

# 欧拉角

@JeffYoung17

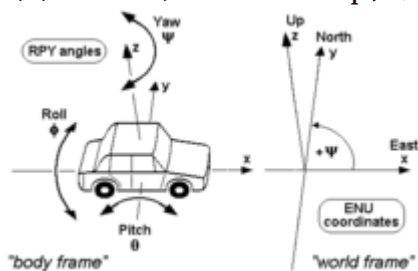
## 1. 概述

组合导航设备的姿态通常由欧拉角表示，使用欧拉角的时候，需要清楚**旋转方式**（内旋/外旋）和**顺规**（proper euler angles/Tait-Bryan euler angles）。同一组角度按照不同的旋转方式或顺规计算得到的旋转矩阵一般不同，；同一个旋转矩阵，按照不同的旋转方式或顺规计算得到的欧拉角一般也不同。

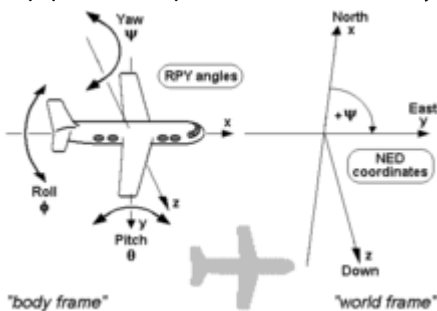
- 导航坐标系（即参考系/世界坐标系）的定义：

一般为2种：ENU和NED

(1) ENU (east-north-up, 对应xyz轴)



(2) NED (north-east-down, 对应xyz轴)



- 本体 (body/imu) 坐标系的定义：（设备的坐标系通常标识在外壳上或者后轮轴中心）

(1) novatel：RFU (Right-Front-Up) ；

(2) apollo-driver (**sensor independent**)：FLU (Front-Left-Up, 分别对应x-y-z轴) ；

(3) apollo-localization：RFU (Right-Front-Up) ；

- 顺规的定义：（一般默认为内旋，下文不再进行区分，例如提到Z-Y-X，默认为内旋Z-Y-X）

- (1) novatel : Z-X-Y ;
- (2) apollo-driver : Z-Y-X ;
- (3) apollo-localization : Z-Y-X ;

设备	导航坐标系	BODY/IMU坐标系	欧拉角顺规
novatel	ENU	RFU	Z-X-Y
apollo-driver	ENU	FLU	Z-Y-X
apollo-localization	ENU	RFU	Z-Y-X

考虑到导航参考坐标系、imu坐标系和欧拉角顺规的区别，需要对设备的原始欧拉角进行转换，使转换后的欧拉角在apollo的定义下，表示的是同一个姿态（attitude）。  
首先，记novatel的坐标系为b（body），apollo-driver坐标系为d（driver），apollo-localization坐标系为v（vehicle），novatel的导航参考坐标系为l（local level），apollo的参考坐标系为ref（reference），可得：

$$R_v^{ref} = R_l^{ref} R_b^l R_d^b$$

- apollo-driver的欧拉角计算过程可以分为以下几个步骤：
- (1) 根据设备的参考坐标系+apollo的参考坐标系，求  $R_l^{ref}$
  - (2) 根据设备的原始欧拉角+设备定义的顺规，求  $R_b^l$
  - (3) 根据设备的body坐标系+apollo的driver坐标系，求  $R_d^b$
  - (4) 计算 $R_d^{ref}$ ，根据apollo约定的顺规，求出对应的欧拉角

## 2. apollo-driver

novatel角度范围:

$$azimuth \in [0^{\circ}, 360^{\circ}], pitch \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}], roll \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}]$$

### 2.1 求 $R_l^{ref}$ ：

apollo使用的UTM坐标系是ENU系，novatel的导航参考坐标系也是ENU，因此 $R_l^{ref} = I$ ,

### 2.2 求 $R_b^l$ ：

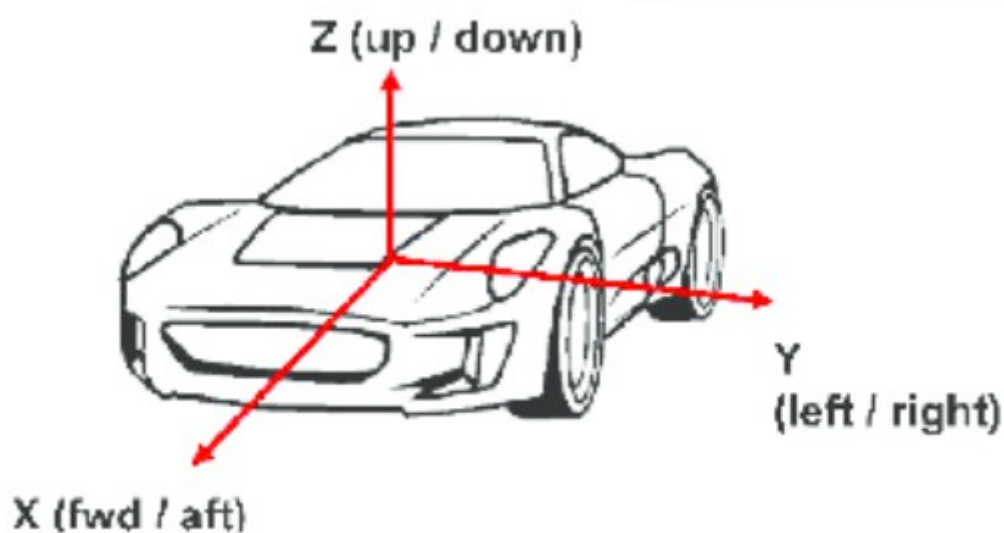
已知诺瓦泰输出的欧拉角按Z-X-Y的顺序分别为azimuth，pitch，roll。其中azimuth为y轴指向正北为0，顺时针旋转为正，所以遵守的是左手手性，而文中的欧拉角转换规则遵守右手手性，所以取反，将诺瓦泰的欧拉角对应记为 $-azimuth = \alpha, pitch = \beta, roll = \gamma$ 。

$$R_b^l = R_z(\alpha)R_x(\beta)R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

为了简化起见，将sin记为s，cos记为c， $\alpha, \beta, \gamma$ 分别记为1, 2, 3，则 $s_1 = \sin \alpha$ ，上述公式最后计算为：

$$R_b^l = R_z(\alpha)R_x(\beta)R_y(\gamma) = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_1 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$$

## 2.3 求 $R_d^b$



如图所示为b系和v系，以b系为参考，d系初始位置和b系重合，然后绕着z轴逆时针转90度就能到d系的姿态；不妨也按照Z-X-Y的顺规写出该旋转矩阵：

$$R_v^b = R_z(90^\circ)R_x(0^\circ)R_y(0^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ 0 & \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & 0 & \sin 0^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 0^\circ & 0 & \cos 0^\circ \end{bmatrix}$$

即：

$$R_v^b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.4 计算 $R_d^{ref}$ ，求对应欧拉角

$$R_d^{ref} = R_l^{ref} R_b^l R_d^b = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_1 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 s_1 & -c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 \\ c_1 c_2 & -c_3 s_1 - c_1 s_2 s_3 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 \\ s_2 & c_2 s_3 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$$

不妨记apollo-driver中约定的Z-Y-X顺规下的欧拉角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ，对应的旋转矩阵长这样子：

$$R_{Z-Y-X} = R_z(\theta_1) R_y(\theta_2) R_x(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_3 \sin \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

由 $R_{Z-Y-X}$ 可知，从一个旋转矩阵中按照Z-Y-X顺规计算的欧拉角依次为：（其中 $R_{a,b}$ 表示矩阵R的第a行，第b列的元素）

$$\tan \theta_1 = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

$$\sin \theta_2 = -R_{3,1}$$

$$\tan \theta_3 = \frac{R_{3,2}}{R_{3,3}}$$

对于 $\theta_2$ ，由于我们已知 $pitch = \beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ ，所以 $R_{1,1}^2 + R_{2,1}^2 \geq 0$ ：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{atan2}\left(\frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}\right) \\ \theta_2 &= \text{atan2}\left(\frac{-R_{3,1}}{\sqrt{R_{1,1}^2 + R_{2,1}^2}}\right) \\ \theta_3 &= \text{atan2}\left(\frac{R_{3,2}}{R_{3,3}}\right) \end{aligned}$$

## 3. apollo-localization

在文件`data_parser.cc`的`PublishOdometry()`中，仅发布四元数，因此只需要将apollo-drivers的欧拉角按照ZYX顺规直接转换成四元数即可。

参考资料：

1. Novatel: [apn037-Application Note on Vehicle to Body Rotations](#)

2. wikipedia: [Euler\\_angles](#)