Integrating All Weather Strategy with Hybrid Risk Measures in Portfolio Optimization

110071025 CHIH-CHIEH CHANG

Overview

專題背景與動機

Ray Dalio 提出 All Weather Portfolio，強調投資組合需能應對 不同經濟情境與風險事件，其核心理念為「風險分散勝於資產分散」，衍生出「Risk Parity」與「Equal Risk Contribution (ERC)」策略，不追求等金額配置，而是使每個資產風險貢獻均等。

近年來金融市場環境劇烈變化，使得資產報酬愈加呈現「偏態」與「厚尾」特性，如果只透過波動度等單一風險衡量指標，擔心會因極端事件而無法正確衡量潛在風險，認為如果同時兼具多個風險衡量指標可能可以更全面的捕捉市場風險樣態以及提供更穩健的資產配置策略。

Market Expectations	Growth	Inflation
Rising	25% of risk Equities Commodities Corporate Credit EM Credit	25% of risk IL Bonds Commodities EM Credit
Falling	25% of risk Nominal Bonds IL Bonds	25% of risk Equities Nominal Bonds

研究目標

本研究以All Weather 策略為起點，結合更健全的風險衡量工具，提出「混合風險等風險貢獻（Hybrid ERC）模型」作為改良：

- 引入 MAD（Mean Absolute Deviation）：相較變異數，對極端值較不敏感，能反映中段波動。
- 引入 CVaR（Conditional Value-at-Risk）：聚焦於極端損失，衡量尾端風險。
- 結合為混合風險指標：設定權重 $\alpha \in [0, 1]$ 控制 MAD 與 CVaR 的權衡。
- 並透過動態市場波動調整 α，使模型可依市場狀況進行調節，強化穩健性與應變能力。

策略設計與建構

- MAD 定義：

$$\mathrm{MAD}(w) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|r_t^\top w - \mu^\top w\right|$$

where r_t is the return vector at time t, and μ is the mean return vector over the period.

- CVaR 定義：

$$\mathrm{CVaR}_\beta(w) = \min_{\eta\in\mathbb{R}}\left\{\eta + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T}\max\left(-r_t^\top w - \eta, 0\right)\right\}$$

- MRC與CR定義：

The *marginal contribution to risk of asset* i, call it $MCR_i(\mathbf{w})$, is defined as

$$MCR_i(\mathbf{w}) := \frac{\partial}{\partial w_i}\sigma_{r_p}(\mathbf{w}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

The *contribution to risk of asset* i, call it $CR_i(\mathbf{w})$, is defined as

$$CR_i(\mathbf{w}) := w_i \cdot MCR_i(\mathbf{w}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

策略設計與建構

Let $R \in \mathbb{R}^{T\times N}$ denote the matrix of daily returns for N assets over T trading days. We define a hybrid risk measure that combines the Mean Absolute Deviation (MAD) and Conditional Value-at-Risk (CVaR) as follows:

$$\mathcal{R}(w;\alpha) = \alpha \cdot \mathrm{MAD}(w) + (1-\alpha)\cdot \mathrm{CVaR}_\beta(w) \tag{1}$$

where $w \in \mathbb{R}^N$ is the portfolio weight vector, and $\alpha \in [0,1]$ is the mixing parameter between MAD and CVaR, and $\beta \in (0,1)$ is the confidence level for CVaR, typically set to 0.95.

從多重目標優化延伸想法，透過加權組合的方式，結合常態波動與尾端風險，同時考慮常態變動下的穩定性與極端情境下的防禦力

設定 α 會動態調整，因應不同情況，自動轉換風險目標重心

- α = 1，變成MAD
- α = 0，變成CVaR
- α = 0.5，平均衡量兩者

策略設計與建構

透過MCR，CR的方式可推出風險均等（Equal Risk Contribution）之權重

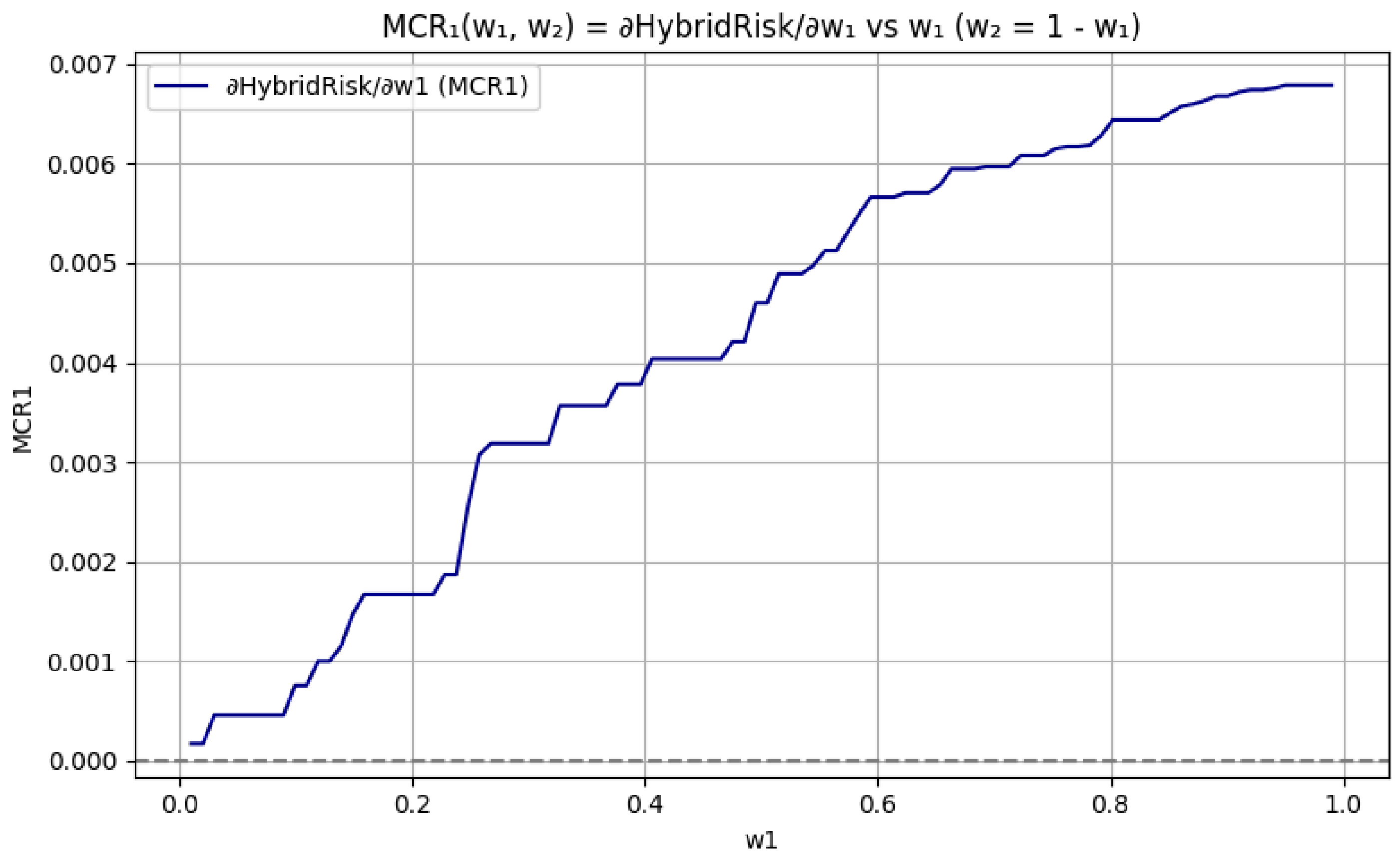
$$\mathrm{MCR}_i(w;\alpha) = \alpha\,\frac{\partial \mathrm{MAD}}{\partial w_i} + (1-\alpha)\,\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta}{\partial w_i},$$

$$\mathrm{MCR}_i(w;\alpha) = -\frac{\alpha}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{sign}(r_t^\top w - \mu^\top w)\, r_{t,i} - \frac{(1-\alpha)}{(1-\beta)T}\sum_{t\in\mathcal{T}_\beta} r_{t,i}$$

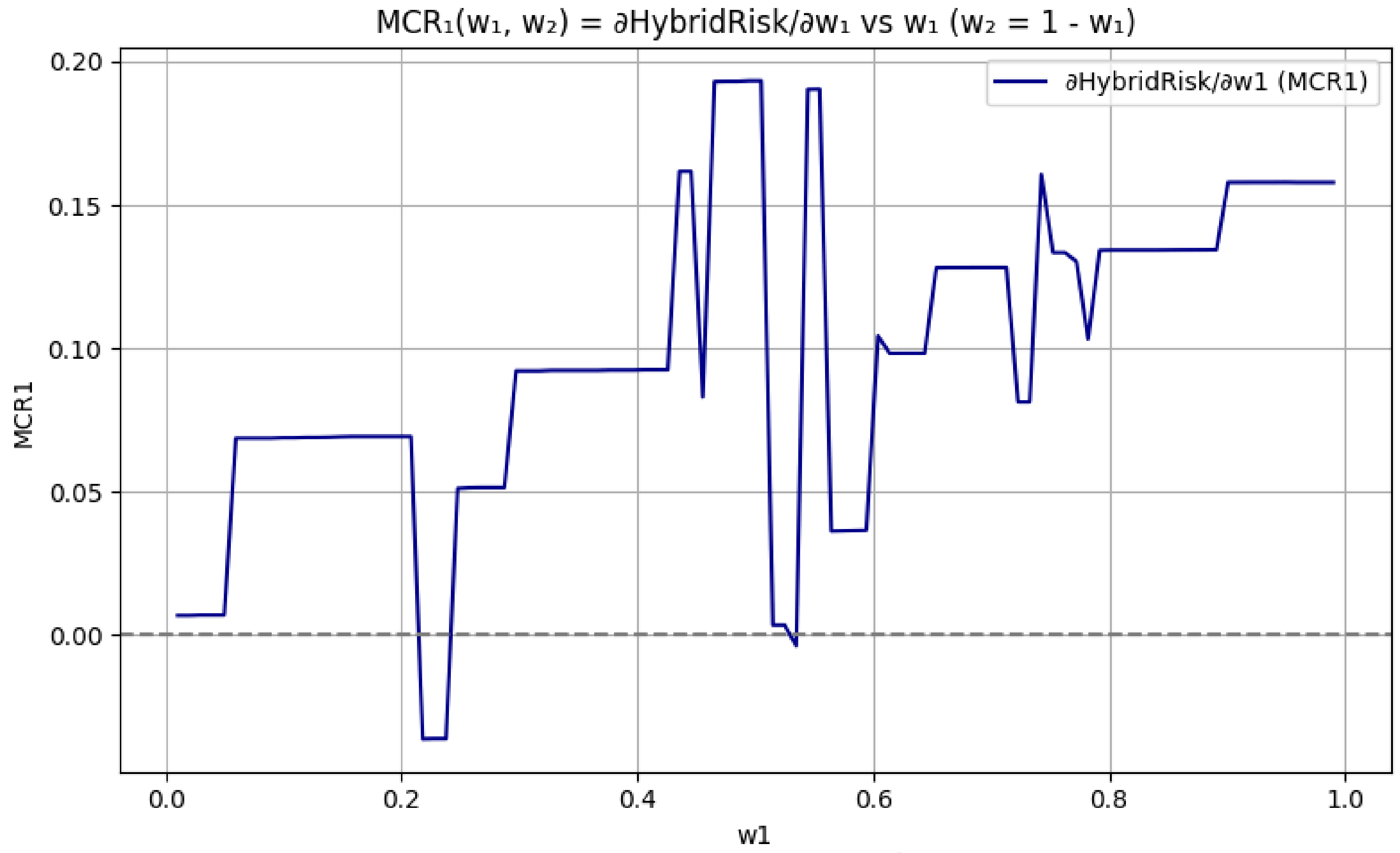
$$\mathrm{TRC}_i(w) = w_i \cdot \mathrm{MRC}_i(w) \qquad \mathrm{T\bar{R}C}(w) = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N}\mathrm{TRC}_i(w)$$

策略設計與建構

透過MCR，CR的方式可推出風險均等（Equal Risk Contribution）之權重，雖然MAD，CVaR皆為Convex，不過MCR因偏導數不見得是Convex



$\alpha = 1$



$\alpha = 0$

策略設計與建構

目標是最小化「各資產風險貢獻」與「平均值」的差距，讓投資組合裡每一檔資產分擔的風險盡量一樣多，

- 目標函數非凸，因此選擇採用SLSQP （Sequential Least Squares Programming）來解
- 限制式設定總權重為1，各資產不得超過20%，避免在風險均等的同時過度配置(重壓)某些風險貢獻過低的標的，或選擇放空某些風險過高的標的

$$
\begin{aligned}
\min_{w \in \mathbb{R}^N} \quad & \sum_{i=1}^{N} \left(\mathrm{TRC}_i(w) - \mathrm{T\bar{R}C}(w)\right)^2 \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
& 0 \leq w_i \leq 0.2, \quad \forall i \in 1, \ldots, N
\end{aligned}
$$

SLSQP + 梯度解法

SLSQP 屬於 SQP 類演算法的一種變體，針對二次近似問題使用最小平方法求解，對於具有連續性與局部可微性之非線性函數可求解，能求得近似局部最佳解，只要能穩定收斂、滿足限制。

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{w}} \quad & f(\mathbf{w}) \\
\text{s.t.} \quad & h_i(\mathbf{w}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \\
& g_j(\mathbf{w}) \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, r) \\
& w_i^{\min} \leq w_i \leq w_i^{\max}
\end{aligned}
$$

SLSQP

$$\mathrm{MAD}(w) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|r_t^\top w - \mu^\top w\right|$$

$$\mathrm{CVaR}_\beta(w) = \min_{\eta\in\mathbb{R}}\left\{\eta + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T}\max\left(-r_t^\top w - \eta, 0\right)\right\}$$

$$\frac{\partial \mathrm{MAD}}{\partial w_i} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{sign}(r_t^\top w - \mu^\top w)\, r_{t,i}$$

$$\frac{\partial \mathrm{CVaR}_\beta}{\partial w_i} = -\frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t\in\mathcal{T}_\beta} r_{t,i}$$

- 針對連續性，MAD與CVaR皆滿足
- 針對可微分性MAD僅有當 $-\mathbf{r}_t^\top \mathbf{w} = \mu_t^\top \mathbf{w}$ 之處不可微
- CVaR具備max(x,0)，在x = 0 點不可微
  其餘部分處處可微，形成局部可微

SLSQP + 梯度解法

1.二階泰勒展開，H為 Hessian矩陣

$$f(\mathbf{w}+\Delta\mathbf{w}) \approx f(\mathbf{w}) + \nabla f(\mathbf{w})^\top \Delta\mathbf{w} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{w}^\top H \Delta\mathbf{w}$$

2. 建立QP子問題

$$\begin{aligned}\min_{\Delta\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\Delta\mathbf{w}^\top H \Delta\mathbf{w} + \nabla f^\top \Delta\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & h_i(\mathbf{w}) + \nabla h_i^\top \Delta\mathbf{w} = 0 \\ & g_j(\mathbf{w}) + \nabla g_j^\top \Delta\mathbf{w} \geq 0\end{aligned}$$

3. 使用Lagrangian處理限制

$$\mathcal{L}(\mathbf{w},\lambda,\mu) = f(\mathbf{w}) - \sum_i \lambda_i h_i(\mathbf{w}) - \sum_j \mu_j g_j(\mathbf{w})$$

4. 執行 Line Search （αk為步長）

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \alpha_k \cdot \Delta\mathbf{w}$$

5. 收斂之條件

- $\|\nabla f\| < 10^{-6}$
- $|f_{k+1} - f_k| < 10^{-8}$
- 最大迭代次數達成

SLSQP + 梯度解法

```python
def optimize_hybrid_erc(R, alpha, beta=0.95, max_weight=0.2):
    """
    最小化 ERC loss 以求解 Hybrid ERC 投資組合權重
    R: T x N 報酬資料
    alpha: MAD 權重
    beta: CVaR 信賴水準
    max_weight: 每檔資產最大權重限制
    """
    n_assets = R.shape[1]

    ew = np.ones(n_assets) / n_assets
    mad_ew = np.mean(np.abs(-R @ ew - np.mean(-R @ ew)))
    L_ew = -R @ ew
    zeta_ew = np.percentile(L_ew, (1 - beta) * 100)
    slack_ew = np.maximum(0, L_ew - zeta_ew)
    cvar_ew = zeta_ew + np.sum(slack_ew) / ((1 - beta) * len(R))

    w0 = np.ones(n_assets) / n_assets
```

```python
# 條件設定：總和為 1、權重非負、小於 max_weight
constraints = ({
    'type': 'eq',
    'fun': lambda w: np.sum(w) - 1
})
bounds = [(0, max_weight) for _ in range(n_assets)]

result = minimize(
    erc_loss,
    w0,
    args=(R, alpha, beta, mad_ew, cvar_ew),
    method='SLSQP',
    bounds=bounds,
    constraints=constraints,
    options={'disp': False}
)

return result.x, erc_loss(result.x, R, alpha, beta, mad_ew, cvar_ew)
```

回測之設定

- 標的資產：SPY, IWM, EEM, TLT, LQD, HYG, SHY, GLD, DEC, VNQ, QQQ 11檔ETF商品，類別涵蓋股、債、大宗商品、REITS等，為All Weather架構下常見之多資產配置組合
- 短期回測時間：2020/01/01 到 2025/05/31 （日資料）
- 長期回測時間：2007/01/01 到 2025/05/31（日資料）
- 設定每60日重新估計MAD, CVaR
- CVaR信賴水準設定 95%
- 設定初始本金為1元
- 對比 固定α= 0.5 與 α動態調整之績效

Alpha 動態調整

採用**市場滾動波動度**作為反應

- 波動度偏低 → 市場穩定 → α 接近1
- 波動度偏高 → 市場震盪 → α 接近0

用最近60天的波動區間做min-max標準化，將波動度轉換成[0,1]區間，在套上20日移動平均去平滑化，每個月更新一次α，限制α<= 0.9, α>= 0.1

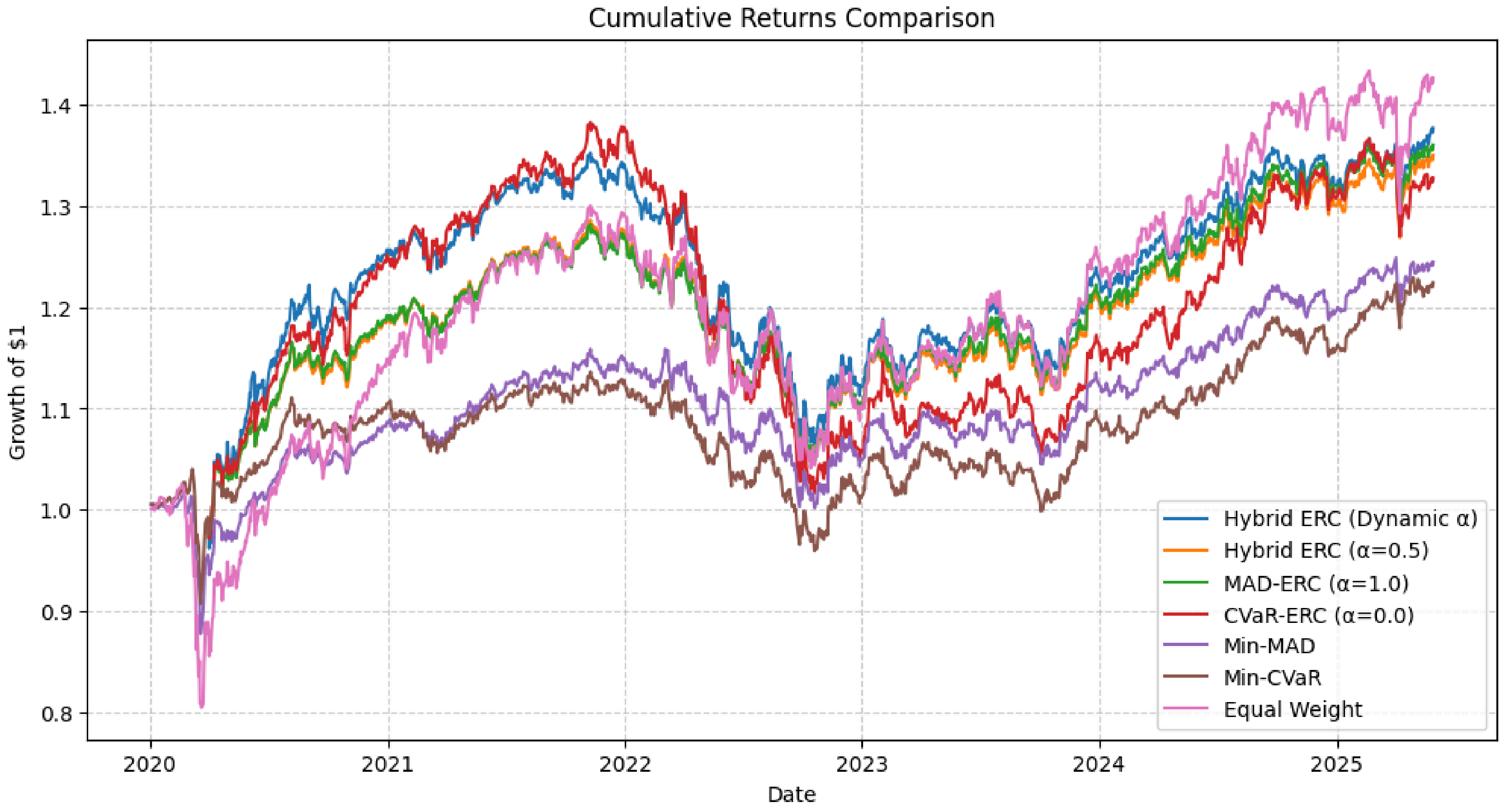
本研究將 α 設為市場狀態的函數，使 Hybrid ERC 策略能隨市場波動調整風險衡量重心，在低波動時重視穩定報酬，在高波動時強化尾端風險控制，實現動態自適應風險配置。

$$\alpha_t = \mathrm{SMA}_{20}\left(\alpha_{\max}^{(t)} - \left(\alpha_{\max}^{(t)} - \alpha_{\min}^{(t)}\right) \cdot \frac{\sigma_t - \min(\sigma_{t-w:t})}{\max(\sigma_{t-w:t}) - \min(\sigma_{t-w:t})}\right)$$

- σ_t：第 t 日的市場波動
- $\sigma_{t-w:t}$：從 $t-w$到 t 的滾動波動序列（設定 $w=60$）
- $\alpha_{\min}^{(t)}, \alpha_{\max}^{(t)}$：對應於該滾動視窗內波動的極小極大值（變動的 α 範圍）
- $\alpha_t = \mathrm{SMA}_{20}(\cdots)$：20 日簡單移動平均，用於平滑 α 變動，避免跳動或異常抖動

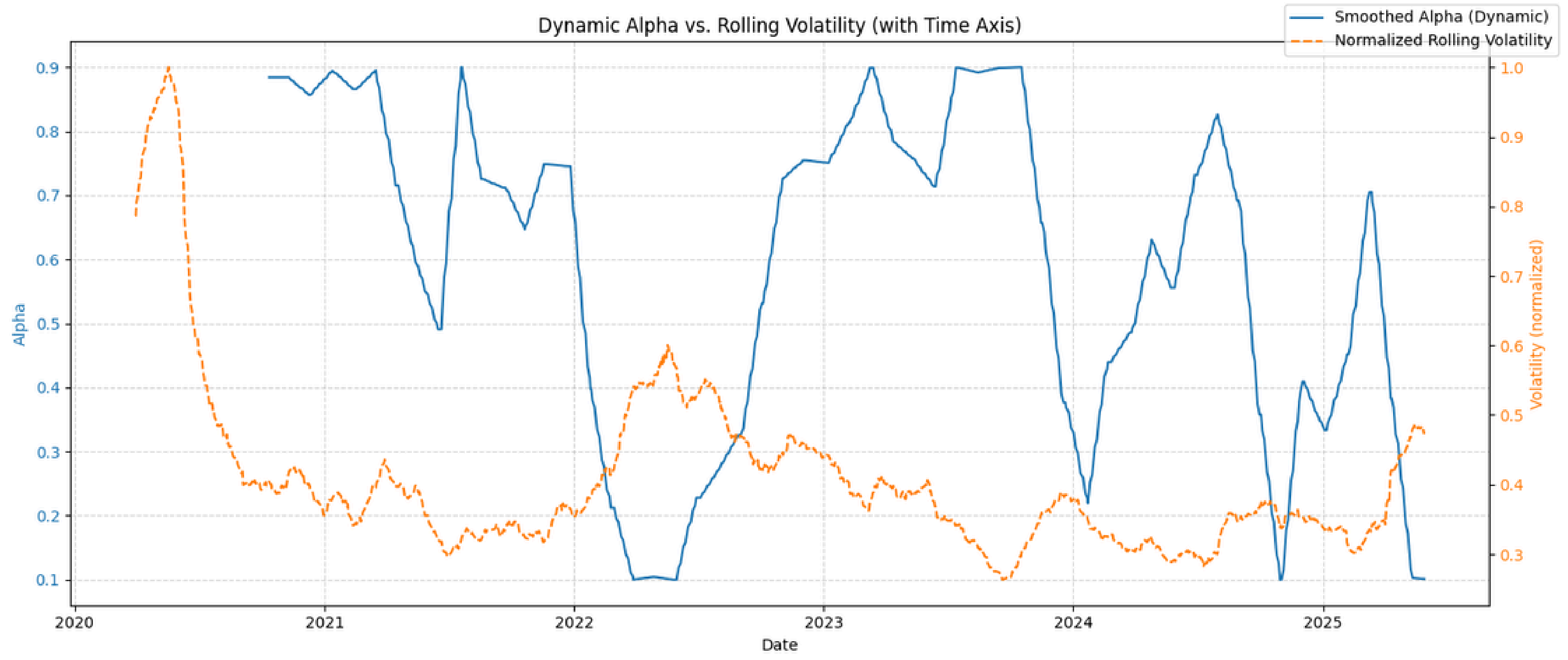
短期回測績效

可發現Hydrid策略Sharpe ratio表現遠超其他幾個策略，不過在波動度上輸給MAD跟CVaR策略，其原因在於Hybrid策略是將風險等分，所以整體波動度較高，不過也分散了些許的尾端風險，並提升報酬率。

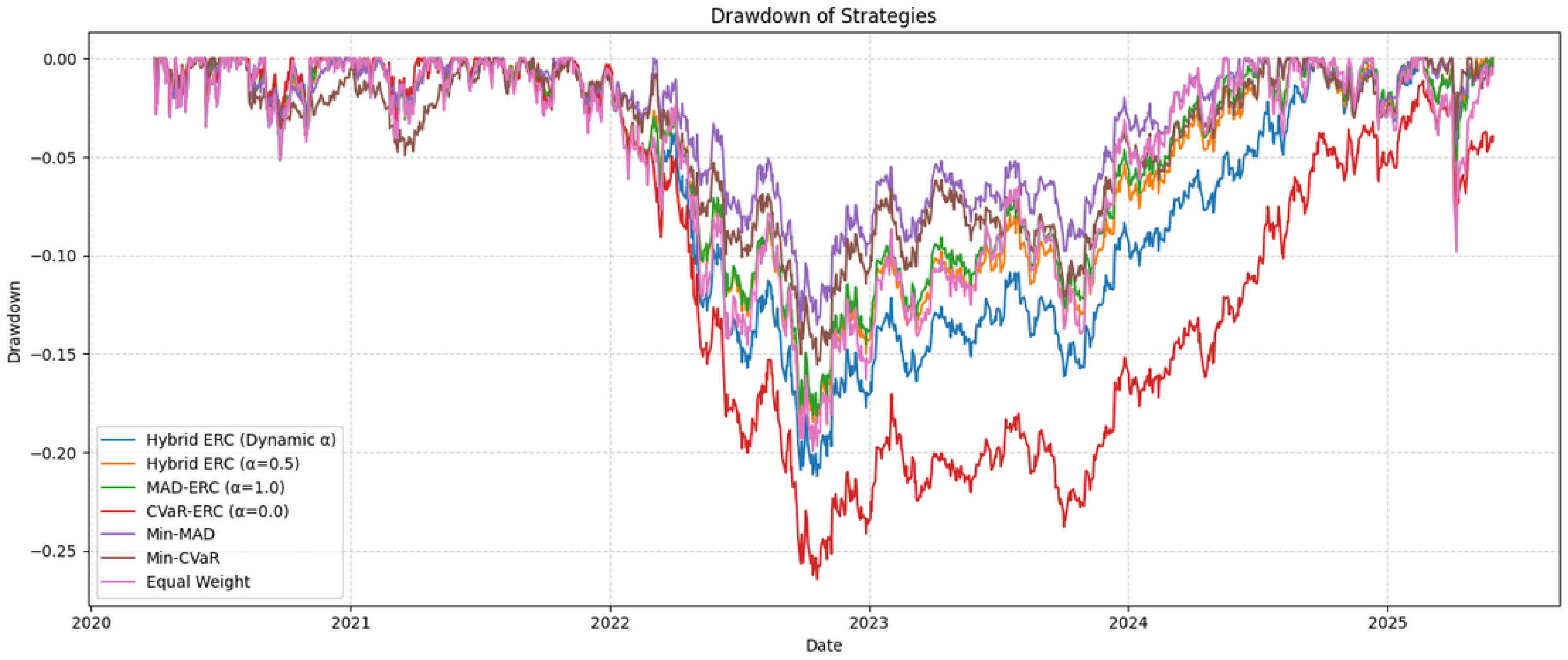


	Annual Return	Volatility	Sharpe	Max Drawdown
Hybrid ERC (Dynamic α)	0.0630	0.0819	0.7686	0.1817
Hybrid ERC (α=0.5)	0.0661	0.0895	0.7371	0.2119
MAD-ERC (α=1.0)	0.0617	0.0829	0.7436	0.1852
CVaR-ERC (α=0.0)	0.0595	0.0948	0.6264	0.2643
Min-MAD	0.0435	0.0759	0.5710	0.1361
Min-CVaR	0.0404	0.0759	0.5310	0.1554
Equal Weight	0.0739	0.1264	0.5837	0.2144

短期回測績效



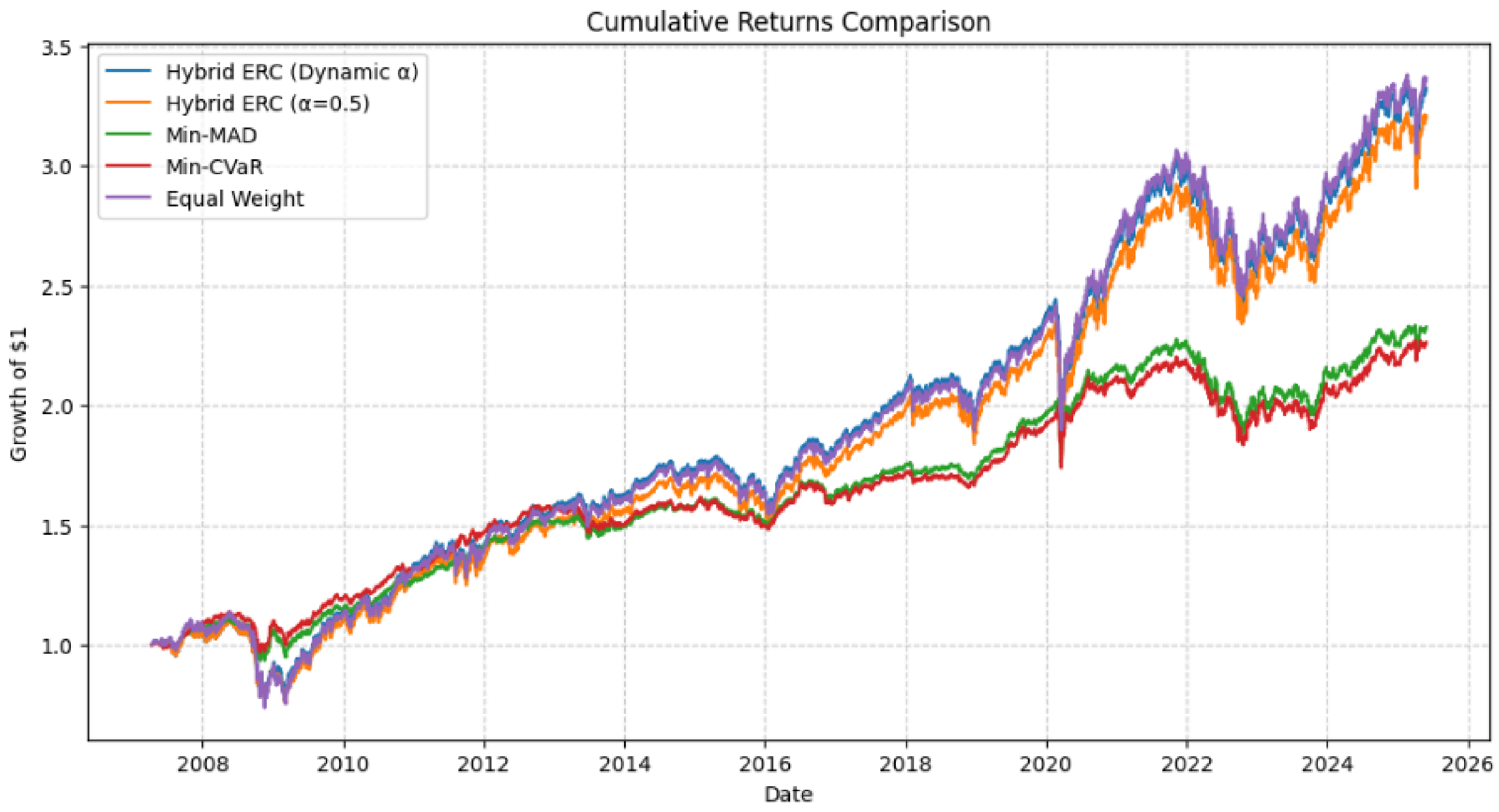
Dynamic Alpha vs. Rolling Volatility (with Time Axis)
Smoothed Alpha (Dynamic)
Normalized Rolling Volatility
Alpha
Volatility (normalized)
Date



Drawdown of Strategies
Hybrid ERC (Dynamic α)
Hybrid ERC (α=0.5)
MAD-ERC (α=1.0)
CVaR-ERC (α=0.0)
Min-MAD
Min-CVaR
Equal Weight
Drawdown
Date

長期回測績效

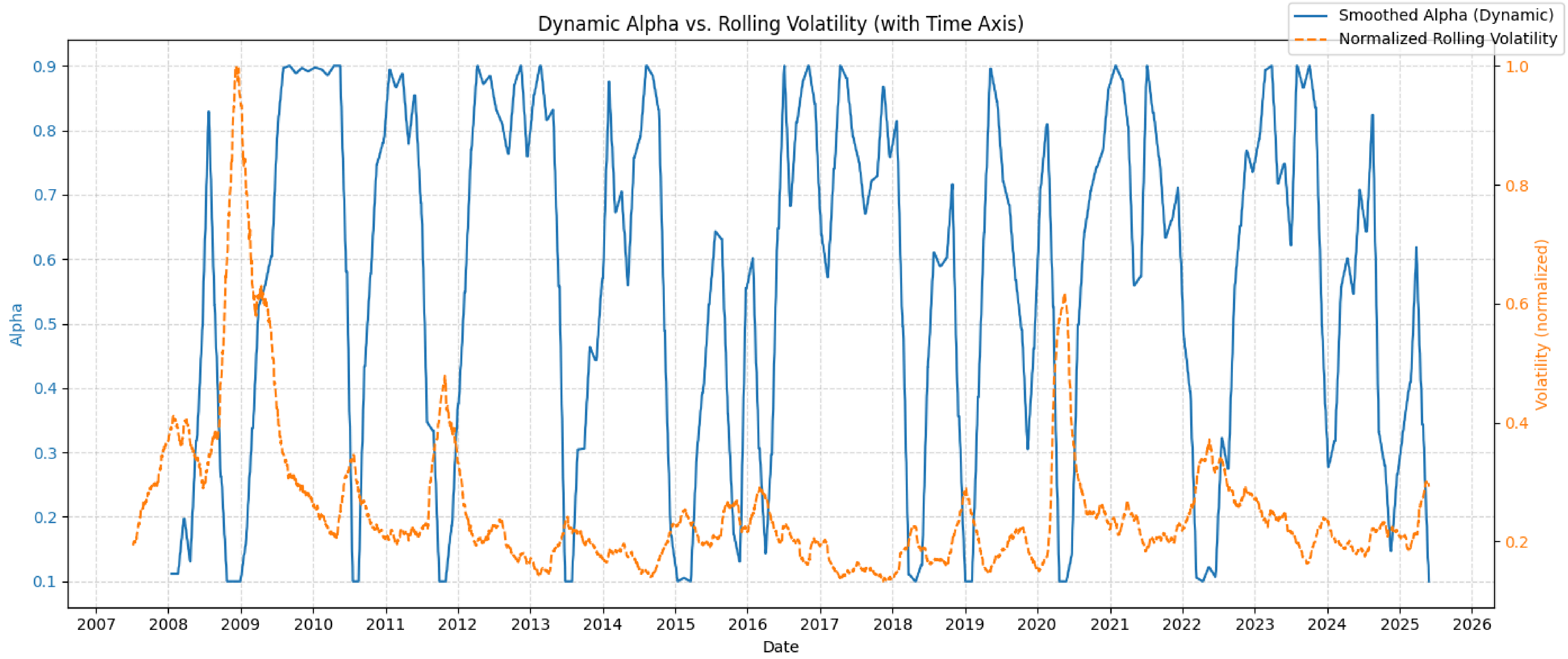
將回測之區間拉長，可發現低波動策略表現突出，Hybrid策略雖然仍舊勝過EW策略，不過波動度、最大回測都與MAD、CVaR差距一大截



	Annual Return	Volatility	Sharpe	Max Drawdown
Min-MAD	0.0487	0.0634	0.7658	0.1720
Min-CVaR	0.0471	0.0627	0.7490	0.1674
Hybrid ERC (Dynamic α)	0.0737	0.1139	0.6465	0.2975
Hybrid ERC (α=0.5)	0.0717	0.1139	0.6291	0.3192
Equal Weight	0.0745	0.1221	0.6093	0.3517

長期回測績效

α 在長期動態之波動



Future Work

在完成混合 MAD ＋ CVaR之實證後，可以試著將Variance、偏態（Skewness）、峰度（Kurtosis）加入衡量，結合高階矩風險貢獻至 ERC 最佳化中，追求風險控制下的精緻化配置，或者多加入一些控制變數，提升報酬表現。

結論

- Hybrid ERC 策略普遍優於 Equal Weight 策略，無論在各個面向都展現出更佳的穩健性與資產配置效果。
- 然而，由於 Hybrid ERC 的核心目標為「風險均等分配」，而非「風險絕對最小化」，因此其波動度仍略高於 Min-MAD、Min-CVaR 等單一風險最小化策略，在極端避險表現上仍略遜一籌。

THANK YOU