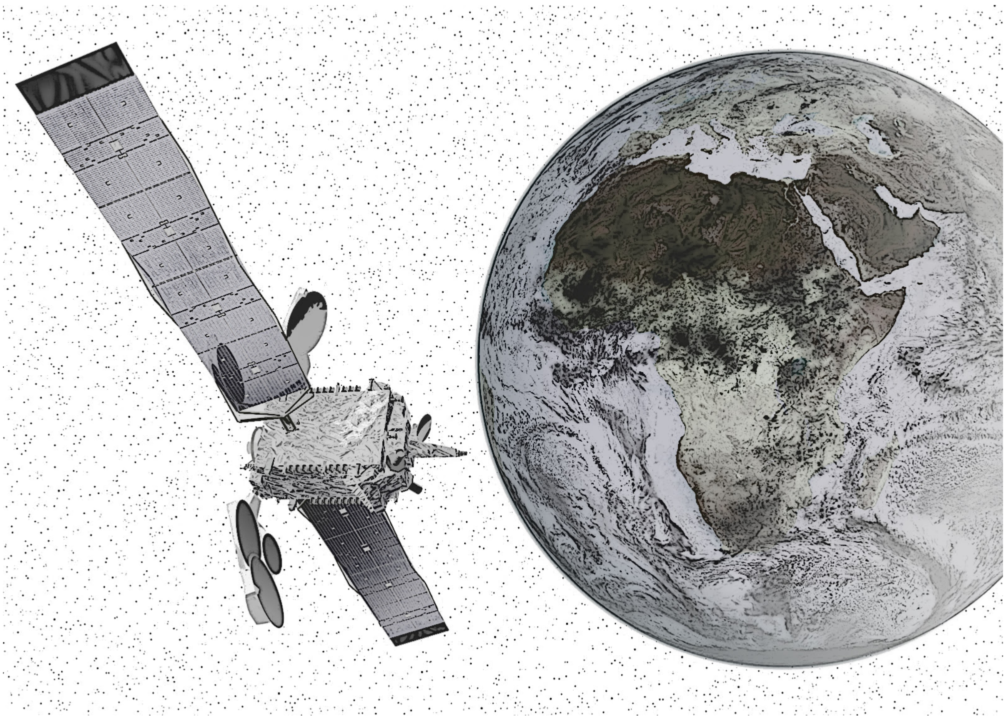
Département Sciences du Numérique

Notes sur le calcul des variations

Olivier Cots

1er février 2020



Version préliminaire. Début de rédaction : avril 2019.

Table des matières

Chapitre 1
Introduction

Le ***calcul des variations*** est une discipline ancienne qui pris naissance suite à l'introduction du problème de la courbe ***brachistochrone***[1] [7] vers la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle par le mathématicien Johann Bernoulli. La courbe brachistochrone est par définition une courbe dans un plan vertical de coordonnées (x, y) sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les courbes joignant deux extrémités fixées. Notons $A \coloneqq (x_a, y_a)$ et $B \coloneqq (x_b, y_b)$ les deux extrémités de la courbe. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $x_a = y_a = 0$. En choisissant un repère dirigé vers le bas, la condition $y_b > y_a$ doit être vérifiée pour assurer l'existence (au sens physique) d'une solution au problème. En revanche, par symétrie de celui-ci nous pouvons fixer $x_b > x_a$. On élimine le cas de la chute libre, c'est-à-dire $x_a = x_b$.

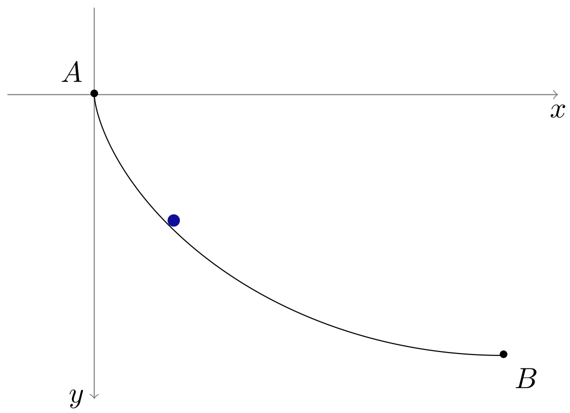


Figure 1.1 – Courbe brachistochrone

Pour fixer les idées, nous recherchons une courbe Γ dans le plan (x, y) donnée par le graphe d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, *i.e.* $\Gamma \coloneqq \{(x, f(x)) \mid x \in [x_a\,, x_b]\}$. Le point matériel est déterminé par sa position à l'instant t que nous notons $p(t) \coloneqq (x(t), y(t))$. Pour tout temps t ce point appartient à Γ, ainsi son vecteur vitesse est donné par :

$$\dot{p}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (\dot{x}(t), f'(x(t))\,\dot{x}(t)) = (1, f'(x(t)))\,\dot{x}(t) \in T_{p(t)}\Gamma,$$

où $T_{p(t)}\Gamma$ est l'espace tangent à la courbe Γ au point $p(t)$. D'un autre côté, la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps nous permet d'exprimer l'énergie cinétique en fonction de l'énergie potentielle de pesanteur par la relation :

$$\frac{1}{2} m \|\dot{p}(t)\|^2 = m\, g\, y(t) = m\, g\, f(x(t)),$$

où m est la masse du point matériel (qui ne joue aucun rôle) et g est l'accélération de pesanteur. En combinant les deux relations précédentes (on suppose $\dot{x}(t) > 0$), nous obtenons l'équation

1. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_brachistochrone pour un historique.

différentielle

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2gf(x(t))}{1 + f'(x(t))^2}} =: \varphi(x(t)).$$

Remarquons qu'à l'instant initial, nous avons $x(0) = x_a$ et $\varphi(x_a) = 0$ car $f(x_a) = y_a = 0$ (la vitesse initiale est nulle). Quelle que soit la fonctionnelle f vérifiant $f(x_a) = y_a = 0$, la trajectoire triviale $x(t) = x_a = 0$ est solution de l'équation $\dot{x}(t) = \varphi(x(t))$. Cependant, cette solution ne nous intéresse pas car nous voulons que le point matériel ait comme abscisse $x(T) = x_b > x_a$ à l'instant terminal T. Fort heureusement, en introduisant

$$F(x) := \int_{x_a}^{x} \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z)} = \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z)},$$

et en supposant que $|F(x_a + \varepsilon)| = F(\varepsilon) < +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, alors $x(t) := F^{-1}(t)$, $x(0) := x_a$, est une autre solution différente de la solution triviale. Notons pour ce convaincre de cela que si $x(t)$ est solution de l'équation $\dot{x}(t) = \varphi(x(t))$, alors pour tout temps t nous avons $F(x(t)) = t$, cf. :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ x)(t) = F'(x(t))\,\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\varphi(x(t))} = 1.$$

En conclusion, le temps de parcours du point matériel est donné par

$$T(f) := F(x_b) = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2\,g\,f(x)}}\,\mathrm{d}x,$$

où nous avons introduit la notation $T(f)$ pour mettre en évidence la dépendance à f, car f est pour nous l'inconnue du problème. Nous cherchons donc la fonctionnelle f qui minimise le temps de parcours $T(f)$ et qui vérifie les conditions aux extrémités $f(x_a) = y_a$ et $f(x_b) = y_b$. Ce problème peut s'écrire sous la forme

$$\inf_f \left\{ T(f) \mid f(x_a) = y_a,\ f(x_b) = y_b \right\}. \tag{1.1}$$

La solution à ce problème, toujours notée f, est connue depuis longtemps : plus précisément, la courbe solution $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in [x_a\,, x_b]\}$ est ce que l'on appelle une ***cycloïde***, qui sous une forme paramétrée est donnée par

$$\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{D}{2}(\theta - \sin(\theta)), \\ y(\theta) = \dfrac{D}{2}(1 - \cos(\theta)), \end{cases}$$

pour $\theta \in [\theta_a\,, \theta_b]$. Nous ne nous risquerons pas ici à donner la fonction f associée. Il est plus facile de décrire Γ. Néanmoins, nous pouvons dire que $f(x_a) = f(x(\theta_a)) = y_a = y(\theta_a) = 0$ est bien vérifiée (prendre $\theta_a = 0$) quels que soient D et θ_b, qui eux, sont déterminés par la relation $f(x_b) = y_b$ pour $\theta = \theta_b$, *i.e.* par $x(\theta_b) = x_b$ et $y(\theta_b) = y_b$.

Bien que ce problème soit ancien, il n'en reste pas moins difficile. Tout d'abord, nous avions fixé les idées en supposant la fonctionnelle f de classe $\mathcal{C}^1$, sous-entendu sur $[x_a\,, x_b]$. Pourtant, puisque $x'(\theta) = y(\theta)$ et $y'(\theta) = D\sin(\theta)/2$, un calcul rapide montre que

$$\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \theta \to 0,$$

autrement dit, la fonctionnelle f a une pente verticale en $x = x_a = 0$. Elle n'y est donc pas $\mathcal{C}^1$! Ceci nous amène a une première difficulté que nous avions cachée lorsque nous avions défini le problème (1.1) : comment bien choisir le domaine sur lequel on minimise T ? C'est-à-dire :

Q1. À quelle classe de fonctions appartient f ?

Une fois la classe choisie, que l'on note $\mathcal{F}$, nous pouvons nous demander s'il existe bien une solution au problème, c'est-à-dire si l'infimum est bien atteint, *i.e.* si l'infimum est un minimum :

Q2. Existe-t-il une fonction $\bar{f} \in \mathcal{F}$ telle que

$$T(\bar{f}) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \{T(f) \mid f(x_a) = y_a,\ f(x_b) = y_b\} \quad ?$$

Enfin, connaissant l'existence d'un tel minimum, nous pouvons nous demander comment le calculer d'un point de vue pratique, autrement dit, nous nous demandons :

Q3. Quelles conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité sont associées à notre problème d'optimisation ?

Nous venons de décrire ce que l'on appelle la ***méthode déductive*** [3]. Dans la méthode déductive, on part du général pour aller vers le particulier. L'idée ici, pour résoudre notre problème d'optimisation, est de montrer dans un premier temps qu'une solution au problème existe, et ce, à l'aide de théorèmes généraux. On montre que :

$$\exists\, \bar{f} \in \mathcal{F} \quad \text{t.q.} \quad \forall\, f \in \mathcal{F} \ :\ T(\bar{f}) \leq T(f).$$

L'idée ensuite est de trouver cet (ou un) optimum (il n'est pas nécessairement unique) à l'aide de conditions nécessaires d'optimalité. Pour faire cela, on peut comparer les différents candidats obtenus à l'aide des conditions nécessaires et ne retenir que le meilleur. Cette approche s'oppose à la ***méthode inductive***, qui on peut dire, part du particulier pour aller vers le général. Appliquer la méthode inductive reviendrait plutôt à appliquer tout d'abord les conditions nécessaires d'optimalité pour réduire l'ensemble des candidats à l'optimalité. On ne garderait ensuite que le (ou les) meilleur(s) candidat(s), que l'on note $\tilde{f}$ (si on le suppose unique), pour montrer, en utilisant des propriétés spécifiques au problème (de convexité par exemple), que ce candidat est bien meilleur que toute autre possibilité. Autrement dit, on montrerait que :

$$\forall\, f \in \mathcal{F} \ :\ T(\tilde{f}) \leq T(f),$$

ce qui nous permettrait de conclure qu'il existe un minimum $\bar{f}$ au problème et que $\bar{f} = \tilde{f}$.

Nous pouvons remarquer que le point commum entre les méthodes déductive et inductive est l'utilisation de conditions nécessaires d'optimalité. Nous allons donc nous pencher sur cela dans les premiers chapitres. Comme nous l'avons vu, choisir la classe de fonctions dans laquelle on cherche f est essentiel. Nous allons dans un premier temps demander beaucoup de régularité aux fonctions f puis relâcher ensuite cette contrainte pour des raisons d'existence de solutions. Tout au long de cette partie, de nouvelles questions se poseront auxquelles nous tenterons de répondre.

Chapitre 2
Conditions d'optimalité locale faible

2.1 Solutions des problèmes variationnels

Soit $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application continue

$$L\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{I} \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, u) & \longmapsto & L(t, x, u). \end{array}$$

Nous appellerons une telle application, un ***lagrangien***. Nous pouvons remarquer que notre point de vue est local car nous considérons la variable x dans Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, au lieu par exemple, de considérer x dans une variété différentielle. Si nous avions fait le choix d'une variété différentielle, alors le vecteur u appartiendrait à l'espace tangent à la variété en x, et nous aurions défini le lagrangien légèrement différemment. Ce point de vue local est donc une simplification. Nous pourrions simplifier un peu plus en choisissant $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$, ce que nous ne ferons pas.

Soient a et b deux points de $\mathcal{I}$ tels que $a < b$. Soit $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega)$, c'est-à-dire une application continue sur $[a\,, b]$, à valeurs dans Ω, dérivable sur $]a\,, b[$, dont la dérivée $\dot{x}(\cdot)$ est continue sur $]a\,, b[$ et se prolonge de manière continue sur $[a\,, b]$. Pour faire plus simple, on peut imaginer $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}, \Omega)$ ou $x(\cdot)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $I \subset \mathcal{I}$ contenant $[a\,, b]$.

Remarque 2.1. La paramètre t jouera le rôle du "temps" et la dérivée de $t \mapsto x(t)$ par rapport au temps sera notée $\dot{x}(\cdot)$ au lieu de $x'(\cdot)$. Nous avons aussi mis en évidence la dépendance de x par rapport au temps en écrivant $x(\cdot)$ au lieu de x. En effet, ici $x(\cdot)$ est une fonction du temps t contrairement à la variable x dans le lagrangien L qui est simplement un point de $\mathbb{R}^n$. Cependant, nous allons vite abandonner ce réflexe et nous écrirons x aussi bien pour le point de $\mathbb{R}^n$ que la fonction du temps. Le contexte permettra de s'y retrouver.

On définit le ***coût*** associé à x par la fonctionnelle

$$J(x) \coloneqq \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t.$$

Étant donnés deux points A et B dans Ω, on s'intéresse au problème d'optimisation

$$\text{minimiser } J(x) \;:\; x \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega),\; x(a) = A,\; x(b) = B, \tag{PCV}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\inf_{x \in \mathcal{C}^1([a,b],\Omega)} \{J(x) \mid x(a) = A,\; x(b) = B\},$$

ou encore

$$\inf_x \{J(x) \mid x \in \mathcal{K}\},$$

avec $\mathcal{K} \coloneqq \{x \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega) \mid x(a) = A,\; x(b) = B\}$. Ce ***problème variationnel*** est le plus classique en ***calcul des variations***. Dans ce problème, les instants initiaux et finaux sont fixés, tout comme les extrémités : on parle de ***conditions aux limites*** simples.

Remarque 2.2. En introduction, cf. chapitre 1, nous avons parlé du problème de la courbe brachistochrone. Dans cet exemple, les notations étaient différentes pour être plus explicites. La courbe était définie dans le plan (x, y), où x jouait le rôle de t dans la formulation du problème (PCV). Nous recherchions une fonction $f(x)$, ainsi f jouait le rôle de la variable x. Les coordonnées x_a et x_b sont ici les temps a et b et les coordonnées y_a et y_b sont ici les points A et B. Enfin, le temps de parcours $T(f)$ est remplacé par la fonction de coût $J(x)$. Il est à noter que le problème de la courbe brachistochrone ne s'écrit pas sous la forme (PCV). En effet, le lagrangien

$$L(t, x, u) = \sqrt{\frac{1 + u^2}{2gx}}$$

est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'on a dans ce cas $\Omega \coloneqq \mathbb{R}^*$. Jusqu'ici tout va bien, mais la condition initiale s'écrit $x(a) = A$ avec $A \coloneqq 0 \notin \Omega$. Ici $A \in \partial\Omega$, c'est-à-dire à la frontière de Ω. C'est ce qui explique que la solution $\bar{x}$, *i.e.* la courbe brachistochrone, peut avoir une pente verticale en l'instant initial $a \coloneqq 0$. Dans le problème de la courbe brachistochrone, la solution $\bar{x}$ appartient à $\mathcal{C}^0([a\,, b], \bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(]a\,, b[, \bar{\Omega})$ et non à $\mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega)$. Nous faisons donc une simplification dans cette présentation : la fonctionnelle $J(x)$ est pour nous une intégrale de Riemann au sens usuel, alors que dans le cas du brachistochrone c'est une intégrale impropre.

Définition 2.1 – Fonctions admissibles et solutions (globales)

Une fonction $x\colon [a\,, b] \to \Omega$ est dite ***admissible*** pour (PCV) si $x \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega)$ et si les conditions aux limites sont satisfaites : $x(a) = A$ et $x(b) = B$, c'est-à-dire si $x \in \mathcal{K}$.

On appelle ***solution globale*** (ou minimum global) du problème (PCV), une fonction $\bar{x}$ admissible telle que $J(\bar{x}) \leq J(x)$ pour toute autre fonction admissible x.

En optimisation en dimension finie, la propriété d'optimalité locale ne dépend pas du choix de la norme car toutes les normes sont équivalentes. En dimension infinie, cet aspect est différent. L'espace vectoriel de fonctions continues $\mathcal{C}^0([a\,, b], \mathbb{R}^n)$ est généralement muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|x\|_{\mathcal{C}^0} \coloneqq \|x\|_\infty = \max\left\{\|x(t)\| \mid t \in [a\,, b]\right\},$$

où $\|\cdot\|$ est ici la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{C}^0([a\,, b], \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ est un espace de Banach. L'ensemble $\mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n)$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est quant à lui généralement muni de la norme

$$\|x\|_{\mathcal{C}^1} \coloneqq \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty.$$

Nous rappelons de même que $\mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ est un espace de Banach. Notons que

$$\mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0([a\,, b], \mathbb{R}^n)$$

et il serait donc tout à fait possible de munir $\mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n)$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$. Ceci nous amène, pour $\eta > 0$, à l'introduction des notations suivantes :

$$B_w(x, \eta) \coloneqq \left\{y \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|x - y\|_{\mathcal{C}^1} < \eta\right\},$$
$$B_s(x, \eta) \coloneqq \left\{y \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|x - y\|_{\mathcal{C}^0} < \eta\right\}.$$

L'indice w signifie “weak” (*i.e.* faible) tandis que le s est pour “strong” (*i.e.* fort). Notons que le η n'est pas nécessairement petit. Introduisons la définition suivante.

Définition 2.2 – Solutions locales faibles et fortes

Soit $\bar{x}$ une fonction admissible, *i.e.* $\bar{x} \in \mathcal{K}$.

On dit que $\bar{x}$ est une ***solution locale faible*** si :

$$\exists\, \eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, x \in B_w(\bar{x}, \eta) \cap \mathcal{K} \;:\; J(\bar{x}) \leq J(x).$$

On dit que $\bar{x}$ est une ***solution locale forte*** si :

$$\exists\, \eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, x \in B_s(\bar{x}, \eta) \cap \mathcal{K} \;:\; J(\bar{x}) \leq J(x).$$

Remarque 2.3. On peut remplacer dans la définition précédente les boules ouvertes $B_w(\bar{x}, \eta)$ et $B_s(\bar{x}, \eta)$ par les boules fermées

$$\overline{B}_w(\bar{x}, \eta) := \left\{ x \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|\bar{x} - x\|_{\mathcal{C}^1} \leq \eta \right\},$$
$$\overline{B}_s(\bar{x}, \eta) := \left\{ x \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|\bar{x} - x\|_{\mathcal{C}^0} \leq \eta \right\}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R}^n)$, $\|x\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|x\|_{\mathcal{C}^0} + \|\dot{x}\|_{\mathcal{C}^0} = \|x\|_{\mathcal{C}^1}$, il est clair que

$$B_w(x, \eta) \subset B_s(x, \eta).$$

Ainsi, un minimum local faible est un minimum local relatif à un ensemble plus petit qu'un minimum local fort, et on a :

Proposition 2.3

Soit $\bar{x} \in \mathcal{K}$.

$$\bar{x} \text{ solution globale} \Rightarrow \bar{x} \text{ solution locale forte} \Rightarrow \bar{x} \text{ solution locale faible.}$$

Voici un exemple de solution locale faible qui n'est pas une solution locale forte [6].

Exemple 2.1. Considérons le problème suivant :

$$\inf_x \left\{ J(x) := \int_0^\pi x(t)^2 (1 - \dot{x}(t)^2)\, \mathrm{d}t \;\middle|\; x \in \mathcal{K} \right\},$$

avec $\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{C}^1([0\,,\pi], \mathbb{R}) \mid x(0) = 0,\; x(\pi) = 0\}$. La fonction $\bar{x} \equiv 0$ est une solution locale faible mais non forte. En effet, il est clair que :

$$\forall\, x \in B_w(\bar{x}, 1) \cap \mathcal{K} \;:\; J(\bar{x}) = 0 \leq J(x),$$

car si $x \in B_w(\bar{x}, 1)$ alors $\|x - \bar{x}\|_{\mathcal{C}^1} = \|x\|_{\mathcal{C}^1} = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty < 1$ donc en particulier $\|\dot{x}\|_\infty < 1$ et ainsi pour tout temps t, on a $\dot{x}(t)^2 < 1$, et donc $J(x) \geq 0$. Cependant, $\bar{x}$ n'est pas une solution locale forte, et donc a fortiori ce n'est pas non plus une solution globale. Pour montrer cela, il suffit de trouver pour tout $\varepsilon > 0$, une perturbation h de faible amplitude (*i.e.* vérifiant $\|h\|_\infty < \varepsilon$) telle que $J(\bar{x} + h) < J(\bar{x}) = 0$ et $\bar{x} + h$ admissible. Pour arriver à nos fins, il est nécessaire de choisir une fonction h ayant de fortes oscillations car il faut $\dot{x}(t)^2 > 1$ assez souvent pour obtenir un coût strictement négatif. Posons pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n(t) := \varepsilon \sin(nt).$$

Ainsi, $x_n := \bar{x} + h_n = h_n \in \mathcal{K}$ puisque $h_n(0) = h_n(\pi) = 0$ et $h_n \in \mathcal{C}^1([0\,,\pi],\mathbb{R})$. Et puisque $\sin(nt) = 1$ pour $t = \pi/2n \in [0\,,\pi]$, on a $\|h_n\|_\infty = \varepsilon$, autrement dit :

$$x_n \in \overline{B}_s(\bar{x},\varepsilon) \cap \mathcal{K}.$$

Par contre

$$\begin{aligned}
J(x_n) &= \int_0^\pi \varepsilon^2 \sin^2(nt)\left(1 - \varepsilon^2 n^2 \cos^2(nt)\right)\,\mathrm{d}t = \varepsilon^2 \int_0^\pi \sin^2(nt)\left(1 - \mu\cos^2(nt)\right)\,\mathrm{d}t,\ \ \mu := (\varepsilon n)^2,\\
&= \varepsilon^2 \left(\int_0^\pi \sin^2(nt)\,\mathrm{d}t - \frac{\mu}{4}\int_0^\pi \sin^2(2nt)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \varepsilon^2 \left(\frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{\mu}{8n}\int_0^{2n\pi} \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\
&= \varepsilon^2 \left(\int_0^\pi \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{\mu}{4}\int_0^\pi \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\
&= \varepsilon^2 \left(1 - \left(\frac{\varepsilon n}{2}\right)^2\right)\int_0^\pi \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

donc en choisissant $n > 2/\varepsilon$, on obtient $J(x_n) < J(\bar{x}) = 0$, ce qui prouve que $\bar{x}$ n'est pas une solution locale forte. Remarquons de plus que pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} J(x_n) = -\infty,$$

et donc le problème n'admet pas de solution globale ! □

Exemple 2.2. Insistons sur la différence entre solutions locales faibles et fortes. Reprenons la solution locale faible $\bar{x} \equiv 0$ de l'exemple précédent et les perturbations au sens fort $h_n(t) = \varepsilon \sin(nt)$. Pour fixer les idées, on considère

$$\varepsilon \in \{0.02, 0.05, 0.1, 0.25\} \quad \text{et} \quad n_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} - 1 \in \{49, 19, 9, 3\}.$$

On pose alors

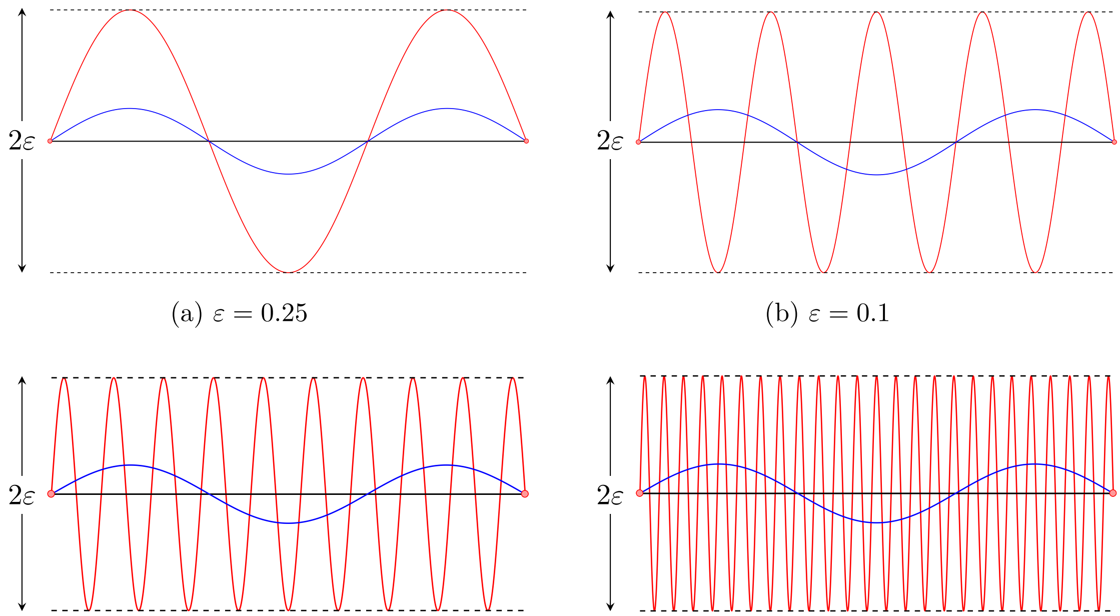
$$h_{s,\varepsilon}(t) := h_{n_\varepsilon}(t) = \varepsilon \sin\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) t\right),$$

de telle sorte que $h_{s,\varepsilon}(0) = h_{s,\varepsilon}(\pi) = 0$, $\|h_{s,\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^0} = \varepsilon$ et $\|h_{s,\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^1} = 1$, *i.e.* $\bar{x} + h_{s,\varepsilon} \in \overline{B}_s(\bar{x},\varepsilon) \cap \mathcal{K}$. Cette perturbation au sens fort a une faible amplitude mais de fortes oscillations. Nous pouvons comparer cette perturbation avec la perturbation au sens faible suivante :

$$h_{w,\varepsilon}(t) := r\varepsilon \sin\left(\left(\frac{1}{r} - 1\right) t\right),$$

où $r := 1/4$ est utile seulement pour fixer la norme $\|h_{w,\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^1} = \varepsilon$, de telle sorte que $\bar{x} + h_{w,\varepsilon} \in \overline{B}_w(\bar{x},\varepsilon) \cap \mathcal{K}$. Cette perturbation a une faible amplitude mais aussi de faibles oscillations comme le montre la figure 2.1. □

Exemple 2.3. Nous pouvons voir sur la figure 2.2 une illustration d'une perturbation de petite amplitude au sens faible versus une perturbation de petite amplitude au sens fort (*i.e.* avec de fortes oscillations) le long d'une trajectoire de référence arbitraire. □



(a) $\varepsilon = 0.25$

(b) $\varepsilon = 0.1$

(c) $\varepsilon = 0.05$

(d) $\varepsilon = 0.02$

FIGURE 2.1 – Perturbations faibles vs fortes. La trajectoire de référence $\bar{x} \equiv 0$ est représentée par un trait plein noir, la perturbation forte $\bar{x} + h_{s,\varepsilon}$ est tracée en rouge tandis que la perturbation faible $\bar{x} + h_{w,\varepsilon}$ est en bleu. Les extrémités (a, A) et (b, B) sont représentées par de petits disques rouges. On ajoute l'enveloppe $\bar{x} \pm \|h_{s,\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^0}$ qui est réprésentée par des tirets noirs. Rappelons que $\bar{x} + h_{s,\varepsilon} \in \overline{B}_s(\bar{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{K}$ et $\bar{x} + h_{w,\varepsilon} \in \overline{B}_w(\bar{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{K}$.

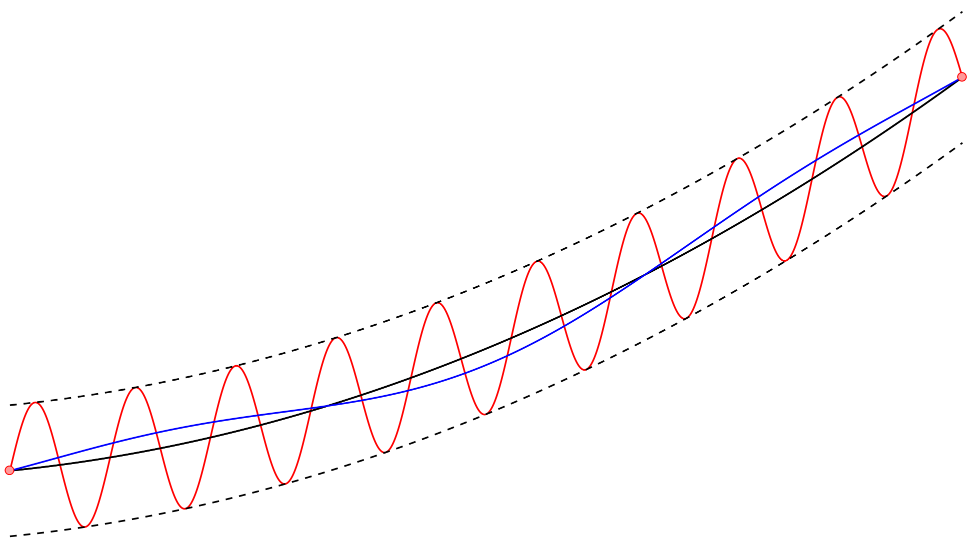


FIGURE 2.2 – Illustration : perturbation faible vs forte le long d'une trajectoire de référence arbitraire. La trajectoire de référence est représentée par un trait plein noir, la perturbation forte est en rouge tandis que la perturbation faible est en bleu. Les extrémités (a, A) et (b, B) sont représentées par de petits disques rouges. On ajoute l'enveloppe qui est réprésentée par des tirets noirs. Les deux trajectoires sont contenues dans un tube de faible épaisseur.

2.2 Équation de Euler-Lagrange

Dans l'exemple 2.1 précédent, nous avons montré que la fonction $\bar{x} \equiv 0$ est une solution locale faible, elle vérifie donc certaines conditions d'optimalité que nous allons détailler dans cette section. Nous avons besoin dans un premier temps du résultat suivant : la fonctionnelle J est de classe $\mathcal{C}^1$ si L est aussi $\mathcal{C}^1$:

Proposition 2.4

Supposons le lagrangien L de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccl} J\colon & (\mathcal{C}^1([a\,,b],\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & J(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

► Définissons quelques applications qui vont nous être utiles.

1. Introduisons l'application

$$\begin{array}{rccl} A\colon & (\mathcal{C}^1([a\,,b],\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) & \longrightarrow & (\mathcal{C}^0([a\,,b],\Omega) \times \mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0\times\mathcal{C}^0}) \\ & x & \longmapsto & A(x) := (x, \dot{x}), \end{array}$$

où l'on définit $\|(x,v)\|_{\mathcal{C}^0\times\mathcal{C}^0} := \|x\|_{\mathcal{C}^0} + \|v\|_{\mathcal{C}^0}$. Cette application est linéaire (évident) et continue puisque :

$$\|A(x)\|_{\mathcal{C}^0\times\mathcal{C}^0} = \|x\|_{\mathcal{C}^1}.$$

2. Introduisons l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}\colon & (\mathcal{C}^0([a\,,b],\Omega) \times \mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0\times\mathcal{C}^0}) & \longrightarrow & (\mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}) \\ & (x,u) & \longmapsto & \mathcal{L}(x,u) \end{array}$$

telle que pour tout $t \in [a\,,b]$, $\mathcal{L}(x,u)(t) := L(t, x(t), u(t))$. D'après [4], cf. dérivabilité dans le cas fonctionnel, puisque L est $\mathcal{C}^1$, alors $\mathcal{L}$ aussi.

3. Introduisons enfin l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & (\mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t. \end{array}$$

Cette application est linéaire (évident) et continue puisque

$$|\varphi(f)| \leq \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq (b-a)\|f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

À l'aide de ces applications, nous pouvons écrire

$$J = \varphi \circ \mathcal{L} \circ A.$$

Puisque toute application linéaire continue est $\mathcal{C}^1$ et puisque la composée d'applications $\mathcal{C}^1$ et elle-même de classe $\mathcal{C}^1$, on peut alors conclure que J est de classe $\mathcal{C}^1$. ■

Remarque 2.4. Il est à noter que $\mathcal{L}(x,u)$ appartient à $(\mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$. Nous avons donc utilisé la même notation pour la norme, que ce soit pour des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, on a :

$$\|\mathcal{L}(x,u)\|_{\mathcal{C}^0} = \|\mathcal{L}(x,u)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |\mathcal{L}(x,u)(t)|.$$

La différentielle de J (au sens de Fréchet) en un point $x \in \mathcal{C}^1([a\,,b],\Omega)$ appliquée à un vecteur $h \in \mathcal{C}^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$ est donnée par [1, 2] :

$$J'(x)\cdot h = (\varphi \circ \mathcal{L}'(A(x)) \circ A)\cdot h.$$

On rappelle, pour obtenir cela, que la différentielle d'une application linéaire T au point x appliquée en le vecteur h est donnée par

$$T'(x)\cdot h = T(h),$$

c'est-à-dire $T'(x) = T$. Ensuite, puisque :

$$\mathcal{L}'(A(x))\cdot A(h) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,\dot{x})\cdot h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x,\dot{x})\cdot \dot{h},$$

nous obtenons finalement (voir [4], cf. dérivabilité dans le cas fonctionnel) :

$$J'(x)\cdot h = \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t))\cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial u}(t,x(t),\dot{x}(t))\cdot \dot{h}(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Introduisons alors les formes linéaires $\alpha(t) \coloneqq \partial_x L(t,x(t),\dot{x}(t))$ et $\beta(t) \coloneqq \partial_u L(t,x(t),\dot{x}(t))$, de telle sorte que

$$J'(x)\cdot h = \int_a^b (\alpha(t)\cdot h(t) + \beta(t)\cdot \dot{h}(t))\,\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

et supposons un instant que L et x soient de classe $\mathcal{C}^2$. Alors dans ce cas, β est de classe $\mathcal{C}^1$ et à l'aide d'une simple intégration par parties, on peut écrire :

$$J'(x)\cdot h = \big[\beta\cdot h\big]_a^b + \int_a^b (\alpha(t) - \dot{\beta}(t))\cdot h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons montrer dans ce qui suit que même si x et L ne sont que de classe $\mathcal{C}^1$, et si x est solution du problème (PCV), alors $\alpha(t) - \dot{\beta}(t) = 0$ pour tout $t \in [a\,,b]$. Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1 ([6]). *Soient α et β dans $\mathcal{C}^0([a\,,b],(\mathbb{R}^n)^*)$.* [3] *Supposons que*

$$\int_a^b (\alpha(t)\cdot h(t) + \beta(t)\cdot \dot{h}(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout $h \in \mathcal{C}^1_0([a\,,b],\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{h \in \mathcal{C}^1([a\,,b],\mathbb{R}^n) \;\middle|\; h(a) = h(b) = 0_{\mathbb{R}^n}\right\}$. Alors, $\beta \in \mathcal{C}^1([a\,,b],(\mathbb{R}^n)^*)$ et pour tout $t \in [a\,,b]$, on a

$$\dot{\beta}(t) = \alpha(t).$$

1. L'ensemble $\mathcal{C}^1([a\,,b],\Omega)$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$ car Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Le $\cdot$ remplace parfois les parenthèses lorsqu'on applique une application linéaire en un point. C'est le cas par exemple pour éviter la notation $J'(x)(h)$.
3. L'ensemble $(\mathbb{R}^n)^*$ est l'ensemble des formes linéaires (continues) sur $\mathbb{R}^n$.

► Soient $h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$ et $c \in (\mathbb{R}^n)^*$. On peut montrer à l'aide d'une simple intégration par parties que :

$$0 = \int_a^b (\alpha(t)\cdot h(t) + \beta(t)\cdot \dot h(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\beta(t) - A(t) - c)\cdot \dot h(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $A(t) \coloneqq \int_a^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s$. Ainsi, pour le choix particulier

$$c \coloneqq \frac{1}{b-a}\int_a^b (\beta(t) - A(t))\,\mathrm{d}t,$$

et pour h défini par [4]

$$h(t) \coloneqq \int_a^t (\beta(s) - A(s) - c)^T\,\mathrm{d}s,$$

il vient que $h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$ et que

$$0 = \int_a^b (\alpha(t)\cdot h(t) + \beta(t)\cdot \dot h(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\beta(t) - A(t) - c)\cdot \dot h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot h(t)\|^2\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\dot h$ est continue sur $[a\,,b]$ alors c'est la fonction nulle et ainsi pour tout $t \in [a\,,b]$, $\beta(t) = A(t) + c$, c'est-à-dire β appartient à $\mathcal{C}^1([a\,,b],(\mathbb{R}^n)^*)$ et $\dot\beta(t) = \alpha(t)$. ■

Nous pouvons maintenant donner nos premières conditions nécessaires d'optimalité.

Théorème 2.5 – Euler-Lagrange (1744)

Supposons le lagrangien L de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\bar x$ est une solution globale, locale forte ou locale faible du problème (PCV), alors $\bar x$ satisfait **l'équation de Euler-Lagrange** *:*

$$\forall t \in [a\,,b] \;\;:\;\; \frac{\partial L}{\partial x}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))\right) = 0_{(\mathbb{R}^n)^*}. \tag{2.2}$$

► Supposons que $\bar x$ soit une solution faible pour un $\eta > 0$. Soit $h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe $\rho_{\eta,h} > 0$ t.q. $\forall\, s \in \left]-\rho_{\eta,h}\,,\rho_{\eta,h}\right[$:

$$\bar x + sh \in B_w(\bar x,\eta)\cap\mathcal{K}.$$

Puisque $\bar x$ est une solution faible alors $\forall\, s \in \left]-\rho_{\eta,h}\,,\rho_{\eta,h}\right[$:

$$J(\bar x) \le J(\bar x + sh),$$

autrement dit, $f(s) \coloneqq J(\bar x + sh)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ qui atteint son minimum en le point intérieur $\bar s \coloneqq 0$. Ainsi,

$$f'(\bar s) = J'(\bar x)\cdot h = 0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$, alors le lemme 2.1 avec l'expression (2.1) de la différentielle de J nous donne l'équation de Euler-Lagrange (2.2). Enfin, puisque ceci est vrai pour toute solution locale faible, alors c'est aussi vrai pour toute solution globale et locale forte, cf. proposition 2.3. ■

4. Le signe ^{T} désigne l'opérateur de transposition. On rappelle que $h(t) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.5. L'équation de Euler-Lagrange est présentée comme une égalité entre formes linéaires. On pourra préférer la notation

$$\nabla_x L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla_u L(t, x(t), \dot{x}(t))\right) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Remarque 2.6. Il est important de noter que l'équation de Euler-Lagrange n'est qu'une condition nécessaire comme le montre l'exemple 2.1. On peut noter de même que nous n'avons pas vraiment besoin de la différentiabilité au sens de Fréchet de la fonctionnelle J mais seulement au sens de Gâteaux, autrement dit nous n'avons réellement besoin que des dérivées directionnelles.

Définition 2.6 – Extrémale et BC-extrémale

Une fonction $x \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \Omega)$ qui vérifie l'éq. de Euler-Lagrange (2.2) est une ***extrémale***.

Une extrémale $x \in \mathcal{K}$, *i.e.* qui vérifie les conditions aux limites, est une ***BC-extrémale***.[5]

✍ **Exercice 2.4** (cf. [3]).

i) Montrer que les extrémales de $L(t, x, u) := \sqrt{1+u^2}$ sont affine (*i.e.* $\ddot{x} = 0$).
ii) Montrer que l'équation de Euler-Lagrange pour le lagrangien $L(t, x, u) := x^2 + u^2$ est donnée par $\ddot{x} - x = 0$.
iii) Trouver l'unique extrémale admissible (*i.e.* BC-extrémale) pour le problème :

$$\inf_x \left\{ J(x) := \int_0^1 (\dot{x}(t)^2 + x(t)^2)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; x \in \mathcal{C}^1([0\,,1], \mathbb{R}),\ x(0) = 0,\ x(1) = 1 \right\}. \qquad \square$$

Nous travaillions jusqu'ici avec des lagrangiens de classe $\mathcal{C}^1$ et des extrémales associées elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^1$. Voyons maintenant comment la régularité du lagrangien influence celle des extrémales [3, 6].

Théorème 2.7 – Hilbert-Weierstrass (1875)

Soient L un lagrangien de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, et x une extrémale t.q. :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t, x(t), \dot{x}(t)) \text{ inversible,}$$

pour tout $t \in [a\,,b]$. Alors, x est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a\,,b[$.

► Par hypothèse, x satisfait l'équation de Euler-Lagrange (2.2). Ainsi, il existe une constante $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ t.q. :

$$\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \frac{\partial L}{\partial u}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \lambda$$

pour tout $t \in [a\,,b]$. On pose

$$\begin{array}{rccl} F\colon &]a\,,b[\times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & (t, u) & \longmapsto & F(t,u) := \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \frac{\partial L}{\partial u}(t, x(t), u), \end{array}$$

5. "BC" vient de "Boundary Conditions" qui signifie conditions aux limites.

de telle sorte que pour $t \in]a\,,b[$, on a $F(t,\dot{x}(t)) = \lambda$ et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t,\dot{x}(t)) = -\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t,x(t),\dot{x}(t))$$

qui est inversible. Ainsi, d'après le théorème des fonctions implicites [4], la solution $\dot{x}(t)$ est unique (localement) et $\dot{x}$ a la même régularité que F. Si $k=2$, il faut montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour cela, il suffit de montrer que $\partial_t F$ et $\partial_u F$ sont continues sur un voisinage de $(t,\dot{x}(t))$. Or,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = -\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t,x(t),u)$$

est bien continue car L est de classe $\mathcal{C}^2$ et x est continue (car x est $\mathcal{C}^1$), et

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t)) - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u}(t,x(t),u) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u}(t,x(t),u)\cdot\dot{x}(t)$$

est de même continue. En conclusion, si $k=2$ alors x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a\,,b[$. Maintenant si $k=3$, on sait que x est $\mathcal{C}^2$ et par la même mécanique, on peut montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$. En conclusion, par récurrence sur k, on peut montrer pour tout $k \geq 2$, que F est $\mathcal{C}^{k-1}$ et donc x de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a\,,b[$. ■

On déduit des équations de Euler-Lagrange la propriété suivante, utile d'un point de vue pratique pour calculer des extrémales.

Proposition 2.8 – condition de Erdmann [3] ou identité de Beltrami

Soient un lagrangien L et une extrémale x tous deux de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$p(t) \coloneqq \partial_u L[t] \quad \text{et} \quad E(t) \coloneqq p(t)\cdot\dot{x}(t) - L[t],$$

où $[t] \coloneqq (t,x(t),\dot{x}(t))$. Alors E est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [a\,,b]$, on a :

$$\dot{E}(t) = -\partial_t L[t],$$

ainsi donc, si L ne dépend pas explicitement de t (on dit que L est **autonome***) :*

$$E(t) = p(t)\cdot\dot{x}(t) - L[t] = \text{const.}$$

► Cette preuve est laissée en exercice. ■

Exemple 2.5 (Problème de surface de révolution d'aire minimale [6]). Une caténoïde (du latin Catena, chaîne) se forme lorsque deux anneaux circulaires parallèles sont séparés lentement après avoir été plongés dans une solution savonneuse. C'est la surface minimale entre ces deux cercles. Elle fut découverte par Leonhard Euler en 1744 et l'équation de sa surface est la solution d'un problème variationnel. Modélisons ce problème. On va supposer que la solution est une surface dans $\mathbb{R}^3$ de révolution autour de l'axe des temps t, engendrée par une courbe donnée comme le graphe d'une fonction $x(t)$.

6. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaînette et https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface_minimale.

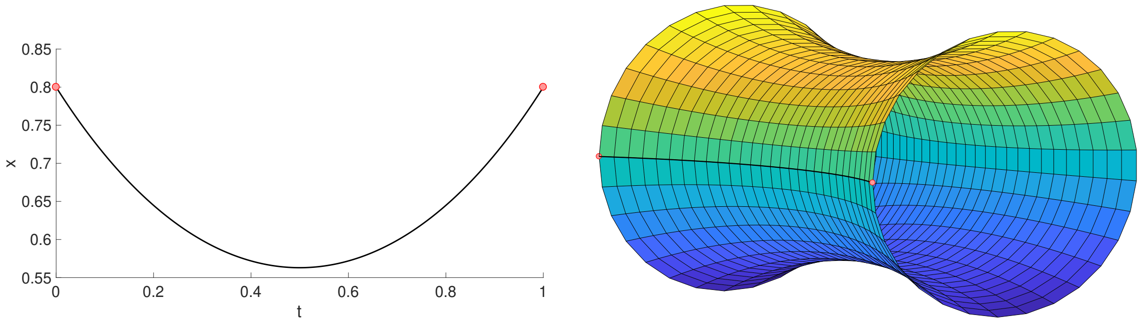
Le problème variationnel correspondant (on omet le facteur 2π dans le critère) s'écrit :

$$\inf_x \left\{ J(x) := \int_a^b x(t)\, \sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\, \mathrm{d}t \;\middle|\; x \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R}),\ x(a) = A,\ x(b) = B \right\},$$

où a, b, A et B sont donnés, et où le lagrangien associé est :

$$L(t,x,u) := x\,\sqrt{1+u^2}.$$

Le sous-graphe (a) de la figure 2.3 est celui de la courbe solution $x(t)$ tandis qu'à droite, en (b), on peut voir la surface de révolution engendrée.



(a) Chaînette ou caténoïde. (b) Surface de révolution d'aire minimale.

FIGURE 2.3 – Illustration du problème de surface de révolution d'aire minimale. Dans cet exemple, $a = 0$, $b = 1$ et $A = B = 0.8$.

Supposons qu'il existe une solution x de classe $\mathcal{C}^2$ au problème. Attention, il n'existe pas de solutions pour tous les jeux de données (a, b, A, B), il faut donc bien les choisir. De plus, puisque $x(t)$ correspond au rayon du cercle de notre surface de révolution au temps t, il est raisonnable de supposer que la solution vérifie $x(t) > 0$ pour tout temps t. Dans ces conditions, l'équation de Euler-Lagrange est donnée par

$$\ddot{x}(t) = \frac{1+\dot{x}(t)^2}{x(t)},$$

et puisque le lagrangien est de classe $\mathcal{C}^2$ et autonome, d'après la proposition 2.8, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$-E(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}} = K.$$

Utilisons cette dernière relation pour déterminer $x(t)$. Pour cela, changeons tout d'abord la paramétrisation du temps $t = \varphi(\tau)$ et définissons $\widetilde{x}(\tau) := x(\varphi(\tau))$ de telle sorte que :

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \dot{x}(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau), \tag{2.3}$$

puis imposons (comme proposé dans [6]) :

$$\dot{x}(\varphi(\tau)) = \sinh\tau. \tag{2.4}$$

Alors, $1+\dot{x}(\varphi(\tau))^2 = 1+\sinh^2\tau = \cosh^2\tau$ et donc :

$$\widetilde{x}(\tau) = x(\varphi(\tau)) = K\,\sqrt{1+\dot{x}(\varphi(\tau))^2} = K\cosh\tau.$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = K \sinh \tau$$

et à l'aide des équations (2.3) et (2.4), on obtient finalement $\varphi'(\tau) = K$ ou encore

$$\varphi(\tau) = K\tau + \beta,$$

pour une certaine constante β. En conclusion

$$x(t) = x(\varphi(\tau)) = \widetilde{x}(\varphi^{-1}(t)) = K \cosh\left(\frac{t-\beta}{K}\right), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad K > 0,$$

ce qui est l'expression d'une caténoïde. □

2.3 Condition de Legendre

Supposons un instant que L soit un lagrangien de classe $\mathcal{C}^2$. Toute extrémale x telle que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t, x(t), \dot{x}(t)) \text{ inversible}$$

pour tout $t \in [a\,, b]$, vérifie alors l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x}[t] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u}[t]\right) = \frac{\partial L}{\partial x}[t] - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u}[t] + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u}[t] \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}[t] \cdot \ddot{x}(t)\right),$$

où $[t] \coloneqq (t, x(t), \dot{x}(t))$, que l'on peut réécrire (avec une notation plus succinte mais claire) :

$$\ddot{x} = (L_{uu})^{-1}\,(L_x - L_{tu} - L_{xu}\,\dot{x})$$

car $\partial^2_{uu} L[t]$ est inversible. Dans cette situation, $\ddot{x}$ se prolonge de manière continue aux extrémités a et b et ainsi $x \in \mathcal{C}^2([a\,, b], \Omega)$. Nous voyons ici que $\partial^2_{uu} L[t]$ joue un rôle important et nous allons montrer ci-après que $\partial^2_{uu} L[t] \geq 0$ le long de toute solution faible. Avant cela, nous présentons le résultat suivant, similaire à la proposition 2.4.

Proposition 2.9

Supposons le lagrangien L de classe $\mathcal{C}^k$, pour $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccl} J\colon & (\mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & J(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$.

► La preuve est similaire à celle de la proposition 2.4 : le point clé est que l'application $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ car L est de classe $\mathcal{C}^k$. Ensuite, toute application linéaire continue est $\mathcal{C}^\infty$ ce qui permet de conclure via le théorème de dérivation des applications composées. ■

Nous avons déjà vu que la différentielle de J en $x \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \Omega)$ appliquée à $h \in \mathcal{C}^1([a\,, b], \mathbb{R}^n)$ est donnée par :

$$J'(x) \cdot h = (\varphi \circ \mathcal{L}'(A(x)) \circ A) \cdot h = \varphi(\mathcal{L}'(A(x)) \cdot A(h)),$$

où φ, A et $\mathcal{L}$ sont définies dans la démonstration de la proposition 2.4. Introduisons

$$g(x) \coloneqq J'(x) \cdot h$$

et l'application linéaire continue $T(f) \coloneqq f \cdot A(h)$ pour $f \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0([a\,,b], \mathbb{R}^n)^2, \mathcal{C}^0([a\,,b], \mathbb{R}))$, de telle sorte que

$$g = \varphi \circ T \circ \mathcal{L}' \circ A.$$

Nous voulons calculer la dérivée seconde de J en x appliquée en $(h,k) \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R}^n)^2$, *i.e.*

$$J''(x) \cdot (h,k),$$

or,

$$\begin{aligned} J''(x) \cdot (h,k) &= (J'(\cdot) \cdot h)'(x) \cdot k = g'(x) \cdot k = (\varphi \circ T \circ \mathcal{L}''(A(x)) \circ A) \cdot k \\ &= \varphi \left(\mathcal{L}''(A(x)) \cdot (A(h), A(k))\right) \\ &= \varphi \left(\mathcal{L}''(x,\dot{x}) \cdot \left((h,\dot{h}),(k,\dot{k})\right)\right) \\ &= \int_a^b \left(\mathcal{L}''(x,\dot{x}) \cdot \left((h,\dot{h}),(k,\dot{k})\right)\right)(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''(x,\dot{x}) \cdot \left((h,\dot{h}),(k,\dot{k})\right) &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x,\dot{x}) \cdot (h,k) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial x}(x,\dot{x}) \cdot (k,\dot{h}) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial u}(x,\dot{x}) \cdot (\dot{k},h) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(x,\dot{x}) \cdot (\dot{h},\dot{k}). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} J''(x) \cdot (h,k) = \int_a^b \Bigg(&\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}[t] \cdot (h(t),k(t)) + \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}[t] \cdot (k(t),\dot{h}(t)) \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u}[t] \cdot (\dot{k}(t),h(t)) + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}[t] \cdot (\dot{h}(t),\dot{k}(t)) \Bigg)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

avec $[t] \coloneqq (t, x(t), \dot{x}(t))$, que l'on peut écrire sous la forme

$$J''(x) \cdot (h,k) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial (x,u)^2}[t] \cdot \left((h(t),\dot{h}(t)),(k(t),\dot{k}(t))\right)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Nous pouvons maintenant donner une nouvelle condition nécessaire dans le cas d'un lagrangien de classe $\mathcal{C}^2$. Avant cela, introduisons quelques notations. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $A \geq 0$ si A est semi-définie positive. On note $A > 0$ si elle est définie positive.

Théorème 2.10 – Condition de Legendre (1786)

Supposons le lagrangien L de classe $\mathcal{C}^2$. Si $\bar{x}$ est une solution globale, locale forte ou locale faible du problème (PCV), alors $\bar{x}$ satisfait **la condition de Legendre** *:*

$$\forall t \in [a\,,b] \ : \ \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \geq 0. \tag{2.5}$$

► Supposons que $\bar{x}$ soit une solution faible pour un $\eta > 0$. Soit $h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe $\rho_{\eta,h} > 0$ t.q. $\forall\, s \in \,]-\rho_{\eta,h}\,,\rho_{\eta,h}[$:

$$\bar{x} + sh \in B_w(\bar{x},\eta) \cap \mathcal{K}.$$

Puisque $\bar{x}$ est une solution faible alors $\forall\, s \in \,]-\rho_{\eta,h}\,,\rho_{\eta,h}[$:

$$J(\bar{x}) \leq J(\bar{x} + sh),$$

autrement dit, $f(s) \coloneqq J(\bar{x} + sh)$ est une fonction $\mathcal{C}^2$ qui atteint son minimum en le point intérieur $\bar{s} \coloneqq 0$. Ainsi,

$$f'(\bar{s}) = J'(\bar{x}) \cdot h = 0 \quad \text{et} \quad f''(\bar{s}) = J''(\bar{x}) \cdot (h,h) \geq 0,$$

avec

$$J''(\bar{x}) \cdot (h,h) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}[t] \cdot (h(t))^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}[t] \cdot (h(t),\dot{h}(t)) + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}[t] \cdot (\dot{h}(t))^2 \right) \mathrm{d}t,$$

où $[t] \coloneqq (t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$. Puisque $J''(\bar{x}) \cdot (h,h)$ doit être positif quel que soit $h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R}^n)$, il suffit de construire une fonction h telle que $\|h\|_\infty$ soit négligeable devant $\|\dot{h}\|_\infty$, car alors le terme $\partial^2 L_{uu}[t] \cdot (\dot{h}(t))^2$ serait dominant et devrait donc être positif.

$*$ **Cas** $n = 1$**.** Montrons le résultat par l'absurde et suivons [6]. Supposons qu'il existe un temps $\tau \in [a\,,b]$ tel que $\partial^2_{uu} L[\tau] = -2\beta < 0$. Alors par continuité de $t \mapsto \partial^2_{uu} L[t]$, on peut supposer que $\tau \in \,]a\,,b[$. Choisissons un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\partial^2 L_{uu}[\tau] < -\beta < 0$ pour tout $t \in [\tau - \varepsilon\,,\tau + \varepsilon]$ et définissons la fonction

$$h_\varepsilon(t) \coloneqq \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) & \text{pour } |t-\tau| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque pour tout t tel que $|t - \tau| < \varepsilon$:

$$\dot{h}_\varepsilon(t) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \sin\left(\frac{\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) \cos\left(\frac{\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) = \frac{\pi}{\varepsilon} \sin\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right),$$

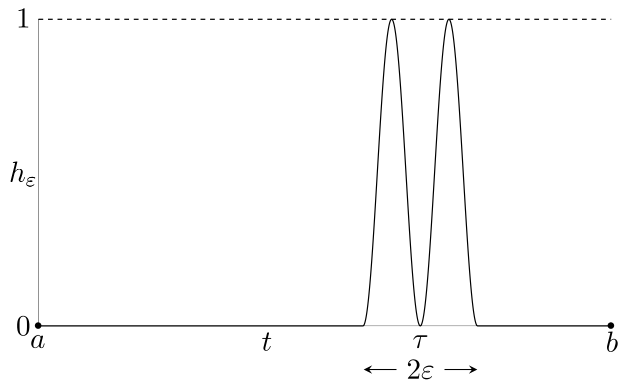
alors $h_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b],\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} J''(\bar{x}) \cdot (h_\varepsilon,h_\varepsilon) = &\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \partial^2_{xx} L[t] \, \sin^4\left(\frac{\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \partial^2_{ux} L[t] \, \sin^2\left(\frac{\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\ &+ \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \partial^2_{uu} L[t] \, \sin^2\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Introduisons M et N respectivement les bornes supérieures des valeurs absolues des fonctions continues $t \mapsto \partial^2_{xx} L[t]$ et $t \mapsto \partial^2_{ux} L[t]$ sur $[a\,,b]$, de telle sorte que

$$J''(\bar{x}) \cdot (h_\varepsilon,h_\varepsilon) \leq 2\varepsilon M + 4\pi N - 2\beta\frac{\pi^2}{\varepsilon} \to -\infty \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Il est donc possible de choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $J''(\bar{x}) \cdot (h_\varepsilon,h_\varepsilon) < 0$, d'où la contradiction et donc $\partial^2_{uu} L[t]$ est positif sur $[a\,,b]$. Voici la visualisation de h_ε :



$*$ **Cas général.** On suppose qu'il existe un temps $\tau \in \,]a\,,b[$ et un vecteur propre $v_\tau \in \mathbb{R}^n$ tel que $\partial^2_{uu}L[\tau] \cdot (v_\tau, v_\tau) = -2\beta < 0$. Ensuite, on choisit un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\partial^2_{uu}L[t] \cdot (v_\tau, v_\tau) < -\beta < 0$ pour tout $t \in [\tau - \varepsilon\,, \tau + \varepsilon]$ et on définit la fonction $h_\varepsilon(t) \coloneqq \alpha_\varepsilon(t) v_\tau$ avec

$$\alpha_\varepsilon(t) \coloneqq \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{\varepsilon}(t-\tau)\right) & \text{pour } |t-\tau| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le reste de la démonstration se généralise bien et au final on montre que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $J''(\bar{x}) \cdot (h_\varepsilon, h_\varepsilon) < 0$ ce qui en contradiction avec les hypothèses et donc toutes les valeurs propres de $\partial^2_{uu}L[t]$ sont positives sur $[a\,,b]$.

$*$ Puisque ceci est vrai pour toute solution locale faible, alors c'est aussi vrai pour toute solution globale et locale forte, cf. proposition 2.3. ■

Remarque 2.7. Attention, la ***condition de Legendre stricte***

$$\forall t \in [a\,,b] \;\; : \;\; \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) > 0,$$

n'est pas une condition suffisante d'optimalité, cf. [3, Exercice 14.10]. Il faut une condition supplémentaire, que l'on appelle la condition de Jacobi. Cependant, si la longueur de l'intervalle $[a\,,b]$ est suffisamment petite, alors la condition de Legendre stricte est suffisante pour prouver l'optimalité, car comme nous le verrons, dans ce cas, la condition de Jacobi est automatiquement vérifiée sur des temps courts.

2.4 Extrémum libre et contraintes affines

Nous avons dans les preuves des théorèmes 2.5 (Euler-Lagrange) et 2.10 (Legendre) utilisé des notions d'optimisation que nous allons formaliser dans cette section. Nous ne le faisons que maintenant car il semblait plus intéressant dans ces preuves de rester spécifique pour mieux rentrer dans le sujet du calcul des variations. Toutefois, nous voulons aller plus loin que simplement utiliser des conditions nécessaires d'optimalité. Nous allons dans la section suivante parler de conditions suffisantes d'optimalité locale faible et pour cela, poser un cadre permettra peut-être d'avoir les idées plus claires (voir aussi la remarque 2.9).

2.4.1 Extrémum libre

Nous allons donc ici formaliser certains concepts d'optimisation. On suppose l'existence de solutions et on cherche à fournir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité locale.

Définition 2.11

i) Soient X un ensemble quelconque, $J\colon X \to \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in X$. On dit que $\bar{x}$ est un ***minimum global*** de J si $J(\bar{x}) \leq J(x)$ pour tout $x \in X$.

ii) Si X est un espace topologique, on dit que $\bar{x}$ est un ***minimum local*** de J si $\exists\, V \in \mathcal{V}_X(\bar{x})$ (*i.e.* un voisinage ouvert de $\bar{x}$ dans X) t.q. $\forall\, x \in V \ : \ J(\bar{x}) \leq J(x)$.

iii) Un minimum local est dit ***strict*** si : $\forall\, x \in V \setminus \{\bar{x}\} \ : \ J(\bar{x}) < J(x)$. On a de même les notions de max. global, local et local strict.

iv) On dit que $\bar{x}$ est un ***extremum*** de J (resp. global, local, local strict) si $\bar{x}$ est un min. ou max. de J (resp. global, local, local strict).

v) Soient E un espace vectoriel normé (evn) et $J\colon U \subset E \to \mathbb{R}$, U un ouvert de E, J dérivable en $\tilde{x} \in U$. On dit que $\tilde{x}$ est un ***point critique*** de J si $J'(\tilde{x}) = 0_{E'}$, et alors $J(\tilde{x})$ est appelée une ***valeur critique***.

Remarque 2.8.

- On rappelle que E' est l'ensemble des formes linéaires continues sur E et que la notion de dérivabilité est ici sous-entendue au sens de Fréchet. On notera $\|\cdot\|$ la norme de E.
- Un point critique n'est pas nécessairement un extrémum.
- En un point critique, on dit aussi que J est ***stationnaire***.

Proposition 2.12 – Condition du premier ordre (CN1)

Soient $J\colon U \subset E \to \mathbb{R}$ dérivable sur U ouvert de E evn et $\bar{x} \in U$. Si $\bar{x}$ est un extrémum local de J alors **l'équation de Euler** *est vérifiée :*

$$J'(\bar{x}) = 0_{E'}.$$

► Si $\bar{x}$ est par exemple un minimum (c'est similaire pour un max.) local alors :

$$\exists\, \eta > 0, \text{ t.q. } B(\bar{x}, \eta) \subset U \text{ et } \forall\, x \in B(\bar{x}, \eta) : J(\bar{x}) \leq J(x),$$

puisque U est un ouvert de E. Soit maintenant $h \in E$. Alors, il existe $\rho_{\eta,h} > 0$ t.q. :

$$f\colon \quad \begin{array}{rcl} V_{\eta,h} := \left]-\rho_{\eta,h}\,, \rho_{\eta,h}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & f(s) := J(\bar{x} + sh) \end{array}$$

soit bien définie et t.q. $\bar{x} + sh \in B(\bar{x}, \eta)$, $\forall\, s \in V_{\eta,h}$. Si $h \neq 0_E$, prendre $\rho_{\eta,h} := \eta / \|h\|$. Ainsi définie, f est dérivable en 0 et $f'(0) = J'(\bar{x}) \cdot h$. Mais puisque $\bar{x}$ est un minimum local de J, alors 0 est un minimum de f sur $V_{\eta,h}$. Ainsi, puisque $V_{\eta,h}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il vient $f'(0) = J'(\bar{x}) \cdot h = 0$, car

$$0 \geq \lim_{s \to 0^-} \frac{f(s) - f(0)}{s} = f'(0) = \lim_{s \to 0^+} \frac{f(s) - f(0)}{s} \geq 0.$$

■

Proposition 2.13 – Cas convexe (CNS)

Soient $J\colon U \subset E \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur U un ouvert convexe de E, et $\bar{x} \in U$. Si $\bar{x}$ est un point critique de J alors $\bar{x}$ est un minimum global de J (sous-entendu sur U). Nous avons donc

$$\bar{x} \in U \text{ minimum global} \Leftrightarrow \bar{x} \in U \text{ point critique.}$$

► Puisque J est dérivable et convexe sur U alors $\forall\,(x,y) \in U^2 : J(x)-J(y) \geq J'(y)\cdot(x-y)$. En particulier, au point $y \coloneqq \bar{x}$, on a $\forall\, x \in U : J(x) - J(\bar{x}) \geq J'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = 0$, puisque $\bar{x}$ est un point critique de J. Il vient donc que $\bar{x}$ est un min. global de J sur U. ■

Proposition 2.14 – Condition nécessaire d'ordre supérieur (CNk)

Soit $J\colon U \subset E \to \mathbb{R}$ une application $k \geq 2$ fois dérivable sur U un ouvert de E (evn) et soit $\bar{x} \in U$ un point critique de J t.q. $\forall i \in [\![1\,, k-1]\!] : J^{(i)}(\bar{x}) = 0$ et $J^{(k)}(\bar{x}) \neq 0$. On a :

$$\bar{x} \text{ minimum local de } J \Rightarrow k \text{ pair et } \forall\, h \in E : J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h^k \geq 0.$$

► Supposons donc que $\bar{x}$ soit un minimum local de J et considérons $h \in E$. On définit $f(s)$ comme dans la preuve de la prop. 2.12 et on garde les mêmes notations. Alors, $\forall\, s \in V_{\eta,h}$:

$$f(s) - f(0) = J(\bar{x} + sh) - J(\bar{x}) \geq 0.$$

Puisque J est k fois dérivable sur U alors f l'est sur $V_{\eta,h}$ donc en particulier en 0. D'après la formule de Taylor-Young [4] :

$$f(s) - f(0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{s^i}{i!} f^{(i)}(0) + s^k \varepsilon(s) \quad \text{avec} \quad \lim_{s \to 0} \varepsilon(s) = 0.$$

Par hypothèse :

$$f(s) - f(0) = \frac{s^k}{k!} f^{(k)}(0) + s^k \varepsilon(s) = s^k \left(\frac{1}{k!} J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h^k + \varepsilon(s) \right) \geq 0,$$

En divisant par s^k et en passant à la limite quand $s \to 0^+$ dans le terme de droite on en déduit que $J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h^k \geq 0$. Montrons pour finir que k est pair. Puisque $J^{(k)}(\bar{x}) \neq 0$, alors $\exists\, h_0 \in E$ t.q. $J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h_0^k \neq 0$ [7] et donc $J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h_0^k > 0$. Posons

$$\Omega \coloneqq \left\{ s \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; |\varepsilon(s)| < \frac{1}{k!} J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h_0^k \right\} \cap V_{\eta,h_0},$$

de telle sorte que $\forall\, s \in \Omega$:

$$\operatorname{sign}(f(s) - f(0)) = \operatorname{sign}(s^k) \times \operatorname{sign}\left(J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h_0^k\right) = \operatorname{sign}(s^k).$$

Puisque $f(s) - f(0) \geq 0$, $\Omega \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset$ et $\Omega \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, on en déduit que k est pair. ■

7. Ce résultat admis ici n'est pas trivial.

Proposition 2.15 – Conditions suffisantes d'ordre supérieur (CSk)

Soit $J\colon U \subset E \to \mathbb{R}$ une application $k \geq 2$ fois dérivable sur U un ouvert de E (evn) et soit $\bar{x} \in U$ un point critique de J t.q. $\forall i \in [\![1\,,k-1]\!]$: $J^{(i)}(\bar{x}) = 0$ et $J^{(k)}(\bar{x}) \neq 0$. On a :

i) Si

$$\exists\,\alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h \in E \;:\; J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h^k \geq \alpha \|h\|^k,$$

*alors k est pair et $\bar{x}$ est un minimum local **strict**.*

ii) Si

$$\exists\,\eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, x \in B(\bar{x}, \eta) \subset U \quad \text{et} \quad \forall\, h \in E \;:\; J^{(k)}(x) \cdot h^k \geq 0,$$

alors k est pair et $\bar{x}$ est un minimum local.

► i) Pour tout $h \in E$, $J^{(k)}(\bar{x}) \cdot (-h)^k = (-1)^k J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h^k \geq \alpha\|h\|^k \geq 0$ donc k doit être pair. La formule de Taylor appliquée à J nous donne pour $h \in E$ t.q. $\bar{x} + h \in U$:

$$J(\bar{x}+h) - J(\bar{x}) = \frac{1}{k!} J^{(k)}(\bar{x}) \cdot h^k + \|h\|^k \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{\|h\| \to 0} |\varepsilon(h)| = 0.$$

Par hypothèse :

$$J(\bar{x}+h) - J(\bar{x}) \geq \left(\frac{\alpha}{k!} + \varepsilon(h)\right) \|h\|^k$$

et donc il existe $\eta > 0$ t.q. pour tout $h \neq 0_E$ t.q. $\|h\| < \eta$ on ait $\bar{x} + h \in U$ et

$$J(\bar{x}+h) - J(\bar{x}) > 0.$$

Autrement dit, $\bar{x}$ est un minimum local strict.

ii) Il est évident que k soit pair car $J^{(k)}(\bar{x}) \neq 0$ (cf. prop. précédente). Par hypothèse, J est donc convexe sur la boule ouverte $B(\bar{x}, \eta)$ et puisque $\bar{x}$ est un point critique, alors $\bar{x}$ est un minimum global de J sur $B(\bar{x}, \eta)$, autrement dit un min. local de J, cf. prop. 2.13. ■

Définition 2.16

Soit $B \in \mathcal{L}_2(E^2, \mathbb{R})$ une forme bilinéaire symétrique définie sur $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- B est dite ***semi-définie positive***, notée $B \geq 0$, si $\forall\, h \in E : B(h,h) \geq 0$.
- B est dite ***définie positive***, notée $B > 0$, si $\forall\, h \in E \setminus \{0_E\} : B(h,h) > 0$.
- B est dite ***elliptique*** si $\exists\, \alpha > 0$ t.q. $\forall\, h \in E : B(h,h) \geq \alpha\|h\|^2$.

D'après la proposition 2.14, en un point critique $\bar{x}$, une condition nécessaire d'ordre deux est donc que $J''(\bar{x})$ soit semi-définie positive, et d'après la proposition 2.15, une condition suffisante d'ordre deux est que $J''(\bar{x})$ soit elliptique :

$$\begin{aligned} &(\text{CN2}) \quad \forall\, h \in E : J''(\bar{x}) \cdot (h,h) \geq 0, \\ &(\text{CS2}) \quad \exists\, \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall\, h \in E : J''(\bar{x}) \cdot (h,h) \geq \alpha\|h\|^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Une autre condition suffisante d'ordre deux est que $J''(x)$ soit semi-définie positive pour tout x contenu dans une boule ouverte centrée en $\bar{x}$. Attention, la définie positivité ne suffit pas en général en dimension infinie mais suffit en dimension finie comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.17 – Cas particulier de la dimension finie

Soit $J\colon U \subset E \to \mathbb{R}$ une application $k \geq 2$ fois dérivable sur U un ouvert de E (evn) et soit $x \in U$. Si $\dim E \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall\, h \in E : J^{(k)}(x) \cdot h^k \geq \alpha \|h\|^k \Leftrightarrow \forall\, h \in E \setminus \{0_E\} : J^{(k)}(x) \cdot h^k > 0.$$

► La conditions nécessaire est évidente et vraie même si $\dim E = +\infty$. Supposons donc que $\forall\, h \in E \setminus \{0_E\} : J^{(k)}(x) \cdot h^k > 0$. Introduisons

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & \varphi(h) := f^{(k)}(x) \cdot h^k \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} \psi\colon & E & \longrightarrow & E^k \\ & h & \longmapsto & \psi(h) = (h, \cdots, h) = h^k \end{array}$$

de telle sorte que $\varphi = f^{(k)}(x) \circ \psi$, avec ψ une application linéaire continue. Puisque $f^{(k)}(x) \in \mathcal{L}_k(E^k, \mathbb{R})$ est aussi continue, alors φ est continue. Or, $\dim E < +\infty$, donc sa sphère unité $S(0_E, 1)$ est compacte, donc φ est bornée sur $S(0_E, 1)$ et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire :

$$\exists\, h_0 \in S(0_E, 1) \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h \in S(0_E, 1) : \varphi(h_0) \leq \varphi(h).$$

Notons $\alpha := f^{(k)}(x) \cdot h_0^k > 0$ (car $h_0 \neq 0_E$). Alors, $\forall\, h \in S(0_E, 1)$ on a $f^{(k)}(x) \cdot h^k \geq \alpha$ et donc par homogénéité, on en déduit :

$$\forall\, h \in E \setminus \{0_E\} : \frac{h}{\|h\|} \in S(0_E, 1) \Rightarrow f^{(k)}(x) \cdot \left(\frac{h}{\|h\|}\right)^k \geq \alpha \Rightarrow f^{(k)}(x) \cdot h^k \geq \alpha \|h\|^k.$$

■

Remarque 2.9. Dans les preuves des propositions 2.12 (CN1) et 2.14 (CNk), nous nous sommes ramené dans $\mathbb{R}$, et nous avons utilisé directement les conditions nécessaires pour une fonctionnelle dans $\mathbb{R}$ pour obtenir les conditions nécessaires en dimension infinie. Ce procédé ne fonctionne pas pour obtenir les conditions suffisantes de la proposition 2.15 (CSk). En effet, même si $\bar{x}$ est un minimum local le long de n'importe quelle direction h, c'est-à-dire un minimum local de $f(s) = J(\bar{x} + sh)$, alors il est toujours possible que $\bar{x}$ ne soit pas un minimum local de J, et ce, même en dimension finie (supérieure ou égale à 2), cf. exercice 2.6. De plus, comme nous l'avons vu, il y a une différence notable entre les dimensions finie et infinie concernant les conditions suffisantes. La définie positivité de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante d'optimalité locale en dimension infinie, cf. exemple 2.7. C'est pour ces raisons que nous avons reporté la formalisation des concepts d'optimisation. Dans les sections précédentes, pour obtenir les équations de Euler-Lagrange et la condition de Legendre, seules les conditions nécessaires étaient utiles. De plus, comme nous allons vite le voir, ces conditions suffisantes ne nous seront pas utiles, c'est pourquoi nous allons en donner d'autres dans la prochaine section.

Voici un exercice montrant que l'optimalité “directionnelle” n'implique pas l'optimalité.

✍ **Exercice 2.6** ([5]). On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} J\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & J(x) := 2x_1^4 - 4x_1^2 x_2 + x_2^2. \end{array}$$

1. Montrer que l'unique point critique de J est $\widetilde{x} := (0, 0)$.

2. La condition nécessaire de solution du deuxième ordre est-elle vérifiée ?

3. Les conditions suffisantes de solution du deuxième ordre sont-elles vérifiée ?

4. On fixe $h \in \mathbb{R}^2$ et on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & f(s) \coloneqq J(\widetilde{x} + sh). \end{array}$$

Montrer que $\bar{s} = 0$ est un minimum local de f.

5. Calculer $J(x_1, 2x_1^2)$. Conclusion (faire le lien avec la remarque 2.9) ? □

L'exemple suivant montre que la définie positivité de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante d'optimalité locale.

Exemple 2.7 ([1]). On considère le problème

$$\inf_x \left\{ J(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n^2}{n} - x_n^3 \right) \;\middle|\; x \in l_2 \right\},$$

où $l_2 \coloneqq \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ est l'espace de Hilbert des suites de carrés sommables. Alors, le point $\widetilde{x} \coloneqq 0$ est un point critique tel que pour tout $h \coloneqq (h_n) \in l_2$ non nul :

$$J''(\widetilde{x}) \cdot (h,h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_n^2}{n} > 0.$$

Cependant, considérons les suites $h_k \coloneqq (h_{k,n})$ telles que toutes les coordonnées sont nulles sauf la k^{e} qui vérifie $h_{k,k} = 2k^{-1}$. Alors, $J(\widetilde{x} + h_k) = J(h_k) = -4k^{-3} < 0 = J(\widetilde{x})$ et donc $\widetilde{x}$ n'est pas localement optimal. Voici donc un exemple de dérivée seconde définie positive mais non elliptique. □

2.4.2 Extremum lié : contraintes affines

Considérons un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ et une fonctionnelle $J\colon E \to \mathbb{R}$. Considérons de plus un autre espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$, une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et un point $y \in F$. On s'intéresse au problème aux contraintes affines suivant :

$$\inf_x \{ J(x) \mid x \in \mathcal{K} \}, \tag{P_A}$$

où $\mathcal{K} \coloneqq \{ x \in E \mid \Phi(x) \coloneqq T(x) - y = 0_F \} = \Phi^{-1}(\{0_F\})$ avec $\Phi\colon E \to F$ une application affine continue de E dans F. Supposons que $y \in \operatorname{Im} T$, c'est-à-dire que :

$$\exists\, u \in E \text{ t.q. } T(u) = y, \;\; \textit{i.e.} \text{ t.q. } \Phi(u) = 0_F.$$

Introduisons alors

$$E_0 \coloneqq \operatorname{Ker} T \subset E$$

de telle sorte que $\forall\, v \in E_0$: $\Phi(u+v) = T(u+v) - y = T(u) + T(v) - y = \Phi(u) + T(v) = 0_F$, c'est-à-dire :

$$\Phi(u+v) = 0_F \Leftrightarrow v \in E_0.$$

On munit E_0 de la norme induite par la norme de E, *i.e.* $\|v\|_{E_0} = \|v\|_E$ pour tout $v \in E_0$. Considérons alors la fonctionnelle

$$\begin{array}{rccl} F\colon & E_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & F(v) \coloneqq J(u+v), \end{array}$$

de telle sorte que le problème (P_A) est équivalent au problème sans contraintes suivant :

$$\inf_{v \in E_0} F(v). \tag{P}$$

Ici, "équivalent" signifie : $\bar{x} \coloneqq u + \bar{v}$ solution de $(P_A) \Leftrightarrow \bar{v}$ solution de (P).

Remarque 2.10. Si on restreint la recherche de la solution de (P_A) à un ouvert $U \subset E$, c'est-à-dire si on s'intéresse au problème

$$\inf_x \{J(x) \mid x \in \mathcal{K}\}, \quad \mathcal{K} \coloneqq \Phi^{-1}(\{0_F\}) \cap U,$$

alors ce problème est équivalent au problème sans contraintes :

$$\inf_v \{F(v) \mid v \in U_0 \subset E_0\},$$

où $U_0 \coloneqq E_0 \cap U$ est un ouvert de E_0. On est alors précisément dans le cadre de l'item v) de la définition 2.11.

Écrit de manière schématique, les conditions nécessaires et suffisantes d'ordres 1 et 2 pour le problème avec contraintes affines (P_A) sont donc :

$$\begin{array}{rl} \text{(CN1)} & F'(\bar{v}) = J'(\bar{x}) = 0_{E_0'}, \ \ \textit{i.e.} \ \ \forall\, h \in E_0 \ : \ J'(\bar{x}) \cdot h = 0\ ; \\ \text{(CN2)} & \forall\, h \in E_0 \ : \ F''(\bar{v}) \cdot (h,h) = J''(\bar{x}) \cdot (h,h) \geq 0\ ; \\ \text{(CS2)} & \exists\, \alpha > 0 \ \ \text{t.q.} \ \ \forall\, h \in E_0 \ : \ F''(\bar{v}) \cdot (h,h) = J''(\bar{x}) \cdot (h,h) \geq \alpha \|h\|_{E_0}^2\ ; \end{array} \tag{2.7}$$

où bien sûr $\bar{x} \coloneqq u + \bar{v}$ doit être un point admissible, c'est-à-dire $\bar{x} \in \mathcal{K}$.

Application au calcul des variations. Nous avons déjà utilisé sans le savoir les CN1 et CN2 pour le problème classique du calcul des variations, *i.e.* pour le problème (PCV), que l'on peut écrire sous la forme :

$$\inf_x \{J(x) \mid x \in \mathcal{K}\},$$

avec $\mathcal{K} \coloneqq \Phi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^{2n}}\}) \cap U$, où $\Phi\colon E \to \mathbb{R}^{2n}$ est définie par

$$\Phi(x) \coloneqq (x(a) - A, x(b) - B) \eqqcolon T(x) - y \coloneqq (x(a), x(b)) - (A, B),$$

et où $U \coloneqq \mathcal{C}^1([a\,,b], \Omega)$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $E \coloneqq (\mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$. On rappelle que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et donc U est un ouvert de E. Le problème (PCV) est alors équivalent au problème sans contraintes :

$$\inf_v \{F(v) \mid v \in U_0 \subset E_0\},$$

où $E_0 \coloneqq \mathcal{C}^1_0([a\,,b], \mathbb{R}^n) = \operatorname{Ker} T$ et $U_0 \coloneqq E_0 \cap U = \mathcal{C}^1_0([a\,,b], \Omega)$. Pour trouver l'équation de Euler-Lagrange, cf. théorème 2.5, nous avons utilisé la CN1 :

$$\forall\, h \in E_0 \ : \ J'(\bar{x}) \cdot h = 0$$

et pour trouver la condition de Legendre, cf. théorème 2.10, nous avons utilisé la CN2

$$\forall\, h \in E_0 \ : \ J''(\bar{x}) \cdot h^2 \geq 0.$$

2.4.3 "Two-norm discrepancy"

Dans la section 2.5 sur les conditions de Jacobi, nous allons utiliser des conditions suffisantes du deuxième ordre. Cependant, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant, la condition suffisante (CS2) présentée ci-avant n'est pas toujours utile en pratique pour des problèmes en dimension infinie, notamment en calcul des variations.

Exemple 2.8. On s'intéresse au problème suivant :

$$\inf_x \left\{ J(x) \coloneqq \int_0^1 \sin(\dot{x}(t))\, \mathrm{d}t \;\middle|\; x \in \mathcal{C}^1([0\,,1],\mathbb{R}),\ x(0)=0,\ x(1) = -\frac{\pi}{2} \right\},$$

dont le lagrangien associé est donné par $L(t,x,u) \coloneqq \sin(u)$. Il est facile de voir que la fonction définie par $\bar{x}(t) \coloneqq -\frac{\pi}{2}t$ est la solution globale du problème et vérifie

$$J(\bar{x}) = -1.$$

La CN1 est bien vérifiée car :

$$\forall\, h \in \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \;:\; J'(\bar{x})\cdot h = \int_0^1 \cos(\dot{\bar{x}}(t))\, \dot{h}(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

La CN2 est aussi vérifiée car :

$$\forall\, h \in \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \;:\; J''(\bar{x})\cdot h^2 = -\int_0^1 \sin(\dot{\bar{x}}(t))\, \dot{h}(t)^2\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \dot{h}(t)^2\, \mathrm{d}t = \|\dot{h}\|^2_{L^2} \geq 0,$$

où pour toute fonction mesurable (sous-entendu pour la mesure de Lebesgue) $f\colon [0\,,1] \to \mathbb{R}$, on a défini :

$$\|f\|_{L^2} \coloneqq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

de telle sorte que $\|\cdot\|_{L^2}$ est la norme usuelle associée à l'espace de Hilbert $L^2([0\,,1],\mathbb{R})$ des (classes de) fonctions mesurables de $[0\,,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de carrés intégrables, c'est-à-dire :

$$L^2([0\,,1],\mathbb{R}) \coloneqq \{ f\colon [0\,,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^2} < +\infty \}.$$

En revanche, la CS2 d'ellipticité de la dérivée seconde $J''(\bar{x})$ n'est pas vérifiée car on a dans notre exemple :

$$\|\dot{h}\|_{L^2} \leq \|\dot{h}\|_\infty \leq \|h\|_{\mathcal{C}^1} = \|h\|_\infty + \|\dot{h}\|_\infty,$$

mais pas l'inverse, c'est-à-dire, il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\cancel{\|\dot{h}\|_{L^2} \geq \alpha\|h\|_{\mathcal{C}^1}}$. □

Remarque 2.11. Dans l'exemple précédent, nous ne pouvons pas montrer que $\bar{x}$ est un minimum local strict en utilisant la condition suffisante d'ordre deux d'ellipticité de $J''(\bar{x})$. Cependant, il est aisé de montrer que $\bar{x}$ est un minimum local à l'aide de la condition suffisante de semi-définie positivité de $J''(x)$ pour tout $x \in B(\bar{x},\eta)$, pour un certain $\eta > 0$. Il suffit de prendre $\eta \coloneqq \pi/2$ par exemple (la preuve est laissée en exercice).

Poursuivons avec l'exemple précédent. Nous avons donc

$$\forall\, h \in \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \;:\; J''(\bar{x})\cdot h^2 = \|\dot{h}\|^2_{L^2}.$$

Ce qui est gênant ici, c'est qu'il y a dans le terme de gauche h tandis que dans celui de droite, on retrouve $\dot{h}$. On aimerait avoir quelque chose qui ressemble à :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h \in \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \subset H_0 \;\;:\;\; J''(\bar{x}) \cdot h^2 \geq \alpha \|h\|^2_{H_0},$$

où $\|\cdot\|_{H_0}$ est une norme à définir sur un espace H_0 lui-même à définir. Introduisons pour cela l'espace de Sobolev $H^1([0\,,1],\mathbb{R}) := W^{1,2}([0\,,1],\mathbb{R})$ des fonctions f dans $L^2([0\,,1],\mathbb{R})$ qui s'écrivent [8] sous la forme $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$ avec $g \in L^2([0\,,1],\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$H^1([0\,,1],\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2([0\,,1],\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists\, g \in L^2([0\,,1],\mathbb{R}) \text{ t.q. } f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s \right\}.$$

Il est important de rappeler que l'application g est unique (modulo le fait que l'on identifie deux fonctions intégrables qui coïncident p.p. = presque partout = sauf sur un ensemble négligeable). Ainsi défini, nous avons

$$\mathcal{C}^1([0\,,1],\mathbb{R}) \subset H^1([0\,,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0([0\,,1],\mathbb{R}),$$

autrement dit, toute fonction de H^1 (sous-entendu $H^1([0\,,1],\mathbb{R})$) est continue mais possède moins de régularité que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, les fonctions de H^1 ne possède pas de dérivée continue puisqu'elles ne sont même pas dérivables en tout point $t \in [0\,,1]$. Les fonctions de H^1 sont dérivables presque partout sur $[0\,,1]$ et on a :

$$\forall\, f \in H^1 \;\;:\;\; f'(t) = g(t) \text{ p.p. sur } \;[0\,,1].$$

On fera donc clairement l'abus de notation $f' = g$ et puisque l'on dérive par rapport à la variable t qui correspond au "temps" pour nous, on écrira plutôt

$$\dot{f} = g.$$

Remarque 2.12. Nous pouvons voir g comme une dérivée en un sens plus faible que d'ordinaire. Cependant, si g est de classe $\mathcal{C}^0$, alors la notion de dérivée faible coïncide avec celle de dérivée classique et f est alors de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, nous pouvons voir les fonctions de $H^1 = W^{1,2}$ comme des primitives de fonctions L^2, de la même manière que nous pouvons voir les fonctions de $\mathcal{C}^1$ comme des primitives de fonctions $\mathcal{C}^0$, et nous avons pour rappel :

$$\mathcal{C}^1([0\,,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0([0\,,1],\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad H^1([0\,,1],\mathbb{R}) \subset L^2([0\,,1],\mathbb{R}).$$

Il nous faut maintenant une norme sur H^1. Il existe deux possibilités équivalentes suivant si l'on considère la norme usuelle de $W^{1,2}$:

$$\|f\|_{W^{1,2}} := \|f\|_{L^2} + \|\dot{f}\|_{L^2},$$

ou si l'on considère la norme

$$\|f\|_{H^1} := \left(\|f\|^2_{L^2} + \|\dot{f}\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

induite par le produit scalaire usuel sur H^1 :

$$(f_1 \,|\, f_2)_{H^1} := (f_1 \,|\, f_2)_{L^2} + \left(\dot{f}_1 \,|\, \dot{f}_2\right)_{L^2},$$

où $(\cdot\,|\,\cdot)_{L^2}$ est le produit scalaire usuel sur L^2. Les deux normes ainsi définies sont équivalentes et on peut noter que l'espace H^1 muni du produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)_{H^1}$ forme un espace de Hilbert.

8. On rappelle qu'en réalité, $W^{1,2}([0\,,1],\mathbb{R})$ est un ensemble de classes de fonctions et non de fonctions. Nous ne donnons pas ici sa définition, mais plutôt une propriété. En effet, d'après [2, Théorème VIII.2], il existe un unique représentant continu pour toute classe dans $W^{1,2}([0\,,1],\mathbb{R})$ que nous appelons ici f.

Exemple 2.9 (suite). Revenons à l'exemple précédent. Nous avons donc

$$\forall\, h \in \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \ : \ J''(\bar{x}) \cdot h^2 = \|\dot{h}\|^2_{L^2}.$$

Rappelons que le problème classique du calcul des variations est un problème d'optimisation avec des contraintes affines et nous avons vu dans la section 2.4.2 comment définir un problème équivalent sans contraintes. Appliquons les notations du cadre général de la section 2.4.2 à cet exemple. Nous nous intéressons donc au problème :

$$\inf_x \left\{ J(x) \mid x \in \mathcal{K} \right\},$$

avec $\mathcal{K} = \Phi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^2}\}) \subset E$, $E = \mathcal{C}^1([0\,,1],\mathbb{R})$ et où $\Phi(x) = T(x) - y$ définit les contraintes affines. On a dans cet exemple $T(x) = (x(0), x(1))$ et $y = (0, -\pi/2)$. Pour obtenir de nouvelles conditions suffisantes d'optimalité locale, nous venons d'introduire ci-avant l'espace $H \coloneqq H^1([0\,,1],\mathbb{R})$ de telle sorte que $E \subset H$. Dans l'optique de se ramener à un problème sans contraintes, nous avions introduit

$$E_0 = E \cap \operatorname{Ker} T = \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}).$$

Toujours dans cette optique, nous introduisons :

$$H_0 \coloneqq H \cap \operatorname{Ker} T = H^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ h \in H^1([0\,,1],\mathbb{R}) \;\middle|\; h(a) = h(b) = 0 \right\},$$

de telle sorte que

$$E_0 \subset H_0.$$

L'idée générale est d'introduire un espace vectoriel normé plus grand que l'espace de travail. Ici, en raison des contraintes affines, l'espace de travail est E_0 et nous avons introduit H_0 (nous utilisons cette notation pour mettre un cadre général).

Remarque 2.13. Pour être un peu plus précis, l'application linéaire continue [9] T appartient à $\mathcal{L}(H,\mathbb{R}^2)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}^2)$ comme dans la section 2.4.2. Nous devons tenir compte ici du rôle du nouvel espace H.

L'espace H_0 est muni de la norme induite par celle de H, *i.e.* $\|h\|_{H_0} = \|h\|_H$ et d'après le lemme 2.2 (ci-après), on a :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h \in E_0 = \mathcal{C}^1_0([0\,,1],\mathbb{R}) \subset H_0 \ : \ J''(\bar{x}) \cdot h^2 = \|\dot{h}\|^2_{L^2} \geq \alpha \|h\|^2_{H_0}. \tag{2.8}$$

Ceci est l'objectif voulu. Car, d'après la proposition 2.18 (ci-après), on peut conclure que $\bar{x}$ est un minimum local (faible) strict, c'est-à-dire :

$$\exists\, \eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, x \in B_E(\bar{x},\eta) \cap \mathcal{K},\ x \neq \bar{x} \ : \ J(\bar{x}) < J(x),$$

où $B_E(\bar{x},\eta) \coloneqq \{x \in E \mid \|x - \bar{x}\|_E < \eta\}$. □

Remarque 2.14. C'est cette idée d'utiliser deux normes, $\|\cdot\|_E$ pour la différentiabilité et $\|\cdot\|_H$ pour la ***condition de croissance*** $J''(\bar{x}) \cdot h^2 \geq \alpha \|h\|^2_H$ (qui remplace la condition d'ellipticité), que l'on nomme "two-norm discrepancy".

Lemme 2.2. *Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Alors,*

$$\exists\, c > 0 \quad t.q. \quad \forall\, h \in H^1_0([a\,,b],\mathbb{R}) \ : \ \|h\|_{H^1_0} \leq c\, \|\dot{h}\|_{L^2}.$$

9. L'application T est bien continue car il existe $C > 0$ t.q. $\|T(x)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|x\|_\infty \leq C\|x\|_{H^1}$ puisque H_1 s'injecte de manière continue dans $\mathcal{C}^0$, cf. [2]. On peut noter que puisque T est continue, alors H^1_0 est un fermé de l'espace de Hilbert H^1, donc lui-même un Hilbert, si on le munit du produit scalaire de H^1.

► Soit $h \in H_0^1([a\,,b],\mathbb{R})$. Alors, puisque $h(a)=0$ et d'après l'inégalité de Hölder [2] :

$$h(t)^2 = \left(\int_a^t \dot{h}(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \leq (t-a)\int_a^t \dot{h}(s)^2\,\mathrm{d}s \leq (b-a)\int_a^b \dot{h}(s)^2\,\mathrm{d}s = (b-a)\|\dot{h}\|_{L^2}^2.$$

Ainsi,

$$\|h\|_{L^2}^2 = \int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t \leq (b-a)^2\|\dot{h}\|_{L^2}^2,$$

donc

$$\|h\|_{H_0^1}^2 = \|h\|_{H^1}^2 = \|h\|_{L^2}^2 + \|\dot{h}\|_{L^2}^2 \leq (1+(b-a)^2)\|\dot{h}\|_{L^2}^2$$

et la conclusion suit avec $c := \sqrt{1+(b-a)^2} > 0$. ■

Proposition 2.18 – Condition suffisante d'ordre 2 généralisée (CS2G)

Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(H,\|\cdot\|_H)$ deux espaces vectoriels normés t.q. $E \hookrightarrow H$, i.e. $E\subset H$ et $\exists\, c>0$ t.q. $\forall\, h\in E$: $\|h\|_H \leq c\,\|h\|_E$. Soit $J\colon U\subset E \to \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable sur U un ouvert de E et soit $\bar{x}\in U$ un point critique de J. Si

$$\exists\,\alpha>0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h\in E \;:\; J''(\bar{x})\cdot h^2 \geq \alpha\,\|h\|_H^2, \tag{2.9}$$

alors $\bar{x}$ est un minimum local strict (sous-entendu pour la norme $\|\cdot\|_E$).

► La formule de Taylor appliquée à J nous donne pour $h\in E$ t.q. $\bar{x}+h\in U$:

$$J(\bar{x}+h)-J(\bar{x}) = \frac{1}{2!}J''(\bar{x})\cdot h^2 + \|h\|_E^2\,\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{\|h\|_E\to 0}|\varepsilon(h)| = 0.$$

Par hypothèse :

$$J(\bar{x}+h)-J(\bar{x}) \geq \frac{\alpha}{2}\|h\|_H^2 + \varepsilon(h)\,\|h\|_E^2 \geq \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\varepsilon(h)}{c}\right)\|h\|_H^2$$

et donc il existe $\eta>0$ t.q. pour tout $h\neq 0_E$ t.q. $\|h\|_E<\eta$ on ait $\bar{x}+h\in U$ et

$$J(\bar{x}+h)-J(\bar{x}) > 0.$$

Autrement dit, $\bar{x}$ est un minimum local strict (sous-entendu pour la norme $\|\cdot\|_E$). ■

Remarque 2.15. Dans la proposition précédente, il suffit de faire l'hypothèse $E\subset H$. L'hypothèse d'injection continue n'est pas nécessaire car elle est automatiquement vérifiée dès lors que l'on a l'équation (2.9). En effet, $J''(\bar{x})$ est continue car J est deux fois dérivable en $\bar{x}$ et donc, il existe une constante $K>0$ telle que

$$\forall\, h\in E \;:\; |J''(\bar{x})\cdot h^2| \leq K\,\|h\|_E^2$$

et finalement puisque (2.9) est vérifiée, on obtient automatiquement :

$$\forall\, h\in E \;:\; \alpha\,\|h\|_H^2 \leq J''(\bar{x})\cdot h^2 \leq K\,\|h\|_E^2, \tag{2.10}$$

et la constante $c := \sqrt{K/\alpha}$ fait l'affaire pour l'hypothèse de la proposition précédente.

Remarque 2.16. Dans le cas particulier où $E = H$ et $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_H$, on retrouve la condition suffisante d'ordre deux (CS2) classique, cf. conditions (2.6). Introduisons dans ce cas la quantité $\|h\| := \sqrt{J''(\bar{x}) \cdot h^2}$. Il est alors intéressant de noter (ce que l'on aurait pu mentionner avant) que $\|\cdot\|$ définit une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_E$, cf. l'équation (2.10), mais que cette nouvelle norme est induite par le produit scalaire

$$(h \,|\, k) := J''(\bar{x}) \cdot (h, k).$$

L'ensemble E munit du produit scalaire $(\cdot \,|\, \cdot)$ est donc un espace préhilbertien (un espace de Hilbert si E est un espace vectoriel normé complet, *i.e.* si E est un espace de Banach), on dit alors que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé ***homéomorphe*** à un espace préhilbertien. On arrive alors à la conclusion remarquable que si E n'est pas homéomorphe à un espace préhilbertien, alors la condition d'ellipticité ne peut jamais être vérifiée, quel que soit le point critique ! Et donc dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser une nouvelle norme pour obtenir la condition de croissance.

Remarque 2.17. La proposition 2.18 donne une nouvelle condition suffisante d'ordre deux d'optimalité locale pour un minimum libre, *i.e.* dans le cadre d'un problème d'optimisation sans contraintes. Bien entendu, nous pouvons donner une version de cette proposition dans le cas de contraintes affines de manière similaire à ce qui a été présenté dans la section 2.4.2 (voir les conditions (2.7)) :

$$\text{(CS2G)} \quad \exists\, \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h \in E_0 \;:\; J''(\bar{x}) \cdot h^2 \geq \alpha\, \|h\|^2_{H_0},$$

où $E_0 := E \cap \operatorname{Ker} T$, $H_0 := H \cap \operatorname{Ker} T$ et où $\bar{x} \in \mathcal{K}$. Cette version ayant longuement était détaillée dans cette section, cf. notamment l'équation (2.8).

2.5 Condition de Jacobi

Nous allons pour simplifier la présentation, supposer $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, *i.e.* $x(t) \in \mathbb{R}$ et le lagrangien L de classe $\mathcal{C}^3$. On rappelle la dérivée seconde de la fonction coût :

$$J''(x) \cdot h^2 = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}[t]\, h(t)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}[t]\, \dot{h}(t) h(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}[t]\, \dot{h}(t)^2 \right) \mathrm{d}t,$$

où $[t] := (t, x(t), \dot{x}(t))$. Soit $\bar{x}$ une BC-extrémale qui satisfait la condition de Legendre stricte :

$$\forall\, t \in [a\,, b] \;:\; \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) > 0.$$

Alors, d'après le théorème 2.7, $\bar{x} \in \mathcal{C}^3(]a\,, b[, \mathbb{R})$, donc en particulier $\bar{x} \in \mathcal{C}^2(]a\,, b[, \mathbb{R})$ mais comme nous l'avons déjà vu (cf. le début de la section 2.3), nous pouvons prolonger $\ddot{\bar{x}}$ de manière continue aux extrémités, c'est-à-dire $\bar{x} \in \mathcal{C}^2([a\,, b], \mathbb{R})$ (nous n'avons pas besoin de plus de régularité). Puisque L est $\mathcal{C}^3$, alors

$$t \mapsto \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$$

est $\mathcal{C}^1$, et à l'aide d'une simple intégration par partie, on peut écrire :

$$\int_a^b 2\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}[t]\, \dot{h}(t) h(t)\, \mathrm{d}t = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}[t] \right) h(t)^2\, \mathrm{d}t,$$

où maintenant $[t] \coloneqq (t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$. Ceci nous permet de réécrire la dérivée seconde sous la forme :

$$J''(\bar{x}) \cdot h^2 = \int_a^b \left(Q(t)\, h(t)^2 + R(t)\, \dot{h}(t)^2 \right) \mathrm{d}t,$$

avec

$$Q(t) \coloneqq \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}[t] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x}[t] \right) \quad \text{et} \quad R(t) \coloneqq \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}[t].$$

Sous l'hypothèse L de classe $\mathcal{C}^3$ et sous la condition de Legendre stricte, on a $Q \in \mathcal{C}^0([a\,,b], \mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{C}^1([a\,,b], \mathbb{R})$.

Remarque 2.18. Rappelons que la condition de Legendre est une condition nécessaire d'optimalité locale faible. Sous l'hypothèse Legendre stricte, nous allons pouvoir donner une nouvelle condition nécessaire d'ordre deux, que nous appellerons la condition de Jacobi. Pour cela, nous allons utiliser une nouvelle fois la CN2 :

$$\forall\, h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b], \mathbb{R}) \;:\; J''(\bar{x}) \cdot h^2 \geq 0.$$

Nous montrerons ensuite que sous la condition de Jacobi "stricte", la CS2 (généralisée) suivante est automatiquement vérifiée :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, h \in \mathcal{C}_0^1([a\,,b], \mathbb{R}) \;:\; J''(\bar{x}) \cdot h^2 \geq \alpha\, \|h\|_{H_0^1}^2.$$

Nous aurons alors une condition suffisante d'ordre deux plus simple à vérifiée.

Bibliographie

[1] J. F. Bonnans & A. Shapiro, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, doi : 10.1007/978-1-4612-1394-9, Springer-Verlag New York 2000, XVIII, 601. ↩ 23.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1987. ↩ 26, 27 et 28.

[3] F. Clarke, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Graduate Texts in Mathematics 264, doi : 10.1007/978-1-4471-4820-3_14, Springer-Verlag London 2013. ↩ 3, 12, 13 et 18.

[4] O. Cots, *Calcul différentiel*, Notes de cours, 2019. ↩ 9, 10, 13 et 20.

[5] J.-B. Hiriart-Urruty, *L'optimisation*, Que sais-je. Presses Universitaires de France, 1996. ↩ 22.

[6] H. Schättler & , U. Ledzewicz, *Geometric optimal control : theory, methods and examples*, vol **38** of *Interdisciplinary applied mathematics*, Springer Science & Business Media, New York (2012), xiv+640. ↩ 6, 10, 12, 14 et 17.

[7] H. J. Sussmann and J. C. Willems, *300 years of optimal control : from the Brachistochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems, (1997), pp. 32–44. ↩ 1.

Index