二次规划（`QP`）样条路径优化

1. 目标函数

1.1 获得路径长度

路径定义在station-lateral坐标系中。**s**的变化区间为从车辆当前位置点到默认路径的长度。

1.2 获得样条段

将路径划分为**n**段，每段路径用一个多项式来表示。

1.3 定义样条段函数

每个样条段 ***i*** 都有沿着参考线的累加距离d_i。每段的路径默认用5介多项式表示。

$$l = f_i(s) = a_{i0} + a_{i1} \cdot s + a_{i2} \cdot s^2 + a_{i3} \cdot s^3 + a_{i4} \cdot s^4 + a_{i5} \cdot s^5 (0 \leq s \leq d_i)$$

1.4 定义每个样条段优化目标函数

$$cost = \sum_{i=1}^{n} \left(w_1 \cdot \int_0^{d_i} (f_i')^2(s) ds + w_2 \cdot \int_0^{d_i} (f_i'')^2(s) ds + w_3 \cdot \int_0^{d_i} (f_i''')^2(s) ds \right)$$

1.5 将开销（cost）函数转换为 `QP` 公式

`QP` 公式:

$$\begin{aligned} minimize & \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot H \cdot x + f^T \cdot x \\ s.t. \qquad & LB \leq x \leq UB \\ & A_{eq}x = b_{eq} \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

下面是将开销（cost）函数转换为 `QP` 公式的例子:

$$f_i(s) = \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix}$$

且

$$f_i'(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2s & 3s^2 & 4s^3 & 5s^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix}$$

且

$$f_i'(s)^2 = \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2s \\ 3s^2 \\ 4s^3 \\ 5s^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2s & 3s^2 & 4s^3 & 5s^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix}$$

然后得到,

$$\int_0^{d_i} f_i'(s)^2 ds = \int_0^{d_i} \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2s \\ 3s^2 \\ 4s^3 \\ 5s^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2s & 3s^2 & 4s^3 & 5s^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} ds$$

从聚合函数中提取出常量得到,

$$\int_0^{d_i} f'(s)^2 ds = \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \end{vmatrix} \cdot \int_0^{d_i} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2s \\ 3s^2 \\ 4s^3 \\ 5s^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2s & 3s^2 & 4s^3 & 5s^4 \end{vmatrix} ds \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \end{vmatrix} \cdot \int_0^{d_i} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2s & 3s^2 & 4s^3 & 5s^4 \\ 0 & 2s & 4s^2 & 6s^3 & 8s^4 & 10s^5 \\ 0 & 3s^2 & 6s^3 & 9s^4 & 12s^5 & 15s^6 \\ 0 & 4s^3 & 8s^4 & 12s^5 & 16s^6 & 20s^7 \\ 0 & 5s^4 & 10s^5 & 15s^6 & 20s^7 & 25s^8 \end{vmatrix} ds \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix}$$

最后得到,

$$\int_0^{d_i} f_i'(s)^2 ds = \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_i & d_i^2 & d_i^3 & d_i^4 & d_i^5 \\ 0 & d_i^2 & \frac{4}{3}d_i^3 & \frac{6}{4}d_i^4 & \frac{8}{5}d_i^5 & \frac{10}{6}d_i^6 \\ 0 & d_i^3 & \frac{6}{4}d_i^4 & \frac{9}{5}d_i^5 & \frac{12}{6}d_i^6 & \frac{15}{7}d_i^7 \\ 0 & d_i^4 & \frac{8}{5}d_i^5 & \frac{12}{6}d_i^6 & \frac{16}{7}d_i^7 & \frac{20}{8}d_i^8 \\ 0 & d_i^5 & \frac{10}{6}d_i^6 & \frac{15}{7}d_i^7 & \frac{20}{8}d_i^8 & \frac{25}{9}d_i^9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix}$$

请注意我们最后得到一个6介的矩阵来表示5介样条插值的衍生开销。
应用同样的推理方法可以得到2介，3介样条插值的衍生开销。

2 约束条件

2.1 初始点约束

假设第一个点为 (s_0, l_0), (s_0, l'_0) and (s_0, l''_0)，其中l_0 , l'_0 and l''_0表示横向的偏移，并且规划路径的起始点的第一，第二个点的衍生开销可以从$f_i(s)$, $f'_i(s)$, $f_i(s)''$计算得到。

将上述约束转换为 `QP`约束等式，使用等式：

$$A_{eq}x = b_{eq}$$

下面是转换的具体步骤：

$$f_i(s_0) = \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & s_0^3 & s_0^4 & s_0^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} = l_0$$

且

$$f'_i(s_0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2s_0 & 3s_0^2 & 4s_0^3 & 5s_0^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} = l'_0$$

且

$$f''_i(s_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \times 2s_0 & 4 \times 3s_0^2 & 5 \times 4s_0^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} = l''_0$$

其中，i是包含s_0的样条段的索引值。

2.2 终点约束

和起始点相同，终点(s_e, l_e) 也应当按照起始点的计算方法生成约束条件。

将起始点和终点组合在一起，得出约束等式为：

$$\begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & s_0^3 & s_0^4 & s_0^5 \\ 0 & 1 & 2s_0 & 3s_0^2 & 4s_0^3 & 5s_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \times 2s_0 & 4 \times 3s_0^2 & 5 \times 4s_0^3 \\ 1 & s_e & s_e^2 & s_e^3 & s_e^4 & s_e^5 \\ 0 & 1 & 2s_e & 3s_e^2 & 4s_e^3 & 5s_e^4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \times 2s_e & 4 \times 3s_e^2 & 5 \times 4s_e^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_0 \\ l'_0 \\ l''_0 \\ l_e \\ l'_e \\ l''_e \end{vmatrix}$$

2.3 平滑节点约束

该约束的目的是使样条的节点更加平滑。假设两个段seg_k 和seg_{k+1}互相连接，且seg_k的累计值s为s_k。计算约束的等式为:

$$f_k(s_k) = f_{k+1}(s_0)$$

下面是计算的具体步骤:

$$\begin{vmatrix} 1 & s_k & s_k^2 & s_k^3 & s_k^4 & s_k^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ a_{k4} \\ a_{k5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & s_0^3 & s_0^4 & s_0^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,0} \\ a_{k+1,1} \\ a_{k+1,2} \\ a_{k+1,3} \\ a_{k+1,4} \\ a_{k+1,5} \end{vmatrix}$$

然后

$$\begin{vmatrix} 1 & s_k & s_k^2 & s_k^3 & s_k^4 & s_k^5 & -1 & -s_0 & -s_0^2 & -s_0^3 & -s_0^4 & -s_0^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ a_{k4} \\ a_{k5} \\ a_{k+1,0} \\ a_{k+1,1} \\ a_{k+1,2} \\ a_{k+1,3} \\ a_{k+1,4} \\ a_{k+1,5} \end{vmatrix} = 0$$

将s_0 = 0代入等式。

同样地，可以为下述等式计算约束等式:

$$f'_k(s_k) = f'_{k+1}(s_0)$$
$$f''_k(s_k) = f''_{k+1}(s_0)$$
$$f'''_k(s_k) = f'''_{k+1}(s_0)$$

2.4 点采样边界约束

在路径上均匀的取样**m**个点，检查这些点上的障碍物边界。将这些约束转换为 `QP` 约束不等式，使用不等式:

$$Ax \geq b$$

首先基于道路宽度和周围的障碍物找到点 (s_j, l_j)的下边界$l_{lb,j}$，且$j \in [0, m]$。计算约束的不等式为:

$$\begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & s_0^3 & s_0^4 & s_0^5 \\ 1 & s_1 & s_1^2 & s_1^3 & s_1^4 & s_1^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & s_m & s_m^2 & s_m^3 & s_m^4 & s_m^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} l_{lb,0} \\ l_{lb,1} \\ \dots \\ l_{lb,m} \end{vmatrix}$$

同样地，对上边界$l_{ub,j}$，计算约束的不等式为：

$$\begin{vmatrix} -1 & -s_0 & -s_0^2 & -s_0^3 & -s_0^4 & -s_0^5 \\ -1 & -s_1 & -s_1^2 & -s_1^3 & -s_1^4 & -s_1^5 \\ \dots & \dots - & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -s_m & -s_m^2 & -s_m^3 & -s_m^4 & -s_m^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{vmatrix} \geq -1 \cdot \begin{vmatrix} l_{ub,0} \\ l_{ub,1} \\ \dots \\ l_{ub,m} \end{vmatrix}$$