x(t)^2$ et $p(t)^2$, $t \in [0, t_f]$, en fonction de t , t_f , ε et $p(0)$.
6. Montrer que $t_f = 1$ et en déduire la valeur de $p(0)^2$.

□

 **Exercice 3.6.15.** Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} (2a x(t) u(t) + a^2 u^2(t)) \, dt \\ \dot{x}(t) = \frac{1}{a} x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f], \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où $a > 0$ est fixé, x_f est donné et où $t_f = \pi a/2$. Calculer les BC-extrémales du problème.

Rappel : La solution de l'équation différentielle : $\ddot{y}(t) + c y(t) = 0$, $c > 0$, s'écrit sous la forme : $y(t) = \lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)$, $(\lambda, \mu, \beta) \in \mathbb{R}^3$.

□



Exercice 3.6.16. On note $q := (x, y)$ l'état, $u := (u_1, u_2)$ le contrôle et on notera $p := (p_1, p_2)$ le vecteur adjoint. Soit le système contrôlé

$$\dot{q}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = f(q(t), u(t)) := (u_1(t), 1 + u_2(t)). \quad (3.9)$$

Soit le pseudo-hamiltonien $H(q, p, u) := (p | f(q, u)) - \frac{1}{2}\|u\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 .

1. Donner le système pseudo-hamiltonien

$$\dot{q}(t) = \nabla_p H(q(t), p(t), u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), u(t)).$$

2. Donner $u[p]$ vérifiant $\nabla_u H(q, p, u[p]) = 0$, pour $(q, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

3. Calculer $(q(t, \alpha, \beta), p(t, \alpha, \beta))$ la solution du système pseudo-hamiltonien bouclé

$$\dot{q}(t) = \nabla_p H(q(t), p(t), u[p(t)]), \quad \dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), u[p(t)]),$$

ayant comme condition initiale $q(0, \alpha, \beta) = (0, 0)$ et $p(0, \alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$.

4. Soit $t_f > 0$. Donner l'ensemble des paires (α, β) telles que $x(t_f, \alpha, \beta) = 1$.

5. Calculer $F(\alpha, \beta) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|u[p(t, \alpha, \beta)]\|^2 dt$.

6. Donner $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) := \arg \min \{F(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x(t_f, \alpha, \beta) = 1\}$.

7. Donner $q(t_f, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, $\dot{q}(t_f, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ et $p(t_f, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ en fonction de t_f .

8. Soit le problème de contrôle optimal

$$\begin{cases} \min J(q, u) := \frac{1}{2} \int_0^1 \|u(t)\|^2 dt, \\ \dot{q}(t) = f(q(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1] \text{ p.p.}, \\ q(0) = (0, 0), \quad x(1) = 1. \end{cases}$$

8.1. Soit $h(q, p, p^0, u) := (p | f(q, u)) + \frac{1}{2}p^0\|u\|^2$ le pseudo-hamiltonien associé au problème de contrôle. Justifier que $p^0 = -1$.

8.2. Rappeler la condition de transversalité en $t_f = 1$ vérifiée par le vecteur adjoint. On notera λ le multiplicateur associé à la contrainte terminale. Que vaut λ ?

□

Principe du Maximum de Pontryagin

4.1	Principe du Maximum de Pontryagin	53
4.2	Exemples de maximisation de hamiltoniens	56
4.3	Exemples de conditions de transversalité	59
4.4	Exercices	60

Dans ce chapitre, nous énonçons le résultat central de ce manuscrit, le Principe du Maximum de Pontryagin. Dans ce principe, nous retrouvons une condition de maximisation qui stipule qu'à chaque instant t , le contrôle optimal $u(t)$ vérifie un problème d'optimisation (ici de maximisation) en dimension finie. Il faut donc savoir résoudre ce genre de problème et nous donnerons à la section 4.2 quelques exemples classiques de problèmes de maximisation que l'on retrouve en contrôle optimal.

4.1 Principe du Maximum de Pontryagin

On considère maintenant le problème de contrôle optimal dans sa formulation la plus générale, c'est-à-dire le problème (OCP). Rappelons les hypothèses des données du problème.

Hypothèse H5. Soit un système contrôlé non autonome $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ où f est une application lisse de $\mathcal{I} \times \Omega \times \Pi$ dans \mathbb{R}^n , \mathcal{I} un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et Π un ouvert de \mathbb{R}^m . Considérons de plus une application f^0 lisse sur $\mathcal{I} \times \Omega \times \Pi$ et à valeurs dans \mathbb{R} et deux applications g et c lisses de $\mathcal{I} \times \Omega \times \mathcal{I} \times \Omega$ dans, respectivement, \mathbb{R} et \mathbb{R}^p , $p \leq 2(n+1)$. On notera (t_0, x_0, t_f, x_f) l'argument des applications g et c . On suppose enfin que c est une submersion sur $c^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$, c-a-d $c'(t_0, x_0, t_f, x_f)$ est surjective pour tout point (t_0, x_0, t_f, x_f) vérifiant $c(t_0, x_0, t_f, x_f) = 0$. Enfin, on introduit l'ensemble $U \subset \Pi$ **fermé**.

Rappelons maintenant le problème de contrôle optimal dans sa formulation la plus générale, c-a-d sous la forme de Bolza avec les temps initial et final libres :

$$(OCP) \quad \begin{cases} \min J(x, u, t_0, t_f) := g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) \, dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ c(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

Nous avons alors les conditions nécessaires d'optimalité suivantes qui généralisent les Propositions 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1. Le théorème suivant, le Principe du Maximum de Pontryagin, est le résultat central de ce manuscrit.

Théorème 4.1.1 – Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)

Si (x, u, t_0, t_f) est solution du problème (OCP) sous les hypothèses (H5), alors il existe un vecteur adjoint $p(\cdot) \in AC([t_0, t_f], (\mathbb{R}^n)^*)$ un réel $p^0 \in \{-1, 0\}$, et une forme linéaire $\lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$, t.q. $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$ et tels que les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [t_0, t_f]$ p.p. :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= \max_{w \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, w),\end{aligned}\tag{4.1}$$

où $H(t, x, p, p^0, u) := p \cdot f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le pseudo-hamiltonien associé à (OCP). Les conditions aux limites $c(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0$ sont vérifiées. Soit

$$\xi(t_0, x_0, t_f, x_f) := p^0 g(t_0, x_0, t_f, x_f) + \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i(t_0, x_0, t_f, x_f).$$

On a les conditions de transversalité suivantes :

$$p(t_0) = -\frac{\partial \xi}{\partial x_0}(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)), \quad p(t_f) = \frac{\partial \xi}{\partial x_f}(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)).\tag{4.2}$$

Si $u(\cdot)$ est continu aux temps t_0 , respectivement t_f , alors on a :

$$H[t_0] = \frac{\partial \xi}{\partial t_0}(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)), \quad H[t_f] = -\frac{\partial \xi}{\partial t_f}(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)),\tag{4.3}$$

où $[t] := (t, x(t), p(t), p^0, u(t))$.

Remarque 4.1.1. On rappelle que l'on peut considérer p et λ comme des vecteurs colonnes. Dans ce cas, nous écrivons

$$\dot{x}(t) = \nabla_p H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\nabla_x H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

les conditions de transversalité deviennent

$$p(t_0) = -\nabla_{x_0} \xi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)), \quad p(t_f) = \nabla_{x_f} \xi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f))$$

et les conditions sur le hamiltonien s'écrivent

$$H[t_0] = \nabla_{t_0} \xi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)), \quad H[t_f] = -\nabla_{t_f} \xi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)).$$

Pour alléger les notations nous introduisons les définitions suivantes. Soit $H(t, x, p, p^0, u)$ un pseudo-hamiltonien, on appelle *système pseudo-hamiltonien*, le système suivant :

$$\vec{H}(t, x, p, p^0, u) := \left(\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, p^0, u), -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p, p^0, u) \right).$$

De même, soit $\mathbf{H}(t, x, p)$ un véritable hamiltonien (non autonome). On appelle *système hamil-*

tonien, le système suivant :

$$\vec{\mathbf{H}}(t, x, p) := \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p}(t, x, p), -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}(t, x, p) \right).$$

Remarque 4.1.2. Nous avons déjà introduit ces définitions dans la remarque 1.6.3 et dans les sections 1.7 sur le calcul des contrôles singuliers et 3.4 sur la condition de Legendre et la conservation du hamiltonien.

La définition suivante fait écho à la définition 3.3.2.

Définition 4.1.2 – Définitions importantes

- Une **extrémale** du problème (OCP) est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des **équations hamiltoniennes contraintes** (4.1).
- On parle de **BC-extrémale** (BC vient de “Boundary Conditions”) si l’extrémale vérifie en plus les **conditions aux limites** $c(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) = 0$, les **conditions de transversalité** (4.2) et les **conditions sur le hamiltonien** (4.3).
- Une extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ est dite **anormale** si $p^0 = 0$ et **normale** dans le cas contraire, *i.e.* $p^0 = -1$.
- Une extrémale est dite **singulière** sur $I \subset [t_0, t_f]$, I d’intérieur non vide, si $\nabla_u H[t] = 0$ sur I . On parle alors de contrôle singulier. Une extrémale non singulière sur I est dite **régulière**. Elle est dite **bang** sur I si $\|u(t)\|$ est nul ou maximal sur I . On parle alors de contrôle bang.

Remarque 4.1.3. Lorsque l’on résout en pratique les équations données par le Théorème 4.1.1, on explicite rarement la valeur de λ car si l’on détermine le vecteur adjoint, alors on peut retrouver facilement le multiplicateur λ . Ceci explique pourquoi dans la définition d’une extrémale, cf. Définition 4.1.2, λ n’apparaît pas.

Proposition 4.1.3

Soit $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot), p^0, \bar{u}(\cdot))$ une extrémale. On note $\bar{z}(\cdot) := (\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$. Si pour presque tout $t \in [0, t_f]$, au voisinage de $\bar{z}(t)$, le hamiltonien maximisé

$$(t, z) \mapsto \mathbf{H}(t, z) := \max_{u \in U} H(t, z, p^0, u)$$

est défini et lisse, alors pour presque tout $t \in [0, t_f]$, on a $\dot{\bar{z}}(t) = \vec{\mathbf{H}}(t, \bar{z}(t))$.

► Puisque pour presque tout $t \in [0, t_f]$, d’après le PMP,

$$\dot{\bar{z}}(t) = \vec{H}(t, \bar{z}(t), p^0, \bar{u}(t)),$$

il suffit de montrer que, pour $t \in [0, t_f]$ p.p. : $\partial_z \mathbf{H}(t, \bar{z}(t)) = \partial_z H(t, \bar{z}(t), p^0, \bar{u}(t))$.

Soit $t \in [0, t_f]$ pour lequel (4.1) est vérifiée et pour lequel \mathbf{H} est défini et lisse, sur un voisinage ouvert de $\bar{z}(t)$, sur lequel on pose $F(z) := \mathbf{H}(t, z) - H(t, z, p^0, \bar{u}(t))$.

On a alors $F(z) \geq 0$ et $F(\bar{z}(t)) = 0$. Donc F est minimisée sur ce voisinage ouvert en $z = \bar{z}(t)$, ce qui implique $F'(\bar{z}(t)) = 0$. ■

Proposition 4.1.4

Soit $(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot), p^0, \bar{u}(\cdot))$ une extrémale de (OCP). Pour $t \in [t_0, t_f]$ p.p. :

$$\frac{d}{dt}H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)).$$

► (Idée de preuve dans le cas lisse). Par définition, $H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) = \mathbf{H}(t, \bar{z}(t))$, donc

$$\frac{d}{dt}H[t] = \frac{d}{dt}\mathbf{H}(t, \bar{z}(t)) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, \bar{z}(t)) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}(t, \bar{z}(t)) \cdot \dot{\bar{z}}(t) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, \bar{z}(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}[t],$$

avec $[t] := (t, \bar{z}(t), p^0, \bar{u}(t))$. ■

Corollaire 4.1.5

Le long d'une extrémale $(\bar{z}(\cdot), p^0, \bar{u}(\cdot))$ solution d'un problème **autonome**, le hamiltonien $t \mapsto H(\bar{z}(t), p^0, \bar{u}(t))$ est **constant** (à un ensemble de mesure nulle près).

4.2 Exemples de maximisation de hamiltoniens

Dans chacun des exemples suivants, on cherche à maximiser sur U l'application partielle $u \mapsto M(u) := H(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}, p^0, u)$ où \bar{t} , \bar{x} , \bar{p} et p^0 sont fixés. Le pseudo-hamiltonien est supposé suffisamment régulier et on ne note pas p^0 qui est fixé à -1 dans les exemples. On n'oublie pas que d'après le PMP, cette maximisation se fait à chaque instant t presque partout dans $[t_0, t_f]$.

Exemple 4.2.1. Si U est un ensemble **ouvert** (pas de contraintes sur le contrôle) et si $M(u)$ est strictement concave sur U alors M possède au plus un unique maximum sur U noté \bar{u} donné par la CN1 :

$$\bar{u} = \arg \max_{u \in U} M(u) \iff M'(\bar{u}) = \nabla_u H(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) = 0.$$

Remarque 4.2.1. Les extrémales sont donc singulières. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction implicite $\varphi(t, x, p)$ t.q. $\bar{u} = \varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p})$ et t.q. localement $\nabla_u H(t, x, p, \varphi(t, x, p)) = 0$.

En définissant localement $\mathbf{H}(t, z) := H(t, z, \varphi(t, z))$, $z := (x, p)$, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}(t, z) = \frac{\partial H}{\partial z}(t, z, \varphi(t, z)) + \frac{\partial H}{\partial u}(t, z, \varphi(t, z)) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) = \frac{\partial H}{\partial z}(t, z, \varphi(t, z))$$

puisque $\partial_u H(t, z, \varphi(t, z)) = 0$. □

Voici deux exemples.

- Considérons un pseudo-hamiltonien de la forme

$$H(x, p, u) := H_0(x, p) + up - 0.5 u^2,$$

avec x, p et u dans \mathbb{R} , et où H_0 est une fonction lisse de (x, p) . On a alors $\nabla_u H(x, p, u) = 0$ ssi $p - u = 0$ donc le contrôle maximisant est de la forme

$$u[p] := \varphi(x, p) = p.$$

- Considérons un hamiltonien de la forme

$$H(x, p, u) = H_0(x, p) + \sum_{i=1}^m u_i H_i(x, p) - 0.5 \|u\|^2,$$

avec $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ et où les H_0, H_1, \dots, H_m sont des fonctions lisses. Posons

$$\Phi := (H_1, \dots, H_m).$$

On a alors $\nabla_u H(x, p, u) = 0$ ssi $\Phi - u = 0$ donc le contrôle maximisant est de la forme

$$u[x, p] = \varphi(x, p) = \Phi(x, p).$$

Considérons le cas où U est donné par la **contrainte sur le contrôle** $\|u\| \leq 1$.

Exemple 4.2.2. Considérons un hamiltonien de la forme

$$H(x, p, u) = H_0(x, p) + u H_1(x, p),$$

avec $u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ et où H_0 et H_1 sont des fonctions lisses. La contrainte sur le contrôle nous donne $u(t) \in [-1, 1]$ pour presque tout temps t . Si au temps t , $H_1(z(t)) \neq 0$, $z = (x, p)$, alors le contrôle optimal est de la forme

$$u[z(t)] = \varphi(z(t)) = \text{sign}(H_1(z(t))),$$

i.e. $\bar{u} = -1$ si $H_1 < 0$ ou $\bar{u} = +1$ si $H_1 > 0$. Ces extrémals sont donc régulières, ce sont des arcs bangs.

La question qui reste est : comment calculer le contrôle si $H_1(z(t)) = 0$ sur $I \subset [t_0, t_f]$ non réduit à un point ?

Autrement dit, on se demande comment calculer les extrémals singulières. Si $H_1(z(t)) = 0$ sur I alors pour tout temps $t \in I$, toutes les dérivées de $t \mapsto H_1(z(t))$ sont égales à 0. En dérivant suffisamment de fois, nous allons faire apparaître le contrôle, ce qui nous donnera sa valeur. Ce contrôle sera celui qui permet à l'extrémale de rester sur l'hypersurface $H_1 = 0$, voir Exemple 1.7.3.

□

Exemple 4.2.3. Considérons maintenant un hamiltonien de la forme

$$H(x, p, u) = H_0(x, p) + \sum_{i=1}^m u_i H_i(x, p),$$

avec $u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ et où H_0, H_1, \dots, H_m sont des fonctions lisses. Posons

$$\Phi := (H_1, \dots, H_m).$$

Ainsi $H(z, u) = H_0(z) + (u | \Phi(z))$, $z = (x, p)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$(u | \Phi(z)) \leq \|u\| \|\Phi(z)\|$$

et si $\Phi(z) \neq 0$, ce maximum est atteint pour

$$u[z] = \varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{\|\Phi(z)\|}.$$

Il reste à calculer $u[z]$ dans le cas où $\Phi \equiv 0$ sur un intervalle $I \subset [t_0, t_f]$ non réduit à un point. Dans ce cas, c'est un peu plus compliqué que dans le cas précédent mais l'idée est toujours de dériver tous les H_i le long de l'extrémale afin d'obtenir des équations faisant intervenir le contrôle.

□

Exemple 4.2.4. Considérons dans cet exemple, un hamiltonien de la forme

$$H(x, p, u) = H_0(x, p) + \sum_{i=1}^m u_i H_i(x, p) - \|u\|,$$

avec $u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ et où H_0, H_1, \dots, H_m sont des fonctions lisses. Posons

$$\Phi := (H_1, \dots, H_m).$$

On a alors $H(z, u) = H_0(z) + (u | \Phi(z)) - \|u\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$(u | \Phi(z)) - \|u\| \leq \|u\| \|\Phi(z)\| - \|u\| = \|u\| (\|\Phi(z)\| - 1)$$

et si $\Phi(z) \neq 0$, ce maximum est atteint pour un contrôle de la forme

$$u[z] = \varphi(z) = \rho(z) \frac{\Phi(z)}{\|\Phi(z)\|},$$

$\rho(z) \in [0, 1]$. Si $\Phi(z) = 0$ alors $u[z] = 0$. On a donc

$$H(z, u[z]) = H_0(z) + \rho(z) \|\Phi(z)\| - \rho(z) = H_0(z) + \rho(z) (\|\Phi(z)\| - 1).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \rho(z) = 1 & \text{si } \|\Phi(z)\| > 1, \\ \rho(z) = 0 & \text{si } \|\Phi(z)\| < 1, \\ \rho(z) \in [0, 1] & \text{si } \|\Phi(z)\| = 1. \end{cases}$$

Il reste à traiter le cas $\|\Phi(z)\| \equiv 1$ sur un intervalle d'intérieur non vide, c-a-d le cas des singulières. Posons

$$\tilde{H}_1 := \|\Phi\| - 1,$$

et considérons ρ comme nouveau contrôle. Le nouveau pseudo-hamiltonien s'écrit

$$H(z, \rho) = H_0(z) + \rho \tilde{H}_1(z).$$

Les extrémales singulières sont caractérisées par $\nabla_\rho H = \|\Phi\| - 1 = \tilde{H}_1 = 0$, et on se retrouve dans le cas de l'exemple précédent. Il faudra donc dériver autant de fois que nécessaire pour retrouver le contrôle.

□

4.3 Exemples de conditions de transversalité

Exemple 4.3.1. Considérons un problème de Lagrange (*i.e.* $g \equiv 0$) où t_0 , t_f , x_0 et x_f sont fixés mais tout de même inclus dans les conditions aux limites :

$$c(t_0, x_0, t_f, x_f) = (t_0 - \bar{t}_0, x_0 - \bar{x}_0, t_f - \bar{t}_f, x_f - \bar{x}_f).$$

Les contraintes sont donc

$$c(t_0, x_0, t_f, x(t_f)) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

On a alors $p = 2n + 2$ contraintes et un multiplicateur

$$\lambda := (\lambda_{t_0}, \lambda_{x_0}, \lambda_{t_f}, \lambda_{x_f}) \in \mathbb{R}^p.$$

Les conditions de transversalité et sur le hamiltonien nous donne

$$p(t_0) = -\lambda_{x_0}, \quad p(t_f) = \lambda_{x_f}, \quad H[t_0] = \lambda_{t_0}, \quad H[t_f] = -\lambda_{t_f}.$$

Ainsi, ces conditions n'apportent aucune informations supplémentaires.

Remarque 4.3.1. Quand quelque chose est fixé, on ne le met pas dans les contraintes et on n'a pas à gérer un multiplicateur inutile. □

Exemple 4.3.2. Prenons un problème de Lagrange 2D avec des contraintes $c(x(t_f)) = 0$ sous la forme $c(x) := 0.5(x_1^2 + x_2^2) - 1$, $x := (x_1, x_2)$, et où t_0 , x_0 et t_f sont fixés. D'après le PMP, on a la condition de transversalité

$$p(t_f) = \lambda \nabla c(x(t_f)) = \lambda x(t_f).$$

On a donc la condition liant $x(\cdot)$ et $p(\cdot)$ en t_f : $p_1(t_f)x_2(t_f) - p_2(t_f)x_1(t_f) = 0$. Remarquons que l'on a $n = 3$ inconnues $p_1(0)$, $p_2(0)$ et λ et 3 équations :

$$0 = c(x(t_f)), \quad 0 = p_1(t_f) - \lambda x_1(t_f), \quad 0 = p_2(t_f) - \lambda x_2(t_f),$$

que l'on peut tout aussi bien écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 &= c(x(t_f)), \\ 0 &= p_1(t_f)x_2(t_f) - p_2(t_f)x_1(t_f), \\ 0 &= \lambda - \frac{(p(t_f) | x(t_f))}{\|x(t_f)\|^2} = \lambda - \frac{(p(t_f) | x(t_f))}{2}. \end{aligned}$$

On remarque alors que l'on peut se retreindre à chercher dans un premier temps $p_1(0)$, $p_2(0)$, puis on trouve λ dans un second temps. □

Exemple 4.3.3. Dans le cas d'un problème de Lagrange où l'on a des conditions terminales simples, *i.e.* $c(x(t_f)) := x(t_f) - x_f = 0$, x_f la cible donnée, alors la condition de transversalité $p(t_f) = \lambda$ ne donne pas d'informations utiles puisque l'on a ici une équation qui mélange seulement le vecteur adjoint et λ , que l'on cherche à déterminer. □

Exemple 4.3.4. Dans le cas contraire où l'on n'a pas de contraintes terminales, *i.e.* $c(x_f) := 0$, toujours pour un problème de Lagrange ($g \equiv 0$), alors on a la condition de transversalité $p(t_f) = 0$, qui détermine ici totalement le vecteur adjoint en l'instant final. \square

Exemple 4.3.5. Toujours pour un problème de Lagrange, si $c(x_0, x(t_f)) := x(t_f) - x_0 = 0$ (condition pour une trajectoire périodique), alors on obtient la condition $p(t_0) = p(t_f)$. Les conditions de transversalité sont ici

$$p(t_0) = \lambda, \quad p(t_f) = \lambda.$$

Ainsi, si on détermine $p(t_0)$ ou $p(t_f)$ alors on peut retrouver λ . \square

Exemple 4.3.6. Soit un problème de Lagrange avec une contrainte terminale de la forme $c(x(t_f)) = 0_{\mathbb{R}^p}$, $p < n$, et c une submersion. Alors, la condition de transversalité


$$p(t_f) = J_c(x(t_f))^T \lambda = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla c_i(x(t_f))$$

signifie que

$$p(t_f) \perp T_{x(t_f)} M,$$


c-a-d que $p(t_f)$ est orthogonal à l'espace tangent à M au point $x(t_f)$ où $M := c^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$ (cf. Corollaire 4.4.1 des notes sur le calcul différentiel sur Moodle). \square

4.4 Exercices

 **Exercice 4.4.1.** Soit le problème de contrôle optimal (non autonome) suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (t u(t) + x(t))^2 dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(t_f) = 0, \end{cases}$$

avec $0 < t_0 < t_f$. Calculer les BC-extrémales du problème. \square

 **Exercice 4.4.2** (Problème de contrôle optimal à temps final libre). Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u, t_f) := t_f, \\ \dot{x}(t) = (x_2(t), u(t)), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = (a, 0), \quad x(t_f) = (0, 0), \end{cases}$$

avec $a < 0$ donné. L'objectif est de donner le 5-uplet $(t_f, u(\cdot), x(\cdot), p(\cdot), p^0)$ solution des conditions nécessaires issues de la proposition 3.6.1.

1.

1.1. Donner le pseudo-hamiltonien $H(x, p, u)$.

1.2. Montrer que pour toute extrémale, $p(t) = (\alpha, -\alpha t + \beta)$ où α et β sont deux constantes.

1.3. Donner le contrôle maximisant $u[p_2]$.

2.

2.1. Montrer que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et en déduire que le contrôle commute au plus 1 fois.

2.2. Montrer qu'il existe $t_1 \in]0, t_f[$ tel que $p_2(t_1) = 0$, c-a-d que le contrôle commute exactement 1 fois (utiliser le fait que $x(t_f) = (0, 0)$ et $x_2(0) = 0$). En déduire que $\alpha\beta > 0$.

2.3. Montrer que si $\alpha, \beta < 0$ alors on ne peut avoir $x_1(t_f) = 0$. En déduire que $\alpha, \beta > 0$.

3.

3.1. Sachant que $H = -p^0$ le long de toute extrémale, montrer que $\beta = 1$ et que $p^0 = -1$.

3.2. Montrer que $t_1 = 1/\alpha$.

3.3. Calculer $x(t)$ pour $t \in [0, t_1]$, puis pour $t \in [t_1, t_f]$, en fonction de a et t_1 .

3.4. En utilisant le fait que $x(t_f) = (0, 0)$, montrer que $t_1 = \sqrt{-a}$ et $t_f = 2t_1$.

4.

4.1. Montrer que sur $[0, t_1]$, on a $x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + a$ et sur $[t_1, t_f]$, on a $x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t)$.

4.2. Faire un dessin de la trajectoire solution dans le plan (x_1, x_2) .

□



Exercice 4.4.3 (Problème de turnpike avec singulière). Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^2 x(t)^2 dt, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 2] \text{ p.p.}, \\ x(0) = 1, \quad x(2) = 1/2. \end{cases}$$

L'objectif est de donner le 4-uplet $(u(\cdot), x(\cdot), p(\cdot), p^0)$ solution du PMP, c-a-d calculer la BC-extrémale. On supposera que $p^0 = -1$.

1. Application directe du PMP.

1.1. Donner le pseudo-hamiltonien $H(x, p, u)$.

1.2. Donner le contrôle maximisant $u[p]$.

1.3. Donner l'équation adjointe.

1.4. Donner le problème aux deux bouts à résoudre. Est-il lisse ?

2. Analyse du problème, partie 1. Soit une trajectoire $x(\cdot)$ qui vérifie $x(t) < 0$ sur $]t_1, t_2[$, $0 < t_1 < t_2 < 2$, et $x(t_1) = x(t_2) = 0$. Alors, il est facile de voir que

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{sur } [0, t_1] \cup [t_2, 2], \\ 0 & \text{sur } [t_1, t_2] \end{cases}$$

est meilleure que $x(\cdot)$. Ainsi, la trajectoire optimale vérifie $x(\cdot) \geq 0$ sur $[0, 2]$ et $\dot{p} \geq 0$. On peut de même montrer que nécessairement $p(0) < 0$, ce que l'on supposera par la suite.

2.1. Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $p(t_1) = 0$.

2.2. Montrer que si $x(t_1) > 0$ alors p ne s'annule plus ensuite.

2.3. En déduire que $x(t_1) = 0$.

3. Analyse du problème, partie 2.

3.1. Soit $t_2 \in [t_1, 2]$ tel que $x(t) = 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. On sait que $t_2 < 2$ car $x(t) > 0$ au voisinage de $t = 2$. Montrer que p ne s'annule plus sur $]t_2, 2]$. On utilisera le fait que $u(t_2) = 1$ pour rejoindre le demi-plan ouvert $x > 0$.

3.2. Calculer le contrôle permettant d'avoir $x(t) = 0$ pour tout $t \in]t_1, t_2[$, en supposant $t_1 < t_2$. On notera u_0 ce contrôle.

3.3. On sait que la solution est constituée de trois arcs et vérifie

$$\begin{cases} u(t) = -1 & \text{sur } [0, t_1], \\ u(t) = u_0 & \text{sur }]t_1, t_2[, \\ u(t) = 1 & \text{sur } [t_2, 2]. \end{cases}$$

Calculer la trajectoire solution $x(\cdot)$ avec le covecteur $p(\cdot)$, et donner les temps t_1 et t_2 .

□

Méthode indirecte de tir

5.1	Introduction par l'exemple.....	63
5.2	La démarche générale : condition aux limites simples	64
5.3	Exemple avec conditions aux limites sous-dimensionnées	66

Ils existent de nombreuses méthodes numériques pour la résolution de problèmes de contrôle optimal. Des méthodes basées sur la programmation dynamique, sur le principe du maximum de Pontryagin ou tout simplement sur une discrétisation du problème pour se ramener en dimension finie. Nous présentons ici la méthode indirecte de tir aussi appelée tir indirect qui se base sur le PMP.

5.1 Introduction par l'exemple

Considérons le problème suivant :

$$(P_6) \quad \begin{cases} \min J(x, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u(t)^2 dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

avec $t_f = 1$, $x_0 = -1$, $x_f = 0$ et $\forall t \in [0, t_f]$, $x(t) \in \mathbb{R}$. Le pseudo-hamiltonien du problème est

$$H(x, p, u) := p(-x + u) + p^0 u^2 / 2,$$

où $p^0 = -1$ car nous sommes dans le cas normal. La condition de maximisation du PMP, cf. Théorème 4.1.1, donne la loi de contrôle que l'on note $u[p]$ (c'est une simple fonction de p)

$$u[p] := -p/p^0 = p$$

puisque $\partial_{uu}^2 H = p^0 = -1 < 0$. En introduisant cette loi de contrôle dans le système pseudo-hamiltonien de (4.1) et en considérant les conditions aux limites, on obtient le *problème aux deux bouts* (BVP) :

$$(BVP_1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= \nabla_p H[t] = -x(t) + u[p(t)] = -x(t) + p(t), \\ \dot{p}(t) &= -\nabla_x H[t] = p(t), \\ x(0) &= x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où $[t] := (x(t), p(t), u[p(t)])$.

On s'intéresse maintenant à la résolution de (BVP₁). On introduit pour cela la notation connue

$$\vec{H}(z, u) := (\nabla_p H(z, u), -\nabla_x H(z, u)), \quad z := (x, p).$$

On note ensuite $z(\cdot, x_0, p_0)$ la solution de $\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t), u[p(t)])$, $z(0) = (x_0, p_0)$. On définit enfin la **fonction de tir** suivante :

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p_0 &\longmapsto S(p_0) := \pi(z(t_f, x_0, p_0)) - x_f, \end{aligned}$$

où $\pi(x, p) := x$. Au final, résoudre (BVP₁) revient à résoudre $S(p_0) = 0$. C'est ce que l'on appelle la **méthode de tir simple indirect**.

Calculons à la main la solution de (BVP₁). Nous pouvons tout d'abord calculer par la méthode de la variation de la constante la solution du système hamiltonien, ce qui nous donne :

$$p(t, x_0, p_0) = e^t p_0, \quad x(t, x_0, p_0) = (0.5 p_0 (e^{2t} - 1) + x_0) e^{-t}.$$

Et puisque $x_0 = -1$, $t_f = 1$, et puisque la cible est $x(t_f, x_0, p_0) = x_f = 0$, on obtient comme vecteur adjoint initial solution

$$\bar{p}_0 = \frac{2(x_f e^{t_f} - x_0)}{e^{2t_f} - 1} = \frac{2}{e^2 - 1} \approx 0.313.$$

Remarque 5.1.1. La fonction de tir est ici

$$S(p_0) = x(t_f, x_0, p_0) - x_f = p_0 \operatorname{sh}(t_f) + x_0 e^{-t_f} - x_f.$$

Elle est linéaire en p_0 et dire que \bar{p}_0 est solution c'est dire que $S(\bar{p}_0) = 0$.

5.2 La démarche générale : condition aux limites simples

Considérons le problème de contrôle optimal à t_f fixé et conditions aux limites simples suivant :

$$(P_7) \quad \begin{cases} \min J(x, u) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) \, dt \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où x_0 , x_f et $t_f > 0$ sont donnés et on cherche u dans $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ à valeurs dans U un ouvert de \mathbb{R}^m . D'après le PMP, cf. Théorème 4.1.1, si (x, u) est solution de (P₇), alors $\exists p(\cdot) \in AC([0, t_f], \mathbb{R}^n)$, $p^0 \in \{-1, 0\}$, t.q. $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$ et pour $t \in [0, t_f]$ p.p. :

$$\dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t), u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t)),$$

où $H(x, p, u) := (p | f(x, u)) + p^0 f^0(x, u)$ et on a la condition de maximisation :

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{w \in U} H(x(t), p(t), w).$$

• Supposons que pour toute extrémale $(z(\cdot), p^0, u(\cdot))$, on peut écrire $u(t) = u[z(t)]$, avec $u[\cdot]$ de classe au moins \mathcal{C}^1 .

- En injectant $u[z]$ dans \vec{H} , trouver une BC-extrémale revient à résoudre le BVP suivant :

$$(BVP_2) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) &= \vec{H}(z(t), u[z(t)]), \\ 0_{\mathbb{R}^{2n}} &= b(z(0), z(t_f)) := (x(0) - x_0, x(t_f) - x_f). \end{cases}$$

- On peut alors écrire le BVP sous la forme d'un système d'équations non linéaires :

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p_0 &\longmapsto S(p_0) := \pi(z(t_f, x_0, p_0)) - x_f, \end{aligned}$$

où $\pi(x, p) = x$ et où $z(\cdot, x_0, p_0)$ est la solution de $\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t), u[z(t)])$, $z(0) = (x_0, p_0)$.

- Résoudre le problème aux deux bouts (BVP_2) revient à résoudre $S(p_0) = 0$.

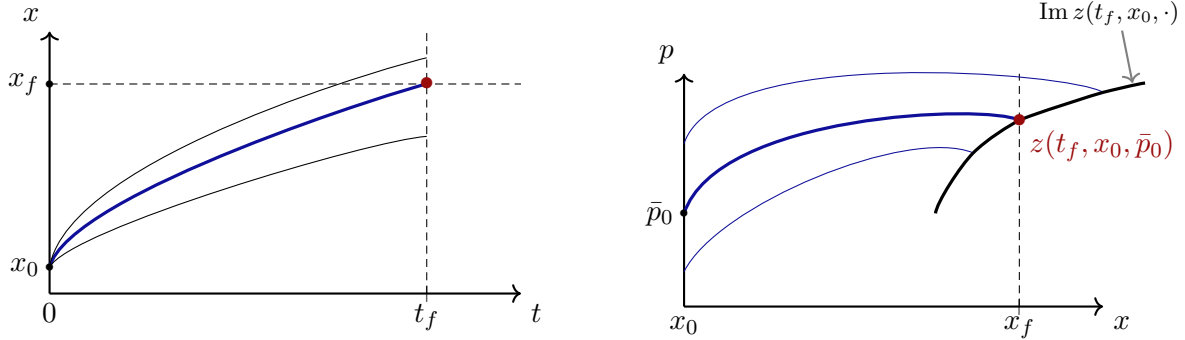
Remarque 5.2.1. Si \bar{p}_0 vérifie $S(\bar{p}_0) = 0$, alors la courbe intégrale $\bar{z}(\cdot) := z(\cdot, x_0, \bar{p}_0)$, avec le contrôle $\bar{u}(\cdot) := u[\bar{z}(\cdot)]$, est une BC-extrémale du problème (P_7) , *i.e.* cette extrémale satisfait les conditions nécessaires d'optimalité données par le PMP.

Remarque 5.2.2. D'après la Proposition 4.1.3 sur le hamiltonien vrai, la courbe intégrale $z(\cdot, x_0, p_0)$ est aussi solution de

$$\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t)), \quad z(0) = (x_0, p_0),$$

où $H(z) := H(z, u[z])$ et $\vec{H} = (\nabla_p H, -\nabla_x H)$.

Illustrations de la méthode de tir simple :



Algorithmes :

- $z(\cdot, x_0, p_0)$ est intégré numériquement par une méthode de type Runge-Kutta.
- $S(p_0) = 0$ est résolu par une méthode de type Newton. On rappelle que les méthodes de Newton sont sensibles à la condition initiale. Une difficulté est donc de donner un p_0 initial qui fasse converger la méthode.

Itération de Newton :

$$p_0^{(k+1)} = p_0^{(k)} + d^{(k)},$$

avec $d^{(k)}$ solution de

$$S'(p_0^{(k)}) \cdot d = -S(p_0^{(k)}).$$

Jacobienne de la fonction de tir :

$$S'(p_0) \cdot d = \pi \left(\frac{\partial z}{\partial p_0}(t_f, x_0, p_0) \cdot d \right) = \pi \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}(t_f, x_0, p_0) \cdot (0_{\mathbb{R}^n}, d) \right), \quad z_0 = (x_0, p_0),$$

et on a donc besoin de $\frac{\partial z}{\partial z_0}(\cdot, x_0, p_0) \cdot \delta z_0$, $\delta z_0 = (0_{\mathbb{R}^n}, d)$, solution des *équations variationnelles* :

$$\dot{\widehat{\delta z}}(t) = \vec{\mathbf{H}}'(z(t, x_0, p_0)) \cdot \delta z(t), \quad \delta z(0) = \delta z_0.$$

Remarque 5.2.3. Si l'on écrit

$$z(t, x_0, p_0) = z(t, z_0) = z_0 + \int_0^t \vec{\mathbf{H}}(z(s, z_0)) \, ds,$$

et si $z(\cdot, z_0)$ est dérivable par rapport à z_0 , alors on retrouve le résultat en dérivant :

$$\frac{\partial z}{\partial z_0}(t, z_0) \cdot \delta z_0 = \delta z_0 + \int_0^t \vec{\mathbf{H}}'(z(s, z_0)) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}(s, z_0) \cdot \delta z_0 \right) \, ds.$$

Remarque 5.2.4. Pour résoudre les équations variationnelles, on calcule en pratique la solution du système augmenté :

$$\begin{cases} (\dot{z}(t), \dot{\widehat{\delta z}}(t)) &= (\vec{\mathbf{H}}(z(t)), \vec{\mathbf{H}}'(z(t)) \cdot \delta z(t)), \\ (z(0), \delta z(0)) &= (z_0, \delta z_0). \end{cases}$$

- On reprend le problème (P₆). Le système hamiltonien est :

$$\vec{\mathbf{H}}(z) = (-x + p, p).$$

La fonction de tir est donnée par : $S(p_0) = p_0 \operatorname{sh}(t_f) + x_0 e^{-t_f} - x_f$. On a donc $S'(p_0) = \operatorname{sh}(t_f)$.

- Retrouvons ce résultat. Tout d'abord, $\frac{\partial z}{\partial z_0}(\cdot, x_0, p_0) \cdot \delta z_0$ est solution de

$$\dot{\widehat{\delta z}}(t) = \vec{\mathbf{H}}'(z(t, x_0, p_0)) \cdot \delta z(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta z(t) =: A \delta z(t), \quad \delta z(0) = \delta z_0.$$

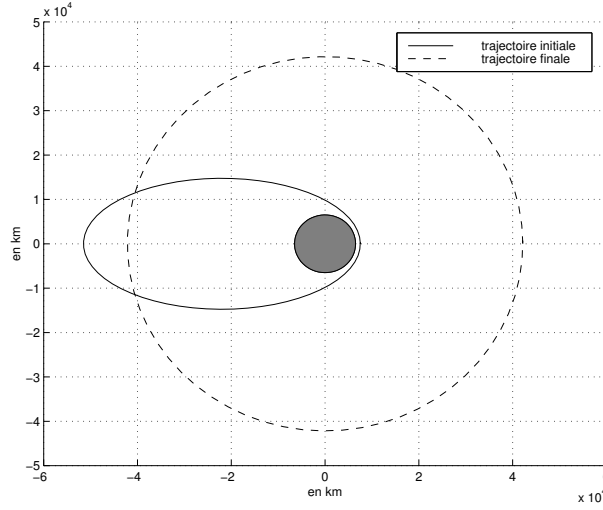
La solution en t_f de ce système linéaire est simplement

$$\frac{\partial z}{\partial z_0}(t_f, x_0, p_0) \cdot \delta z_0 = \exp(t_f A) \delta z_0 = \begin{pmatrix} e^{-t_f} & \operatorname{sh}(t_f) \\ 0 & e^{t_f} \end{pmatrix} \delta z_0,$$

ainsi $S'(p_0) = \pi \left(\frac{\partial z}{\partial p_0}(t_f, x_0, p_0) \right) = \pi \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}(t_f, x_0, p_0) \cdot (0, 1) \right) = \pi(\operatorname{sh}(t_f), e^{t_f}) = \operatorname{sh}(t_f)$.

5.3 Exemple avec conditions aux limites sous-dimensionnées

Le système considéré est un satellite de masse fixé m libéré par une fusée dans le plan de l'équateur ; l'orbite initiale du satellite est une ellipse de forte excentricité. L'objectif est de réaliser le transfert en temps minimal de cette orbite elliptique à une orbite circulaire géostationnaire.



Le problème de transfert orbital à temps minimal s'écrit :

$$(P_8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min J(x, u, t_f) = g(t_f) := t_f \\ \dot{x}_1(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{\mu x_1(t)}{r(t)^3} + u_1(t), \\ \dot{x}_4(t) = -\frac{\mu x_2(t)}{r(t)^3} + u_2(t), \\ \|u(t)\| \leq \gamma, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad u(t) := (u_1(t), u_2(t)), \\ x_1(0) = x_{0,1}, \quad x_2(0) = x_{0,2}, \quad x_3(0) = x_{0,3}, \quad x_4(0) = x_{0,4}, \\ r(t_f)^2 = r_f^2, \quad x_3(t_f) = -\sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}} x_2(t_f), \quad x_4(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}} x_1(t_f), \end{array} \right.$$

avec $r(t) := \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}$. Les unités choisies sont le kilomètre pour les distances et l'heure pour le temps.

On note $\alpha := \sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}}$. La condition terminale peut se mettre sous la forme $c(x(t_f)) = 0$, avec $c: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné par :

$$c(x) := (r(x)^2 - r_f^2, \quad x_3 + \alpha x_2, \quad x_4 - \alpha x_1).$$

Le temps final étant libre, on a la condition au temps final :

$$H(x(t_f), p(t_f), u(t_f)) = -p^0 g'(t_f) = -p^0 = 1. \quad (\text{cas normal})$$

On a de plus la condition de transversalité ($\lambda \in \mathbb{R}^3$) :

$$p(t_f) = c'(x(t_f))^T \lambda = \begin{pmatrix} 2x_1(t_f) & 2x_2(t_f) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \lambda$$

$$= (2x_1(t_f)\lambda_1 - \alpha\lambda_3, \quad 2x_2(t_f)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3).$$

La condition de transversalité est équivalente à :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \frac{1}{2r(t_f)^2} \left(x_1(t_f)(p_1(t_f) + \alpha p_4(t_f)) + x_2(t_f)(p_2(t_f) - \alpha p_3(t_f)) \right), \\ \lambda_2 &= p_3(t_f), \\ \lambda_3 &= p_4(t_f), \\ 0 &= \Phi(x(t_f), p(t_f)) := x_2(t_f)(p_1(t_f) + \alpha p_4(t_f)) - x_1(t_f)(p_2(t_f) - \alpha p_3(t_f)). \end{cases}$$

En considérant les conditions aux limites, la condition finale sur le pseudo-hamiltonien et la condition de transversalité, la fonction de tir simple est donnée par :

$$S: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$(p_0, t_f) \longmapsto S(p_0, t_f) := \begin{pmatrix} c(x(t_f, x_0, p_0)) \\ \Phi(z(t_f, x_0, p_0)) \\ H(z(t_f, x_0, p_0), u[z(t_f, x_0, p_0)]) + p^0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.3.1. Le contrôle maximisant $u[\cdot]$ est donné par la condition de maximisation. On laisse le calcul en exercice.

On peut ne pas éliminer λ et l'inclure dans la fonction de tir simple :

$$S: \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8$$

$$(p_0, t_f, \lambda) \longmapsto S(p_0, t_f, \lambda) := \begin{pmatrix} c(x(t_f, x_0, p_0)) \\ p(t_f, x_0, p_0) - c'(x(t_f, x_0, p_0))^T \lambda \\ H(z(t_f, x_0, p_0), u[z(t_f, x_0, p_0)]) + p^0 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

- [1] A. A. Agrachev & Y. L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, vol **87** of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin (2004), 412 pages. [↔ 9](#) et [37](#).
- [2] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, MIR, Moscou (1974). [↔ 1](#).
- [3] E. Assémat, M. Lapert, S. J. Glaser & D. Sugny, *On the application of geometric optimal control theory to nuclear magnetic resonance*, Math. Control Relat. Fields, **3** (2013), no. 4, 375–396.
- [4] L. Cesari, *Optimization-theory and applications : problems with ordinary differential equations*, vol 17 of *Applications of mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1983, 542 pages. [↔ 17](#) et [19](#).
- [5] F. Clarke, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Graduate Texts in Mathematics 264, doi : 10.1007/978-1-4471-4820-3_14, Springer-Verlag London 2013. [↔ 42](#).
- [6] O. Cots, *Calcul des variations*, Notes de cours, 2020. [↔ 37](#) et [40](#).
- [7] O. Cots, *Calcul différentiel*, Notes de cours, 2019. [↔ 10](#), [13](#), [30](#) et [35](#).
- [8] O. Cots, *Equations différentielles*, Notes de cours, 2020. [↔ 2](#), [5](#) et [6](#).
- [9] O. Cots & J. Gergaud, *Automatique - Système commandé*, Notes de cours, 2021. [↔ 10](#).
- [10] J. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences (2006). [↔ 5](#).
- [11] R. H. Goddard, *A Method of Reaching Extreme Altitudes, volume 71(2)*, Smithsonian Miscellaneous Collections. Smithsonian institution, City of Washington, (1919). [↔ 27](#).
- [12] F. Jean, *Stabilité et Commande des Systèmes Dynamiques. Cours et exercices corrigés*, Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, 2011, 197 pages. [pdf](#). [↔ 1](#).
- [13] H. Maurer, *Numerical solution of singular control problems using multiple shooting techniques*, Journal of optimization theory and applications, Vol.18, No.2, (1976). [↔ 27](#).
- [14] H. Maurer & D. Augustin, *Second order sufficient conditions and sensitivity analysis for the controlled Rayleigh problem*, in Parametric Optimization and Related Topics, IV : 15–55, J. Guddat, Ed. et al. Frankfurt, Germany : Peter Lang Publishing, 1997. [↔ 26](#).
- [15] P. Pansu, *Cours de Géométrie Différentielle, chapitre 1, calcul des variations*, [pdf](#). [↔ 14](#).
- [16] H. Schättler & U. Ledzewicz, *Geometric optimal control : theory, methods and examples*, vol **38** of *Interdisciplinary applied mathematics*, Springer Science & Business Media, New York (2012), xiv+640. [↔ 37](#).
- [17] H. Seywald and E.M. Cliff., *Goddard problem in presence of a dynamic pressure limit*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, (1993). [↔ 27](#).
- [18] C. Silva & E. Trélat, *Smooth regularization of bang-bang optimal control problems*, IEEE Trans. Automat. Control, **55** (2010), no 11, 2488–2499. [↔ 26](#).
- [19] E. D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic systems*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1998. [pdf](#). [↔ 4](#) et [5](#).
- [20] E. Trélat, *Contrôle optimal: théorie et applications*, Coll. Mathématiques concrètes, Vuibert, 2008, 250 pages. [pdf](#). [↔ 1](#).

Index

- Application
 - Entrée-Sortie, 8
- BC-extrémale, 35, 55
- Calcul des variations, 40, 42
- Condition
 - d'Euler, 37
 - de Jacobi, 37
 - de Legendre, 37
- Conditions aux limites, 35, 55
- Conditions de transversalité, 35, 55
- Conservation du hamiltonien, 38, 42, 56
- Contrôlabilité, 10
- Contrôle
 - bang, 55
 - régulier, 10, 55
 - singulier, 10, 55
- Critère de Kalman, 10
- Crochet de Poisson, 14
- Double intégrateur
 - énergie min, 25
 - temps min, 25
- Ensemble
 - accessible, 8
 - accessible augmenté, 31
 - des contrôles admissibles, 5, 7
- Équation
 - de Euler-Lagrange, 40
 - de Hamilton, 41
 - linéarisée, 6
 - variationnelle, 6, 66
- Etat augmenté, 20, 31
- Extrémale, 35, 55
 - anormale, 55
 - bang, 55
 - normale, 55
 - régulière, 55
 - singulière, 55
- Flot d'un système contrôlé, 5
- Fonction de tir, 40, 64
- Hamiltonien, 13, 41, 42, 55
- Lagrangien, 24, 40
- Loi de commande, 4
- Méthode
 - de Newton, 65
 - de Runge-Kutta, 65
- Métrique riemannienne, 24
- Paradoxe des jumeaux de Langevin, 46
- Principe
 - du Maximum de Pontryagin, 53
 - Fondamental de la Dynamique, 41
- Problème
 - à temps final libre, 18
 - à temps final fixé, 18
 - de Bolza, 19, 31, 33
 - de calcul des variations, 24
 - de contrôle optimal, 18, 53
 - de géométrie riemannienne, 24
 - de Goddard, 27
 - de Lagrange, 19
 - de Mayer, 19, 29
 - de Rayleigh, 26
 - de transfert orbital, 21, 66
 - du temps minimal, 19
 - linéaire quadratique (LQR), 23, 49
 - linéaire, 23
- Pseudo-hamiltonien, 11, 21
- Solution
 - d'un problème de contrôle optimal, 19
 - d'un système contrôlé, 4
- Submersion, 18
- Système
 - augmenté, 20, 31
 - contrôlé, 3
 - Hamiltonien, 13, 41, 42
- Théorème

- de Cauchy-Lipschitz généralisé, [4](#)
- de régularité du flot, [5](#)
- Tir simple indirect, [64](#)
- Vecteur adjoint, covecteur, [11](#), [21](#)