Jędrzej Wydra

Logika Prawnicza

Ćwiczenia

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Prawa i Administracji

Prawo

Spis treści

Skrypt został przygotowany na podstawie podręcznika prof. Patryasa „Elementy logiki dla prawników”, wydanie drugie, wydawnictwo *Ars boni et aequi*.

Rozdział 1. Rachunek zdań

Podrozdział 1.1. Zdanie w sensie logicznym

Definicja 1. (zdanie w sensie logicznym)
Zdaniem w sensie logicznym jest wyrażenie, które jest prawdziwe, albo fałszywe.

Przykład 1.
Co do zasady, zdania oznajmujące są zdaniami w sensie logicznym.

Przykład 2.
Pytania i normy nie są zdaniami w sensie logicznym.

Podrozdział 1.2. Zmienne zdaniowe

Definicja 2. (zmienna zdaniowa)
Zmienną zdaniową jest takie wyrażenie, za które wolno wstawiać dowolne zdanie.

Objaśnienie 1.
Jako zmiennych zdaniowych używa się małych liter: p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1 itd. Indeksy można stosować według potrzeb. Historycznie utarło się, że stosuje się litery począwszy od p jednak nie ma żadnych przeszkód, aby stosować wcześniejsze litery alfabetu.

Podrozdział 1.3. Spójniki

Definicja 3. (spójnik logiczny)
Spójnikiem logicznym nazywamy wyrażenie o tej własności, że po dołączeniu do niego zdania otrzymuje się nowe zdanie, którego wartość logiczna zależy wyłącznie od wartości logicznej zdania dołączonego.

Uwaga 1.
Zdania dołączone nazywamy argumentami spójnika.

Definicja 4. (negacja)
Spójnik negacji oznaczamy symbolem $\sim$. W języku potocznym (nieformalnym) zwykle odpowiada mu zwrot „nie jest tak, że". Własności negacji opisuje tabelka:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Definicja 5. (zdanie zanegowane)
Argument negacji nazywamy zdaniem zanegowanym.

Definicja 6. (zdania wzajem sprzeczne)
Zdanie zanegowane oraz powstała z niego negacja nazywane są parą zdań wzajem sprzecznych.

Definicja 7. (koniunkcja)
Spójnik koniunkcji oznaczamy symbolem $\wedge$. W języku potocznym (nieformalnym) zwykle odpowiada mu słowo „i". Własności koniunkcji opisuje tabelka:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Definicja 8. (czynniki)
Argumenty koniunkcji nazywamy czynnikami.

Definicja 9. (alternatywa)
Spójnik alternatywy oznaczamy symbolem $\vee$. W języku potocznym (nieformalnym) zwykle odpowiada mu słowo „lub”. Własności alternatywy opisuje tabelka:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Definicja 10. (składniki)
Argumenty alternatywy nazywamy składnikami.

Definicja 11. (implikacja)
Spójnik implikacji oznaczamy symbolem $\rightarrow$. W języku potocznym (nieformalnym) zwykle odpowiada mu wyrażenie „jeśli ___, to ___”. Własności implikacji opisuje tabelka:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Definicja 12. (poprzednik i następnik)
Pierwszy argument implikacji nazywamy poprzednikiem, drugi zaś następnikiem.

Definicja 13. (równoważność)
Spójnik równoważności oznaczamy symbolem $\equiv$. W języku potocznym (nieformalnym) zwykle odpowiada mu wyrażenie „wtedy i tylko wtedy gdy”. Własności równoważności opisuje tabelka:

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Definicja 14. (człony)
Argumenty równoważności nazywamy członami.

Definicja 15. (zdanie proste)
Zdanie, w którym nie występuje żaden spójnik nazywamy zdaniem prostym.

Definicja 16. (zdanie złożone)
Zdanie, w którym występuje przynajmniej jeden spójnik nazywamy zdaniem złożonym.

Podrozdział 1.4. Wyrażenia rachunku zdań

Definicja 17. (wyrażenie rachunku zdań)
Wyrażenie rachunku zdań powstaje na podstawie jednej z poniższych reguł:
1) Każda zmienna zdaniowa jest wyrażeniem rachunku zdań;
2) Jeżeli sekwencja postaci A jest wyrażeniem rachunku zdań, to także sekwencja postaci $\sim(A)$ jest wyrażeniem rachunku zdań;
3) Jeżeli sekwencje postaci A oraz B są wyrażeniami rachunku zdań, to także sekwencje postaci $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ oraz $A \equiv B$ są wyrażeniami rachunku zdań.

Podrozdział 1.5. Pojęcie tezy rachunku zdań

Definicja 18. (teza rachunku zdań)
Wyrażenie rachunku zdań, które przy dowolnym podstawieniu za występujące w nich zmienne tworzy zdanie prawdziwe nazywamy tezą rachunku zdań.

Podrozdział 1.6. Formalizacja rachunku zdań

Definicja 19. (aksjomaty Łukasiewicza)
Aksjomatami Łukasiewicza nazywamy następujące tezy rachunku zdań:
Ł1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
Ł2. $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$
Ł3. $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Definicja 20. (aksjomaty Hilberta-Bernaysa)
Aksjomatami Hilberta-Bernaysa nazywamy następujące tezy rachunku zdań:
H1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
H2. $\big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
H3. $p \wedge q \rightarrow p$
H4. $p \wedge q \rightarrow q$
H5. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$
H6. $p \rightarrow p \vee q$
H7. $q \rightarrow p \vee q$
H8. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q))$
H9. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
H10. $(p \equiv q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
H11. $(p \equiv q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
H12. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q))$

Twierdzenie 1.
System aksjomatów Łukasiewicza oraz system aksjomatów Hilberta-Bernaysa są sobie równoważne.

Reguła 1. (reguła podstawiania)
Jeżeli wyrażenie postaci A jest tezą rachunku zdań, to wówczas wyrażenie B, powstałe z A przez konsekwentne podstawnie za występujące w nim zmienne dowolnego wyrażenia rachunku zdań, również jest tezą rachunku zdań (to wyrażenie B).

Reguła 2. (reguła odrywania)
Jeżeli wyrażenie postaci $A \rightarrow B$ jest tezą rachunku zdań, oraz wyrażenie postaci A również jest tezą rachunku zdań, to wówczas wyrażenie postaci B również jest tezą rachunku zdań.

<u>Reguła 3. (reguła zastępowania)</u>
Jeżeli wyrażenie postaci A jest tezą rachunku zdań, to także wyrażenie B jest tezą rachunku zdań, gdy powstało z A poprzez zastąpienie występujących w nim wyrażeń na podstawie poniższych definicji:
D1. $C \wedge D := \sim(C \rightarrow \sim D)$
D2. $C \vee D := \sim C \rightarrow D$
D3. $C \equiv D := (C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow C)$

<u>Definicja 21. (dowód)</u>
Dowodem wyrażenia W na gruncie aksjomatów Ak oraz reguł R jest ciąg wyrażeń, takich, że każde z nich jest albo jednym z aksjomatów Ak, albo powstaje z wcześniejszych wyrażeń poprzez zastosowanie reguł R, przy czym ostanim wyrażeniem tego ciągu jest wyrażenie W.

Rozdział 2. Wprowadzenie do rachunku predykatów

Podrozdział 2.1. Terminy jednostkowe

Definicja 22. (imię własne)
Wyrażenie oznaczające pewne indywiduum w celu wyróżnienia go spośród innych obiektów nazywamy jego imieniem własnym.

Przykład 3.
Imionami własnymi będą „Michał", „Poznań", „Warta".

Definicja 23. (deskrypcja)
Wyrażenie będące charakterystyką odnoszącą się do co najwyżej jednego obiektu, które przeto oznacza co najwyżej jeden obiekt nazywamy deskrypcją.

Przykład 4.
Deskrypcjami będą „ojciec Michała", „najstarszy brat Anieli", „największy dzielnik liczby 100".

Definicja 24. (terminy jednostkowe)
Imiona własne i deskrypcje łącznie nazywamy terminami jednostkowymi.

Podrozdział 2.2. Funktory

Definicja 25. (funktor n-argumentowy)
Funktorem n-argumentowym nazywamy wyrażenie, które z n-tką terminów jednostkowych daje termin jednostkowy.

Objaśnienie 2.
W szczególności wyróżniamy funktory jednoargumentowe; w deskrypcji „ojciec Michała" słowo „ojciec" jest funktorem. Wyrażenie „ojciec ___" jest funktorem.
Wyróżniamy również funktory dwuargumentowe; w deskrypcji „ostatni król Polski" słowo „ostatni" jest funktorem dwuargumentowym. Wyrażenie „ostatni ___ ___" jest funktorem.
Funktory od trzech i więcej argumentów również istnieją, ale pełnią mniej doniosłą rolę.

Podrozdział 2.3. Zmienne indywiduowe

Definicja 26. (zmienna indywiduowa)
Wyrażeniem, za które wolno podstawić dowolny termin jednostkowy nazywamy zmienną indywiduową.

Objaśnienie 3.
Jako zmiennych indywiduowych używa się małych liter: x, y, z itd. Indeksy można stosować według potrzeb, zarówno górne jak i dolne. Historycznie utarło się, że stosuje się litery końcowe litery alfabetu, jednak nie ma żadnych przeszkód, aby stosować wcześniejsze litery alfabetu. Stosowanie tzw. „iksów" i „igreków" zapoczątkował Kartezjusz.

Definicja 27. (term)
1) Każda zmienna indywiduowa jest termem;
2) Jeżeli wyrażenia $w_1, \dots, w_n$ są termami, to termem jest także każde wyrażenie postaci $f(w_1, \dots, w_k)$, gdzie f jest funktorem k-argumentowym.

Podrozdział 2.4. Predykaty

Definicja 28. (predykat n-argumentowy)
Predykatem n-argumentowym nazywamy wyrażenie, które z n-tką terminów jednostkowych daje zdanie.

Objaśnienie 4.
Podobnie jak z funktorami, w szczególności wyróżniamy predykaty jednoargumentowe; w zdaniu „Nikola śpi" słowo „śpi" jest predykatem. Wyrażenie „___ śpi" jest predykatem.
Wyróżniamy również predykaty dwuargumentowe; w zdaniu „Poznań leży nad Wartą" zwrot „leży nad" jest predykatem dwuargumentowym. Wyrażenie „___ leży nad ___" jest predykatem.
Predykaty od trzech i więcej argumentów również istnieją, ale pełnią mniej doniosłą rolę.

Podrozdział 2.5. Zdania atomowe a zdania molekularne

Definicja 29. (formuła zdaniowa atomowa)
Wyrażenie powstałe przez stosowne dołączenie do n-argumentowego predykatu n-tki termów nazywamy formułą zdaniową atomową.

Definicja 30. (zdanie atomowe)
Wyrażenie powstałe przez stosowne dołączenie do n-argumentowego predykatu n-tki terminów jednostkowych nazywamy zdaniem atomowym.

Definicja 31. (zdanie molekularne)
Zdanie zbudowane z jednego lub więcej zdań atomowych i co najmniej jednego spójnika nazywa się zdaniem molekularnym.

Podrozdział 2.6. Kwantyfikatory

Definicja 32. (duży kwantyfikator)
Dużym kwantyfikatorem nazywamy wyrażenie postaci „dla każdego x", „każdy x" lub „wszystkie x". Duży kwantyfikator – według notacji polskiej – oznacza się symbolem:

$$\bigwedge_{x}$$

Natomiast według notacji międzynarodowej symbolem:

$$\forall x$$

(Odwrócone „A" od „all").

Definicja 33. (mały kwantyfikator)
Małym kwantyfikatorem nazywamy wyrażenie postaci „istnieje takie x, że", „dla pewnego x" lub „istnieje x". Mały kwantyfikator – według notacji polskiej – oznacza się symbolem:

$$\bigvee_{x}$$

Natomiast według notacji międzynarodowej symbolem:

$$\exists x$$

(Odwrócone „E" od „exist").

Definicja 34. (zasięg kwantyfikatora)
Wyrażenie występujące tuż za kwantyfikatorem nazywamy jego zasięgiem.

<u>Definicja 35. (zmienna związana)</u>
Zmienną występującą w zasięgu odnoszącego się do niej kwantyfikatora nazywamy zmienną związaną.

Objaśnienie 5.

$$\bigvee_{x} P(x, y)$$

x jest zmienną związaną, y nie jest zmienną związaną.

<u>Definicja 36. (zmienna wolna)</u>
Zmienną niebędącą zmienną związaną nazywamy zmienną wolną.

<u>Definicja 37. (formuła zdaniowa rachunku predykatów)</u>
Formuła zdaniowa rachunku predykatów powstaje na podstawie jednej z poniższych reguł:
1) Każda formuła zdaniowa atomowa jest formułą zdaniową rachunku predykatów;
2) Jeżeli sekwencja postaci A jest formułą zdaniową rachunku predykatów, to także sekwencja postaci $\sim(A)$ jest formułą zdaniową rachunku predykatów;
3) Jeżeli sekwencje postaci A oraz B są formułami zdaniowymi rachunku predykatów, to także sekwencje postaci $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ oraz $A \equiv B$ są formułami zdaniowymi rachunku predykatów;
4) Jeżeli sekwencja postaci A jest formułą zdaniową rachunku predykatów, to także sekwencje postaci $\bigvee_x A$ oraz $\bigwedge_x A$ są formułami zdaniowymi rachunku predykatów.

<u>Definicja 38. (zdanie rachunku predykatów)</u>
Formułę zdaniową rachunku predykatów niezawierającą zmiennych wolnych nazywamy zdaniem rachunku predykatów.

Podrozdział 2.7. Twierdzenia rachunku predykatów

Twierdzenie 1. (prawo zastępowania dużego kwantyfikatora przez mały kwantyfikator)

$$\bigwedge_x (A) \rightarrow \bigvee_x (A)$$

Twierdzenie 2. (prawo przestawiania dużych kwantyfikatorów)

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (A) \equiv \bigwedge_y \bigwedge_x (A)$$

Twierdzenie 3. (prawo przestawiania małych kwantyfikatorów)

$$\bigvee_x \bigvee_y (A) \equiv \bigvee_y \bigvee_x (A)$$

Twierdzenie 4. (prawo przestawiania małego kwantyfikatora z dużym)

$$\bigvee_x \bigwedge_y (A) \rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x (A)$$

Twierdzenie 5. (prawo negowania dużego kwantyfikatora)

$$\sim \bigwedge_x (A) \equiv \bigvee_x \sim (A)$$

Twierdzenie 6. (prawo negowania małego kwantyfikatora)

$$\sim \bigvee_x (A) \equiv \bigwedge_x \sim (A)$$

Twierdzenie 7. (prawo zastępowania dużego kwantyfikatora)

$$\bigwedge_x (A) \equiv \sim \bigvee_x \sim (A)$$

Twierdzenie 8. (prawo zastępowania małego kwantyfikatora)

$$\bigvee_x (A) \equiv \sim \bigwedge_x \sim (A)$$

Twierdzenie 9. (prawo rozkładania dużego kwantyfikatora względem implikacji)

$$\bigwedge_x (A \rightarrow B) \rightarrow \left(\bigwedge_x (A) \rightarrow \bigwedge_x (B) \right)$$

Twierdzenie 10. (prawo rozkładania małego kwantyfikatora względem implikacji)

$$\bigwedge_x (A \rightarrow B) \rightarrow \left(\bigvee_x (A) \rightarrow \bigvee_x (B) \right)$$

Twierdzenie 11. (prawo rozkładania dużego kwantyfikatora względem koniunkcji)

$$\bigwedge_x (A \land B) \equiv \left(\bigwedge_x (A) \land \bigwedge_x (B) \right)$$

<u>Twierdzenie 12. (prawo rozkładania małego kwantyfikatora względem alternatywy)</u>

$$\bigvee_x (A \vee B) \equiv \left(\bigvee_x (A) \vee \bigvee_x (B)\right)$$

<u>Twierdzenie 13. (prawo składania dużego kwantyfikatora względem alternatywy)</u>

$$\left(\bigwedge_x (A) \vee \bigwedge_x (B)\right) \rightarrow \bigwedge_x (A \vee B)$$

<u>Twierdzenie 14. (prawo rozkładania małego kwantyfikatora względem koniunkcji)</u>

$$\bigvee_x (A \wedge B) \rightarrow \left(\bigvee_x (A) \wedge \bigvee_x (B)\right)$$

<u>Twierdzenie 15. (prawo ekstensjonalności dla dużego kwantyfikatora)</u>

$$\bigwedge_x (A \equiv B) \rightarrow \left(\bigwedge_x (A) \equiv \bigwedge_x (B)\right)$$

<u>Twierdzenie 16. (prawo ekstensjonalności dla małego kwantyfikatora)</u>

$$\bigwedge_x (A \equiv B) \rightarrow \left(\bigvee_x (A) \equiv \bigvee_x (B)\right)$$

Rozdział 3. Zbiory

Podrozdział 3.1. Zbiór w sensie dystrybutywnym

Definicja 39. (zbiór w sensie kolektywnym)
Pewną całość, składającą się z przedmiotów będących jej częściami, nazywamy zbiorem w sensie kolektywnym.

Przykład 5.
Zbiorem w sensie kolektywnym będzie księgozbiór czy las. Książki są jednocześnie elementem i częścią księgozbioru, podobnie drzewa są jednocześnie elementami i częściami lasu.

Definicja 40. (zbiór w sensie dystrybutywnym)
Zespół pewnych obiektów wyróżnionych w określony sposób nazywamy zbiorem w sensie dystrybutywnym. (Zbiory w sensie dystrybutywnym przyjęło się oznaczać wielkimi literami alfabetu).

Definicja 41. (elementy zbioru)
Obiekty, o których mowa w definicji 40., nazywamy elementami zbioru.

Definicja 42. (zbiór skończony)
Zbiór w sensie dystrybutywnym, którego liczbę elementów można opisać za pomocą liczby naturalnej, nazywamy zbiorem skończonym. (W kontraście do zbiorów nieskończonych, które mają nieskończenie wiele elementów).

Objaśnienie 6.
Zbiorami w sensie dystrybutywnym są przede wszystkim zbiory liczbowe. Choćby zbiór liczb naturalnych. Liczba 1 jest elementem zbioru liczb naturalnych, ale nie jest częścią czegoś, co moglibyśmy nazwać „liczby naturalne". Liczba 1 po prostu jest liczbą naturalną.
Wyróżnienie, o którym mowa w definicji 40., nie musi być ani konsekwentne, ani wynikające z jakichś faktów, prawideł czy prawd przyrody, świata, czy czegokolwiek innego. Jeśli z jakichś względów chcemy mówić o zespole obiektów, na który składa się: liczba 1, drozd, film „Spider-Man", książka „Raport Pelikana", pomidor i słowo „zaiste", to będziemy mieć do czynienia ze zbiorem sześcioelementowym: {1, film „Spider-Man", książka „Raport Pelikana", pomidor, słowo „zaiste"}. (Przyjęło się, aby zbiory skończone oznaczać nawiasami klamrowymi, poprzez wypisanie pomiędzy nimi wszystkich elementów).

Objaśnienie 7.
Abstrahując od tego, czym jest numerowanie, i pozostawiając to intuicji, zbiorem skończonym możemy nazwać taki obiekt, którego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi, a sam ten obiekt nie istnieje w fizycznym świecie.

Przykład 6.
Elementy księgozbioru czy lasu możemy ponumerować, ale istnieje coś takiego jak księgozbiór, czy las. Elementy zbioru {1, film „Spider-Man", książka „Raport Pelikana", pomidor, słowo „zaiste} również możemy ponumerować, ale on sam nigdzie nie istnieje, pomimo tego, że jego elementy jak najbardziej istnieją.

Definicja 43. (należeć do zbioru)
Jeśli jakiś obiekt e jest elementem danego zbioru Z, to wówczas mówimy, że e należy do zbioru Z i oznaczamy to następująco: $e \in Z$.

Definicja 44. (zbiór pusty)
Zbiorem pustym nazywamy zbiór spełniający warunek:

$$\bigwedge_x \sim(x \in Z).$$

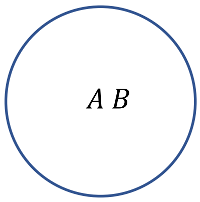
Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$. Innymi słowy, zbiorem pustym jest zbiór nieposiadający elementów.

Definicja 45. (zbiór n-elementowy)
Zbiór posiadający n elementów nazywamy zbiorem n-elementowym.

Podrozdział 3.2. Stosunki między zbiorami

Definicja 46. (identyczność zbiorów)
Zbiory są identyczne, gdy mają dokładnie takie same elementy. Czyli

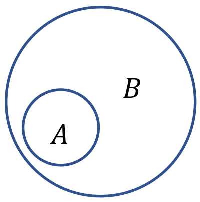
$$(A = B) \equiv \bigwedge_x (x \in A \equiv x \in B).$$



Definicja 47. (inkluzja zbiorów)
Zbiór A zawiera się w zbiorze B (inkluzja), gdy wszystkie elementy zbioru A są również elementami zbioru B. Czyli

$$(A \subset B) \equiv \bigwedge_x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

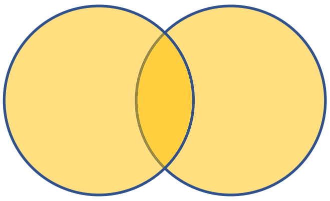
Inkluzję przyjęło się oznaczać symbolem $\subset$.



Podrozdział 3.3. Działania na zbiorach

Definicja 48. (suma zbiorów)
Zbiór C będący sumą zbiorów A i B, zawiera wszystkie elementy obu tych zbiorów i nic poza tym. Oznaczamy: $C = A \cup B$. Czyli:

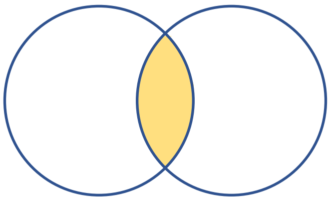
$$\bigwedge_x \big((x \in A \cup B) \equiv (x \in A \lor x \in B)\big).$$



<u>Definicja 49. (iloczyn zbiorów)</u>
Zbiór C będący iloczynem zbiorów A i B, zawiera wszystkie elementy, które są wspólne obu tym zbiorom i nic poza tym. Oznaczamy: $C = A \cap B$. Czyli:

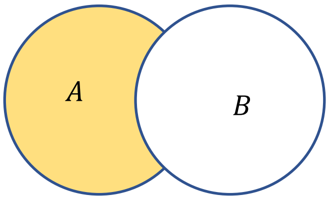
$$\bigwedge_x \big((x \in A \cap B) \equiv (x \in A \wedge x \in B)\big).$$

Zamiast słowa „iloczyn" zamiennie można używać wyrażeń: „przekrój" lub „część wspólna".



<u>Definicja 50. (różnica zbiorów)</u>
Zbiór C będący różnicą zbiorów A i B, zawiera tylko te elementy, które zawiera zbiór A, ale których nie zawiera zbiór B. Oznaczamy: $C = A - B$. Czyli

$$\bigwedge_x \Big((x \in A - B) \equiv \big(x \in A \wedge \sim(x \in B)\big)\Big).$$



<u>Definicja 51. (krzyżowanie się zbiorów)</u>
Zbiory A i B krzyżują się, gdy $A \cap B \neq \emptyset$.

<u>Definicja 52. (wykluczanie się zbiorów)</u>
Zbiory A i B wykluczają się, gdy $A \cap B = \emptyset$.

<u>Definicja 53. (podzbiór)</u>
Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, gdy $A \subset B$.

<u>Definicja 54. (nadzbiór)</u>
Zbiór B jest nadzbiorem zbioru A, gdy $A \subset B$.

Podrozdział 3.4. Podział zbioru

Definicja 55. (podział zbioru)
Ciąg zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy (skończonym) podziałem zbioru B, gdy spełnione są następujące warunki:
1) $\bigwedge_i (A_i \subset B)$, czyli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru B;
2) $\bigwedge_{i \neq j} \left(A_i \cap A_j = \emptyset\right)$, czyli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wykluczają się (są rozłączne, wymóg rozłączności);
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B$, czyli wszystkie zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ łącznie dają zbiór B (wymóg zupełności).

Definicja 56. (podział dychotomiczny)
Podział zbioru B na dwa podzbiory A_1 i A_2 nazywamy podziałem dychotomicznym.

Definicja 57. (podział naturalny)
Podział jest naturalny, gdy elementy poszczególnych podzbiorów (członów podziału) są bardziej podobne do elementów tego samego członu, niż do elementów różnych członów.

Definicja 58. (podział sztuczny)
Podział jest sztuczny, gdy nie jest naturalny.

Definicja 59. (klasyfikacja)
Podział zbioru jest klasyfikacją jednostopniową.

Definicja 60. (klasyfikacja n-stopniowa)
Z klasyfikacją n-stopniową mamy do czynienia, gdy dany zbiór jest podzielony (pierwszy stopień), następnie każdy z członów podziału również jest podzielony (drugi stopień), następnie każdy z członów drugiego stopnia również jest podzielony (trzeci stopień) i tak dalej do n-tego stopnia.

Podrozdział 3.5. Twierdzenia rachunku zbiorów

Twierdzenie 1.

$$(Z \subset Y \wedge Y \subset X) \rightarrow Z \subset X$$

Twierdzenie 2.

$$Z \subset (Z \cup X)$$

Twierdzenie 3.

$$Z \cup (Y \cup X) = (Z \cup Y) \cup X$$

Twierdzenie 4.

$$(Z \subset X \wedge Y \subset X) \rightarrow (Z \cup Y) \subset X$$

Twierdzenie 5.

$$(Z \cap Y) \subset Z$$

Twierdzenie 6.

$$Z \cap (Y \cap X) = (Z \cap Y) \cap X$$

Twierdzenie 7.

$$(Z \subset Y \wedge Z \subset X) \rightarrow Z \subset (Y \cap X)$$

Twierdzenie 8.

$$Z \cap (Y \cup X) = (Z \cap Y) \cup (Z \cap X)$$

Twierdzenie 9.

$$Z \cup (Y \cap X) = (Z \cup Y) \cap (Z \cup X)$$

Twierdzenie 10.

$$Z - Y \subset Z$$

Twierdzenie 11.

$$Z \subset Y \rightarrow (X - Y \subset X - Z)$$

Twierdzenie 12.

$$Z - (Y \cup X) = (Z - Y) \cap (Z - X)$$

Twierdzenie 13.

$$Z - (Y \cap X) = (Z - Y) \cup (Z - X)$$

Twierdzenie 14.

$$Z \cup Z' = U$$

Twierdzenie 15.

$$Z \cap Z' = \emptyset$$

Twierdzenie 16.

$$(Z \cup Y)' = Z' \cap Y'$$

Twierdzenie 17.

$$(Z \cap Y)' = Z' \cup Y'$$

Rozdział 4. Relacje

Podrozdział 4.1. Cechy i relacje wieloczłonowe

Definicja 61. (relacja n-członowa)
Zbiór ciągów elementów $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ takich, że $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \ldots, a_n \in A_n$, w których uwzględniamy kolejność elementów, nazywamy relacją n-członową R i oznaczamy $R(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$. Gdy $n = 2$ wówczas można stosować oznaczenie aRb. Mówimy, że relacja R zachodzi między $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

Definicja 62. (człon)
Obiekty $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ między, którymi zachodzi relacja R nazywamy członami relacji.

Definicja 63. (cecha)
Relację jednoczłonową R nazywamy cechą.

KONWENCJA
Od teraz przez słowo „relacja" będziemy rozumieli wyłącznie relacje dwuczłonowe.

Definicja 64. (dziedzina relacji R)
Niech X będzie zbiorem argumentów relacji R definiowanym następująco:

$$\bigwedge_x \left(x \in X \equiv \bigvee_y xRy \right).$$

Wówczas dziedzina D relacji R jestem pewnym (jednym) zbiorem spełniającym warunek:

$$X \subset D.$$

Definicja 65. (przeciwdziedzina relacji R)
Niech Y będzie zbiorem wartości relacji R definiowanym następująco:

$$\bigwedge_y \left(y \in Y \equiv \bigvee_x xRy \right).$$

Wówczas przeciwdziedzina $\overline{D}$ relacji R jestem pewnym (jednym) zbiorem spełniającym warunek:

$$Y \subset \overline{D}.$$

Definicja 66. (pole relacji R)
Polem P relacji R jest zbiór spełniający warunek:

$$P = D \cup \overline{D}.$$

Podrozdział 4.2. Własności relacji

Definicja 67. (relacja zwrotna)
Relacja jest zwrotna, gdy:

$$\bigwedge_x xRx.$$

Definicja 68. (relacja niezwrotna)
Relacja jest niezwrotna, gdy:

$$\sim \bigwedge_x xRx.$$

Definicja 69. (relacja przeciwzwrotna)
Relacja jest przeciwzwrotna, gdy:

$$\bigwedge_x \sim(xRx).$$

Definicja 70. (relacja symetryczna)
Relacja jest symetryczna, gdy:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (xRy \rightarrow yRx).$$

Definicja 71. (relacja niesymetryczna)
Relacja jest niesymetryczna, gdy:

$$\sim \bigwedge_x \bigwedge_y (xRy \rightarrow yRx).$$

Definicja 72. (relacja przeciwsymetryczna)
Relacja jest przeciwsymetryczna, gdy:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \big(xRy \rightarrow \sim(yRx)\big).$$

Definicja 73. (relacja przechodnia)
Relacja jest przechodnia, gdy:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz).$$

Definicja 74. (relacja nieprzechodnia)
Relacja jest nieprzechodnia, gdy:

$$\sim \bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz).$$

Definicja 75. (relacja przeciwprzechodnia)
Relacja jest przeciwprzechodnia, gdy:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z \big(xRy \wedge yRz \rightarrow \sim(xRz)\big).$$

Definicja 76. (relacja spójna)
Relacja jest spójna, gdy

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx).$$

Podrozdział 4.3. Szczególne relacje

Definicja 77. (relacja odwrotna)
Relacja R_1 jest odwrotna (jest konwersem) do relacji R_2, gdy:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (xR_1y \equiv yR_2x).$$

Definicja 78. (iloczyn relacji)
Relacja R_1 jest iloczynem względnym relacji R_2 i R_3, gdy:
$$\bigwedge_x \bigwedge_y \left(xR_1y \equiv \bigvee_z (xR_2z \wedge zR_3y) \right).$$

Definicja 79. (relacja równoważności)
Relacja jest relacją równoważności, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Definicja 80. (klasa abstrakcji)
Klasą abstrakcji A elementu x względem relacji R jest zbiór spełniający warunek:
$$y \in A \equiv xRy.$$
Klasę abstrakcji zwykle oznacza się jako $A = [x]_R$.

Definicja 81. (relacja częściowego porządku)
Relacja jest relacją częściowego porządku, gdy jest zwrotna, przechodnia i przeciwsymetryczna.

Definicja 82. (porządek liniowy)
Relacja jest liniowym porządkiem, gdy jest zwrotna, przechodnia, przeciwsymetryczna i spójna.

Definicja 83. (ostry porządek liniowy)
Relacja jest ostrym liniowym porządkiem, gdy jest przeciwzwrotna, przechodnia, przeciwsymetryczna i spójna.

Definicja 84. (funkcja)
Relacja jest funkcją, gdy spełnia warunek:
$$\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z).$$

Definicja 85. (zbiór argumentów funkcji)
Dziedzina funkcji jest równa ze zbiorem wartości funkcji.

Definicja 86. (zbiór wartości funkcji)
Zbiór wartości funkcji jest podzbiorem przeciwdziedziny funkcji.

Rozdział 5. Język

Podrozdział 5.1. Reguły języka

Definicja 87. (reguły wyznaczające słownik)
Reguły, które określają jakie słowa należą do języka, nazywamy regułami wyznaczającymi słownik.

Definicja 88. (reguły gramatyczne)
Reguły, które określają jak ze słów konstruować wyrażenia bardziej złożone, nazywamy regułami gramatycznymi. Reguły gramatyczne dzielą się na reguły wyznaczające kategorie gramatyczne i reguły ustalające sposób budowania wyrażeń złożonych z wyrażeń o określonych kategoriach gramatycznych.

Definicja 89. (reguły formowania)
Reguły ustalające słownik i reguły gramatyczne składają się na reguły formowania.

Definicja 90. (reguły wyznaczające kategorie gramatyczne)
Reguły, które określają jakie słowa można stosować zamiennie tak, aby otrzymać poprawne zdanie należące do języka, nazywamy regułami wyznaczającymi kategorie gramatyczne.

Definicja 91. (kategoria gramatyczna)
Zbiór wszystkich wyrażeń określonego języka, które pozwalają się wzajemnie zastępować, nazywamy kategorią gramatyczną tego języka.

Definicja 92. (reguły dedukcyjne)
Reguły wyróżniające pewne zdania języka jako prawdziwe nazywamy regułami dedukcyjnymi. Reguły dedukcyjne dzielą się na reguły aksjomatyczne i reguły inferencyjne.

Definicja 93. (teza języka)
Zdania wyróżnione przez reguły dedukcyjne nazywamy tezami języka.

Definicja 94. (reguły aksjomatyczne)
Reguły aksjomatyczne wyróżniają pewne zdania jako prawdziwe niezależnie od innych zdań.

Definicja 95. (aksjomaty)
Tezy języka, które zostały wyróżnione przez reguły aksjomatyczne, nazywamy aksjomatami.

Definicja 96. (reguły inferencyjne)
Reguły inferencyjne wskazują jakie zdania języka są prawdziwe na podstawie prawdziwości innych zdań.

Definicja 97. (tautologia)
Zdania powstałe z tez logicznych nazywamy tautologiami.

Definicja 98. (kontrteza i kontrtautologia)
Negacja tezy języka i negacja tautologii nazywają się odpowiednio kontrtezą i kontrtautologią języka.

Definicja 99. (reguły denotowania)
Reguły określające do czego odnosi się dane wyrażenie nazywamy regułami denotowania.

Definicja 100. (reguły ustalające uniwersum i uniwersum języka)
Reguły określające zbiór wszystkich tych obiektów, do których odnoszą się reguły denotowania, nazywamy regułami ustalającymi uniwersum. Sam ten zbiór zaś uniwersum języka.

Definicja 101. (reguły odniesienia przedmiotowego)
Reguły denotowania i reguły ustalające uniwersum składają się na reguły odniesienia przedmiotowego.

Definicja 102. (reguły prawdziwościowe)
Reguły ustalające warunki prawdziwości zdań nazywamy regułami prawdziwościowymi.

Definicja 103. (aksjomaty)
Tezy języka, które zostały wyróżnione przez reguły aksjomatyczne, nazywamy aksjomatami.

Podział reguł języka
1. Reguły składniowe
   a. Reguły formowania
      i. Reguły ustalające słownik
      ii. Reguły gramatyczne
         - Reguły ustalające kategorie gramatyczne
         - Reguły ustalające sposób budowania wyrażeń złożonych
   b. Reguły dedukcyjne
      i. Reguły aksjomatyczne
      ii. Reguły inferencyjne
2. Reguły semantyczne
   a. Reguły odniesienia przedmiotowego
      i. Reguły ustalające uniwersum
      ii. Reguły denotowania
   b. Reguły prawdziwościowe

Podrozdział 5.2. Pojęcie języka

Definicja 104. (równoważność/równoznaczność zdań)
Zdanie A jest równoważne zdaniu B, gdy równoważność $A \equiv B$ jest prawdziwa.

Definicja 105. (równoważność/równoznaczność wyrażeń niezdaniowych)
Wyrażenie niezdaniowe A jest równoważne wyrażeniu niezdaniowemu B, gdy biorąc zbiór wszystkich zdań, w których te wyrażenia mogą występować (nazwijmy ten zbiór Z), prawdziwa będzie równoważność:

$$\bigwedge_{X \in Z} (X(A) \equiv X(B))$$

Definicja 106. (język)
Wszystko, co zawiera zbiory: reguł ustalających słownik, reguł gramatycznych, reguł aksjomatycznych, reguł inferencyjnych, reguł ustalających uniwersum i reguł denotowania nazywamy językiem.

Definicja 107. (metajęzyk)
Język odnoszący się do wyrażeń języka nazywamy metajęzykiem tego języka. W kontraście, język wówczas odnosi się do stanów rzeczy.

Definicja 108. (fragment języka)
Język powstały przez wzięcie podzbiorów zbiorów reguł języka nazywamy fragmentem tego języka.

Podrozdział 5.3. Wynikanie logiczne

Definicja 109. (wynikanie logiczne, racja i następstwo)
Ze zdań $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ wynika logicznie zdanie Z_{n+1}, gdy tezą języka jest wyrażenie:

$$Z_1 \land Z_2 \land \dots \land Z_n \rightarrow Z_{n+1}$$

Wyrażenie $Z_1 \land Z_2 \land \dots \land Z_n$ nazywamy wówczas racją, a wyrażenie Z_{n+1} następstwem.

Rozdział 6. Definicje

Podrozdział 6.1. Definicje metajęzykowe i przedmiotowe

Definicja 110. (definicje metajęzykowe)
Definicję danego terminu języka sformułowaną w jego metajęzyku nazywamy definicją metajęzykową.

Definicja 111. (definicje przedmiotowa)
Definicję sformułowaną w języku, z którego pochodzi termin definiowany, nazywamy definicją przedmiotową.

Podrozdział 6.2. Definicje równościowe

Definicja 112. (definicja równościowa)
Definicję o postaci równoważności albo identyczności nazywamy definicją równościową. Definicja równościowa składa się z definiendum, definiensa i spójki definicyjnej.

Definicja 113. (definiendum)
Zwrot zawierający wyrażenie definiowane nazywamy definiendum.

Definicja 114. (definiens)
Zwrot zawierający wyrażenie wyjaśniające znaczenie zwrotu definiowanego nazywamy definiensem.

Definicja 115. (spójka definicyjna)
Zwrot łączący definiendum i definiens nazywamy spójką definicyjną.

Definicja 116. (definicja przez abstrakcję)
Definicję, określającą własność obiektu poprzez wskazanie obiektów do niego identycznych pod pewnym względem, nazywamy definicją przez abstrakcję.

Podrozdział 6.3. Definicje nierównościowe

Definicja 117. (definicja cząstkowa)
Definicję o postaci implikacji nazywamy definicją cząstkową.

Definicja 118. (definicja indukcyjna)
Definicję, polegającą na wskazaniu najprostszego obiektu (warunek wstępny) posiadającego pewną własność oraz zasady jak ta własność przenosi się na inne obiekty (warunek indukcyjny), nazywamy definicją przez indukcję.

Podrozdział 6.4. Definicje sprawozdawcze

Definicja 119. (definicja sprawozdawcza)
Definicję, która informuje o znaczeniu terminu definiowanego w danym języku, nazywamy definicją sprawozdawczą.

Podrozdział 6.4. Definicje projektujące

Definicja 120. (definicja konstrukcyjna)
Definicję, nadającą pewnemu wyrażeniu nowe znaczenie na przyszłość (nie licząc się z jego dotychczasowym znaczeniem), nazywamy definicją konstrukcyjną.

Definicja 121. (definicja regulująca)
Definicję, nadającą pewnemu wyrażeniu nowe znaczenie na przyszłość, jednak liczącą się z dotychczasowym jego znaczeniem, nazywamy definicją regulującą.

Definicja 122. (definicja projektująca)
Definicje konstrukcyjne i definicje regulujące łącznie nazywamy definicjami projektującymi.

Podrozdział 6.5. Definicje perswazyjne

Definicja 123. (definicja perswazyjna)
Definicję, polegającą na zmienianiu określonej postawy ocennej odbiorcy, nazywamy definicją perswazyjną.

Definicja 124. (definicja ostensywna)
Definicję, polegającą na pokazaniu do jakiego przedmiotu (bądź ich typu) definiowane słowo się odnosi, nazywamy definicją ostensywną.

Podrozdział 6.6. Błędy w definiowaniu

Definicja 125. (definicja poprawna)
Definicja jest poprawna, gdy nie zawiera żadnego z błędów definiowania.

Błąd 1. (błąd nieznane przez nieznane)
Wyraz definiowany jest z reguły nieznany dla odbiorcy. Jeżeli odbiorca nie zna również słów, które go wyjaśniają, wówczas definicja została błędnie sformułowana dla tego odbiorcy.

Błąd 2. (błędne koło bezpośrednie)
Jeżeli wyraz definiowany jest wyjaśniony przez samego siebie, wówczas definicja jest błędnie sformułowana.

Błąd 3. (błędne koło pośrednie)
Jeżeli definicja odwołuje się do innej definicji, która to odwołuje się do tej pierwszej, to jest źle sformułowana.

Błąd 4. (błąd sprzeczności)
Jeżeli poprzez dołączenie definicji do języka można wyprowadzić tezę sprzeczną z tezami tego języka, to ta definicja jest błędna.

Błąd 5. (błąd nieadekwatności)
Jeżeli definicja nienależycie informuje o znaczeniu definiowanego w niej wyrażenia, to taka definicja jest błędna.

Błąd 6. (definicja za szeroka, nieadekwatna)
Jeżeli definicja odwołuje się do obiektów, do których wyrażenie definiowane się odnosi i jeszcze jakichś innych, to jest błędna.

Błąd 7. (definicja za wąska, nieadekwatna)
Jeżeli definicja nie odwołuje się do wszystkich obiektów, do których odnosi się wyraz definiowany, to jest błędna.

<u>Błąd 8. (definicja krzyżująca, nieadekwatna)</u>
Definicja $R(x) \equiv P(x)$ jest błędna, gdy tezą języka nie jest ani $\bigwedge_x \big(R(x) \rightarrow P(x)\big)$, ani $\bigwedge_x (P(x) \rightarrow R(x))$, ale tezą jest $\bigvee_x \big(P(x) \wedge R(x)\big)$.

Rozdział 7. Wnioskowania

Podrozdział 7.1. Wnioskowanie jako rozumowanie

Definicja 126. (wnioskowanie, przesłanka, wniosek)
Rozumowanie, w którym na podstawie pewnych zdań (przesłanek) dochodzi się do nowego zdania (wniosku), nazywamy wnioskowaniem.

Definicja 127. (przesłanka entymematyczna)
Przesłankę niewyrażoną wprost w rozumowaniu (przesłankę domyślną) nazywamy przesłanką entymematyczną.

Definicja 128. (wnioskowanie entymematyczna)
Wnioskowanie zawierające przesłanki entymematyczne nazywamy wnioskowaniem entymematycznym.

Podrozdział 7.2. Wnioskowania dedukcyjne

Definicja 129. (wnioskowanie dedukcyjne)
Wnioskowanie wyrażające wynikanie logiczne (definicja 109.) nazywamy wnioskowaniem dedukcyjnym.

Definicja 130. (wnioskowanie niededukcyjne)
Wnioskowanie niebędące wnioskowaniem dedukcyjnym nazywamy wnioskowaniem niededukcyjnym.

Podrozdział 7.3. Wnioskowania redukcyjne

Definicja 131. (wnioskowanie redukcyjne)
Wnioskowanie, którego przesłanki wynikają logicznie z wniosku lub pewne tylko przesłanki wynikają logicznie z koniunkcji pozostałych przesłanek i wniosku, nazywamy wnioskowaniem redukcyjnym.

Podrozdział 7.4. Wnioskowanie przez indukcję

Definicja 132. (wnioskowanie indukcyjne/wnioskowanie przez indukcję)
Wnioskowanie, w którym ze zdań szczegółowych dochodzi się do ogólnego wniosku, nazywamy wnioskowaniem indukcyjnym.

Podrozdział 7.5. Wnioskowania przez analogię

Definicja 133. (wnioskowanie przez analogię pierwszego typu)
Wnioskowanie, w którym od przesłanek przypisującym wskazanym obiektom jakiegoś rodzaju cechę dochodzi się do wniosku, przypisującego tę cechę kolejnemu obiektowi tego rodzaju, nazywamy wnioskowaniem przez analogię pierwszego typu.

Definicja 134. (wnioskowanie przez analogię drugiego typu)
Wnioskowanie, w którym od przesłanek wyrażających podobieństwo pod względem pewnych cech dwóch wskazanych obiektów dochodzi się do wniosku, wyrażającego podobieństwo tych obiektów pod względem jeszcze jednej cechy, nazywamy wnioskowaniem przez analogię drugiego typu.

Podrozdział 7.6. Błędy wnioskowania

Definicja 135. (poprawne wnioskowanie)
Wnioskowanie jest poprawne, gdy nie zawiera błędów wnioskowania.

Błąd 1. (błąd materialny)
Wnioskowanie zawiera błąd materialny, gdy przynajmniej jedna z jego przesłanek jest fałszywa.

Błąd 2. (błąd bezpodstawności)
Wnioskowanie zawiera błąd bezpodstawności, gdy przynajmniej jedna z przesłanek nie znajduje uzasadnienia w doświadczeniu lub wiedzy podmiotu dokonującego wnioskowania.

Błąd 3. (błędne koło)
Wnioskowanie zawiera błędne koło, gdy wniosek jest jednocześnie jedną z przesłanek.

Błąd 4. (błąd formalny)
Wnioskowanie zawiera błąd formalny, gdy według podmiotu dokonującego wnioskowania jest ono wnioskowaniem dedukcyjnym, a w istocie wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.