Physique 1 – Mécanique

Notes de cours

Institut Maritime du Québec

Hiver 2026

Table des matières

Chapitre 0

Notions fondamentales

0.1 Système international d'unités

Le système international d'unités (SI) est le système d'unités le plus largement utilisé dans le monde. Officiellement, seulement trois pays ne l'ont pas adopté : les États-Unis, le Liberia et la Birmanie (Myanmar). Le système international est issu du système métrique, lequel est apparu pendant la Révolution française. Le français demeure à ce jour la langue officielle du système international, ce qui se dénote notamment par l'acronyme « SI », utilisé dans la plupart des langues.

La force du système international est qu'il couvre l'ensemble des domaines tout en étant simple à comprendre et à utiliser, grâce à sa structure qui tire profit de la numération décimale et qui est construite autour de sept unités de base.

0.1.1 Pourquoi un système d'unités universel?

L'histoire regorge d'exemples où l'absence d'un référent commun a mené à des erreurs coûteuses. Avant la Révolution française, chaque région avait ses propres unités : la « toise » de Paris ne correspondait pas à celle de Bordeaux, et le « pied » variait d'un pays à l'autre. Cette confusion rendait le commerce difficile et les calculs scientifiques hasardeux.

Attention

La catastrophe du Mars Climate Orbiter (1999)
Le 23 septembre 1999, la sonde spatiale *Mars Climate Orbiter* de la NASA s'est désintégrée dans l'atmosphère de Mars. Coût de la mission : 125 millions de dollars américains.
La cause? Une erreur de conversion d'unités. L'équipe de Lockheed Martin, qui avait construit la sonde, transmettait les données de poussée des moteurs en **livre-force par seconde** (lbf·s), une unité du système impérial. L'équipe de navigation de la NASA, elle, attendait ces données en **newton-seconde** (N·s), l'unité du système international.
Personne n'a remarqué l'incompatibilité. Pendant des mois, les corrections de trajectoire ont été calculées avec les mauvaises unités. Résultat : au lieu de passer à 150 km d'altitude pour se mettre en orbite, la sonde est descendue à 57 km et s'est consumée dans l'atmosphère martienne.
Cette catastrophe illustre parfaitement pourquoi, en sciences et en ingénierie, **l'utilisation rigoureuse du système international est non négociable**.

0.1.2 Grandeur, valeur et unité

Commençons par distinguer trois termes importants :

Définition

- **Grandeur** : une propriété physique qui peut être mesurée ou calculée *(ex.: la longueur, la force, la masse, l'énergie, l'angle)*.
- **Valeur** : le nombre obtenu pour quantifier la grandeur mesurée ou calculée.
- **Unité** : accompagne la valeur afin d'expliciter le système de mesures utilisé et la nature de la grandeur.

Il est important de toujours accompagner une valeur de son unité lorsque l'on exprime une grandeur, sans quoi elle perd tout son sens. Les grandeurs (l, m, g) sont en italique, alors que les unités associées ne le sont pas. Cela permet d'éviter toute confusion.

0.1.3 Unités de base du SI

Toutes les unités au sein du SI sont définies à partir de sept **unités de base**, elles-mêmes définies à partir de constantes fondamentales de la nature depuis la révision de 2019 par le Bureau international des poids et mesures (BIPM).

Grandeur	Unité	Symbole	Définition basée sur
Longueur	mètre	m	vitesse de la lumière ($c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$)
Masse	kilogramme	kg	constante de Planck (h)
Temps	seconde	s	fréquence de l'atome de césium 133
Courant électrique	ampère	A	charge élémentaire (e)
Température	kelvin	K	constante de Boltzmann (k)
Quantité de matière	mole	mol	nombre d'Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$)
Intensité lumineuse	candela	cd	efficacité lumineuse

Table 1: Les sept unités de base du SI

Remarque

L'unité de base de la masse est le kilogramme et non le gramme ; c'est la seule unité du SI à posséder un préfixe dans sa version de base. Dans ce cours, nous utiliserons principalement le **mètre**, le **kilogramme** et la **seconde**.

Les équations utilisées en physique sont basées sur le SI. Il est donc toujours préférable de convertir les unités dans le système international avant de les insérer dans une équation.

0.1.4 La notation scientifique

En sciences, on travaille souvent avec des nombres extrêmement grands ou extrêmement petits. Par exemple, la distance Terre-Soleil est d'environ $150\,000\,000\,000\,\mathrm{m}$, tandis que le diamètre d'un atome est d'environ $0{,}000\,000\,000\,1\,\mathrm{m}$. Écrire ces nombres en notation décimale est peu pratique et source d'erreurs.

Définition

La **notation scientifique** exprime un nombre sous la forme :

$$a \times 10^n$$

où a est la **mantisse** (un nombre entre 1 et 10) et n est l'**exposant** (un entier positif ou négatif).

Exemples :

- Distance Terre-Soleil : $150\,000\,000\,000\,\mathrm{m} = 1{,}50 \times 10^{11}$ m
- Masse d'un électron : $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$

0.1.5 Les préfixes SI

Le système de préfixes permet de simplifier l'écriture des nombres extrêmement petits ou grands. Chaque préfixe est associé à une puissance de dix. **L'utilisation des préfixes SI est obligatoire**

dans ce cours.

Préfixe	**Symbole**	**Facteur**	**Préfixe**	**Symbole**	**Facteur**
téra	T	10^{12}	milli	m	10^{-3}
giga	G	10^{9}	micro	µ	10^{-6}
méga	M	10^{6}	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^{3}	pico	p	10^{-12}
hecto	h	10^{2}	centi	c	10^{-2}
déca	da	10^{1}	déci	d	10^{-1}

Table 2: Préfixes des multiples et sous-multiples décimaux du SI

Exemple 0.1 – Passage entre notation scientifique et préfixes SI

1. **De la notation scientifique vers le préfixe :**

   $d = 3{,}50 \times 10^{6}$ m $\rightarrow$ Exposant 6 = méga $\rightarrow d = 3{,}50\,\mathrm{Mm}$ (ou $3500\,\mathrm{km}$)

2. **Du préfixe vers la notation scientifique :**

   $m = 45{,}0\,\mu\mathrm{g} \rightarrow \mathrm{micro} = 10^{-6} \rightarrow m = 45{,}0 \times 10^{-6}$ g $= 4{,}50 \times 10^{-5}$ g

3. **Conversion entre préfixes :**

   $P = 2{,}35\,\mathrm{GW}$ en kilowatts?

   $\mathrm{G} = 10^{9}$ et $\mathrm{k} = 10^{3}$, donc $\mathrm{G} = 10^{6} \times$ k

   $P = 2{,}35 \times 10^{6}$ kW $= 2{,}35 \times 10^{6}\,\mathrm{kW}$

0.1.6 Équivalences utiles

Grandeur	**Unité**	**Symbole**	**Équivalence**
Distance	mètre	m	–
	pouce	po	1 po = 0,0254 m
	pied	pi	1 pi = 0,3048 m
	mille marin	NM	1 NM = 1852 m
Vitesse	mètre/seconde	m/s	–
	nœud	kn	1 kn = 1 NM/h = 0,5144 m/s
Masse	kilogramme	kg	–
	livre-masse	lb	1 lb ≈ 0,4536 kg
Force	newton	N	1 N = 1 kg·m/s^2
	livre-force	lbf	1 lbf ≈ 4,448 N
Pression	pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2
	psi	psi	1 psi ≈ 6895 Pa

Table 3: Équivalences courantes entre unités SI et autres systèmes

0.1.7 Unités dérivées du SI

Unité	**Symbole**	**Grandeur**	**Équivalence**
radian	rad	angle plan	m/m
hertz	Hz	fréquence	s^{-1}
newton	N	force	$kg{\cdot}m/s^2$
pascal	Pa	pression	N/m^2
joule	J	énergie, travail	N·m
watt	W	puissance	J/s
coulomb	C	charge électrique	s·A
volt	V	tension	W/A
ohm	Ω	résistance électrique	V/A

Table 4: Unités dérivées du SI utilisées dans le cours

0.2 Conversions d'unités

Dans votre formation, vous aurez souvent à convertir des unités :

- milles nautiques en kilomètres
- nœuds en mètres par seconde
- tours par minute (RPM) en radians par seconde
- livres par pouce carré en pascals
- pieds cubes en mètres cubes

Les équations que nous verrons sont basées sur le SI et il faudra convertir toute grandeur dans ce système avant de l'insérer dans une équation.

0.2.1 Les facteurs de conversion

Afin de convertir les unités d'une grandeur, il faut multiplier par le **facteur de conversion**. Les facteurs de conversion sont des quantités égales à 1, obtenues à partir des équivalences entre unités (voir Tableau **??**).

Procédure de conversion d'unités

1. **Écrire** la grandeur avec sa valeur et son unité de départ
2. **Trouver** le(s) facteur(s) de conversion nécessaire(s) dans le Tableau **??**
3. **Placer** les facteurs de sorte que les unités à éliminer s'annulent (unité à éliminer en haut → la mettre en bas, et vice versa)
4. **Calculer** en multipliant les valeurs numériques

Exemple 0.2 – Conversion de milles marins en kilomètres

La distance entre Rimouski et Sept-Îles est de 150 NM. Convertir en kilomètres.
Étape 1 : Écrire la grandeur

$$d = 150\,\mathrm{NM}$$

Étape 2 : Trouver le facteur de conversion (Tableau **??**)

- $1\,\mathrm{NM} = 1852\,\mathrm{m} = 1{,}852\,\mathrm{km}$

Étape 3 : Placer le facteur (NM en haut → NM en bas)

$$d = 150\,\mathrm{NM} \cdot \frac{1{,}852\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{NM}}$$

Étape 4 : Calculer

$$d = 150 \times 1{,}852\,\mathrm{km} = 278\,\mathrm{km}$$

0.2.2 Conversion d'unités composées

Lorsque l'unité à convertir est composée de plusieurs unités (comme une vitesse), il faut convertir **chaque unité séparément**.

Exemple 0.3 – Conversion km/h en m/s

Convertir une vitesse de $v = 90\,\mathrm{km/h}$ en m/s.
Étape 1 : Écrire la grandeur

$$v = 90\,\mathrm{km/h} = 90 \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}}$$

Étape 2 : Trouver les facteurs de conversion

- $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$
- $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$

Étape 3 : Placer les facteurs (km en haut → km en bas ; h en bas → h en haut)

$$v = 90 \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}} \cdot \frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}}$$

Étape 4 : Calculer

$$v = 90 \cdot \frac{1000}{3600}\,\mathrm{m/s} = 25{,}0\,\mathrm{m/s}$$

Exemple 0.4 – Conversion de nœuds en km/h

Convertir une vitesse de 25 kn en km/h.
Étape 1 : Écrire la grandeur (rappel : $1\,\mathrm{kn} = 1\,\mathrm{NM/h}$)

$$v = 25\,\mathrm{kn} = 25 \cdot \frac{1\,\mathrm{NM}}{1\,\mathrm{h}}$$

Étape 2 : Trouver le facteur de conversion (Tableau **??**)

- $1\,\mathrm{NM} = 1{,}852\,\mathrm{km}$

Étape 3 : Placer le facteur

$$v = 25 \cdot \frac{1\,\mathrm{NM}}{1\,\mathrm{h}} \cdot \frac{1{,}852\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{NM}}$$

Étape 4 : Calculer

$$v = 25 \times 1{,}852\,\mathrm{km/h} = 46{,}3\,\mathrm{km/h}$$

Exemple 0.5 – Conversion de psi en kilopascals

Convertir une pression de $p = 32{,}0\,\mathrm{psi}$ en kilopascals (kPa).
Étape 1 : Écrire la grandeur (rappel : $1\,\mathrm{psi} = 1\,\mathrm{lbf/po^2}$)

$$p = 32{,}0\,\mathrm{psi} = 32{,}0 \cdot \frac{1\,\mathrm{lbf}}{1\,\mathrm{po}^2}$$

Étape 2 : Trouver les facteurs de conversion (Tableau **??**)

- $1\,\mathrm{lbf} = 4{,}448\,\mathrm{N}$
- $1\,\mathrm{po} = 0{,}0254\,\mathrm{m}$, donc $1\,\mathrm{po}^2 = (0{,}0254\,\mathrm{m})^2$

Étape 3 : Placer les facteurs

$$p = 32{,}0 \cdot \frac{1\,\mathrm{lbf}}{1\,\mathrm{po}^2} \cdot \frac{4{,}448\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{lbf}} \cdot \frac{1\,\mathrm{po}^2}{(0{,}0254\,\mathrm{m})^2}$$

Étape 4 : Calculer

$$p = 32{,}0 \cdot \frac{4{,}448}{0{,}0254^2}\,\mathrm{N/m^2} = 221\,\mathrm{kPa}$$

0.2.3 Unités avec exposant

Lorsqu'une unité porte un exposant (aires, volumes), il faut se rappeler que cet exposant signifie que l'unité est **multipliée par elle-même**.

$$1\,\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad 1\,\mathrm{m}^3 = 1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$$

Par conséquent, le facteur de conversion doit aussi être élevé à la même puissance !

Exemple 0.6 – Conversion de cm² en m²

L'aire d'une écoutille est de $A = 1500\,\mathrm{cm}^2$. Convertir en m^2.

Puisque $\text{cm}^2 = \text{cm} \times \text{cm}$, on doit appliquer le facteur de conversion **deux fois** :

$$\begin{aligned} A = 1500\,\text{cm}^2 &= 1500 \cdot (1\,\text{cm}) \cdot (1\,\text{cm}) \\ &= 1500 \cdot \left(1\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right) \cdot \left(1\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right) \\ &= 1500 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100}\,\text{m}^2 = 0{,}150\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Raccourci : On peut directement élever le facteur de conversion au carré :

$$A = 1500\,\text{cm}^2 \cdot \left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)^2 = 1500 \cdot \frac{1}{100^2}\,\text{m}^2 = 0{,}150\,\text{m}^2$$

Exemple 0.7 – Conversion de pieds cubes en m³

Convertir un volume de $V = 8{,}50\,\text{pi}^3$ (pieds cubes) en m^3.
Sachant que $1\,\text{pi} = 0{,}3048\,\text{m}$ (Tableau **??**) :

$$\begin{aligned} V &= 8{,}50\,\text{pi}^3 \cdot \left(\frac{0{,}3048\,\text{m}}{1\,\text{pi}}\right)^3 \\ &= 8{,}50 \cdot (0{,}3048)^3\,\text{m}^3 \\ &= 8{,}50 \cdot 0{,}02832\,\text{m}^3 = 0{,}241\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

Pratique autonome — Conversions d'unités

▷ Pratique autonome 0.1

Un cargo voyage à une vitesse de 18 nœuds. Convertir cette vitesse en mètres par seconde (m/s).

Résolution :

Rép. : 9,26 m/s

▷ Pratique autonome 0.2

La surface du pont principal d'un navire est de 450 m^2. Convertir cette aire en pieds carrés (pi^2).
Indice : Le facteur de conversion doit être appliqué deux fois (une fois par dimension).

Résolution :

Rép. : 4840 pi^2

▷ Pratique autonome 0.3

La consommation de carburant d'un moteur marin est de 85 L/h. Convertir en gallons américains par minute (gal(US)/min).
Rappel : 1 gal(US) = 3,785 L

Résolution :

Rép. : 0,374 gal(US)/min

0.3 Homogénéité des équations

En physique, les équations relient des grandeurs physiques entre elles. Pour qu'une équation soit valide, elle doit respecter une règle fondamentale : l'**homogénéité dimensionnelle**.

Définition

Une équation est **homogène** si les deux côtés de l'égalité ont les **mêmes unités** (ou dimensions).
Autrement dit : on ne peut égaler, additionner ou soustraire que des grandeurs **de même nature**.

Attention

Règles fondamentales :

- On ne peut **pas additionner** des mètres et des secondes : $5\,\text{m} + 3\,\text{s}$ n'a aucun sens!
- On ne peut **pas égaler** une vitesse et une accélération : $v = a$ est impossible.
- Les deux côtés d'une équation **doivent avoir les mêmes unités**.

0.3.1 Pourquoi vérifier l'homogénéité?

Vérifier l'homogénéité d'une équation est un outil puissant pour :

1. **Détecter des erreurs** : Si votre réponse n'a pas les bonnes unités, il y a forcément une erreur quelque part dans votre calcul.
2. **Vérifier une formule** : Avant d'utiliser une équation, vous pouvez vérifier qu'elle est dimensionnellement correcte.
3. **Retrouver une formule oubliée** : L'analyse dimensionnelle peut vous aider à reconstruire une équation dont vous avez oublié la forme exacte.

0.3.2 Comment vérifier l'homogénéité

Pour vérifier l'homogénéité d'une équation, on remplace chaque grandeur par ses **unités de base** (m, kg, s) et on simplifie.

Exemple 0.8 – Vérification d'homogénéité – énergie cinétique

Vérifions que l'équation de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ est homogène.

Côté gauche : L'énergie se mesure en joules.

$$[E_c] = \mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^2}$$

Côté droit : La masse est en kg, la vitesse en m/s.

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \mathrm{kg} \cdot (\mathrm{m/s})^2 = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^2}$$

Les deux côtés ont les mêmes unités → **l'équation est homogène ✓**

Exemple 0.9 – Détection d'une formule non homogène

Un étudiant propose la formule $v = \frac{1}{2}at^2$ pour la vitesse. Est-elle homogène?
Côté gauche : $[v] = \mathrm{m/s}$
Côté droit :

$$\left[\frac{1}{2}at^2\right] = \mathrm{m/s^2} \cdot \mathrm{s^2} = \mathrm{m}$$

Le côté gauche est en m/s, le côté droit est en m → **l'équation n'est PAS homogène ×**
La formule correcte est $v = at$ (ou $x = \frac{1}{2}at^2$ pour la position).

Méthode de vérification

1. Écrire les unités de chaque grandeur en unités de base (m, kg, s)
2. Simplifier les unités de chaque côté de l'équation
3. Comparer : si les unités sont identiques, l'équation est homogène

Attention : Une équation homogène n'est pas nécessairement correcte (il pourrait manquer un facteur numérique), mais une équation **non homogène est toujours fausse**.

Pratique autonome — Homogénéité des équations

▷ Pratique autonome 0.4

L'énergie cinétique de rotation d'un objet est donnée par $E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$, où I est le moment d'inertie (en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2}$) et ω est la vitesse angulaire (en rad/s).
Vérifier que cette équation est homogène. *(Rappel : l'énergie se mesure en joules, où* $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^2}$*)*

Résolution :

Rép. : Homogène : les deux côtés donnent $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

▷ Pratique autonome 0.5

Un étudiant propose la formule $t = \dfrac{v}{2a^2}$ pour calculer un temps, où v est une vitesse (m/s) et a est une accélération ($\mathrm{m/s^2}$).
Cette formule est-elle homogène? Justifier.

Résolution :

Rép. : Non homogène : côté droit donne s^3/m, pas des secondes

▷ Pratique autonome 0.6

La période d'oscillation T d'un pendule simple dépend de sa longueur L et de l'accélération gravitationnelle g. On propose la formule :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^n}{g}}$$

où n est un exposant inconnu. En utilisant l'analyse dimensionnelle, déterminer la valeur de n pour que l'équation soit homogène.
Indice : La période T est en secondes, L en mètres, et g en $\mathrm{m/s^2}$.

Résolution :

Rép. : $n = 1$

0.4 Précision et chiffres significatifs

Les grandeurs physiques utilisées dans les calculs ont été mesurées avec des appareils qui ont un niveau de précision donné.

Définition

Le **nombre de chiffres significatifs** (C.S.) correspond au nombre de chiffres dont on est certain, plus le premier chiffre incertain.

Les règles du zéro

1. Placés **au début** d'une valeur, les zéros ne sont **jamais significatifs**.
2. Placés **à la fin** d'une valeur **avec décimales**, ils sont **toujours significatifs**.
3. Placés **à la fin** d'une valeur **sans décimale**, ils **peuvent être significatifs ou non**.

La notation scientifique permet de lever toute ambiguïté sur le nombre de C.S.

Règle pour ce cours

Dans ce cours, toutes les réponses doivent être exprimées avec 3 chiffres significatifs, en utilisant le **préfixe SI approprié** ou la **notation scientifique**.
Important : On n'écrit jamais plus de **deux zéros après la virgule**. Si une valeur est très petite, il faut utiliser un préfixe SI ou la notation scientifique.

Exemple 0.10 – Arrondir à 3 chiffres significatifs

a) 127,845 m → **128 m**

b) 0,004 562 3 kg → 0,00456 kg → **4,56 g** (ou $4{,}56 \times 10^{-3}$ kg)

c) 45 230 000 W → $4{,}52 \times 10^{7}$ W → **45,2 MW**

Exemple 0.11 – Calcul complet avec grands nombres

Un cargo de masse $m = 52\,000\,\mathrm{t}$ accélère à $a = 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$. Calculer la force. Réponse en notation scientifique avec 3 C.S.
Solution :
Conversion : $m = 52\,000\,\mathrm{t} = 52\,000 \times 1000\ \mathrm{kg} = 5{,}2 \times 10^{7}\ \mathrm{kg}$

Calcul :

$$F = ma = 5{,}2 \times 10^7\ \text{kg} \times 0{,}15\ \text{m/s}^2 = 7\,800\,000\ \text{N}$$

Réponse (3 C.S.) :

$$\boxed{F = 7{,}80 \times 10^6\ \text{N} = 7{,}80\,\text{MN}}$$

Pratique autonome — Chiffres significatifs

▷ Pratique autonome 0.7

Combien de chiffres significatifs contiennent les valeurs suivantes?

a) $0{,}003\,40\,\text{kg}$

b) $2{,}50 \times 10^4\ \text{W}$

c) $100{,}0\,\text{m}$

Résolution :

Rép. : a) 3 C.S. b) 3 C.S. c) 4 C.S.

▷ Pratique autonome 0.8

Arrondir les valeurs suivantes à **3 chiffres significatifs**. Utiliser la notation scientifique ou les préfixes SI si nécessaire.

a) $45\,678\,\text{m}$

b) $0{,}009\,876\,5\,\text{s}$

c) $123{,}45\,\text{kN}$

Résolution :

Rép. : a) 45,7 km b) 9,88 ms c) 123 kN

▷ Pratique autonome 0.9

Un pétrolier de masse $m = 85\,000\,\mathrm{t}$ navigue à une vitesse de $v = 12{,}5\,\mathrm{kn}$.
Calculer son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ en joules, avec les bons chiffres significatifs et une notation appropriée (préfixe SI ou notation scientifique).
Rappel : $1\,\mathrm{kn} = 0{,}5144\,\mathrm{m/s}$

Résolution :

Rép. : $E_c = 1{,}76\,\mathrm{GJ}$ (ou $1{,}76 \times 10^9$ J)

0.5 Trigonométrie

La trigonométrie est un outil mathématique **essentiel** en physique. Dans ce cours, vous l'utiliserez constamment pour :

- **Décomposer les vecteurs** en leurs composantes horizontale et verticale — c'est la base du calcul vectoriel que nous verrons à la section suivante
- **Retrouver l'angle** d'un vecteur à partir de ses composantes
- **Résoudre des triangles** dans les problèmes de navigation, d'équilibre des forces, de trajectoires, etc.

Sans une maîtrise solide de la trigonométrie, il sera très difficile de progresser dans ce cours. Prenez le temps de revoir ces notions si elles ne sont pas fraîches dans votre mémoire.

0.5.1 Le triangle quelconque

Un triangle est un polygone possédant trois côtés et trois sommets. Dans un triangle, **la somme des angles internes totalise toujours 180°**.

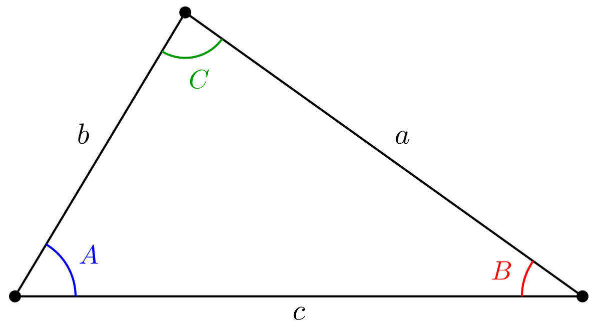


Figure 1: Triangle quelconque : le côté a est opposé à l'angle A, le côté b est opposé à l'angle B, le côté c est opposé à l'angle C.

Il est possible de définir toutes les propriétés d'un triangle quelconque à partir de trois informations :

1. Deux côtés et l'angle entre eux
2. Un côté et deux angles
3. Trois côtés

Les **lois des sinus** et **des cosinus** permettent de résoudre n'importe quel triangle quelconque. Ces notions, vues au secondaire, sont essentielles pour les problèmes de navigation et d'analyse de forces que vous rencontrerez dans ce cours.

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(et les deux autres formes obtenues par permutation des lettres)

0.5.2 Le triangle rectangle

Le triangle rectangle possède un angle droit (90°). Cette propriété particulière permet d'utiliser des outils plus simples et plus rapides : le **théorème de Pythagore** et les **rapports trigonométriques**.

Attention

Les rapports trigonométriques (sin, cos, tan) sont **la clé** pour décomposer les vecteurs et retrouver leurs angles. Vous devez être capable de les utiliser rapidement et sans erreur.

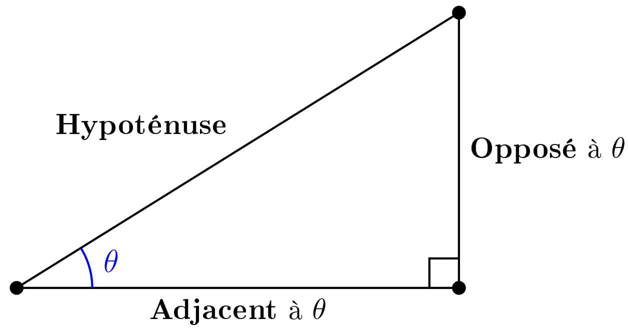


Figure 2: Triangle rectangle : les côtés sont nommés **par rapport à l'angle** θ considéré.

Le truc mnémotechnique **SOH-CAH-TOA** permet de retenir les trois rapports trigonométriques :

SOH-CAH-TOA

$$\sin\theta = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} \tag{SOH}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} \tag{CAH}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} \tag{TOA}$$

Théorème de Pythagore

$$\text{Hypoténuse}^2 = \text{Opposé}^2 + \text{Adjacent}^2$$

Il est possible de retrouver toutes les propriétés d'un triangle rectangle à partir de **seulement deux informations** :

1. Un angle (autre que l'angle droit) et un côté
2. Deux côtés

0.6 Scalaires et vecteurs

En physique, toutes les grandeurs ne se comportent pas de la même façon. Certaines sont entièrement décrites par un simple nombre : la température de l'eau, la masse d'un navire, le temps écoulé. D'autres nécessitent plus d'information : quand on parle du vent, dire qu'il souffle à 30 km/h ne suffit pas — il faut aussi savoir *dans quelle direction* il souffle !

Cette distinction fondamentale divise les grandeurs physiques en deux catégories : les **scalaires** et les **vecteurs**. Comprendre cette différence est essentiel pour la suite du cours, car les vecteurs obéissent à des règles de calcul différentes des nombres ordinaires.

Définition

- Un **scalaire** est une grandeur entièrement décrite par un nombre et une unité.

  Exemples : la masse ($500\,\mathrm{kg}$)*, la température* ($15\,°\mathrm{C}$)*, l'énergie* ($200\,\mathrm{J}$)*, le temps* ($3\,\mathrm{h}$)*, la pression* ($101\,\mathrm{kPa}$)*.*

- Un **vecteur** est une grandeur qui possède à la fois un **module** (valeur numérique), une **direction** et un **sens**.

  Exemples : la vitesse, l'accélération, la force, le déplacement, le courant marin.

0.6.1 Représentation d'un vecteur

Graphiquement, un vecteur est représenté par une **flèche** dans le plan cartésien.

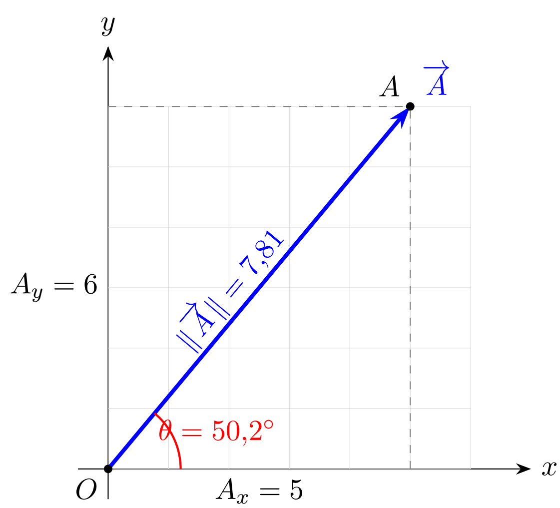


Figure 3: Un vecteur $\overrightarrow{A}$ dans le plan cartésien. Module : $\|\overrightarrow{A}\| = 7{,}81$, orientation : $\theta = 50{,}2°$

Par convention, on désigne les quantités vectorielles par des lettres chapeautées d'une flèche ($\overrightarrow{A}$) pour les distinguer des quantités scalaires (A). Le vecteur $\overrightarrow{A}$ possède une **origine** (O) et une **extrémité** (A).

0.6.2 Caractéristiques d'un vecteur

Un vecteur possède trois caractéristiques qui permettent de le définir complètement d'un point de vue mathématique :

Définition

- Le **module** $\|\overrightarrow{A}\|$: la « longueur » du vecteur, toujours positive ou nulle. C'est la grandeur de la quantité physique représentée.
- L'**orientation** θ : l'angle que fait le vecteur par rapport à une direction de référence (généralement l'axe des x positifs).
- Les **composantes** A_x et A_y : les projections du vecteur sur les axes x et y. Elles peuvent être positives ou négatives selon le sens du vecteur.

Ces caractéristiques ne sont pas indépendantes : connaître le module et l'orientation permet de calculer les composantes, et vice versa. Ce sont simplement **deux façons différentes de décrire le même objet mathématique**.

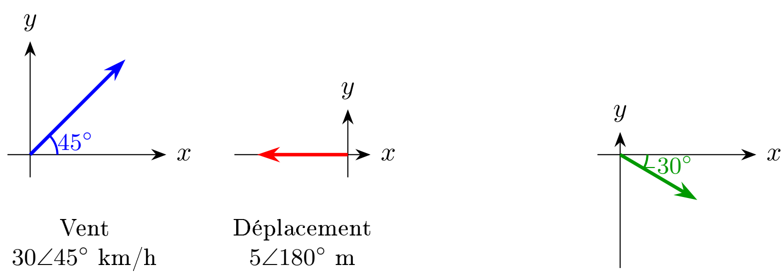


Figure 4: Exemples de vecteurs exprimés en module et orientation.

0.6.3 Notation module-orientation

La première façon d'exprimer un vecteur est d'utiliser son **module** (sa longueur) et son **orientation** (l'angle θ par rapport à l'axe des x positifs).

Notation module-orientation

$$\overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\|\angle\theta$$

où $\|\overrightarrow{A}\|$ est le module et θ est l'orientation.

Sur la Figure **??**, le vecteur $\overrightarrow{A}$ a un module de 7,81 et une orientation de 50,2°. On écrit alors : $\overrightarrow{A} = 7{,}81\angle 50{,}2°$

Cette notation est particulièrement utile lorsqu'on connaît directement la grandeur et la direction d'une quantité physique (par exemple, un vent de 30 km/h venant du nord-est).

0.6.4 Notation en composantes

La deuxième façon d'exprimer un vecteur est d'utiliser ses **composantes**, c'est-à-dire ses projections sur les axes.

Définition

Les **composantes** A_x et A_y du vecteur $\overrightarrow{A}$ sont ses projections sur l'axe des x et l'axe des y respectivement. Elles correspondent aux longueurs des côtés du **triangle rectangle** formé par le vecteur et les axes (voir Figure **??**).

Le signe d'une composante indique sa direction par rapport à l'axe de référence :

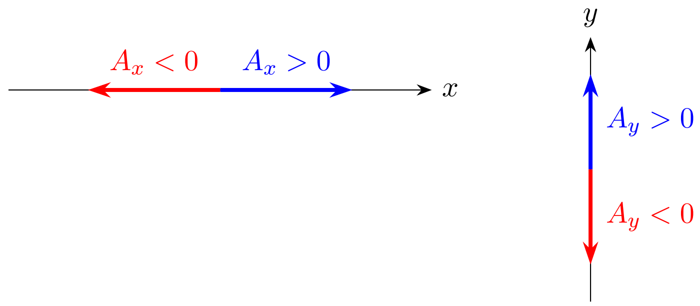


Figure 5: Le signe d'une composante indique le sens par rapport à l'axe.

Notation en composantes

$$\overrightarrow{A} = (A_x,\, A_y)$$

Pour un vecteur en trois dimensions : $\overrightarrow{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z)$

Exemple 0.12 – Écriture en composantes

Le vecteur $\overrightarrow{A}$ de la Figure **??** s'écrit :

$$\overrightarrow{A} = (5,\, 6)$$

Pourquoi peut-on décomposer un vecteur ?

À première vue, décomposer un vecteur en composantes peut sembler étrange. Après tout, marcher en diagonale de A vers B n'est pas la même chose que marcher d'abord vers l'est, puis vers le nord. Dans le monde réel, le trajet est différent!
Pourtant, **mathématiquement, le résultat est identique** : vous arrivez au même point final. Le vecteur déplacement — la flèche qui relie votre point de départ à votre point d'arrivée — est le même, peu importe le chemin emprunté.
Analogie : Imaginez que vous êtes à Rimouski et que vous décrivez la position de Matane :

- Si vous regardez vers le fleuve, Matane est « à votre gauche »
- Si vous regardez vers les terres, Matane est « à votre droite »

La **description** change selon votre référentiel, mais **Matane n'a pas bougé**! Sa position réelle dans l'espace est la même — seule la façon de l'exprimer diffère.
C'est exactement ce qui se passe avec les vecteurs : (A_x, A_y) et $\|\overrightarrow{A}\|\angle\theta$ sont deux façons de décrire **le même objet mathématique**. La décomposition en composantes nous permet d'utiliser l'algèbre ordinaire (additions et soustractions de nombres) plutôt que la géométrie, ce qui simplifie énormément les calculs.
Un peu d'histoire : Cette idée révolutionnaire remonte à **René Descartes** (1596-1650), mathématicien et philosophe français qui a inventé le *plan cartésien*. Grâce à lui, un vecteur qui « existe » comme une flèche dans l'espace peut être parfaitement décrit par deux nombres : ses composantes.

Deux représentations, un seul objet

Il est crucial de comprendre que $(A_x,\, A_y)$ et $\|\overrightarrow{A}\|\angle\theta$ sont **deux façons d'écrire exactement le même vecteur**. Ce n'est pas une approximation, ce n'est pas une simplification : c'est **mathématiquement identique**.

C'est comme écrire "une douzaine" ou "12" — même quantité, notation différente.

Équivalence des représentations

$$\overrightarrow{A} = (A_x,\, A_y) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\|\angle\theta$$

Ces deux écritures décrivent **le même vecteur**.

Passage module/orientation ↔ composantes

En utilisant la trigonométrie (SOH-CAH-TOA), on peut passer d'une représentation à l'autre :

Du module et orientation vers les composantes :

$$A_x = \|\overrightarrow{A}\|\cos\theta$$
$$A_y = \|\overrightarrow{A}\|\sin\theta$$

où $\|\overrightarrow{A}\|$ est le module et θ est l'angle par rapport à l'axe des x positifs.

Des composantes vers le module et l'orientation :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|A_y|}{|A_x|}\right) \quad \text{(angle de référence, entre } 0° \text{ et } 90°\text{)}$$

On interprète ensuite la position de l'angle selon les signes des composantes :

- Q1 : $\theta = \alpha$
- Q2 : $\theta = 180° - \alpha$
- Q3 : $\theta = 180° + \alpha$
- Q4 : $\theta = -\alpha \quad$ (ou $360° - \alpha$)

Attention

En utilisant les **valeurs absolues** des composantes, l'angle de référence α est toujours entre 0° et 90°. Il suffit ensuite de regarder les signes de A_x et A_y pour déterminer le quadrant et calculer θ.

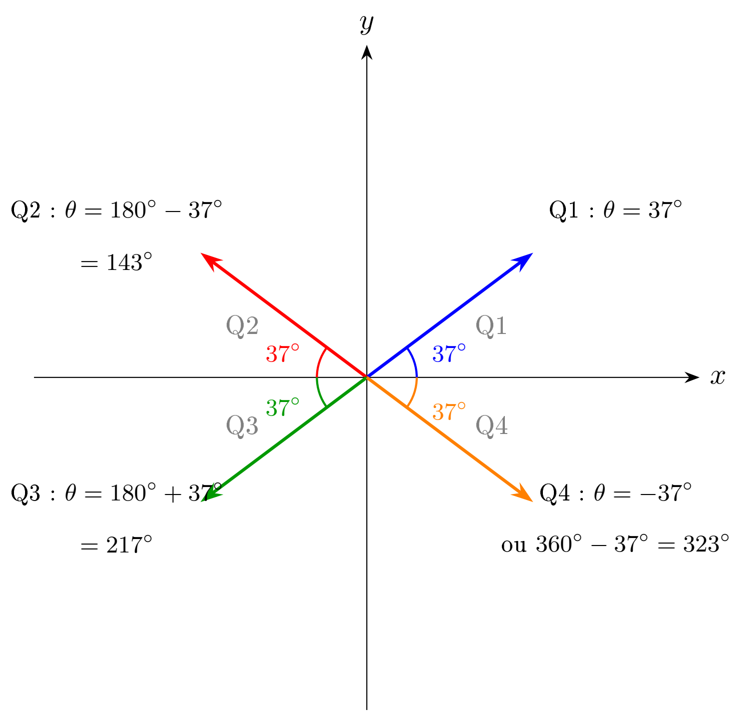


Figure 6: Méthode de l'angle de référence. On calcule d'abord $\alpha = \arctan\left(\frac{|A_y|}{|A_x|}\right)$, puis on place l'angle dans le bon quadrant.

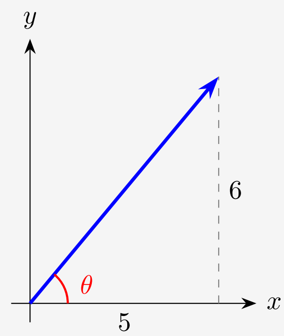
Exemple 0.13 – Module et orientation d'un vecteur (Q1)

Soit le vecteur $\vec{A} = (5, 6)$. Calculons son module et son orientation.

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{6}{5}\right) = \arctan(1{,}2) \approx 50{,}2°$$

On peut donc écrire : $\vec{A} = 7{,}81\angle 50{,}2°$



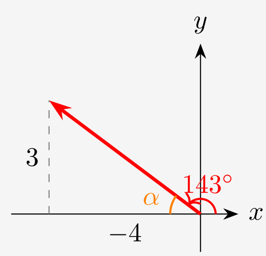
Exemple 0.14 – Module et orientation d'un vecteur (Q2)

Soit le vecteur $\vec{B} = (-4, 3)$. Calculons son module et son orientation.

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5{,}00$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|3|}{|-4|}\right) = \arctan(0{,}75) = 36{,}9°$$

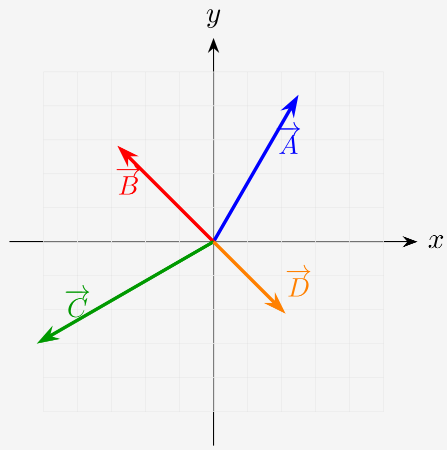
Le vecteur est en **Q2** car $B_x < 0$ et $B_y > 0$.
Donc : $\theta = 180° - 36{,}9° = 143°$



Exemple 0.15 – Décomposition en composantes

Décomposer les vecteurs suivants en composantes :

- $\vec{A} = 5{,}0\angle 60°$ (Q1)
- $\vec{B} = 4{,}0\angle 135°$ (Q2)
- $\vec{C} = 6{,}0\angle 210°$ (Q3)
- $\vec{D} = 3{,}0\angle -45°$ (Q4)



Solution :

Q1 : $\overrightarrow{A} = 5{,}0\angle 60°$ $A_x = 5{,}0\cos(60°) = 2{,}50$; $A_y = 5{,}0\sin(60°) = 4{,}33$ $\overrightarrow{A} = (2{,}50,\ 4{,}33)$

Q2 : $\overrightarrow{B} = 4{,}0\angle 135°$ $B_x = 4{,}0\cos(135°) = -2{,}83$; $B_y = 4{,}0\sin(135°) = 2{,}83$ $\overrightarrow{B} = (-2{,}83,\ 2{,}83)$

Q3 : $\overrightarrow{C} = 6{,}0\angle 210°$ $C_x = 6{,}0\cos(210°) = -5{,}20$; $C_y = 6{,}0\sin(210°) = -3{,}00$ $\overrightarrow{C} = (-5{,}20,\ -3{,}00)$

Q4 : $\overrightarrow{D} = 3{,}0\angle -45°$ $D_x = 3{,}0\cos(-45°) = 2{,}12$; $D_y = 3{,}0\sin(-45°) = -2{,}12$ $\overrightarrow{D} = (2{,}12,\ -2{,}12)$

Pratique autonome — Décomposition de vecteurs

▷ Pratique autonome 0.10

Décomposer le vecteur force $\overrightarrow{F} = 120\angle 55°$ N en ses composantes F_x et F_y.

Résolution :

Rép. : $F_x = 68{,}8\,\text{N}$, $F_y = 98{,}3\,\text{N}$, donc $\overrightarrow{F} = (68{,}8,\ 98{,}3)$ N

▷ Pratique autonome 0.11

Décomposer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = 8{,}5\angle 210°$ m/s en ses composantes.

Attention : Ce vecteur se trouve dans le troisième quadrant. Quels seront les signes des composantes?

Résolution :

Rép. : $v_x = -7{,}36\,\mathrm{m/s}$, $v_y = -4{,}25\,\mathrm{m/s}$, donc $\overrightarrow{v} = (-7{,}36,\ -4{,}25)\ \mathrm{m/s}$

▷ Pratique autonome 0.12

Un courant marin a des composantes $C_x = -2{,}4\,\mathrm{kn}$ et $C_y = 1{,}8\,\mathrm{kn}$.
Trouver le module $\|\overrightarrow{C}\|$ et l'orientation θ de ce courant.
Indice : Le vecteur est dans le deuxième quadrant (Q2).

Résolution :

Rép. : $\|\overrightarrow{C}\| = 3{,}0\,\mathrm{kn}$, $\theta = 143°$

0.6.5 Opérations sur les vecteurs

Tout comme il est possible d'additionner, de soustraire, de multiplier et de diviser des scalaires entre eux, il existe des opérations similaires pour les vecteurs.

Attention

On ne peut additionner, soustraire et égaler des grandeurs physiques que si elles ont la même dimension. Elles doivent aussi être **de même nature**. On ne peut donc pas additionner un vecteur avec un scalaire.
Par exemple, l'équation $A = \overrightarrow{B}$ et la somme $A + \overrightarrow{B}$ n'ont pas de sens.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

La seule exception est la **multiplication d'un vecteur par un scalaire**. Multiplier un vecteur par un scalaire revient à modifier le module du vecteur.

Si $\overrightarrow{A} = (A_x, A_y)$, alors :

$$k\overrightarrow{A} = (kA_x, kA_y)$$

Si le nombre k est négatif, le **sens du vecteur s'inverse**. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{A}$, que l'on écrit $-\overrightarrow{A}$, est de même module que $\overrightarrow{A}$, mais de sens contraire.

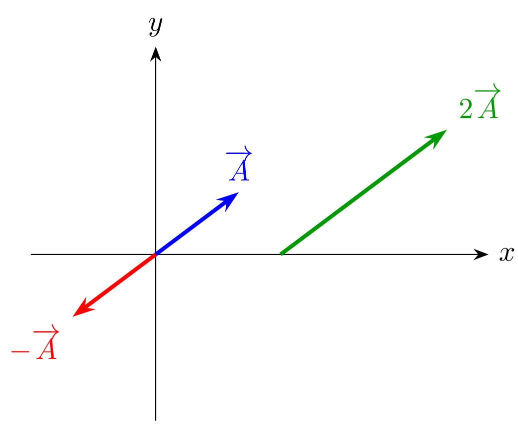


Figure 7: Les vecteurs $\overrightarrow{A}$, $2\overrightarrow{A}$ et $-\overrightarrow{A}$. Le vecteur $2\overrightarrow{A}$ a le double du module de $\overrightarrow{A}$.

Addition de vecteurs

La **somme de deux vecteurs** $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est un nouveau vecteur appelé **résultante** $\overrightarrow{R}$.

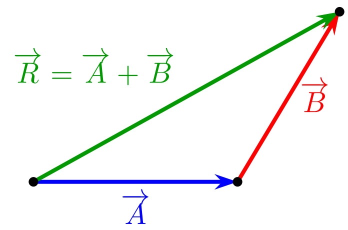


Figure 8: Addition de vecteurs : la résultante $\overrightarrow{R}$ joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier.

Attention

Lorsque l'on additionne des vecteurs, **on ne peut pas simplement additionner leurs modules**. En général :

$$\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| \neq \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$$

Contre-exemple : Soit $\overrightarrow{A} = 5{,}0\angle 30°$ et $\overrightarrow{B} = 3{,}0\angle 110°$.
Si on additionnait naïvement les modules : $\|\overrightarrow{R}\|_{\text{FAUX}} = 5{,}0 + 3{,}0 = 8{,}0$
Or, le calcul correct (que nous verrons plus loin) donne : $\|\overrightarrow{R}\|_{\text{VRAI}} = 6{,}26$
L'erreur est de **28%**! Cela montre que l'addition des modules ne fonctionne que si les vecteurs sont **parallèles et de même sens** — ce qui est rarement le cas en pratique.

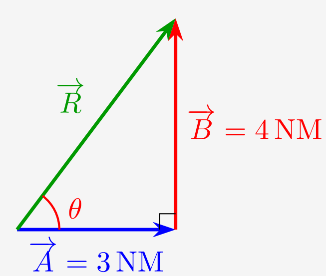
Méthode géométrique (triangle) Pour additionner deux vecteurs graphiquement :

1. Tracer le premier vecteur $\overrightarrow{A}$
2. Placer l'origine du second vecteur $\overrightarrow{B}$ à l'extrémité de $\overrightarrow{A}$
3. La résultante $\overrightarrow{R}$ va de l'origine de $\overrightarrow{A}$ à l'extrémité de $\overrightarrow{B}$

Les trois vecteurs forment un triangle. On peut utiliser la **trigonométrie** (SOH-CAH-TOA si triangle rectangle) ou les **lois des sinus et des cosinus** pour trouver le module et l'orientation de la résultante.

Exemple 0.16 – Addition de vecteurs perpendiculaires

Un bateau se déplace de 3 NM vers l'est puis de 4 NM vers le nord. Quel est son déplacement total?



Le triangle est rectangle, on utilise Pythagore :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,\text{NM}$$

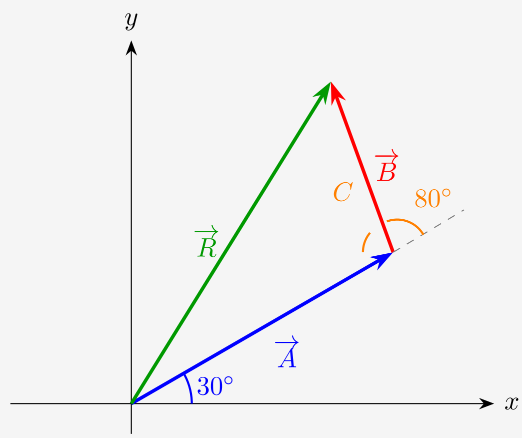
L'orientation : $\theta = \arctan(4/3) = 53{,}1^\circ$ nord de l'est.

Remarque

L'addition vectorielle est **commutative** : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

Exemple 0.17 – Méthode géométrique avec la loi des cosinus

Additionner les vecteurs $\vec{A} = 5{,}0\angle 30^\circ$ et $\vec{B} = 3{,}0\angle 110^\circ$ en utilisant la méthode géométrique.



Étape 1 : Identifier l'angle entre les vecteurs
L'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est : $110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$
Attention : Dans le triangle formé, l'angle C (entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$) est l'angle *intérieur* au triangle. Il est égal à :

$$C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

Étape 2 : Appliquer la loi des cosinus pour trouver le module
Dans le triangle formé par $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{R}$, on applique la loi des cosinus :

$$\|\vec{R}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(C)$$

$$\|\vec{R}\|^2 = 5{,}0^2 + 3{,}0^2 - 2(5{,}0)(3{,}0)\cos(100^\circ)$$

$$\|\vec{R}\|^2 = 25 + 9 - 30 \times (-0{,}174) = 34 + 5{,}21 = 39{,}2$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{39{,}2} = 6{,}26$$

Étape 3 : Appliquer la loi des sinus pour trouver l'orientation
On cherche l'angle α entre $\vec{R}$ et $\vec{A}$:

$$\frac{\sin\alpha}{\|\vec{B}\|} = \frac{\sin C}{\|\vec{R}\|} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\|\vec{B}\|\sin C}{\|\vec{R}\|} = \frac{3{,}0 \times \sin(100^\circ)}{6{,}26} = 0{,}472$$

$$\alpha = \arcsin(0{,}472) = 28{,}2°$$

L'orientation de $\overrightarrow{R}$ par rapport à l'axe des x est :

$$\theta = 30° + 28{,}2° = 58{,}2°$$

Réponse : $\overrightarrow{R} = 6{,}26\angle 58{,}2°$

Méthode des composantes (algébrique) Cette méthode est plus rapide et plus précise pour les calculs.

Addition par composantes
Si $\overrightarrow{A} = (A_x,\, A_y)$ et $\overrightarrow{B} = (B_x,\, B_y)$, alors :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (A_x + B_x,\, A_y + B_y)$$

Attention

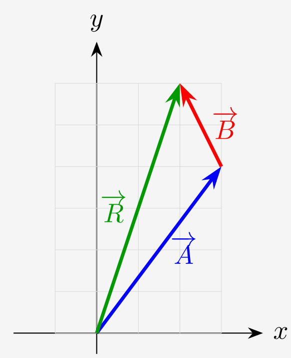
Il ne faut **jamais additionner des composantes en x avec des composantes en y**. On additionne les x avec les x et les y avec les y.

Exemple 0.18 – Addition par composantes

Soit $\overrightarrow{A} = (3,\, 4)$ et $\overrightarrow{B} = (-1,\, 2)$. Calculons $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$.

$$R_x = A_x + B_x = 3 + (-1) = 2$$
$$R_y = A_y + B_y = 4 + 2 = 6$$

Donc $\overrightarrow{R} = (2,\, 6)$.
Module : $\|\overrightarrow{R}\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$
Orientation : $\theta = \arctan(6/2) \approx 71{,}6°$



Exemple 0.19 – Méthode des composantes pour le même problème

Reprenons les vecteurs $\overrightarrow{A} = 5{,}0\angle 30°$ et $\overrightarrow{B} = 3{,}0\angle 110°$ et résolvons avec la méthode des composantes.
Étape 1 : Décomposer en composantes

$$\overrightarrow{A} : \quad A_x = 5{,}0\cos(30°) = 4{,}33 \quad A_y = 5{,}0\sin(30°) = 2{,}50$$
$$\overrightarrow{B} : \quad B_x = 3{,}0\cos(110°) = -1{,}03 \quad B_y = 3{,}0\sin(110°) = 2{,}82$$

Étape 2 : Additionner les composantes

$$R_x = 4{,}33 + (-1{,}03) = 3{,}30$$
$$R_y = 2{,}50 + 2{,}82 = 5{,}32$$

Étape 3 : Calculer module et orientation

$$\|\overrightarrow{R}\| = \sqrt{3{,}30^2 + 5{,}32^2} = \sqrt{39{,}2} = 6{,}26$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{5{,}32}{3{,}30}\right) = 58{,}2^\circ$$

Réponse : $\overrightarrow{R} = 6{,}26\angle 58{,}2^\circ$ ou $\overrightarrow{R} = (3{,}30,\ 5{,}32)$
On retrouve exactement le même résultat qu'avec la méthode géométrique, ce qui confirme l'équivalence des deux approches.

Soustraction de vecteurs

La **soustraction de deux vecteurs** revient à additionner le vecteur opposé :

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$$

En pratique, on utilise la **méthode des composantes** : on soustrait les composantes correspondantes.

Soustraction par composantes
Si $\overrightarrow{A} = (A_x,\, A_y)$ et $\overrightarrow{B} = (B_x,\, B_y)$, alors :

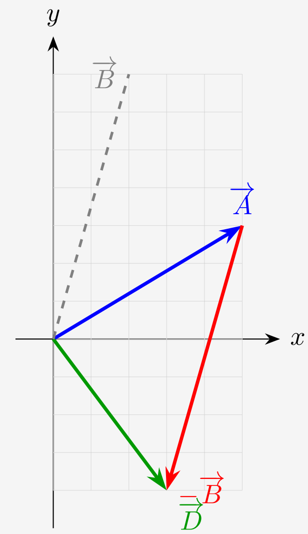
$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (A_x - B_x,\, A_y - B_y)$$

Exemple 0.20 – Soustraction de vecteurs

Soit $\overrightarrow{A} = (5,\, 3)$ et $\overrightarrow{B} = (2,\, 7)$. Calculons $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$.

$$D_x = A_x - B_x = 5 - 2 = 3$$
$$D_y = A_y - B_y = 3 - 7 = -4$$

Donc $\overrightarrow{D} = (3,\ -4)$.
Module : $\|\overrightarrow{D}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5{,}00$
Orientation : $\theta = \arctan(-4/3) = -53{,}1°$ (Q4)



Pratique autonome — Addition de vecteurs

▷ Pratique autonome 0.13

Un remorqueur exerce une force $\overrightarrow{F}_1 = 25\angle 40°$ kN sur un navire. Un second remorqueur exerce une force $\overrightarrow{F}_2 = 18\angle 140°$ kN.
Trouver la force résultante $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$ en utilisant la **méthode des composantes**.
Procédure : (1) Décomposer chaque vecteur, (2) Additionner les composantes, (3) Calculer module et orientation.

Résolution :

Rép. : $\overrightarrow{R} = 29{,}5\angle 81{,}4°$ kN (ou $\overrightarrow{R} = (4{,}41,\ 29{,}2)$ kN)

▷ Pratique autonome 0.14

Un navire navigue à une vitesse $\overrightarrow{v}_{\text{navire}} = 12\angle 60°$ nœuds par rapport à l'eau. Le courant marin est $\overrightarrow{v}_{\text{courant}} = 3{,}0\angle 180°$ nœuds (vers l'ouest).
Quelle est la vitesse résultante $\overrightarrow{v}_{\text{fond}}$ du navire par rapport au fond marin?

Résolution :

Rép. : $\overrightarrow{v}_{\text{fond}} = 11{,}4\angle 66{,}2°$ kn (ou $\overrightarrow{v}_{\text{fond}} = (3{,}00,\ 10{,}4)$ kn)

▷ Pratique autonome 0.14 (Défi)

Trois forces agissent simultanément sur une bouée d'amarrage :

- $\overrightarrow{F}_1 = (150,\ 0)$ N (tension du câble vers l'est)
- $\overrightarrow{F}_2 = 100\angle 120°$ N (force du courant)
- $\overrightarrow{F}_3 = 80\angle 240°$ N (force du vent)

Calculer la force résultante $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3$.

Résolution :

Rép. : $\overrightarrow{R} = 64{,}0\angle 40{,}9°$ N (ou $\overrightarrow{R} = (48{,}4,\ 41{,}9)$ N)

0.6.6 Vecteurs dans les problèmes en une dimension

On sera souvent amené à résoudre des problèmes à une seule dimension. Dans de telles situations, la distinction entre scalaires et vecteurs sera moins importante à faire. En effet, dans des problèmes en une seule dimension, on ne peut se déplacer que dans deux directions : vers la gauche ou vers la droite. La direction d'une grandeur est simplement encodée dans son **signe** ($+$ ou $-$).

Exemple 0.21 – Vecteur en une dimension

Dans un système dont l'axe des x est l'unique dimension, une vitesse de $v = -5\,\mathrm{m/s}$ est une vitesse dont le module est de $5\,\mathrm{m/s}$ et dont la direction est vers les x négatifs.

Remarque

Bien qu'il soit important d'être toujours conscient de la **nature des grandeurs physiques** (scalaire ou vecteur), il ne sera pas toujours nécessaire d'écrire les vecteurs avec une flèche dans les problèmes en une dimension. La direction sera encodée dans le signe, mais les grandeurs ne perdront pas leur statut de vecteur.

Compétences

Compétences	**Difficile**	**Familier**	**Minimum**	**Maîtrise**
Fournir une réponse complète à chaque question	☐	☐	☐	☐
Mettre les unités dans chaque nouvelle équation	☐	☐	☐	☐
Connaître les unités de base du SI utilisées dans Physique 1	☐	☐	☐	☐
Convertir des valeurs ayant des unités simples	☐	☐	☐	☐
Convertir des valeurs ayant des unités composées (km/h, cm^3, RPM...)	☐	☐	☐	☐
Utiliser une équation pour déterminer les unités de base	☐	☐	☐	☐
S'assurer de l'homogénéité d'une équation	☐	☐	☐	☐
Déterminer le nombre de chiffres significatifs d'une valeur	☐	☐	☐	☐
Déterminer le nombre de chiffres significatifs d'une réponse	☐	☐	☐	☐
Utiliser sin, cos, tan et Pythagore dans un triangle rectangle	☐	☐	☐	☐
Utiliser les lois des sinus et du cosinus	☐	☐	☐	☐
Différencier une grandeur vectorielle d'une grandeur scalaire	☐	☐	☐	☐
Additionner et soustraire des vecteurs	☐	☐	☐	☐
Mathématiques (essentielles mais non enseignées dans le cours)				
Isoler une variable dans une équation	☐	☐	☐	☐
Priorité des opérations	☐	☐	☐	☐
Mise en évidence	☐	☐	☐	☐
Distributivité	☐	☐	☐	☐
Proportionnalité, règle de trois, produit croisé	☐	☐	☐	☐

Chapitre 1

Cinématique

1.1 Introduction : qu'est-ce que la cinématique?

La **cinématique** est la branche de la mécanique qui se consacre à la **description du mouvement** des corps. Cette description peut être :

- **Qualitative** : « Le navire s'approche du quai en ralentissant. »
- **Mathématique** : « Le navire se déplace à 5 nuds avec une décélération[1] de 0,2 m/s^2. »

Ce que la cinématique ne fait PAS

La cinématique **décrit** le mouvement, mais elle ne cherche pas à l'**expliquer**. Les questions comme « Pourquoi le navire accélère-t-il? » ou « Quelle force est nécessaire pour freiner? » relèvent de la **dynamique**, que nous étudierons au chapitre suivant.
En cinématique, on répond aux questions : *Où? Quand? À quelle vitesse? Avec quelle accélération?*

Pour décrire complètement un mouvement, la cinématique utilise trois grandeurs fondamentales :

1. La **position** (et le **déplacement**)
2. La **vitesse**
3. L'**accélération**

Ces grandeurs sont reliées entre elles et dépendent toutes du **temps**. La description cinématique peut se faire de plusieurs façons : par des **équations mathématiques**, par des **graphiques** ou par des **tableaux de valeurs**.

[1] En physique, la *décélération* correspond simplement à une accélération dont le vecteur est opposé au vecteur vitesse. On parle aussi d'*accélération négative*.

La cinématique dans le contexte maritime

Pour un officier de navigation, la cinématique est omniprésente :

- Calculer le temps d'arrivée à partir de la vitesse et de la distance
- Prévoir la distance de freinage lors d'une manœuvre d'accostage
- Estimer la trajectoire d'un navire en approche pour éviter une collision
- Planifier une manœuvre d'homme à la mer

La maîtrise de ces concepts vous permettra de prendre des décisions éclairées en mer.

L'universalité de la cinématique

Les concepts de la cinématique sont **universels** : ils s'appliquent aussi bien à un navire qu'à une voiture, un avion, un ballon de soccer ou même une molécule. Les mêmes équations décrivent le mouvement d'un pétrolier de 300 000 tonnes et celui d'un électron dans un fil électrique!
Dans ce cours, nous utiliserons principalement des exemples maritimes, mais gardez en tête que ces principes s'appliquent à **tout objet en mouvement**.

1.1.1 Le modèle de la particule

L'observation de phénomènes physiques nous permet de constater qu'un mouvement correspond à une variation continue de la position d'un objet. Néanmoins, il est parfois possible de simplifier l'étude de ces mouvements en négligeant les dimensions de l'objet.

Modèle de la particule

Lorsqu'on ne tient pas compte des dimensions d'un objet et qu'on néglige sa rotation sur lui-même, on peut considérer que toute sa masse est concentrée en un point unique : son **centre de masse**. L'objet est alors traité comme une **particule**.

Exemple 1.1 – Quand utiliser le modèle de la particule?

Un vraquier de 200 m de long navigue en haute mer à 12 nuds. Pour calculer son temps de traversée sur une distance de 500 millesnautiques, on peut traiter le navire comme une particule : ses dimensions (200 m) sont négligeables par rapport à la distance parcourue (926 km).
Par contre, pour une manœuvre d'accostage, les dimensions du navire deviennent importantes et le modèle de la particule n'est plus approprié.

1.2 Position et déplacement

1.2.1 Système de référence

Pour décrire le mouvement d'un objet, il faut d'abord établir un **système de référence** (ou référentiel) composé de :

- Un **point d'origine** O
- Un ou plusieurs **axes orientés** (un axe en 1D, deux axes en 2D, trois axes en 3D)
- Une **unité de mesure** (généralement le mètre)

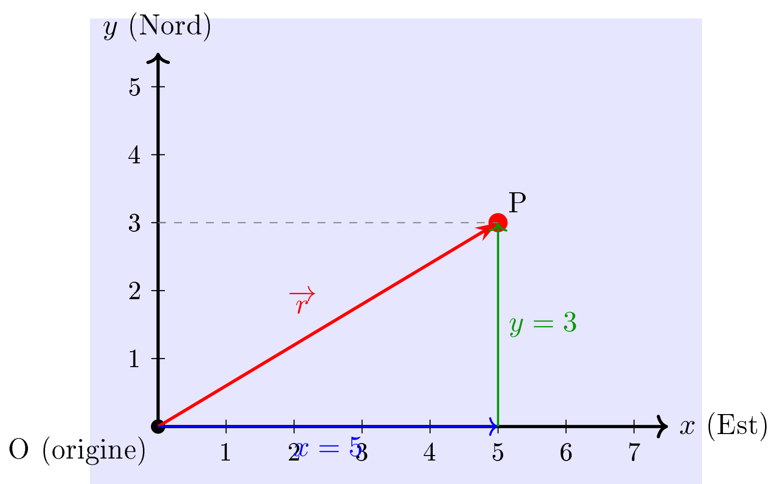
En navigation, on travaille généralement en **deux dimensions** (la surface de l'eau). Nous utiliserons donc un système d'axes x et y perpendiculaires.

Le choix de l'origine est arbitraire

Le choix du point d'origine est **complètement arbitraire** et peut être modifié selon le problème. Par exemple :

- Pour une manœuvre d'accostage, on peut placer l'origine **au quai** (ainsi $x = 0$ correspond à l'objectif)
- Pour une traversée, on peut placer l'origine **au port de départ**
- Pour un problème de collision, on peut placer l'origine **sur l'un des navires**

Un bon choix d'origine peut **simplifier considérablement** les calculs. N'hésitez pas à repositionner l'origine selon ce qui rend le problème plus simple!
Important : Quelle que soit l'origine choisie, les **grandeurs physiques** (déplacement, vitesse, accélération) restent les mêmes. Seules les **coordonnées** changent.



1.2.2 Vecteur position

Vecteur position

Le **vecteur position** $\vec{r}$ d'une particule est le vecteur qui va de l'origine O du système de référence jusqu'à la position de la particule.
En deux dimensions, le vecteur position est caractérisé par ses **deux composantes** :

$$\vec{r} = (x, y) \tag{1.1}$$

où x est la coordonnée horizontale et y est la coordonnée verticale.
L'unité SI de la position est le **mètre** (m).

Module du vecteur position

Le **module** (ou norme) du vecteur position représente la distance entre l'origine et la particule :

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

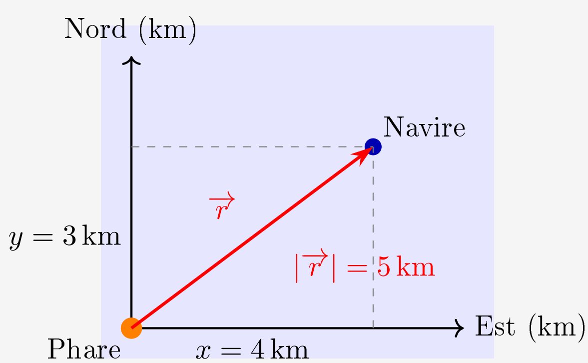
Exemple 1.2 – Position d'un navire en mer

Un navire se trouve à 4 km à l'est et 3 km au nord d'un phare pris comme origine.
Vecteur position :

$$\vec{r} = (4\,\mathrm{km}, 3\,\mathrm{km})$$

Distance au phare :

$$|\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{km}$$

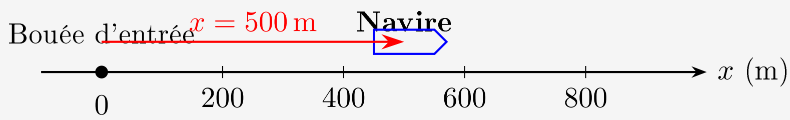


1.2.3 Cas particulier : mouvement en une dimension

Lorsque le mouvement se fait le long d'une seule direction (par exemple, un navire dans un chenal rectiligne), on peut simplifier en utilisant **un seul axe**. La position devient alors un simple nombre algébrique x (positif ou négatif selon le côté de l'origine).

Exemple 1.3 – Position d'un navire dans un chenal

Un chenal maritime est balisé par des bouées. On établit l'origine au niveau de la bouée d'entrée, avec l'axe x positif vers l'intérieur du port.



La position du navire est $x = 500\,\mathrm{m}$ (positif car dans le sens de l'axe).

1.2.4 Vecteur déplacement

Vecteur déplacement

Le **vecteur déplacement** $\Delta\vec{r}$ est la variation du vecteur position entre deux instants. C'est le vecteur qui va de la position initiale à la position finale :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \tag{1.2}$$

En composantes, cela donne :

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y) \tag{1.3}$$

$$\text{où} \quad \Delta x = x_f - x_i \quad \text{et} \quad \Delta y = y_f - y_i \tag{1.4}$$

Module du déplacement

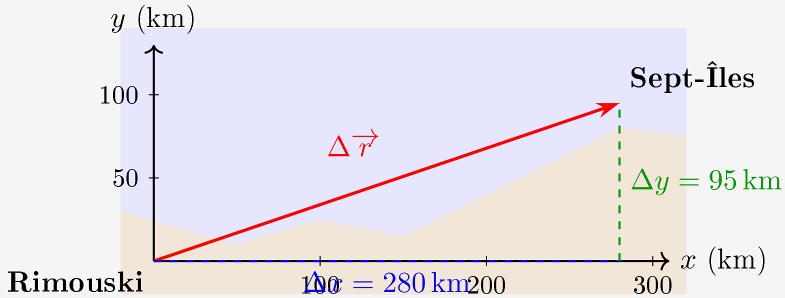
Le **module du déplacement** représente la distance en ligne droite entre la position initiale et la position finale :

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Exemple 1.4 – Déplacement d'un cargo entre deux ports

Un cargo quitte Rimouski (position initiale) pour se rendre à Sept-Îles (position finale). En prenant Rimouski comme origine :

- Position initiale : $\vec{r}_i = (0\,\mathrm{km}, 0\,\mathrm{km})$
- Position finale : $\vec{r}_f = (280\,\mathrm{km}, 95\,\mathrm{km})$ (Sept-Îles est à l'est-nord-est)



Vecteur déplacement :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (280 - 0, 95 - 0) = (280\,\text{km}, 95\,\text{km})$$

Module du déplacement (distance en ligne droite) :

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{280^2 + 95^2} = \sqrt{78400 + 9025} = \sqrt{87425} \approx 296\,\text{km}$$

En milles nautiques : 296 km $\times \dfrac{1 \text{ NM}}{1,852 \text{ km}} \approx 160\,\text{NM}$

▷ Pratique autonome 1.1

Un navire de recherche part d'une plateforme pétrolière située à l'origine et effectue deux déplacements successifs :

- Premier déplacement : $12\,\text{km}$ vers l'est
- Deuxième déplacement : $5\,\text{km}$ vers le nord

a) Écrivez le vecteur déplacement total en composantes : $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$

b) Calculez le module du déplacement total $|\Delta\vec{r}|$.

c) Quelle est la distance totale parcourue d?

Résolution :

Rép. : a) $\Delta\vec{r} = (12\,\text{km}, 5\,\text{km})$ b) $|\Delta\vec{r}| = 13\,\text{km}$ c) $d = 17\,\text{km}$

1.2.5 Déplacement vs distance parcourue

Ne jamais confondre ces deux grandeurs!

Déplacement $\Delta\vec{r}$	**Distance parcourue** d
Dépend uniquement des positions initiale et finale	Dépend du trajet emprunté
Grandeur **vectorielle** (a une direction)	Grandeur **scalaire** (pas de direction)
Le module peut être nul même si l'objet a bougé	Toujours positive ou nulle
$\lvert\Delta\vec{r}\rvert = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$d \geq \lvert\Delta\vec{r}\rvert$ toujours

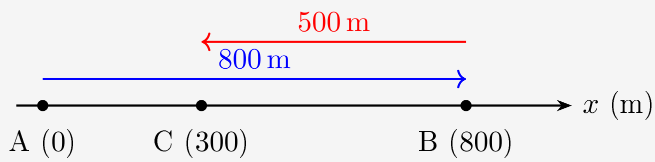
Distance parcourue

La **distance parcourue** d est la longueur totale du trajet suivi par l'objet, mesurée le long de sa trajectoire.

- C'est une grandeur **scalaire** (toujours positive ou nulle)
- Elle ne contient aucune information sur la direction
- Elle est toujours supérieure ou égale au module du déplacement : $d \geq \lvert\Delta\vec{r}\rvert$
- L'égalité $d = \lvert\Delta\vec{r}\rvert$ n'est vraie que si le mouvement est en ligne droite **sans demi-tour**

Exemple 1.5 – Manœuvre d'un remorqueur (cas 1D)

Un remorqueur effectue une manœuvre dans un port. Il part du quai A (position $x_i = 0\,\text{m}$), se rend au quai B (position $x = 800\,\text{m}$), puis revient au quai C (position $x_f = 300\,\text{m}$).



Distance parcourue :

$$d = 800\,\text{m} + 500\,\text{m} = 1300\,\text{m}$$

Déplacement :

$$\Delta x = x_f - x_i = 300\,\text{m} - 0\,\text{m} = 300\,\text{m}$$

Le déplacement ne représente que le changement *net* de position, peu importe le trajet.

▷ Pratique autonome 1.2

Un traversier part du quai A (position $x_i = 0\,\text{m}$), se rend à la bouée B située à $x = 600\,\text{m}$, puis continue jusqu'au quai C situé à $x = 200\,\text{m}$.

a) Calculez le déplacement total Δx.

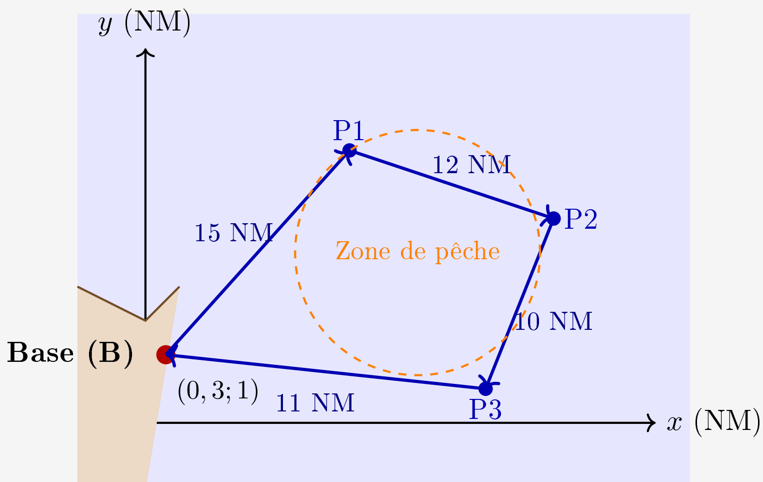
b) Calculez la distance parcourue d.

Résolution :

Rép. : a) $\Delta x = +200\,\text{m}$ b) $d = 1000\,\text{m}$

Exemple 1.6 – Patrouille maritime – trajectoire fermée (cas 2D)

Un patrouilleur des garde-côtes part de sa base (point B), effectue une ronde de surveillance autour d'une zone de pêche en passant par les points P1, P2 et P3, puis revient à sa base après 4 heures.



Distance parcourue :

$$d = 15\,\text{NM} + 12\,\text{NM} + 10\,\text{NM} + 11\,\text{NM} = 48\,\text{NM}$$

Déplacement :

Position initiale = Position finale (retour à la base), donc :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad |\Delta\vec{r}| = 0\,\text{NM}$$

Attention

Ce résultat illustre une différence fondamentale :

- La **distance parcourue** (48 NM) reflète l'effort réel du patrouilleur (carburant consommé, temps de navigation)
- Le **déplacement** (nul) indique seulement que le navire est revenu à son point de départ

Ces deux grandeurs répondent à des questions différentes!

1.3 La vitesse

1.3.1 Importance de la vitesse

La vitesse est l'une des grandeurs les plus fondamentales en physique. Elle quantifie à quel point un objet change de position rapidement.

La vitesse dans la vie quotidienne et professionnelle

La vitesse est omniprésente dans notre monde :

- Un **conducteur** surveille son indicateur de vitesse pour respecter les limites
- Un **athlète** cherche à optimiser sa vitesse de course ou de nage
- Un **pilote d'avion** doit maintenir une vitesse minimale pour ne pas décrocher
- Un **médecin** mesure la vitesse de conduction nerveuse ou la vitesse du sang
- Un **officier de navigation** calcule les temps de traversée, planifie les manœuvres et anticipe les situations de collision

Dans le contexte maritime, la vitesse est une donnée critique : elle détermine le temps d'arrivée, la consommation de carburant, et la sécurité des manœuvres.

1.3.2 Plusieurs définitions de la vitesse

La vitesse n'est pas une seule chose!

En physique, le mot « vitesse » recouvre **plusieurs concepts distincts** :

- La **vitesse scalaire moyenne** : quelle distance par unité de temps?
- La **vitesse moyenne** : quel déplacement par unité de temps? (orientée)
- La **vitesse instantanée** : quelle vitesse à un instant précis?

Ces trois définitions ne donnent **pas la même information**. Il est crucial de savoir laquelle utiliser selon le contexte.

Commençons par la plus simple : la vitesse scalaire moyenne.

1.3.3 Vitesse scalaire moyenne

Vitesse scalaire moyenne

La **vitesse scalaire moyenne** est le rapport entre la **distance totale parcourue** et l'intervalle de temps :

$$\boxed{v_{scalaire} = \frac{\text{distance parcourue}}{\Delta t} = \frac{d}{\Delta t}} \tag{1.5}$$

- L'unité SI est le **mètre par seconde** (m/s)
- La vitesse scalaire moyenne est **toujours positive ou nulle**
- Elle représente l'« effort réel » de déplacement

Unités de vitesse courantes

Unité	**Équivalence**
1 m/s	Unité SI de référence
1 km/h	$= 0{,}278\,\text{m/s} = \frac{1}{3{,}6}\,\text{m/s}$
1 nud (nd ou kn)	$= 1{,}852\,\text{km/h} = 0{,}5144\,\text{m/s}$

Le **nœud** est l'unité de vitesse en navigation : 1 nud = 1 millenautique/heure.

Exemple 1.7 – Manœuvre d'un remorqueur

Un remorqueur part du quai A, se rend au quai B (800 m), puis revient au quai C (500 m de recul). La manœuvre totale prend 20 minutes.
Données :

- Distance parcourue : $d = 800\,\text{m} + 500\,\text{m} = 1300\,\text{m}$

- Temps : $\Delta t = 20\,\text{min} \times \dfrac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} = 1200\,\text{s}$

Vitesse scalaire moyenne :

$$v_{scalaire} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{1300\,\text{m}}{1200\,\text{s}} = 1{,}08\,\text{m/s}$$

Conversion en nœuds :

$$v_{scalaire} = 1{,}08\,\text{m/s} \times \frac{1\,\text{nud}}{0{,}5144\,\text{m/s}} = 2{,}1\,\text{nuds}$$

Cette valeur représente bien l'activité réelle du remorqueur pendant ces 20 minutes.

1.3.4 Vitesse moyenne

La vitesse scalaire moyenne ne contient aucune information sur la **direction** du mouvement. Pour cela, on définit la vitesse moyenne.

Vitesse moyenne

La **vitesse moyenne** v_{moy} d'un objet est le rapport entre son **déplacement** et l'intervalle de temps correspondant :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \tag{1.6}$$

- C'est une grandeur **vectorielle** (en 1D : elle a un signe)
- Elle peut être positive, négative ou nulle
- Elle indique la **direction** du mouvement net

Signe de la vitesse moyenne

Puisque Δt est toujours positif, le **signe de la vitesse moyenne** est le même que celui du déplacement :

- $v_{moy} > 0$: mouvement net dans le sens positif de l'axe
- $v_{moy} < 0$: mouvement net dans le sens négatif de l'axe
- $v_{moy} = 0$: retour au point de départ (déplacement nul)

Exemple 1.8 – Traversée maritime

Un cargo quitte le port de Rimouski à 8h00 et arrive à Sept-Îles à 20h00. La distance directe (déplacement) entre les deux ports est de 180 millesnautiques vers l'est.

Solution :

Intervalle de temps : $\Delta t = 20h00 - 8h00 = 12\,\text{h}$
Vitesse moyenne :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{180\,\text{NM}}{12\,\text{h}} = 15\,\text{nuds}$$

Le signe positif indique que le mouvement est vers l'est (sens positif de l'axe).

▷ Pratique autonome 1.3

Un cargo quitte le port de Matane à 6h00 et arrive à Baie-Comeau à 10h00. La distance directe entre les deux ports est de 52 km vers le nord-est.
Calculez la vitesse moyenne du cargo en km/h et en nœuds.

Résolution :

Rép. : $v_{moy} = 13\,\text{km/h} \approx 7{,}0\,\text{nuds}$

1.3.5 Pourquoi les deux sont importantes?

Vitesse scalaire moyenne $v_{scalaire}$	**Vitesse moyenne** v_{moy}
Basée sur la **distance parcourue**	Basée sur le **déplacement**
Toujours positive ou nulle	Peut être positive, négative ou nulle
Représente l'**effort réel** (énergie dépensée, carburant consommé)	Représente le **résultat net** (où on s'est rendu)
N'indique pas la direction	**Indique la direction** du mouvement net
$v_{scalaire} = \dfrac{d}{\Delta t}$	$v_{moy} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Exemple 1.9 – Croisière Québec – Îles-de-la-Madeleine : comparaison

Un navire de croisière quitte Québec, fait escale aux Îles-de-la-Madeleine (à 650 km), puis revient à Québec. L'aller dure 2 jours et le retour dure 2 jours.

Vitesse scalaire moyenne :

$$v_{scalaire} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{650 + 650}{4 \text{ jours}} = 325\,\text{km/jour} \approx 13{,}5\,\text{km/h}$$

Vitesse moyenne :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{4 \text{ jours}} = 0\,\text{km/h}$$

Attention

Les deux informations sont **complémentaires** :

- La vitesse scalaire (13,5 km/h) reflète l'activité réelle du navire
- La vitesse moyenne (nulle) indique que le navire est revenu à son point de départ

Aucune des deux n'est « meilleure » — elles répondent à des questions différentes!

Exemple 1.10 – Navigation avec courant contraire

Un traversier effectue l'aller-retour entre deux rives d'un fleuve séparées de 2 km. À l'aller (avec le courant), il navigue à 12 nuds. Au retour (contre le courant), sa vitesse tombe à 8 nuds.

Conversion des vitesses en km/h :

$$v_{aller} = 12\,\text{nuds} \times \frac{1{,}852\,\text{km/h}}{1\,\text{nud}} = 22{,}2\,\text{km/h}$$

$$v_{retour} = 8\,\text{nuds} \times \frac{1{,}852\,\text{km/h}}{1\,\text{nud}} = 14{,}8\,\text{km/h}$$

Calcul des temps :

$$t_{aller} = \frac{2\,\text{km}}{22{,}2\,\text{km/h}} = 0{,}090\,\text{h} = 0{,}090\,\text{h} \times \frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}} = 5{,}4\,\text{min}$$

$$t_{retour} = \frac{2\,\text{km}}{14{,}8\,\text{km/h}} = 0{,}135\,\text{h} = 0{,}135\,\text{h} \times \frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}} = 8{,}1\,\text{min}$$

Temps total : $\Delta t = 5{,}4\,\text{min} + 8{,}1\,\text{min} = 13{,}5\,\text{min} = 0{,}225\,\text{h}$

Vitesse scalaire moyenne :

$$v_{scalaire} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{4\,\text{km}}{0{,}225\,\text{h}} = 17{,}8\,\text{km/h} = 17{,}8\,\text{km/h} \times \frac{1\,\text{nud}}{1{,}852\,\text{km/h}} = 9{,}6\,\text{nuds}$$

Attention

La vitesse scalaire moyenne (9,6 nuds) n'est **pas** la moyenne arithmétique des deux vitesses : $\frac{12+8}{2} = 10\,\text{nuds}$.
C'est une erreur fréquente! La moyenne des vitesses ne donne la vitesse scalaire moyenne que si les **temps** de parcours sont égaux.

▷ Pratique autonome 1.4

Un remorqueur effectue un aller-retour entre deux quais séparés de 3 km. À l'aller, il navigue à 10 nuds. Au retour, sa vitesse est de 6 nuds.

a) Calculez le temps total du trajet (en minutes).

b) Calculez la vitesse scalaire moyenne. *Attention au piège!*

Résolution :

Rép. : a) $\Delta t \approx 19{,}4\,\text{min}$ b) $v_{scalaire} \approx 7{,}5\,\text{nuds}$ (et non 8 nuds!)

1.3.6 Vitesse instantanée

Les vitesses moyenne et scalaire moyenne donnent une information **globale** sur un intervalle de temps. Mais que se passe-t-il à un **instant précis**?

Vitesse instantanée

La **vitesse instantanée** est la vitesse d'un objet à un instant précis. C'est la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps **infiniment petit** :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.7}$$

En termes simples : c'est ce qu'affiche le **loch** (indicateur de vitesse) d'un navire ou le **compteur** d'une voiture à un instant donné.

Vitesse moyenne vs vitesse instantanée

- La **vitesse moyenne** caractérise le mouvement sur un **intervalle de temps**
- La **vitesse instantanée** caractérise le mouvement à un **instant précis**
- Si la vitesse est constante, alors $v_{instantane} = v_{moyenne}$ à tout instant

Exemple 1.11 – Loch d'un navire

Un navire accélère en quittant le port. Son loch affiche successivement :

- À $t = 0\,\text{s}$: $v = 0\,\text{nud}$
- À $t = 60\,\text{s}$: $v = 3\,\text{nuds}$
- À $t = 120\,\text{s}$: $v = 6\,\text{nuds}$
- À $t = 180\,\text{s}$: $v = 8\,\text{nuds}$

Chacune de ces valeurs est une **vitesse instantanée**. La vitesse moyenne sur les 3 premières minutes n'est pas simplement $(0 + 3 + 6 + 8)/4$ — il faudrait connaître la position à chaque instant pour la calculer.

Interprétation graphique

Sur un graphique position-temps $x(t)$, la vitesse instantanée à un instant t correspond à la **pente de la tangente** à la courbe en ce point.
Nous approfondirons cette interprétation dans la section sur les graphiques.

1.3.7 Vitesse surface et vitesse fond

En navigation, on distingue deux vitesses fondamentales qui peuvent différer significativement :

Vitesse surface (STW) et vitesse fond (SOG)

- La **vitesse surface** (en anglais : *Speed Through Water*, **STW**) est la vitesse du navire **par rapport à l'eau** environnante. C'est ce que mesure le **loch** (speedomètre du navire).
- La **vitesse fond** (en anglais : *Speed Over Ground*, **SOG**) est la vitesse du navire **par rapport au fond marin** (ou à la Terre). C'est ce qu'affiche le **GPS**.

Ces deux vitesses diffèrent lorsqu'il y a du **courant**. La relation fondamentale est **vectorielle** :

$$\boxed{\vec{v}_{fond} = \vec{v}_{surface} + \vec{v}_{courant}} \tag{1.8}$$

ou en notation alternative : SOG = STW + courant (vectoriellement)

Importance pratique en navigation

- La **vitesse surface (STW)** détermine le comportement hydrodynamique du navire (gouvernabilité, résistance de l'eau, consommation de carburant).
- La **vitesse fond (SOG)** détermine le temps réel pour atteindre une destination et doit être utilisée pour calculer l'**heure d'arrivée estimée** (ETA).
- Un navire peut afficher 10 nuds au loch mais n'avancer que de 7 nuds par rapport au fond s'il navigue contre un courant de 3 nuds.

Exemple 1.12 – Effet du courant sur la navigation

Un cargo affiche 12 nuds au loch (vitesse surface). Il navigue dans le fleuve Saint-Laurent où le courant est de 2 nuds.
Cas 1 : Courant favorable (même sens que le navire)

$$v_{fond} = 12 + 2 = 14\,\text{nuds}$$

Cas 2 : Courant contraire (sens opposé)

$$v_{fond} = 12 - 2 = 10\,\text{nuds}$$

Dans le premier cas, le navire arrivera **plus tôt** que prévu. Dans le second cas, **plus tard**. C'est la vitesse fond (GPS) qui détermine l'heure d'arrivée réelle.

1.4 Accélération

1.4.1 Introduction : la vitesse peut varier

Jusqu'à présent, nous avons défini la vitesse comme une mesure du changement de position. Mais la vitesse elle-même peut **changer**!

Un navire qui quitte le port voit sa vitesse augmenter progressivement. Un navire qui approche d'un quai voit sa vitesse diminuer. Dans les deux cas, la vitesse **varie** au cours du temps.

Le taux de variation de la vitesse

De plus, la vitesse peut varier **rapidement** ou **lentement** :

- Une voiture de course peut passer de 0 à 100 km/h en quelques secondes
- Un pétrolier met plusieurs minutes pour atteindre sa vitesse de croisière

Le **taux de variation de la vitesse** — c'est-à-dire à quelle rapidité la vitesse change — est ce qu'on appelle l'**accélération**.

L'accélération : une grandeur vectorielle

L'accélération est à la vitesse ce que la vitesse est à la position :

Grandeur	Définition
Vitesse	Taux de variation de la **position**
Accélération	Taux de variation de la **vitesse**

Comme la vitesse, l'accélération est une grandeur **vectorielle**. En une dimension, cela signifie qu'elle a un **signe** qui indique sa direction.

1.4.2 Le signe de l'accélération : attention aux pièges!

Avant de définir formellement l'accélération, clarifions une source fréquente de confusion.

Accélération négative ≠ ralentissement!

Dans le langage courant, « accélérer » signifie aller plus vite et « décélérer » signifie ralentir. En physique, c'est **plus subtil** : le signe de l'accélération indique sa **direction**, pas si l'objet accélère ou ralentit!

Signe de v	**Signe de a**	**Effet sur le mouvement**
$v > 0$	$a > 0$	Accélère (même sens)
$v > 0$	$a < 0$	**Ralentit** (freinage)
$v < 0$	$a < 0$	Accélère (même sens)
$v < 0$	$a > 0$	**Ralentit** (freinage)

Règle simple :

- v et a de **même signe** ⇒ l'objet **accélère** (vitesse augmente en valeur absolue)
- v et a de **signes opposés** ⇒ l'objet **ralentit** (freinage)

Exemple 1.13 – Traversier se déplaçant vers l'est

Un traversier se déplace vers l'est (sens positif de l'axe). Sa vitesse est $v = 8\,\mathrm{m/s}$.
Cas 1 : Le capitaine accélère. L'accélération est $a = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

- $v > 0$ et $a > 0$: même signe ⇒ le traversier va **de plus en plus vite** vers l'est

Cas 2 : Le capitaine freine. L'accélération est $a = -0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

- $v > 0$ et $a < 0$: signes opposés ⇒ le traversier **ralentit**
- Le signe négatif de a indique un **freinage**, pas un déplacement vers l'ouest!

Exemple 1.14 – Traversier se déplaçant vers l'ouest

Maintenant, le traversier se déplace vers l'ouest (sens négatif). Sa vitesse est $v = -8\,\mathrm{m/s}$.
Cas 3 : Le capitaine accélère. L'accélération est $a = -0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

- $v < 0$ et $a < 0$: même signe ⇒ le traversier va **de plus en plus vite** vers l'ouest
- Une accélération négative peut donc être une « vraie » accélération!

Cas 4 : Le capitaine freine. L'accélération est $a = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

- $v < 0$ et $a > 0$: signes opposés ⇒ le traversier **ralentit**
- Une accélération positive peut donc être un freinage!

▷ Pratique autonome 1.5

Un navire se déplace vers l'ouest (sens négatif de l'axe) à 12 nuds. Déterminez le signe de l'accélération dans chaque cas :

a) Le capitaine augmente la puissance des moteurs pour aller plus vite.

b) Le capitaine ordonne la marche arrière pour freiner.

Dans chaque cas, le navire accélère-t-il ou ralentit-il?

Résolution :

Rép. : a) $a < 0$ (accélère vers l'ouest) b) $a > 0$ (ralentit)

1.4.3 Accélération moyenne

Accélération moyenne

L'**accélération moyenne** a_{moy} d'un objet est le rapport entre la variation de sa vitesse et l'intervalle de temps correspondant :

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \tag{1.9}$$

L'unité SI est le **mètre par seconde au carré** ($\mathrm{m/s^2}$).

Exemple 1.15 – Accélération d'un vraquier au départ

Un vraquier quitte le port de Montréal. Sa vitesse passe de 0 nud à 10 nuds en 15 minutes.
Conversion en unités SI :

$$v_i = 0\,\mathrm{m/s}$$

$$v_f = 10\,\mathrm{nuds} \times \frac{0{,}5144\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{nud}} = 5{,}14\,\mathrm{m/s}$$

$$\Delta t = 15\,\mathrm{min} \times \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 900\,\mathrm{s}$$

Accélération moyenne :

$$a_{moy} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{5{,}14\,\mathrm{m/s} - 0\,\mathrm{m/s}}{900\,\mathrm{s}} = 0{,}0057\,\mathrm{m/s^2}$$

C'est une accélération très faible comparée à celle d'une voiture ($\sim 3\,\mathrm{m/s^2}$), ce qui est typique des gros navires en raison de leur masse énorme.

Exemple 1.16 – Freinage d'un pétrolier

Un pétrolier naviguant à 15 nuds (vers l'est, donc $v_i > 0$) doit s'arrêter. En raison de sa grande inertie, le freinage prend 20 minutes.
Conversion en unités SI :

$$v_i = 15\,\text{nuds} \times \frac{0{,}5144\,\mathrm{m/s}}{1\,\text{nud}} = 7{,}72\,\mathrm{m/s}$$

$$v_f = 0\,\mathrm{m/s}$$

$$\Delta t = 20\,\mathrm{min} \times \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 1200\,\mathrm{s}$$

Accélération :

$$a_{moy} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{0\,\mathrm{m/s} - 7{,}72\,\mathrm{m/s}}{1200\,\mathrm{s}} = -0{,}0064\,\mathrm{m/s^2}$$

Analyse : Le signe négatif de a et le signe positif de v_i indiquent qu'il s'agit bien d'un **freinage** (signes opposés). Cette décélération[a] très faible explique pourquoi les pétroliers nécessitent de très longues distances pour s'arrêter.

[a] Rappel : la décélération est une accélération dont le vecteur est opposé au vecteur vitesse.

▷ Pratique autonome 1.6

Un vraquier naviguant à 8 nuds vers l'est doit s'arrêter. Son accélération de freinage est de $a = -0{,}004\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Combien de temps faut-il pour s'immobiliser complètement?

b) Quelle distance parcourt-il pendant le freinage?

Indice : Utilisez les équations du MRUA que nous verrons en détail plus loin, ou raisonnez avec la définition de l'accélération.

Résolution :

Rép. : a) $\Delta t \approx 17\,\text{min}$ b) $\Delta x \approx 2{,}1\,\text{km}$

Exemple 1.17 – Accélération d'une voiture (exemple terrestre)

Une voiture passe de $0\,\text{km/h}$ à $100\,\text{km/h}$ en $8\,\text{s}$.
Conversion :

$$v_f = 100\,\text{km/h} \times \frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}} \times \frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}} = 100\,\text{km/h} \times \frac{1\,\text{m/s}}{3{,}6\,\text{km/h}} = 27{,}8\,\text{m/s}$$

Accélération :

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{27{,}8\,\text{m/s} - 0\,\text{m/s}}{8\,\text{s}} = 3{,}47\,\text{m/s}^2$$

Comparons : la voiture accélère environ **600 fois plus vite** que le vraquier! C'est parce que le rapport puissance/masse est beaucoup plus favorable pour une voiture.

1.4.4 Accélération instantanée

Accélération instantanée

L'**accélération instantanée** est l'accélération à un instant précis. C'est la limite de l'accélération moyenne lorsque Δt tend vers zéro :

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}} \tag{1.10}$$

Interprétation graphique : Sur un graphique $v(t)$, l'accélération instantanée correspond à la **pente de la tangente** à la courbe vitesse-temps.

Accélération constante

Lorsque l'accélération est **constante**, l'accélération instantanée est égale à l'accélération moyenne à tout instant :

$$\text{Si } a = \text{constante} \Rightarrow a_{instantanée} = a_{moyenne}$$

Dans ce cas, le graphique $v(t)$ est une **droite**.

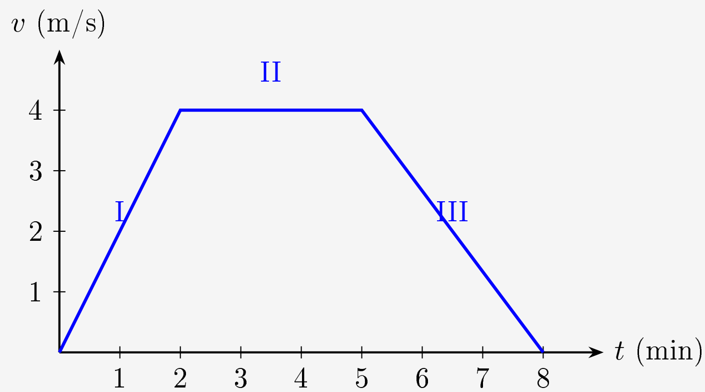
1.4.5 Interprétation graphique de l'accélération

Sur un graphique **vitesse-temps** $v(t)$:

Forme de la courbe	Accélération	Type de mouvement
Droite horizontale	$a = 0$	Vitesse constante
Droite inclinée vers le haut	$a > 0$ constante	Accélération uniforme
Droite inclinée vers le bas	$a < 0$ constante	Accélération uniforme
Courbe	a variable	Mouvement non uniforme

Exemple 1.18 – Lecture d'un graphique $v(t)$

Le graphique suivant montre la vitesse d'un cargo pendant une manœuvre :



Phase I (0 à 2 min) : Droite montante ⇒ accélération positive constante

$$a_I = \frac{4-0}{2-0} = 2\,\text{m/s/min} = 0{,}033\,\text{m/s}^2$$

Phase II (2 à 5 min) : Droite horizontale ⇒ vitesse constante, $a = 0$
Phase III (5 à 8 min) : Droite descendante ⇒ freinage (car $v > 0$ et $a < 0$)

$$a_{III} = \frac{0-4}{8-5} = -1{,}33\,\text{m/s/min} = -0{,}022\,\text{m/s}^2$$

1.5 Description graphique du mouvement

La description d'un mouvement peut se faire de plusieurs façons : par des équations, par des tableaux de valeurs, ou par des **graphiques**. Les graphiques sont particulièrement utiles car ils permettent de visualiser l'ensemble du mouvement d'un seul coup d'œil.

L'importance de savoir lire les graphiques

Les graphiques sont des outils puissants en physique, mais encore faut-il **apprendre à les lire correctement**!
Un graphique position-temps $x(t)$ ne montre **pas** la trajectoire de l'objet dans l'espace — il montre comment sa position varie dans le temps. De même, un graphique vitesse-temps $v(t)$ ne montre pas la vitesse "dans l'espace" mais son évolution temporelle.
Dans cette section, nous allons développer les compétences nécessaires pour :

- Extraire des informations quantitatives d'un graphique (vitesse, accélération)
- Interpréter qualitativement un mouvement (accéléré, ralenti, au repos)
- Relier les différents types de graphiques entre eux

1.5.1 Le graphique position-temps

Le graphique **position en fonction du temps**, noté $x(t)$, montre comment la position d'un objet varie au fil du temps.

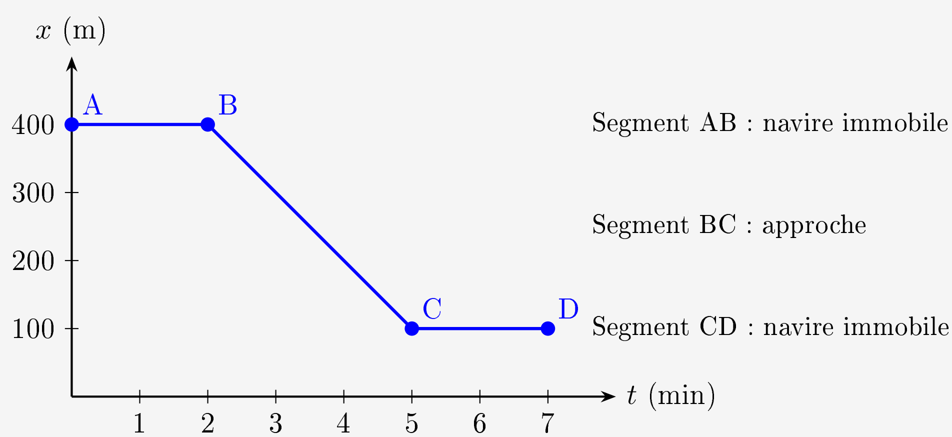
Lecture d'un graphique $x(t)$

Sur un graphique position-temps :

- L'axe horizontal représente le **temps** t
- L'axe vertical représente la **position** x
- Chaque point de la courbe donne la position de l'objet à un instant donné
- La **pente** de la courbe représente la **vitesse**

Exemple 1.19 – Approche d'un navire vers un quai

Le graphique suivant montre la position d'un navire lors de son approche vers un quai. L'origine ($x = 0$) est placée au quai, et l'axe x est positif vers le large.



Interprétation :

- **A à B** (0 à 2 min) : Le navire est **immobile** à 400 m du quai. La courbe est horizontale (pente = 0, donc vitesse = 0).
- **B à C** (2 à 5 min) : Le navire **s'approche** du quai. La courbe descend (pente négative, donc vitesse négative = mouvement vers les x décroissants).
- **C à D** (5 à 7 min) : Le navire est **immobile** à 100 m du quai, en attente du pilote.

1.5.2 Calcul de la vitesse moyenne à partir du graphique

Vitesse moyenne et pente de la sécante

Sur un graphique $x(t)$, la **vitesse moyenne** entre deux instants t_1 et t_2 correspond à la **pente de la droite (sécante)** reliant les deux points correspondants :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \text{pente de la sécante} \tag{1.11}$$

Exemple 1.20 – Calcul de la vitesse d'approche

À partir du graphique précédent, calculons la vitesse moyenne du navire pendant la phase d'approche (B à C).

Données lues sur le graphique :

- Point B : $t_1 = 2\,\text{min}$, $x_1 = 400\,\text{m}$
- Point C : $t_2 = 5\,\text{min}$, $x_2 = 100\,\text{m}$

Calcul :

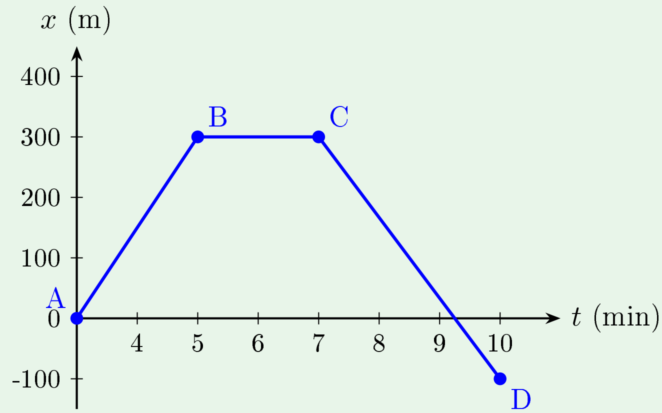
$$v_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 - 400}{5 - 2} = \frac{-300}{3} = -100\,\text{m/min}$$

Conversion en m/s : $v_{moy} = \dfrac{-100}{60} = -1{,}67\,\text{m/s}$

Le signe négatif indique que le navire se déplace vers les x décroissants (vers le quai). En valeur absolue, c'est environ 3,2 nuds, une vitesse typique pour une approche finale.

▷ Pratique autonome 1.7

Le graphique suivant montre la position d'un remorqueur dans un port pendant 10 min :



a) Décrivez qualitativement le mouvement du remorqueur pour chaque phase (AB, BC, CD).

b) Calculez la vitesse moyenne pendant la phase AB.

c) Calculez la vitesse moyenne pendant la phase CD.

d) Calculez la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet (A à D).

Résolution :

Rép. : a) AB : MRU vers les x positifs; BC : immobile; CD : MRU vers les x négatifs b) $v_{AB} = 150\,\mathrm{m/min} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$ c) $v_{CD} = -133\,\mathrm{m/min} = -2{,}2\,\mathrm{m/s}$ d) $v_{moy} = -14{,}3\,\mathrm{m/min} = -0{,}24\,\mathrm{m/s}$

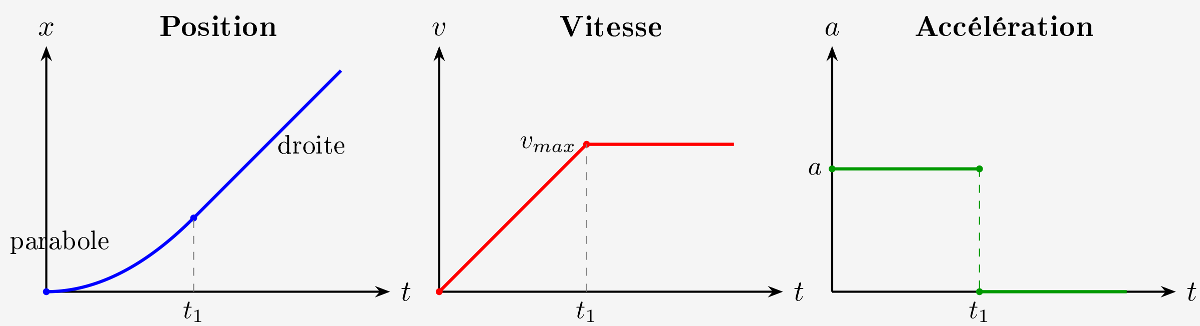
1.5.3 Interprétation de la forme de la courbe

La forme de la courbe $x(t)$ nous renseigne sur le type de mouvement :

Forme de la courbe	Type de mouvement	Vitesse
Droite horizontale	Repos (immobile)	$v = 0$
Droite inclinée vers le haut	MRU dans le sens $+x$	$v > 0$ constante
Droite inclinée vers le bas	MRU dans le sens $-x$	$v < 0$ constante
Courbe (parabole) vers le haut	Mouvement accéléré	v augmente
Courbe (parabole) vers le bas	Mouvement décéléré	v diminue

Exemple 1.21 – Départ d'un navire du port – Les trois graphiques

Un navire quitte le port. Pendant les 4 premières minutes, il accélère uniformément. Ensuite, il maintient sa vitesse de croisière. Voici les trois graphiques qui décrivent ce mouvement :



Interprétation des liens entre les graphiques :

Phase	Position $x(t)$	Vitesse $v(t)$	Accélération $a(t)$
$0 \to t_1$ (accélération)	Parabole (courbée vers le haut)	Droite montante	Constante positive
$t_1 \to$ fin (croisière)	Droite inclinée	Horizontale	Nulle

Idéalisation des graphiques – Limites du modèle

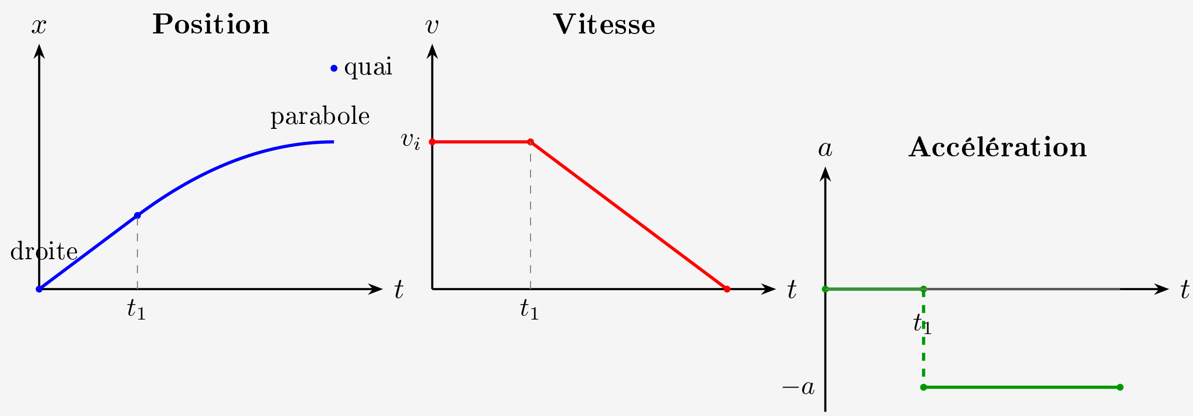
Les graphiques avec des **angles vifs** (changements de pente instantanés) sont une **idéalisation mathématique**. Dans la réalité :

- L'**inertie** du navire empêche tout changement instantané de vitesse ou d'accélération
- Les courbes réelles sont toujours **plus lisses** (pas de discontinuités)
- Un navire de 100 000 tonnes ne peut pas passer d'une accélération constante à une accélération nulle en un instant

Ces modèles simplifiés restent très utiles pour comprendre les principes fondamentaux et faire des calculs approchés.

Exemple 1.22 – Arrivée d'un navire au port – Les trois graphiques

Un navire approche du quai. Il navigue d'abord à vitesse constante, puis freine uniformément jusqu'à l'arrêt.



Interprétation :

Phase	**Position** $x(t)$	**Vitesse** $v(t)$	**Accélération** $a(t)$
$0 \to t_1$ (approche)	Droite inclinée	Horizontale	Nulle
$t_1 \to$ fin (freinage)	Parabole (s'aplatit)	Droite descendante	Constante négative

Attention

Notez que pendant le freinage :

- La **position continue d'augmenter** (le navire avance toujours vers le quai)
- La **vitesse diminue** (le navire ralentit)
- L'**accélération est négative** (elle s'oppose au mouvement)

La position augmente de moins en moins vite : c'est pourquoi la parabole s'aplatit.

1.5.4 Le graphique vitesse-temps

Le graphique **vitesse en fonction du temps**, noté $v(t)$, est complémentaire au graphique position-temps.

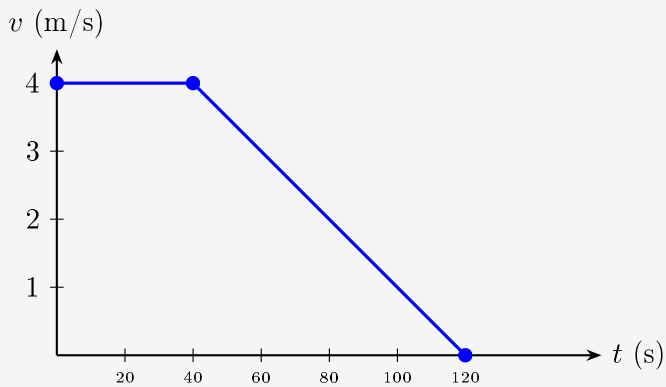
Lecture d'un graphique $v(t)$

Sur un graphique vitesse-temps :

- L'axe horizontal représente le **temps** t
- L'axe vertical représente la **vitesse** v
- La **pente** de la courbe représente l'**accélération**

Exemple 1.23 – Manœuvre d'accostage d'un traversier

Voici le graphique $v(t)$ d'un traversier lors de son accostage :



Interprétation :

- **0 à 40 s** : Vitesse constante de 4 m/s (MRU pendant l'approche). La pente est nulle, donc l'accélération est nulle.
- **40 à 120 s** : La vitesse diminue linéairement jusqu'à zéro (freinage). La pente est négative et constante, donc l'accélération est constante et négative (MRUA).

Calcul de l'accélération pendant le freinage :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 4}{120 - 40} = \frac{-4}{80} = -0{,}05\,\mathrm{m/s^2}$$

1.5.5 L'aire sous la courbe

Nous avons vu que la **pente** d'un graphique permet d'obtenir le taux de variation d'une grandeur (la vitesse à partir de $x(t)$, l'accélération à partir de $v(t)$). L'**aire sous la courbe** permet de faire l'opération **inverse**.

Aire sous la courbe $v(t)$: le déplacement

Aire sous la courbe vitesse-temps

Sur un graphique $v(t)$, l'**aire** entre la courbe et l'axe horizontal (l'axe t) représente le **déplacement** de l'objet :

$$\boxed{\Delta x = \text{aire sous la courbe } v(t)} \tag{1.12}$$

Convention de signe :

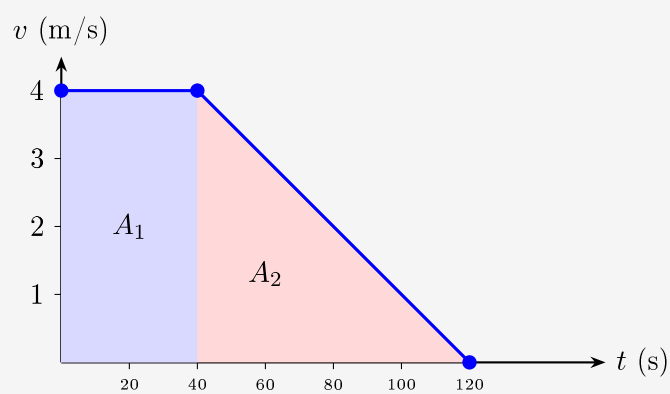
- L'aire **au-dessus** de l'axe t (quand $v > 0$) contribue **positivement** au déplacement
- L'aire **en dessous** de l'axe t (quand $v < 0$) contribue **négativement** au déplacement

Pourquoi l'aire donne-t-elle le déplacement?

L'intuition est simple : si un objet se déplace à 4 m/s pendant 3 s, il parcourt $4 \times 3 = 12$ m. Or, 4×3 est exactement l'aire du rectangle de hauteur $v = 4$ et de largeur $\Delta t = 3$ sur le graphique $v(t)$.
Ce raisonnement se généralise à toute forme de courbe : on « découpe » l'aire en petits rectangles infiniment fins, ce qui donne le déplacement total.

Exemple 1.24 – Manœuvre d'accostage – déplacement par l'aire

Reprenons le graphique $v(t)$ du traversier lors de son accostage :



Le déplacement total est la somme des deux aires :
Aire A_1 (rectangle, 0 à 40 s) :

$$A_1 = \text{base} \times \text{hauteur} = 40\,\text{s} \times 4\,\text{m/s} = 160\,\text{m}$$

Aire A_2 (triangle, 40 à 120 s) :

$$A_2 = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times 80\,\text{s} \times 4\,\text{m/s} = 160\,\text{m}$$

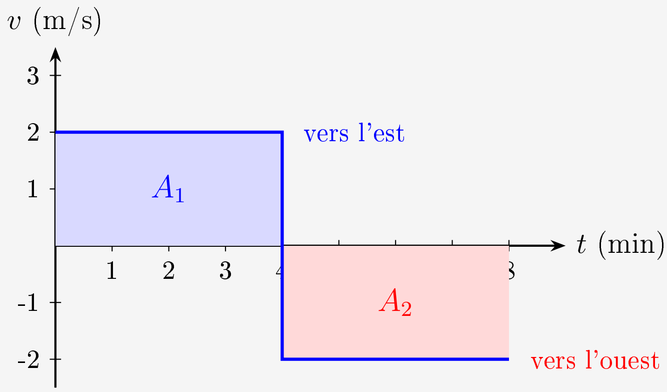
Déplacement total :

$$\Delta x = A_1 + A_2 = 160 + 160 = 320\,\text{m}$$

Le traversier a parcouru 320 m entre le début de la manœuvre et l'arrêt complet.

Exemple 1.25 – Manœuvre aller-retour d'un remorqueur

Un remorqueur effectue une manœuvre dans un port. Son graphique $v(t)$ est le suivant :



Aire A_1 (au-dessus de l'axe, 0 à 4 min) :

$$A_1 = 4 \times 60 \times 2 = +480\,\text{m}$$

Aire A_2 (en dessous de l'axe, 4 à 8 min) :

$$A_2 = 4 \times 60 \times (-2) = -480\,\text{m}$$

Déplacement total :

$$\Delta x = A_1 + A_2 = 480 + (-480) = 0\,\text{m}$$

Distance parcourue :

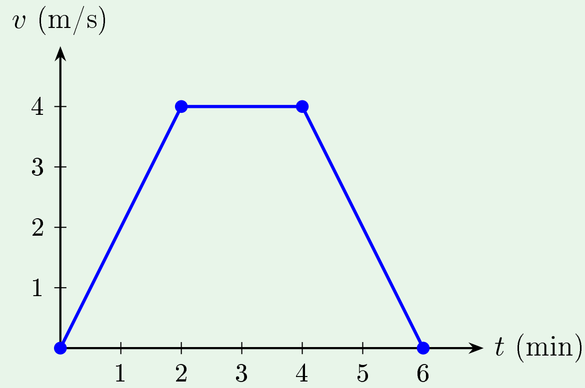
$$d = |A_1| + |A_2| = 480 + 480 = 960\,\text{m}$$

Attention

Le déplacement est nul (retour au point de départ), mais la distance parcourue est de 960 m. C'est exactement la distinction entre déplacement et distance que nous avons vue à la section précédente, mais retrouvée ici par la méthode graphique!

▷ Pratique autonome 1.8

Le graphique $v(t)$ suivant montre la vitesse d'un cargo pendant une manœuvre de 6 min :



a) Calculez l'accélération pendant chaque phase du mouvement.

b) Calculez le déplacement total en utilisant l'aire sous la courbe.

c) Vérifiez votre réponse en b) à l'aide des équations du MRUA.

Indice : Décomposez l'aire en formes géométriques simples (triangles et rectangles).

Résolution :

Rép. : a) $a_I = 0{,}033\,\mathrm{m/s^2}$, $a_{II} = 0$, $a_{III} = -0{,}033\,\mathrm{m/s^2}$ b) $\Delta x = 960\,\mathrm{m}$ (triangle + rectangle + triangle $= 240 + 480 + 240$) c) Vérification : $\Delta x_I = 240$, $\Delta x_{II} = 480$, $\Delta x_{III} = 240$, total $= 960\,\mathrm{m}$ ✓

Aire sous la courbe $a(t)$: la variation de vitesse

Le même raisonnement s'applique au graphique $a(t)$:

Aire sous la courbe accélération-temps

Sur un graphique $a(t)$, l'**aire** entre la courbe et l'axe horizontal représente la **variation de vitesse** :

$$\Delta v = v_f - v_i = \text{aire sous la courbe } a(t) \tag{1.13}$$

Exemple 1.26 – Variation de vitesse par l'aire sous $a(t)$

Reprenons l'exemple du départ d'un navire du port (vu précédemment). Le graphique $a(t)$ montre une accélération constante de 0,03 m/s^2 pendant les 3 premières minutes, puis une accélération nulle.
Quelle est la vitesse du navire à $t = 3\,\text{min}$, sachant que $v_i = 0\,\text{m/s}$?
Aire sous $a(t)$ de 0 à 3 min :

$$\Delta v = a \times \Delta t = 0{,}03\,\text{m/s}^2 \times (3\,\text{min} \times 60\,\text{s/min}) = 5{,}4\,\text{m/s}$$

Donc : $v_f = v_i + \Delta v = 0 + 5,4 = 5{,}4\,\text{m/s} \approx 10{,}5\,\text{nuds}$
C'est bien la vitesse de croisière atteinte après la phase d'accélération.

1.5.6 Résumé : pente et aire

Les deux outils fondamentaux de l'analyse graphique

Graphique	**Pente** donne...	**Aire** donne...
$x(t)$	Vitesse v	—
$v(t)$	Accélération a	Déplacement Δx
$a(t)$	—	Variation de vitesse Δv

Retenez le schéma :

$$x(t) \xrightarrow{\text{pente}} v(t) \xrightarrow{\text{pente}} a(t)$$

$$x(t) \xleftarrow{\text{aire}} v(t) \xleftarrow{\text{aire}} a(t)$$

La pente et l'aire sont des opérations **inverses** : la pente « descend » d'un niveau (position → vitesse → accélération), tandis que l'aire « remonte » d'un niveau (accélération → vitesse → position).

1.6 Description mathématique du mouvement

1.6.1 Introduction : la puissance des équations

Jusqu'à présent, nous avons décrit le mouvement de deux façons :

- **Qualitativement** : en utilisant des mots (accélération, freinage, repos...)
- **Graphiquement** : en traçant des courbes $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$

Ces approches sont utiles, mais elles ont leurs limites. Pour faire des **prédictions précises** — comme calculer exactement où sera un navire dans 2 heures, ou quelle distance de freinage est nécessaire — nous avons besoin d'un outil plus puissant : les **équations de la cinématique**.

Pourquoi des équations?

Les équations permettent de :

- Calculer des valeurs **numériques précises**
- Faire des **prédictions** sur le mouvement futur
- Résoudre des problèmes **inverses** (ex: quelle vitesse initiale pour atteindre une cible?)
- Analyser des situations **complexes** impliquant plusieurs objets

Dans cette section, nous allons développer les équations pour deux types de mouvement fondamentaux :

1. Le **Mouvement Rectiligne Uniforme** (MRU) : vitesse constante
2. Le **Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré** (MRUA) : accélération constante

Ces deux modèles permettent de décrire la grande majorité des situations rencontrées en navigation.

1.6.2 Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Un **mouvement rectiligne uniforme** est un mouvement en ligne droite à **vitesse constante**.
Dans un MRU :

- La vitesse ne change pas : $v =$ constante
- L'accélération est nulle : $a = 0$
- Le graphique $x(t)$ est une **droite**
- Le graphique $v(t)$ est une **droite horizontale**

Dérivation de l'équation du MRU

Partons de la définition de la vitesse moyenne :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Puisque la vitesse est constante dans un MRU, on peut isoler le déplacement :

Équation du MRU

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \qquad \text{ou} \qquad x_f = x_i + v \cdot \Delta t \tag{1.14}$$

Interprétation intuitive

L'équation dit simplement : « la distance parcourue est égale à la vitesse multipliée par le temps ». C'est la formule que tout le monde utilise intuitivement pour calculer, par exemple, le temps d'un trajet en voiture.

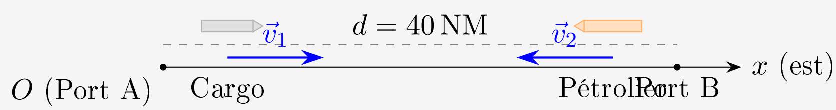
Exemple 1.27 – Cargo en MRU

Un cargo navigue en ligne droite à 12 nuds (6,17 m/s). Quelle distance parcourt-il en 3 heures?
Solution :

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 12 \times 3 = 36\,\text{NM}$$

Ou en SI : $\Delta x = 6,17 \times (3 \times 3600) = 66\,636\,\text{m} \approx 66{,}6\,\text{km}$

Exemple 1.28 – Rencontre de deux navires (MRU)



Un cargo quitte le port A vers l'est à $v_1 = 12$ nuds. Au même moment, un pétrolier quitte le port B, situé à 40 NM à l'est de A, et se dirige vers l'ouest à $v_2 = 8$ nuds.

a) S'ils partent au même instant, après combien de temps se croiseront-ils et à quelle position?

b) Si le pétrolier part 30 min après le cargo, où et quand se croiseront-ils?

Référentiel : Origine au port A, axe x positif vers l'est.
a) Départ simultané :
Équations de position :

$$x_1(t) = v_1 \cdot t = 12t$$
$$x_2(t) = d - v_2 \cdot t = 40 - 8t$$

Rencontre quand $x_1 = x_2$:

$$\begin{aligned} 12t &= 40 - 8t \\ 20t &= 40 \\ t &= 2\,\text{h} \end{aligned}$$

Position : $x = 12 \times 2 = 24\,\text{NM}$ à l'est du port A.
b) Départ décalé ($30\,\text{min}$ **de retard pour le pétrolier) :**
Pendant les 30 premières minutes, seul le cargo avance :

$$x_1(0,5\ \text{h}) = 12 \times 0,5 = 6\,\text{NM}$$

Après $t' = 0$ (moment où le pétrolier part) :

$$\begin{aligned} x_1(t') &= 6 + 12t' \\ x_2(t') &= 40 - 8t' \end{aligned}$$

Rencontre :

$$\begin{aligned} 6 + 12t' &= 40 - 8t' \\ 20t' &= 34 \\ t' &= 1{,}7\,\text{h} = 1\,\text{h}\,42\,\text{min} \end{aligned}$$

Position : $x = 6 + 12 \times 1,7 = 26{,}4\,\text{NM}$ à l'est du port A.
Temps total depuis le départ du cargo : $0,5 + 1,7 = 2{,}2\,\text{h} = 2\,\text{h}\,12\,\text{min}$

Le MRU est un cas idéal

En pratique, un mouvement parfaitement uniforme est rare. Un navire subit des variations de vitesse dues aux vagues, au vent, aux courants. Le MRU est un **modèle simplifié** qui donne de bonnes approximations lorsque ces variations sont faibles.

1.6.3 Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA)

Le MRU décrit les situations où la vitesse est constante. Mais que se passe-t-il quand un navire **accélère** ou **freine**? C'est là qu'intervient le MRUA.

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Un **mouvement rectiligne uniformément accéléré** est un mouvement en ligne droite où l'**accélération est constante** :

$$a = \text{constante} \neq 0$$

Dans un MRUA :

- L'accélération ne change pas au cours du temps
- La vitesse varie **linéairement** avec le temps
- Le graphique $v(t)$ est une **droite inclinée**
- Le graphique $x(t)$ est une **parabole**

Pourquoi étudier le MRUA?

Le MRUA est le modèle le plus simple pour décrire :

- Les phases de **démarrage** (accélération positive)
- Les phases de **freinage** (accélération négative)
- La **chute libre** (accélération $= g$)

C'est un modèle fondamental qui s'applique à de très nombreuses situations!

Dérivation des équations du MRUA

L'idée clé est de **partir des définitions de base** et de les combiner pour obtenir des équations utiles. Procédons étape par étape.

Équation 1 : Vitesse en fonction du temps

Par définition de l'accélération :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

En isolant v_f :

$$\boxed{v_f = v_i + a \cdot \Delta t} \tag{1.15}$$

Interprétation : La vitesse finale égale la vitesse initiale plus le « gain de vitesse » ($a \cdot \Delta t$).

Équation 2 : Vitesse moyenne dans un MRUA

Puisque la vitesse varie linéairement (le graphique $v(t)$ est une droite), la vitesse moyenne est simplement la **moyenne arithmétique** des vitesses initiale et finale :

$$\boxed{v_{moy} = \frac{v_i + v_f}{2}} \tag{1.16}$$

Cette formule n'est valide QUE pour un MRUA!

Équation 3 : Déplacement en fonction des vitesses

Par définition de la vitesse moyenne : $\Delta x = v_{moy} \cdot \Delta t$

En remplaçant v_{moy} par l'équation **??** :

$$\boxed{\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot \Delta t} \tag{1.17}$$

Utile quand on connaît les deux vitesses et le temps.

Équation 4 : Déplacement en fonction de a et t

Substituons l'équation **??** dans l'équation **??** :

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{v_i + (v_i + a\Delta t)}{2} \cdot \Delta t \\ &= \frac{2v_i + a\Delta t}{2} \cdot \Delta t \\ &= v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2} \tag{1.18}$$

La formule la plus utilisée! Elle donne la position à tout instant.

Équation 5 : L'équation sans le temps

Parfois, on ne connaît pas le temps et on ne veut pas le calculer. On peut éliminer Δt entre les équations **??** et **??**.

De l'équation **??** : $\Delta t = \frac{v_f - v_i}{a}$

En substituant dans l'équation **??** :

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$$

En réarrangeant :

$$\boxed{v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x} \tag{1.19}$$

Interprétation intuitive de l'équation ??

Cette équation est particulière car elle relie directement la vitesse au déplacement, **sans passer par le temps**.
Pourquoi v^2 et pas v?
Imaginons deux situations de freinage :

- Voiture A : $v_i = 50\,\text{km/h}$, freine jusqu'à l'arrêt
- Voiture B : $v_i = 100\,\text{km/h}$ (le double), freine avec la même décélération

Intuitivement, on pourrait penser que B nécessite le double de distance pour s'arrêter. **Faux!** L'équation nous dit que $\Delta x \propto v_i^2$, donc B nécessite **quatre fois** plus de distance!
C'est parce que :

1. B roule deux fois plus vite, donc parcourt plus de distance à chaque seconde
2. B met aussi deux fois plus de temps à s'arrêter (car $\Delta t = v_i/|a|$)

L'effet se **multiplie** : $2 \times 2 = 4$. D'où le v^2.
Applications typiques :

- Calculer une **distance de freinage** (trouver Δx quand $v_f = 0$)
- Trouver la **vitesse finale** après un certain déplacement
- Déterminer l'**accélération nécessaire** pour atteindre une vitesse sur une distance donnée

Lien avec l'énergie : En multipliant par $\frac{1}{2}m$, on obtient le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + (ma)\Delta x$, soit : énergie cinétique finale = énergie cinétique initiale + travail de la force. Cette connexion sera approfondie au chapitre 2.

Tableau récapitulatif

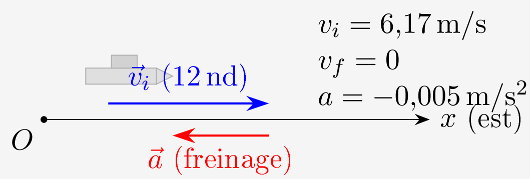
No	Équation	Variables présentes	Variable absente
1	$v_f = v_i + a\Delta t$	v_f, v_i, a, Δt	Δx
2	$v_{moy} = \dfrac{v_i + v_f}{2}$	v_{moy}, v_i, v_f	a, Δt, Δx
3	$\Delta x = \dfrac{v_i + v_f}{2}\Delta t$	Δx, v_i, v_f, Δt	a
4	$\Delta x = v_i\Delta t + \dfrac{1}{2}a(\Delta t)^2$	Δx, v_i, a, Δt	v_f
5	$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	v_f, v_i, a, Δx	Δt

Stratégie de résolution
Pour choisir la bonne équation :

1. Dessiner un **schéma** et y inscrire le **système d'axes** (orientation, origine, sens positif) ainsi que les **données** du problème
2. Identifier les **données** du problème (ce qu'on connaît)
3. Identifier l'**inconnue** recherchée (ce qu'on cherche)
4. Choisir l'équation qui contient l'inconnue et les données, mais **pas** la variable qu'on ne connaît pas

1.6.4 Applications du MRUA

Exemple 1.29 – Distance de freinage d'un cargo



Un cargo navigue à 12 nuds lorsque le capitaine ordonne l'arrêt des machines. Le navire décélère à $0{,}005\,\mathrm{m/s^2}$. Quelle distance parcourt-il avant de s'immobiliser?
Données :

- $v_i = 12\,\text{nuds} \times \dfrac{0{,}5144\,\mathrm{m/s}}{1\,\text{nud}} = 6{,}17\,\mathrm{m/s}$
- $v_f = 0\,\mathrm{m/s}$ (arrêt)
- $a = -0{,}005\,\mathrm{m/s^2}$ (freinage)

Inconnue : $\Delta x = ?$
Choix de l'équation : On cherche Δx, on connaît v_i, v_f, a, mais pas $\Delta t \Rightarrow$ Équation 5
Solution :

$$\begin{aligned}
v_f^2 &= v_i^2 + 2a\Delta x\\
(0\,\mathrm{m/s})^2 &= (6{,}17\,\mathrm{m/s})^2 + 2(-0{,}005\,\mathrm{m/s^2})\Delta x\\
0{,}01\,\mathrm{m/s^2}\cdot\Delta x &= 38{,}07\,\mathrm{m^2/s^2}\\
\Delta x &= 3807\,\mathrm{m} \approx 3{,}8\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

Conversion en milles nautiques : $\Delta x = 3{,}8\,\mathrm{km} \times \dfrac{1\,\mathrm{NM}}{1{,}852\,\mathrm{km}} \approx 2{,}1\,\mathrm{NM}$

Attention

Cette distance de freinage énorme explique pourquoi les officiers de navigation doivent anticiper les manœuvres bien à l'avance!
Comparaison : Une voiture à 90 km/h s'arrête en ~ 40 m. Un cargo à la même vitesse s'arrête en ~ 3800 m, soit **100 fois plus loin**!

▷ Pratique autonome 1.9

Un traversier navigue à 18 nuds lorsque le capitaine ordonne l'arrêt des machines. La décélération est de 0,01 m/s^2.

a) Quelle distance parcourt-il avant de s'immobiliser?

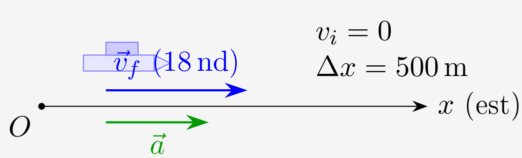
b) Combien de temps dure le freinage?

Indice : Choisissez l'équation du MRUA qui ne contient pas la variable inconnue que vous ne cherchez pas.

Résolution :

Rép. : a) $\Delta x \approx 4{,}3$ km   b) $\Delta t \approx 15{,}4$ min

Exemple 1.30 – Accélération d'un traversier



Un traversier quitte le quai et atteint sa vitesse de croisière de 18 nuds après avoir parcouru 500 m. Calculez :

a) Son accélération

b) Le temps nécessaire pour atteindre cette vitesse

Données :

- $v_i = 0\,\text{m/s}$ (départ du repos)
- $v_f = 18\,\text{nuds} \times \dfrac{0{,}5144\,\text{m/s}}{1\,\text{nud}} = 9{,}26\,\text{m/s}$
- $\Delta x = 500\,\text{m}$

Solution a) : Équation 5 (on ne connaît pas Δt)

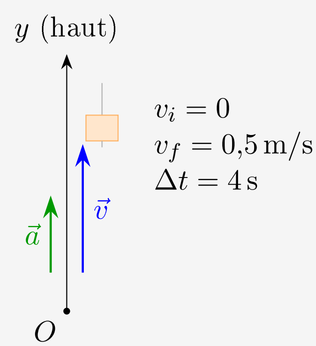
$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + 2a\Delta x \\ (9{,}26\,\text{m/s})^2 &= (0\,\text{m/s})^2 + 2a(500\,\text{m}) \\ a &= \frac{85{,}75\,\text{m}^2/\text{s}^2}{1000\,\text{m}} = 0{,}086\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Solution b) : Équation 1 (maintenant qu'on connaît a)

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + a\Delta t \\ 9,26 &= 0 + 0,086 \cdot \Delta t \\ \Delta t &= \frac{9,26}{0,086} = 108\,\text{s} \approx 1{,}8\,\text{min} \end{aligned}$$

Réponses : a) $a = 0{,}086\,\text{m/s}^2$ b) $\Delta t \approx 1\,\text{min}\ 48\,\text{s}$

Exemple 1.31 – Chargement par grue



Une grue portuaire soulève un conteneur. Le conteneur part du repos et atteint une vitesse de $0{,}5\,\text{m/s}$ après $4\,\text{s}$, puis continue à vitesse constante.

a) Quelle est l'accélération pendant la phase de démarrage?

b) Quelle hauteur le conteneur a-t-il atteinte après $4\,\text{s}$?

c) Quelle hauteur atteint-il après $10\,\text{s}$ au total?

Solution a) :

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{0,5 - 0}{4} = 0{,}125\,\text{m/s}^2$$

Solution b) : Phase accélérée (MRUA)

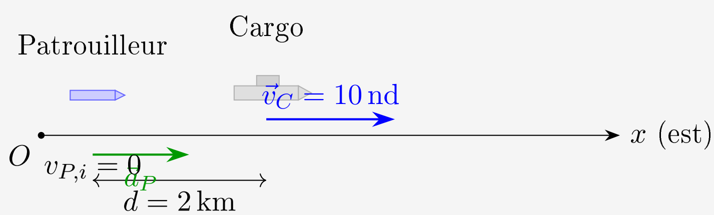
$$\Delta y_1 = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = 0 + \frac{1}{2}(0,125)(4)^2 = 1\,\mathrm{m}$$

Solution c) : Phase à vitesse constante (MRU) : 6 s à 0,5 m/s

$$\Delta y_2 = v \cdot \Delta t = 0,5 \times 6 = 3\,\mathrm{m}$$

Hauteur totale : $\Delta y = 1 + 3 = 4\,\mathrm{m}$

Exemple 1.32 – Interception : patrouilleur et cargo (MRU + MRUA)



Un cargo navigue en MRU à $v_C = 10$ nuds (5,14 m/s) vers l'est. Un patrouilleur de la Garde côtière, initialement au repos à $d = 2$ km derrière le cargo, démarre avec une accélération constante de $a_P = 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Après combien de temps le patrouilleur rattrapera-t-il le cargo?

b) À quelle vitesse le patrouilleur se déplacera-t-il à ce moment?

c) Quelle distance aura parcourue chaque navire?

Référentiel : Origine à la position initiale du patrouilleur, axe x positif vers l'est.
Équations de position :

$$\text{Patrouilleur (MRUA) :} \quad x_P(t) = \frac{1}{2} a_P t^2 = \frac{1}{2}(0,15)t^2 = 0,075t^2$$

$$\text{Cargo (MRU) :} \quad x_C(t) = d + v_C \cdot t = 2000 + 5,14t$$

a) Temps d'interception :
Rencontre quand $x_P = x_C$:

$$0,075t^2 = 2000 + 5,14t$$
$$0,075t^2 - 5,14t - 2000 = 0$$

Par la formule quadratique ($a = 0,075$, $b = -5,14$, $c = -2000$) :

$$t = \frac{5,14 \pm \sqrt{(-5,14)^2 - 4(0,075)(-2000)}}{2(0,075)} = \frac{5,14 \pm \sqrt{26,4 + 600}}{0,15}$$

$$t = \frac{5,14 \pm 25,0}{0,15}$$

Solution positive : $t = \dfrac{5,14 + 25,0}{0,15} = 201\,\text{s} \approx 3\,\text{min}\,21\,\text{s}$

b) Vitesse du patrouilleur à l'interception :

$$v_P = v_{P,i} + a_P t = 0 + 0,15 \times 201 = 30{,}2\,\text{m/s}$$

Conversion : $v_P = 30,2 \times \dfrac{1}{0,5144} = 58{,}7\,\text{nuds}$

c) Distances parcourues :

$$\Delta x_P = \frac{1}{2} a_P t^2 = \frac{1}{2}(0,15)(201)^2 = 3030\,\text{m} \approx 3{,}0\,\text{km}$$

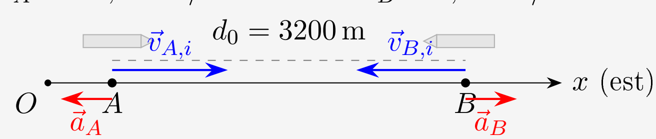
$$\Delta x_C = v_C \cdot t = 5,14 \times 201 = 1033\,\text{m} \approx 1{,}0\,\text{km}$$

Vérification : Position d'interception : $x = 2000 + 1033 = 3033\,\text{m}$ ✓

Exemple 1.33 – Manœuvre d'évitement – Situation critique

$v_{A,i} = 10\,\text{nd}$ $\quad\quad$ $v_{B,i} = 8\,\text{nd}$

$a_A = -0{,}008\,\text{m/s}^2$ $\quad\quad$ $a_B = 0{,}005\,\text{m/s}^2$



Deux navires naviguent l'un vers l'autre dans un chenal étroit. Le navire A (cargo) se déplace vers l'est à 10 nuds. Le navire B (pétrolier) se déplace vers l'ouest à 8 nuds. Ils sont initialement séparés de 3200 m.
Au même instant, les deux capitaines ordonnent le freinage d'urgence :

- Navire A : décélération $a_A = 0{,}008\,\text{m/s}^2$
- Navire B : décélération $a_B = 0{,}005\,\text{m/s}^2$ (plus lourd)

Questions :

a) Les navires vont-ils entrer en collision?

b) Si oui, à quelle vitesse? Si non, quelle sera la distance minimale entre eux?

Stratégie : Choisissons un référentiel avec l'origine au point de départ de A, l'axe x positif vers l'est. Calculons la distance de freinage de chaque navire.

Conversion des vitesses en m/s :

$$v_{A,i} = 10\,\text{nuds} \times \frac{0{,}5144\,\text{m/s}}{1\,\text{nud}} = 5{,}14\,\text{m/s} \quad \text{(vers l'est)}$$

$$v_{B,i} = -8\,\text{nuds} \times \frac{0{,}5144\,\text{m/s}}{1\,\text{nud}} = -4{,}12\,\text{m/s} \quad \text{(vers l'ouest)}$$

Données complètes :

- Navire A : $x_{A,i} = 0\,\text{m}$, $v_{A,i} = 5{,}14\,\text{m/s}$, $a_A = -0{,}008\,\text{m/s}^2$

- Navire B : $x_{B,i} = 3200\,\mathrm{m}$, $v_{B,i} = -4{,}12\,\mathrm{m/s}$, $a_B = 0{,}005\,\mathrm{m/s^2}$

Note : L'accélération de B est positive car elle s'oppose à sa vitesse négative (freinage).
Équations du mouvement :

$$\text{Navire A (MRUA) :}\quad x_A(t) = x_{A,i} + v_{A,i}t + \frac{1}{2}a_A t^2 = 5{,}14t - 0{,}004t^2$$

$$\text{Navire B (MRUA) :}\quad x_B(t) = x_{B,i} + v_{B,i}t + \frac{1}{2}a_B t^2 = 3200 - 4{,}12t + 0{,}0025t^2$$

Distance de freinage de A : (Équation 5 avec $v_f = 0$)

$$0 = v_{A,i}^2 + 2a_A\Delta x_A$$
$$\Delta x_A = -\frac{v_{A,i}^2}{2a_A} = -\frac{(5{,}14\,\mathrm{m/s})^2}{2\times(-0{,}008\,\mathrm{m/s^2})} = 1653\,\mathrm{m}$$

Position finale de A (s'il freinait complètement) : $x_{A,f} = 0\,\mathrm{m} + 1653\,\mathrm{m} = 1653\,\mathrm{m}$
Distance de freinage de B :

$$0 = v_{B,i}^2 + 2a_B\Delta x_B$$
$$\Delta x_B = -\frac{v_{B,i}^2}{2a_B} = -\frac{(-4{,}12\,\mathrm{m/s})^2}{2\times(0{,}005\,\mathrm{m/s^2})} = -1698\,\mathrm{m}$$

Position finale de B (s'il freinait complètement) : $x_{B,f} = 3200\,\mathrm{m} + (-1698\,\mathrm{m}) = 1502\,\mathrm{m}$
Analyse :
Si les deux navires pouvaient freiner complètement sans se rencontrer :

- A s'arrêterait à $x = 1653\,\mathrm{m}$
- B s'arrêterait à $x = 1502\,\mathrm{m}$

Puisque $x_{A,f} > x_{B,f}$, les trajectoires se croisent avant l'arrêt complet!
a) Réponse : Oui, collision inévitable (mais de justesse).
b) Position et instant de collision :
Pour trouver quand ils se rencontrent, on écrit $x_A(t) = x_B(t)$:

$$v_{A,i}t + \frac{1}{2}a_A t^2 = x_{B,i} + v_{B,i}t + \frac{1}{2}a_B t^2$$
$$5,14t - 0,004t^2 = 3200 - 4,12t + 0,0025t^2$$
$$-0,0065t^2 + 9,26t - 3200 = 0$$

Par la formule quadratique : $t = \dfrac{-9,26 \pm \sqrt{9,26^2 - 4(-0,0065)(-3200)}}{2(-0,0065)}$
$t = \dfrac{-9,26 \pm \sqrt{85,75 - 83,2}}{-0,013} = \dfrac{-9,26 \pm 1,60}{-0,013}$
$t = 589\,\mathrm{s} \approx 9{,}8\,\mathrm{min}$ (l'autre solution correspond à un temps où les navires seraient déjà arrêtés)
Vitesses à l'impact :

$$v_A = v_{A,i} + a_A t = 5{,}14\,\mathrm{m/s} + (-0{,}008\,\mathrm{m/s^2})(589\,\mathrm{s}) = 0{,}43\,\mathrm{m/s}$$
$$v_B = v_{B,i} + a_B t = -4{,}12\,\mathrm{m/s} + (0{,}005\,\mathrm{m/s^2})(589\,\mathrm{s}) = -1{,}17\,\mathrm{m/s}$$

Conversion en nœuds :

$$v_A = 0{,}43\,\mathrm{m/s} \times \frac{1\,\mathrm{nud}}{0{,}5144\,\mathrm{m/s}} = 0{,}8\,\mathrm{nuds}$$
$$v_B = -1{,}17\,\mathrm{m/s} \times \frac{1\,\mathrm{nud}}{0{,}5144\,\mathrm{m/s}} = -2{,}3\,\mathrm{nuds}$$

Vitesse relative d'impact :

$$|v_A - v_B| = |0{,}43\,\mathrm{m/s} - (-1{,}17\,\mathrm{m/s})| = 1{,}60\,\mathrm{m/s} = 3{,}1\,\mathrm{nuds}$$

Attention

Cette collision à basse vitesse ($\sim 3\,\mathrm{nuds}$) est comparable à un contact lors d'une manœuvre d'accostage ratée. Les dégâts seraient limités, mais l'incident reste sérieux. Avec seulement $100\,\mathrm{m}$ de plus entre les navires au départ, la collision aurait été évitée!

1.7 Corps en chute libre

La chute libre est un cas particulier très important du MRUA : c'est le mouvement d'un objet soumis uniquement à la gravité. Ce type de mouvement est omniprésent, que ce soit un outil qui tombe d'un mât, un plongeur qui saute à l'eau, ou un homme à la mer.

Questions types que nous allons résoudre

Dans cette section, vous apprendrez à répondre aux questions suivantes :

- Combien de temps dure une chute d'une hauteur donnée?
- À quelle vitesse un objet touche-t-il le sol (ou l'eau)?
- Quelle hauteur maximale atteint un objet lancé vers le haut?
- Combien de temps un objet lancé vers le haut reste-t-il en l'air?
- Quelle vitesse initiale faut-il pour atteindre une certaine hauteur?

1.7.1 Définition et hypothèses

Chute libre

Un **corps en chute libre** est un objet qui se déplace uniquement sous l'influence de la gravité, sans qu'aucune autre force n'agisse sur lui de façon significative.
Attention : Un corps en chute libre n'est pas nécessairement un objet qui « tombe ». Un objet lancé vers le haut est aussi en chute libre dès qu'il quitte la main!

Hypothèses simplificatrices

Pour étudier la chute libre, on fait deux hypothèses :

1. La **résistance de l'air est négligeable** (valable pour des objets denses à faible vitesse)
2. L'**altitude reste faible** par rapport au rayon de la Terre (donc g est constante)

Ces hypothèses permettent de traiter la chute libre comme un **MRUA vertical**.

1.7.2 L'accélération gravitationnelle

Près de la surface de la Terre, tous les corps en chute libre subissent la même accélération, quelle que soit leur masse :

$$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \quad \text{(vers le centre de la Terre)} \tag{1.20}$$

Exemple 1.34 – Expérience historique : la plume et le marteau

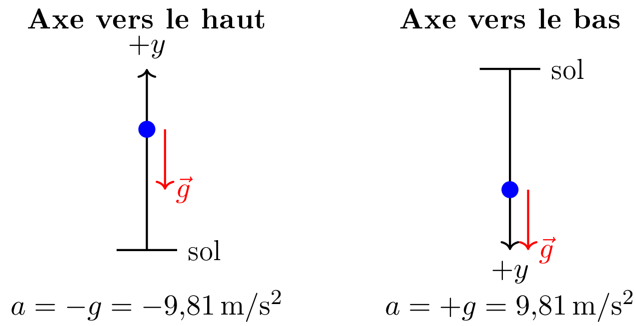
Le 2 août 1971, l'astronaute David Scott a réalisé une expérience sur la Lune : il a lâché simultanément un marteau de géologue et une plume de faucon. Sans atmosphère pour créer de la résistance, les deux objets sont arrivés au sol **en même temps**, confirmant que tous les corps tombent avec la même accélération en l'absence d'air.
Sur Terre, une plume tombe plus lentement qu'un marteau à cause de la résistance de l'air, pas à cause d'une différence d'accélération gravitationnelle.

Visionnez cette expérience historique :

https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8

1.7.3 Convention de signes

Le choix de l'orientation de l'axe y détermine le signe de l'accélération :



Attention

La convention la plus courante (et celle utilisée dans ce cours) est de choisir l'axe y **positif vers le haut**. Dans ce cas :

$$a_y = -g = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Le signe négatif indique que l'accélération est dirigée vers le bas.

1.7.4 Équations de la chute libre

Les équations de la chute libre sont les équations du MRUA appliquées à la direction verticale :

Équations de la chute libre (axe y positif vers le haut)

$$v_y = v_{iy} + a_y\Delta t = v_{iy} - g\Delta t \tag{1.21}$$

$$\Delta y = v_{iy}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 = v_{iy}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \tag{1.22}$$

$$v_y^2 = v_{iy}^2 + 2a_y\Delta y = v_{iy}^2 - 2g\Delta y \tag{1.23}$$

Notation

- v_{iy} : vitesse initiale verticale (positive vers le haut, négative vers le bas)
- v_y : vitesse finale verticale
- $\Delta y = y_f - y_i$: déplacement vertical
- $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$: valeur absolue de l'accélération gravitationnelle

1.7.5 Cas particuliers

Objet lâché (sans vitesse initiale)

Exemple 1.35 – Outil tombant d'un mât (exemple maritime)

Un matelot échappe une clé à molette du haut d'un mât situé à $25\,\mathrm{m}$ au-dessus du pont.

a) Combien de temps met la clé pour atteindre le pont?

b) À quelle vitesse frappe-t-elle le pont?

Données :

- $y_i = 25\,\mathrm{m}$ (origine au pont, axe vers le haut)
- $y_f = 0\,\mathrm{m}$
- $v_{iy} = 0\,\mathrm{m/s}$ (lâchée, pas lancée)

- $a_y = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

a) Temps de chute :

$$\begin{aligned}\Delta y &= v_{iy}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2\\ 0 - 25 &= 0 - \frac{1}{2}(9,81)(\Delta t)^2\\ \Delta t &= \sqrt{\frac{2\times 25}{9,81}} = 2{,}26\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

b) Vitesse d'impact :

$$\begin{aligned}v_y &= v_{iy} - g\Delta t\\ v_y &= 0 - 9,81\times 2,26 = -22{,}2\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

Le signe négatif indique que la vitesse est dirigée vers le bas. La clé frappe le pont à 22,2 m/s (80 km/h)!

Attention

C'est pourquoi le port du casque est obligatoire sur les chantiers navals et lors de certaines opérations à bord!

▷ Pratique autonome 1.10

Un conteneur se détache d'une grue portuaire et tombe d'une hauteur de 18 m au-dessus du quai.

a) Combien de temps dure la chute?

b) À quelle vitesse le conteneur frappe-t-il le quai? Exprimez votre réponse en m/s et en km/h.

Résolution :

Rép. : a) $\Delta t \approx 1{,}9\,\mathrm{s}$ b) $v \approx 18{,}8\,\mathrm{m/s} \approx 68\,\mathrm{km/h}$

Objet lancé vers le haut

Exemple 1.36 – Fusée éclairante lancée à la main

Un marin lance une fusée éclairante vers le haut avec une vitesse initiale de $15\,\mathrm{m/s}$ depuis le pont situé à $8\,\mathrm{m}$ au-dessus de l'eau.

a) Quelle hauteur maximale atteint-elle?

b) Combien de temps reste-t-elle en l'air avant de toucher l'eau?

Données :

- $y_i = 8\,\mathrm{m}$ (origine à la surface de l'eau)
- $v_{iy} = 15\,\mathrm{m/s}$ (vers le haut)
- $a_y = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

a) Hauteur maximale :
Au point le plus haut, la vitesse verticale est nulle ($v_y = 0$).

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{iy}^2 - 2g\Delta y \\ 0 &= 15^2 - 2(9,81)\Delta y \\ \Delta y &= \frac{225}{19,62} = 11{,}5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Hauteur maximale : $y_{max} = y_i + \Delta y = 8 + 11,5 = 19{,}5\,\mathrm{m}$ au-dessus de l'eau.
b) Temps total en l'air :
La fusée touche l'eau quand $y_f = 0$.

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + v_{iy}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \\ 0 &= 8 + 15\Delta t - 4,905(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Équation quadratique : $4,905(\Delta t)^2 - 15\Delta t - 8 = 0$

$$\Delta t = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 4(4,905)(8)}}{2(4,905)} = \frac{15 \pm 18,5}{9,81}$$

Solution positive : $\Delta t = 3{,}41\,\mathrm{s}$
La fusée reste en l'air pendant $3{,}41\,\mathrm{s}$.

▷ Pratique autonome 1.11

Un marin lance verticalement une bouée de sauvetage lumineuse avec une vitesse initiale de $12\,\mathrm{m/s}$ depuis le pont situé à $6\,\mathrm{m}$ au-dessus de l'eau.

a) Quelle hauteur maximale atteint-elle au-dessus de l'eau?

b) Combien de temps reste-t-elle en l'air avant de toucher l'eau?

Indice : Pour a), au point le plus haut, $v_y = 0$*. Pour b), résolvez* $y_f = 0$*.*

Résolution :

Rép. : a) $y_{max} \approx 13{,}3\,\mathrm{m}$ b) $\Delta t \approx 2{,}8\,\mathrm{s}$

Symétrie de la chute libre

Pour un objet lancé vers le haut qui retombe au même niveau :

- Le temps de montée égale le temps de descente
- La vitesse de retour a la même grandeur que la vitesse initiale (mais sens opposé)

Cette symétrie ne s'applique que si le point de départ et d'arrivée sont au même niveau.

1.7.6 Application maritime : homme à la mer

Exemple 1.37 – Chute d'un homme à la mer

Un marin tombe d'un pont situé à 12 m au-dessus de la surface de l'eau. En supposant qu'il ne saute pas (vitesse initiale nulle) :

a) Combien de temps dure la chute?

b) À quelle vitesse entre-t-il dans l'eau?

a) Temps de chute :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 12}{9,81}} = 1{,}56\,\mathrm{s}$$

b) Vitesse d'entrée dans l'eau :

$$v = g\Delta t = 9,81 \times 1,56 = 15{,}3\,\mathrm{m/s} \approx 55\,\mathrm{km/h}$$

Attention

Une entrée dans l'eau à 55 km/h peut causer des blessures graves si la position du corps n'est pas adéquate. C'est pourquoi la formation à la survie en mer insiste sur la position à adopter lors d'une chute : bras croisés, jambes serrées, regard à l'horizon.

Hauteur de chute	Temps de chute	Vitesse d'impact
5 m	1,0 s	10 m/s (36 km/h)
10 m	1,4 s	14 m/s (50 km/h)
15 m	1,7 s	17 m/s (62 km/h)
20 m	2,0 s	20 m/s (72 km/h)
30 m	2,5 s	24 m/s (87 km/h)

L'universalité de la chute libre

Les équations de la chute libre s'appliquent à tout objet : un conteneur qui tombe d'une grue, un plongeur qui saute d'un tremplin, une pomme qui tombe d'un arbre, ou une balle lancée en l'air. Seule la valeur de g change selon la planète!
Sur la Lune : $g_{Lune} = 1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$ (environ 6 fois moins que sur Terre).

1.8 Mouvement en deux dimensions

Jusqu'à présent, nous avons étudié des mouvements en **une dimension** : des objets se déplaçant le long d'une ligne droite (un axe x ou y). Cependant, la plupart des mouvements réels se produisent en **deux** ou **trois dimensions**.

Exemples de mouvements en 2D

- Un navire qui navigue sur la mer (surface 2D)
- Une balle lancée qui suit une trajectoire courbe
- Un avion en vol (3D, mais on peut souvent simplifier en 2D)
- Un homme à la mer tombé d'un navire en mouvement

1.8.1 Le principe de décomposition

La clé pour analyser un mouvement en 2D est de le **décomposer** en deux mouvements indépendants selon les axes x et y.

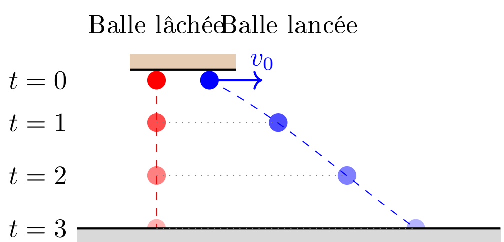
Indépendance des mouvements

Dans un mouvement en deux dimensions, les composantes horizontale (x) et verticale (y) du mouvement sont **indépendantes** l'une de l'autre.
Cela signifie que :

- Le mouvement en x n'affecte pas le mouvement en y
- Le mouvement en y n'affecte pas le mouvement en x
- On peut analyser chaque direction séparément

Pourquoi peut-on décomposer? – Développer l'intuition

Cette indépendance semble contre-intuitive! On pourrait penser qu'un objet lancé horizontalement tombe « moins vite » qu'un objet simplement lâché. **C'est faux.**
L'expérience des deux balles :



Deux balles sont à la même hauteur. Au même instant, l'une est **lâchée** et l'autre est **lancée horizontalement**. Résultat : **elles touchent le sol en même temps!**
La vitesse horizontale de la balle lancée n'affecte pas sa chute. Les deux balles subissent exactement la même accélération verticale (g), donc elles tombent à la même vitesse verticale.
Analogie maritime : Imaginez un matelot au sommet d'un mât sur un navire avanc ant à vitesse constante. S'il lâche une clé :

- **Du point de vue du matelot** : la clé tombe droit vers le bas
- **Du point de vue du quai** : la clé suit une trajectoire courbe (parabole)

La clé « conserve » la vitesse horizontale du navire pendant toute sa chute, mais cette vitesse horizontale n'affecte en rien la durée de la chute!
Essayez en classe : Placez deux pièces de monnaie sur le bord d'une table. Frappez-en une horizontalement avec une règle pendant que l'autre tombe. Écoutez : un seul « clic » au sol!

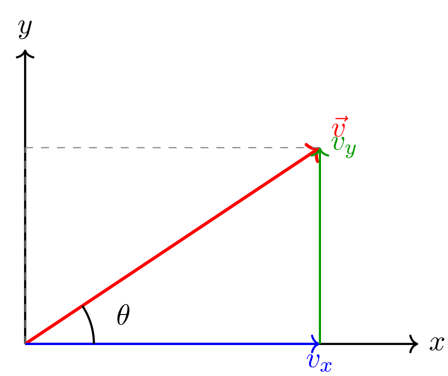
Principe fondamental

Pour résoudre un problème de mouvement en 2D :

1. Décomposer le mouvement en composantes x et y
2. Résoudre **séparément** le mouvement en x et en y
3. Relier les deux par le **temps** Δt (qui est le même pour les deux)
4. Recombiner les résultats si nécessaire

1.8.2 Décomposition d'un vecteur

Tout vecteur (position, vitesse, accélération) peut être décomposé en composantes :



Décomposition d'un vecteur

$$v_x = v\cos\theta \tag{1.24}$$
$$v_y = v\sin\theta \tag{1.25}$$

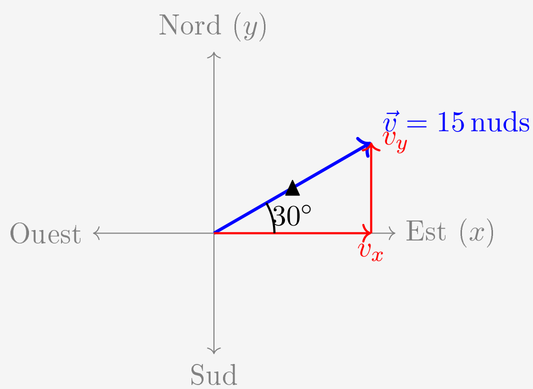
où θ est l'angle par rapport à l'horizontale.
Recomposition (module et direction)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{1.26}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \tag{1.27}$$

1.8.3 Exemple : navigation d'un navire

Exemple 1.38 – Cap et vitesse d'un navire

Un navire navigue à 15 nuds avec un cap de 30° par rapport à l'est (c'est-à-dire 30° nord de l'est).
Quelles sont les composantes est-ouest et nord-sud de sa vitesse?



Composante est-ouest :

$$v_x = v\cos\theta = 15\cos 30° = 15 \times 0,866 = 13{,}0\,\text{nuds}$$

Composante nord-sud :

$$v_y = v\sin\theta = 15\sin 30° = 15 \times 0,5 = 7{,}5\,\text{nuds}$$

Le navire se déplace donc à 13,0 nuds vers l'est et 7,5 nuds vers le nord.

1.8.4 Application au projectile

Le mouvement d'un **projectile** (objet lancé dans l'air) est l'exemple classique de mouvement en 2D. On le décompose en :

Direction horizontale (x)	**Direction verticale (y)**
Aucune force horizontale	Gravité (vers le bas)
$a_x = 0$	$a_y = -g$
MRU (vitesse constante)	**Chute libre** (MRUA)

Ce qui relie les deux directions

Les mouvements en x et en y sont indépendants, mais ils partagent le même **temps** Δt.
C'est cette variable commune qui permet de relier les deux directions et de déterminer, par exemple, où un projectile atterrit.

Dans la section suivante, nous appliquerons ces principes à l'étude complète du mouvement d'un projectile.

1.9 Mouvement d'un projectile

Un peu d'histoire : Galilée et la décomposition du mouvement

Avant **Galilée** (1564–1642), les savants croyaient qu'un boulet de canon suivait d'abord une ligne droite, puis tombait verticalement une fois sa « force » épuisée. Cette vision, héritée d'Aristote, ne correspondait pas aux observations.

La contribution révolutionnaire de Galilée fut de comprendre que **le mouvement horizontal et le mouvement vertical sont indépendants**. Un objet lancé continue d'avancer horizontalement *en même temps* qu'il tombe verticalement — les deux mouvements se superposent sans s'influencer mutuellement.

Le principe d'indépendance des mouvements

Galilée démontra ce principe par une expérience de pensée : une bille lâchée du haut du mât d'un navire en mouvement tombe au pied du mât, pas derrière. La bille conserve le mouvement horizontal du navire pendant sa chute.
Ce principe est fondamental pour les navigateurs : un objet qui tombe d'un navire en mouvement ne tombe pas « en arrière » — il conserve la vitesse du navire.

Cette décomposition en mouvements indépendants est la clé pour analyser les projectiles : on traite séparément la direction horizontale (mouvement uniforme) et la direction verticale (chute libre), puis on combine les résultats.

Un **projectile** est un objet lancé dans l'air qui se déplace ensuite uniquement sous l'influence de la gravité. C'est l'application directe des principes du mouvement en 2D que nous venons de voir.

Questions types que nous allons résoudre

Dans cette section, vous apprendrez à répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la **portée** (distance horizontale) d'un projectile?
- Quelle **hauteur maximale** atteint-il?
- Combien de **temps** reste-t-il en l'air?
- Où **atterrit** un objet lancé horizontalement?
- À quel angle faut-il lancer pour atteindre une cible?
- Où tombe un objet lâché d'un navire en mouvement?

Projectile

Un projectile est un corps lancé avec une vitesse initiale quelconque et qui se déplace sous la seule action de la gravité (résistance de l'air négligée).
Exemples : ballon lancé, balle de baseball, fusée éclairante, lance-amarre, boulet de canon.

Rappel fondamental

Puisque la gravité est la **seule force** et qu'elle agit **verticalement** :

- En x : pas d'accélération ($a_x = 0$) $\Rightarrow$ **MRU**
- En y : accélération constante ($a_y = -g$) $\Rightarrow$ **Chute libre**

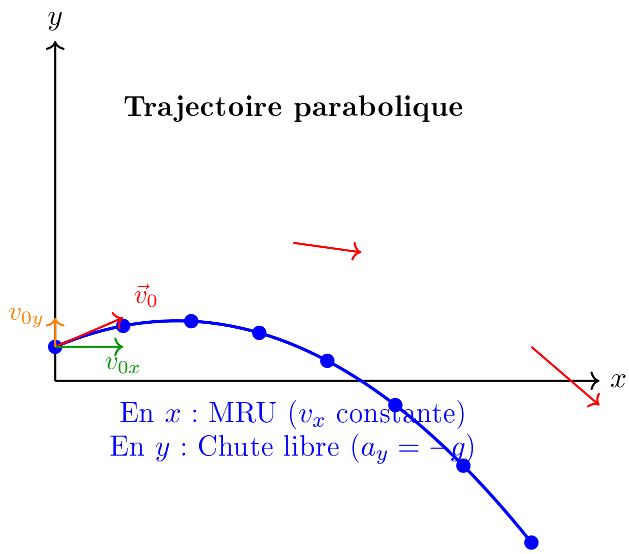
La composante horizontale de la vitesse **reste constante** tout au long du vol!

1.9.1 Stratégie de résolution

Stratégie de résolution – TRÈS IMPORTANT

Pour résoudre des problèmes de projectile en 2D, il faut **toujours** :

1. **Décomposer** le mouvement en deux directions : x (horizontal) et y (vertical)
2. **Traiter séparément** chaque direction
3. **Relier** les deux directions par le **temps** Δt (qui est le même pour les deux)



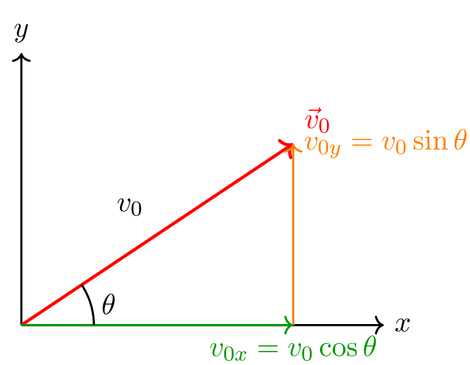
1.9.2 Décomposition de la vitesse initiale

Si le projectile est lancé avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle θ avec l'horizontale :

Composantes de la vitesse initiale

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \tag{1.28}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \tag{1.29}$$



1.9.3 Équations du mouvement

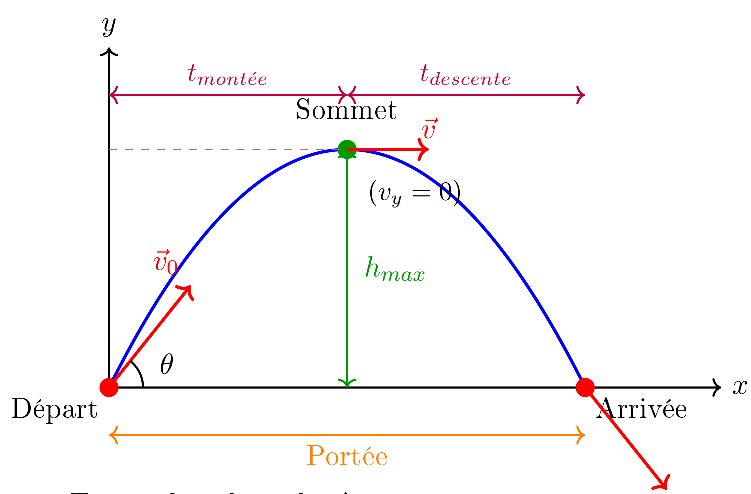
Direction horizontale (x)	**Direction verticale (y)**
MRU (vitesse constante)	Chute libre (MRUA)
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta$	$v_y = v_{0y} - g\Delta t = v_0 \sin\theta - g\Delta t$
$\Delta x = v_{0x}\Delta t = (v_0 \cos\theta)\Delta t$	$\Delta y = v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$
	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$

Le temps relie les deux directions

Le temps Δt est **le même** pour le mouvement horizontal et vertical. C'est ce qui permet de relier les deux directions et de résoudre les problèmes.

1.9.4 Caractéristiques de la trajectoire

Lors de l'analyse d'un projectile, on s'intéresse souvent à trois grandeurs clés. Plutôt que de mémoriser des formules spécifiques, il est préférable de comprendre **comment les trouver** à partir des équations de base.



Temps de vol total : $\Delta t = t_{montée} + t_{descente}$

Observations importantes sur le schéma

- Au **sommet**, la vitesse n'est **pas nulle**! Seule la composante verticale v_y est nulle. La composante horizontale v_x reste constante tout au long du vol.
- Pour un projectile lancé et retombant au même niveau, le temps de montée égale le temps de descente (symétrie).
- La trajectoire est une **parabole**, conséquence directe du MRU en x et du MRUA en y.

Portée horizontale

Portée

La **portée** est la distance horizontale totale parcourue par le projectile entre son lancement et son atterrissage.

Comment la trouver :

1. Déterminer le **temps de vol** Δt en utilisant l'équation verticale (quand y revient au niveau d'arrivée)
2. Utiliser ce temps dans l'équation horizontale : Portée $= v_{0x} \cdot \Delta t$

Remarque

Pour un projectile lancé et retombant au même niveau, la portée est maximale lorsque l'angle de lancement est de 45°.

Hauteur maximale

Hauteur maximale

La **hauteur maximale** est l'altitude la plus élevée atteinte par le projectile au cours de son vol.

Comment la trouver :

Au point le plus haut, la composante verticale de la vitesse s'annule ($v_y = 0$). On utilise alors l'équation $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$ avec $v_y = 0$ pour trouver Δy_{max}.

Temps de vol

Temps de vol

Le **temps de vol** est la durée totale pendant laquelle le projectile reste en l'air, du lancement jusqu'à l'atterrissage.

Comment le trouver :

On utilise l'équation de position verticale $\Delta y = v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ en fixant Δy égal au déplacement vertical total (souvent zéro si retour au même niveau, ou négatif si atterrissage plus bas).

Approche recommandée

Plutôt que de mémoriser des formules spécifiques pour la portée, la hauteur maximale ou le temps de vol, il est beaucoup plus efficace de :

1. Maîtriser les équations de base (MRU en x, chute libre en y)
2. Identifier ce qu'on cherche et ce qu'on connaît
3. Appliquer la stratégie de décomposition systématiquement

Cette approche fonctionne pour **tous** les problèmes de projectile, même les plus complexes!

1.9.5 Exemples

Exemple 1.39 – Ballon de soccer (exemple terrestre)

Un joueur botte un ballon avec une vitesse initiale de $20\,\mathrm{m/s}$ à un angle de $30°$ par rapport au sol.

a) Quelle est la portée du tir?

b) Quelle hauteur maximale atteint le ballon?

c) Combien de temps le ballon reste-t-il en l'air?

Données :

- $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, $\theta = 30°$
- $v_{0x} = 20\cos 30° = 17{,}3\,\mathrm{m/s}$
- $v_{0y} = 20\sin 30° = 10\,\mathrm{m/s}$

b) Hauteur maximale : (on commence par celle-ci car elle ne nécessite pas le temps)
Au point le plus haut, $v_y = 0$. Utilisons $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$:

$$0 = 10^2 - 2(9,81)\Delta y_{max}$$
$$\Delta y_{max} = \frac{100}{19,62} = 5{,}10\,\mathrm{m}$$

c) Temps de vol :
Le ballon revient au sol quand $\Delta y = 0$. Utilisons $\Delta y = v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$:

$$0 = 10\Delta t - 4,905(\Delta t)^2$$
$$0 = \Delta t(10 - 4,905\Delta t)$$

Solutions : $\Delta t = 0$ (départ) ou $\Delta t = \frac{10}{4{,}905} = 2{,}04\,\mathrm{s}$ (atterrissage)
a) Portée :

Maintenant qu'on connaît le temps de vol :

$$\text{Portée} = v_{0x} \cdot \Delta t = 17,3 \times 2,04 = 35{,}3\,\text{m}$$

Exemple 1.40 – Lance-amarre (exemple maritime)

Un marin utilise un lance-amarre pour envoyer une ligne vers un quai. L'appareil lance le projectile à 25 m/s avec un angle de 40°. Le marin se trouve sur le pont à 6 m au-dessus du niveau du quai.
Quelle est la portée horizontale du tir?

Données :

- $v_0 = 25\,\text{m/s}$, $\theta = 40°$
- $y_i = 6\,\text{m}$, $y_f = 0\,\text{m}$ (niveau du quai)
- $v_{0x} = 25\cos 40° = 19{,}2\,\text{m/s}$
- $v_{0y} = 25\sin 40° = 16{,}1\,\text{m/s}$

Étape 1 : Trouver le temps de vol
On utilise l'équation en y :

$$y_f = y_i + v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$
$$0 = 6 + 16,1\Delta t - 4,905(\Delta t)^2$$

Équation quadratique : $4,905(\Delta t)^2 - 16,1\Delta t - 6 = 0$

$$\Delta t = \frac{16,1 + \sqrt{259,2 + 117,7}}{9,81} = \frac{16,1 + 19,4}{9,81} = 3{,}62\,\text{s}$$

Étape 2 : Calculer la portée

$$\Delta x = v_{0x}\Delta t = 19,2 \times 3,62 = 69{,}5\,\text{m}$$

Le lance-amarre peut atteindre une cible à environ 70 m.

Remarque

Le fait de lancer depuis une position surélevée augmente significativement la portée par rapport à un lancer au niveau du sol.

▷ Pratique autonome 1.12

Un lance-amarre tire une ligne avec une vitesse initiale de 30 m/s à un angle de 40° au-dessus de l'horizontale, depuis une hauteur de 4 m au-dessus de l'eau.

a) Décomposez la vitesse initiale en ses composantes v_{0x} et v_{0y}.

b) Calculez la portée horizontale (distance où la ligne touche l'eau).

Indice : Trouvez d'abord le temps de vol en résolvant $y_f = 0$.

Résolution :

Rép. : a) $v_{0x} \approx 23{,}0\,\mathrm{m/s}$, $v_{0y} \approx 19{,}3\,\mathrm{m/s}$ b) Portée $\approx 97\,\mathrm{m}$

Exemple 1.41 – Homme à la mer depuis un navire en mouvement

Un marin tombe d'un navire qui avance à 8 nuds. Il tombe d'une hauteur de 10 m. À quelle distance horizontale du point de chute le marin entre-t-il dans l'eau?

Analyse : Au moment de la chute, le marin a la même vitesse horizontale que le navire. C'est un projectile lancé horizontalement ($\theta = 0°$).

Conversion de la vitesse :

$$v_{0x} = 8\,\mathrm{nuds} \times \frac{0{,}5144\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{nud}} = 4{,}1\,\mathrm{m/s}$$

Données :

- $v_{0x} = 4{,}1\,\mathrm{m/s}$ (vitesse du navire)
- $v_{0y} = 0\,\mathrm{m/s}$ (chute, pas saut)
- $\Delta y = -10\,\mathrm{m}$

Temps de chute : On utilise l'équation de position verticale avec $v_{0y} = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta y &= v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2\\ -10 &= 0 - \frac{1}{2}(9,81)(\Delta t)^2\\ (\Delta t)^2 &= \frac{2\times 10}{9,81} = 2,04\\ \Delta t &= 1{,}43\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Distance horizontale :

$$\Delta x = v_{0x}\Delta t = 4,1 \times 1,43 = 5{,}9\,\text{m}$$

Le marin entre dans l'eau à environ 6 m en avant du point d'où il est tombé (par rapport à l'eau, pas par rapport au navire qui continue d'avancer).

Attention

Pendant ce temps, le navire a aussi avancé de 5,9 m. Du point de vue d'un observateur sur le navire, le marin semble tomber verticalement! C'est le principe de l'indépendance des mouvements.

Exemple 1.42 – Problème inverse : trouver l'angle de lancement

Un canon lance-amarre doit atteindre un quai situé à 50 m de distance horizontale. La vitesse de sortie du projectile est de 30 m/s. Le canon et le quai sont au même niveau.
À quel angle faut-il régler le canon?
Données :

- Portée souhaitée : $\Delta x = 50\,\text{m}$
- Vitesse initiale : $v_0 = 30\,\text{m/s}$
- Déplacement vertical : $\Delta y = 0$ (même niveau)
- Inconnue : $\theta =?$

Stratégie : On doit relier la portée à l'angle. Exprimons Δx en fonction de θ.
Étape 1 : Trouver le temps de vol en fonction de θ
Quand le projectile revient au même niveau, $\Delta y = 0$:

$$\Delta y = v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$
$$0 = (v_0 \sin\theta)\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$
$$0 = \Delta t\left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}g\Delta t\right)$$

Solutions : $\Delta t = 0$ (départ) ou $\Delta t = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$ (atterrissage)

Étape 2 : Exprimer la portée

$$\Delta x = v_{0x} \cdot \Delta t = (v_0 \cos\theta) \cdot \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$
$$\Delta x = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

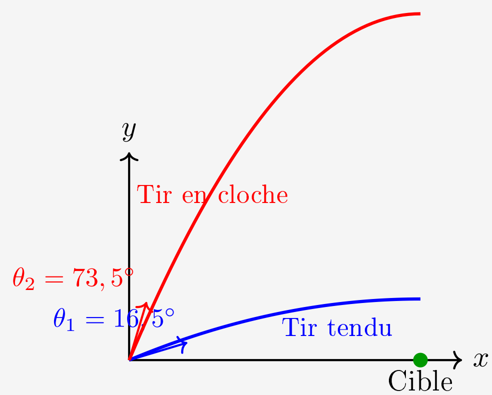
(On utilise l'identité trigonométrique $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$)
Étape 3 : Isoler θ

$$\sin(2\theta) = \frac{g \cdot \Delta x}{v_0^2} = \frac{9,81 \times 50}{30^2} = \frac{490,5}{900} = 0,545$$

$$2\theta = \arcsin(0,545) = 33,0° \quad \Rightarrow \quad \theta = 16,5°$$

Attention! L'équation $\sin(2\theta) = 0,545$ a **deux solutions** entre 0° et 90° :

- $2\theta = 33,0° \Rightarrow \theta_1 = 16,5°$ (tir tendu)
- $2\theta = 180° - 33,0° = 147° \Rightarrow \theta_2 = 73,5°$ (tir en cloche)



Réponse : Deux angles sont possibles : $\theta_1 = 16,5°$ ou $\theta_2 = 73,5°$.

Choix pratique

En pratique, le tir tendu (16,5°) est souvent préféré car :

- Le temps de vol est plus court (la ligne reste tendue)
- Le tir est moins affecté par le vent
- La précision est généralement meilleure

Le tir en cloche peut être utile pour passer par-dessus un obstacle.

Exemple 1.43 – Portée maximale impossible

Avec le même canon ($v_0 = 30\,\text{m/s}$), peut-on atteindre une cible à 100 m?
Vérification :

$$\sin(2\theta) = \frac{g \cdot \Delta x}{v_0^2} = \frac{9,81 \times 100}{900} = 1,09$$

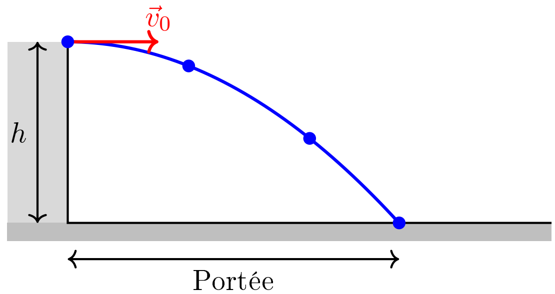
Puisque $\sin(2\theta)$ ne peut jamais dépasser 1, **aucun angle** ne permet d'atteindre cette cible!
Portée maximale : Elle est atteinte quand $\sin(2\theta) = 1$, soit $\theta = 45°$:

$$\Delta x_{max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{900}{9,81} = 91{,}7\,\text{m}$$

La cible à 100 m est hors de portée.

1.9.6 Projectile lancé horizontalement

Un cas particulier important est le projectile lancé **horizontalement** (angle $\theta = 0°$).



Dans ce cas :

- $v_{0x} = v_0$ (toute la vitesse est horizontale)
- $v_{0y} = 0$ (pas de composante verticale initiale)

Le temps de chute s'obtient à partir de l'équation de position verticale. Avec $v_{0y} = 0$ et $\Delta y = -h$:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad (\Delta t)^2 = \frac{2h}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La portée s'obtient ensuite par le MRU horizontal :

$$\text{Portée} = v_0 \cdot \Delta t$$

Exemple 1.44 – Conteneur tombant d'une grue

Un conteneur se détache d'une grue portuaire en mouvement. La grue se déplace horizontalement à $2\,\text{m/s}$ et le conteneur est à $15\,\text{m}$ de hauteur.
À quelle distance horizontale (par rapport au point de largage) le conteneur touche-t-il le sol?
Données : $v_{0x} = 2\,\text{m/s}$, $v_{0y} = 0$, $\Delta y = -15\,\text{m}$
Temps de chute : Avec $v_{0y} = 0$, l'équation de position verticale donne :

$$\begin{aligned}
\Delta y &= -\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \\
-15 &= -\frac{1}{2}(9,81)(\Delta t)^2 \\
(\Delta t)^2 &= \frac{30}{9,81} = 3,06 \\
\Delta t &= 1{,}75\,\text{s}
\end{aligned}$$

Distance horizontale :

$$\Delta x = v_{0x} \cdot \Delta t = 2 \times 1,75 = 3{,}5\,\text{m}$$

Le conteneur touche le sol à 3,5 m du point situé directement sous la position de largage.

1.9.7 Résumé : stratégie de résolution

Méthode pour résoudre un problème de projectile

1. **Dessiner** un schéma avec les axes x et y
2. **Décomposer** la vitesse initiale : $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$
3. **Identifier** les données et l'inconnue
4. **Choisir** les équations appropriées (souvent, trouver Δt en premier)
5. **Résoudre** en traitant x et y séparément
6. **Vérifier** que la réponse est physiquement raisonnable

1.10 Cinématique de rotation

Jusqu'à présent, nous avons étudié le mouvement de **translation** : le déplacement d'un objet d'un point à un autre. Nous allons maintenant étudier le mouvement de **rotation** : le mouvement d'un objet qui tourne autour d'un axe fixe.

La rotation dans le contexte maritime

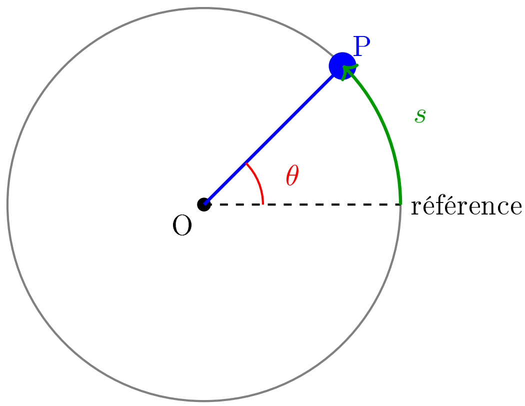
La rotation est omniprésente en navigation :

- L'**hélice** qui propulse le navire
- Le **treuil** qui enroule les câbles
- Le **gouvernail** qui pivote pour diriger le navire
- Le **radar** qui effectue des balayages rotatifs
- Le **cabestan** pour les manœuvres d'amarrage

1.10.1 Position angulaire et déplacement angulaire

Position angulaire

La **position angulaire** θ d'un objet en rotation est l'angle entre une ligne de référence fixe et une ligne tracée de l'axe de rotation jusqu'à l'objet.
L'unité SI de la position angulaire est le **radian** (rad).



Le radian

Le **radian** est défini comme le rapport entre la longueur de l'arc s et le rayon r :

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(en radians)} \tag{1.30}$$

Un angle de 1 radian correspond à un arc de longueur égale au rayon.

Degrés	**Radians**	**Tours**
$360°$	2π rad	1 tour
$180°$	π rad	$\frac{1}{2}$ tour
$90°$	$\frac{\pi}{2}$ rad	$\frac{1}{4}$ tour
$60°$	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{1}{6}$ tour
$45°$	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{1}{8}$ tour
$1°$	$\frac{\pi}{180}$ rad $\approx 0,0175$ rad	–
$57,3°$	1 rad	–

Conversions

$$\text{Degrés} \to \text{Radians :} \quad \theta_{rad} = \theta_{deg} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Radians} \to \text{Degrés :} \quad \theta_{deg} = \theta_{rad} \times \frac{180}{\pi}$$

Déplacement angulaire

Le **déplacement angulaire** $\Delta\theta$ est la variation de la position angulaire :

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \tag{1.31}$$

Convention de signes :

- $\Delta\theta > 0$: rotation dans le sens **antihoraire** (sens trigonométrique)
- $\Delta\theta < 0$: rotation dans le sens **horaire**

1.10.2 Relation entre grandeurs linéaires et angulaires

Pour un objet en rotation à une distance r de l'axe, la longueur d'arc parcourue est reliée au déplacement angulaire :

$$s = r\theta \quad (\theta \text{ en radians}) \tag{1.32}$$

Exemple 1.45 – Câble enroulé sur un treuil

Un treuil de rayon 15 cm effectue 5 tours complets. Quelle longueur de câble est enroulée?
Déplacement angulaire :

$$\Delta\theta = 5 \text{ tours} \times 2\pi = 10\pi \text{ rad}$$

Longueur de câble :

$$s = r\Delta\theta = 0,15 \times 10\pi = 4{,}71\,\text{m}$$

▷ Pratique autonome 1.13

Un cabestan de rayon 20 cm effectue 8 tours complets pour haler un câble d'amarrage.

a) Quel est le déplacement angulaire en radians?

b) Quelle longueur de câble a été halée?

Résolution :

Rép. : a) $\Delta\theta = 16\pi \approx 50{,}3\,\text{rad}$ b) $s \approx 10{,}1\,\text{m}$

1.10.3 Vitesse angulaire

Vitesse angulaire moyenne

La **vitesse angulaire moyenne** ω est le taux de variation de la position angulaire :

$$\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.33}$$

L'unité SI est le **radian par seconde** (rad/s).

Autres unités courantes

- **Tours par minute** (tr/min ou RPM) : très utilisé en pratique
- **Tours par seconde** (tr/s)
- **Degrés par seconde** (°/s)

Conversions :

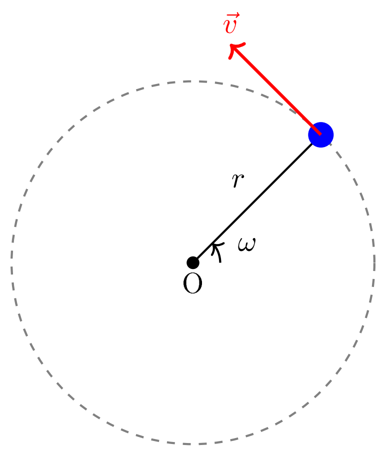
$$\omega\ (\text{rad/s}) = \omega\ (\text{RPM}) \times \frac{2\pi}{60}$$

$$\omega\ (\text{RPM}) = \omega\ (\text{rad/s}) \times \frac{60}{2\pi}$$

Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire

Un point situé à une distance r de l'axe de rotation a une vitesse linéaire (tangentielle) :

$$v = r\omega \quad (\omega \text{ en rad/s}) \tag{1.34}$$



Attention

Plus un point est **éloigné** de l'axe de rotation, plus sa vitesse linéaire est **grande**, même si tous les points ont la même vitesse angulaire.

Exemple 1.46 – Vitesse en bout de pale d'hélice

L'hélice d'un navire a un diamètre de 4 m et tourne à 120 RPM (tours par minute).

a) Quelle est la vitesse angulaire en rad/s?

b) Quelle est la vitesse linéaire en bout de pale?

a) Vitesse angulaire :

$$\omega = 120\,\text{RPM} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\,\text{tour}} \times \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 120\,\text{RPM} \times \frac{2\pi\,\text{rad/s}}{60\,\text{RPM}} = 12{,}6\,\text{rad/s}$$

b) Vitesse en bout de pale :
Le rayon est $r = \frac{d}{2} = \frac{4\,\text{m}}{2} = 2\,\text{m}$.

$$v = r\omega = 2\,\text{m} \times 12{,}6\,\text{rad/s} = 25{,}1\,\text{m/s}$$

Conversion en km/h : $v = 25{,}1\,\text{m/s} \times \frac{3{,}6\,\text{km/h}}{1\,\text{m/s}} = 90\,\text{km/h}$
Les extrémités des pales se déplacent à près de 90 km/h!

▷ Pratique autonome 1.14

L'hélice d'un navire a un diamètre de 5 m et tourne à 90 RPM.

a) Calculez la vitesse angulaire en rad/s.

b) Calculez la vitesse linéaire en bout de pale. Exprimez votre réponse en m/s et en km/h.

Résolution :

Rép. : a) $\omega \approx 9{,}4\,\text{rad/s}$ b) $v \approx 23{,}6\,\text{m/s} \approx 85\,\text{km/h}$

1.10.4 Accélération angulaire

Accélération angulaire moyenne

L'**accélération angulaire moyenne** α est le taux de variation de la vitesse angulaire :

$$\alpha_{moy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.35}$$

L'unité SI est le **radian par seconde carrée** (rad/s²).

Accélération tangentielle

L'accélération tangentielle est due à la variation du **module** de la vitesse :

$$a_t = r\alpha \tag{1.36}$$

Exemple 1.47 – Démarrage d'un treuil

Un treuil de rayon 20 cm part du repos et atteint une vitesse de 60 RPM en 5 s.

a) Quelle est son accélération angulaire?

b) Quelle est l'accélération tangentielle du câble?

a) Accélération angulaire :
Conversion de la vitesse finale :

$$\omega_f = 60\,\text{RPM} \times \frac{2\pi\,\text{rad/s}}{60\,\text{RPM}} = 6{,}28\,\text{rad/s}$$

Calcul de l'accélération :

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{6{,}28\,\text{rad/s} - 0\,\text{rad/s}}{5\,\text{s}} = 1{,}26\,\text{rad/s}^2$$

b) Accélération tangentielle :
Conversion du rayon : $r = 20\,\text{cm} = 0{,}20\,\text{m}$

$$a_t = r\alpha = 0{,}20\,\text{m} \times 1{,}26\,\text{rad/s}^2 = 0{,}25\,\text{m/s}^2$$

1.10.5 Équations du mouvement circulaire uniformément accéléré

Lorsque l'accélération angulaire α est **constante**, on peut utiliser des équations analogues à celles du MRUA :

Équations du mouvement circulaire uniformément accéléré

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\Delta t \tag{1.37}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)\Delta t \tag{1.38}$$

$$\Delta\theta = \omega_i\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \tag{1.39}$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta \tag{1.40}$$

1.10.6 Analogie translation-rotation

Grandeur	Translation	Rotation
Position	x (m)	θ (rad)
Déplacement	Δx (m)	$\Delta\theta$ (rad)
Vitesse	$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ (m/s)	$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (rad/s)
Accélération	$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ (m/s²)	$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (rad/s²)
Équations MRUA	$v_f = v_i + a\Delta t$	$\omega_f = \omega_i + \alpha\Delta t$
	$\Delta x = \frac{1}{2}(v_i + v_f)\Delta t$	$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)\Delta t$
	$\Delta x = v_i\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$	$\Delta\theta = \omega_i\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2$
	$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Relations entre grandeurs linéaires et angulaires
$s = r\theta \qquad v = r\omega \qquad a_t = r\alpha$

Puissance de l'analogie

Si vous maîtrisez les équations du MRUA en translation, vous maîtrisez automatiquement celles de la rotation! Il suffit de remplacer :

- $x \to \theta$
- $v \to \omega$
- $a \to \alpha$

1.10.7 Applications maritimes

Exemple 1.48 – Freinage d'une hélice

L'hélice d'un navire tourne à 150 RPM. Lors de l'arrêt des machines, elle décélère uniformément et s'arrête après avoir effectué 20 tours.

a) Quelle est la décélération angulaire?

b) Combien de temps dure le freinage?

Données :

- $\omega_i = 150 \times \frac{2\pi}{60} = 15{,}7\,\text{rad/s}$
- $\omega_f = 0\,\text{rad/s}$
- $\Delta\theta = 20 \times 2\pi = 125{,}7\,\text{rad}$

a) Décélération angulaire :

$$\begin{aligned} \omega_f^2 &= \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta \\ 0 &= 15,7^2 + 2\alpha(125,7) \\ \alpha &= \frac{-246,5}{251,4} = -0{,}98\,\text{rad/s}^2 \end{aligned}$$

b) Temps de freinage :

$$\Delta t = \frac{\omega_f - \omega_i}{\alpha} = \frac{0 - 15,7}{-0,98} = 16{,}0\,\text{s}$$

Exemple 1.49 – Radar rotatif

Un radar de navigation effectue un balayage complet toutes les 3 s.

a) Quelle est sa vitesse angulaire en rad/s et en RPM?

b) Si l'antenne a une longueur de 1,5 m, quelle est la vitesse linéaire de son extrémité?

a) Vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi}{3} = 2{,}09\,\text{rad/s} = 2,09 \times \frac{60}{2\pi} = 20\,\text{RPM}$$

b) Vitesse linéaire :

$$v = r\omega = 1,5 \times 2,09 = 3{,}14\,\text{m/s}$$

Exemple 1.50 – Cabestan (exemple de calcul complet)

Un cabestan de rayon 25 cm est utilisé pour haler un câble. Il démarre du repos et accélère à $0{,}5\,\text{rad/s}^2$ pendant 4 s, puis maintient une vitesse constante.

a) Quelle vitesse angulaire atteint-il?

b) Combien de tours effectue-t-il pendant l'accélération?

c) Quelle longueur de câble est halée pendant les 10 premières secondes?

a) Vitesse angulaire finale :

$$\omega_f = \omega_i + \alpha \Delta t = 0 + 0,5 \times 4 = 2\,\text{rad/s}$$

En RPM : $\omega_f = 2 \times \frac{60}{2\pi} = 19{,}1\,\text{RPM}$

b) Déplacement angulaire pendant l'accélération :

$$\Delta\theta = \omega_i \Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 = 0 + \frac{1}{2}(0,5)(4)^2 = 4\,\text{rad}$$

Nombre de tours : $\frac{4}{2\pi} = 0,64$ tour

c) Longueur de câble halée en 10 s :

Phase 1 (0 à 4 s, accélération) : $\Delta\theta_1 = 4\,\text{rad}$

Phase 2 (4 à 10 s, vitesse constante) :

$$\Delta\theta_2 = \omega \times \Delta t = 2 \times 6 = 12\,\text{rad}$$

Total : $\Delta\theta_{total} = 4 + 12 = 16\,\text{rad}$

Longueur de câble :

$$s = r\Delta\theta = 0,25 \times 16 = 4\,\text{m}$$

Complément : Vitesse relative

En navigation, il est souvent nécessaire de tenir compte du **courant** ou du **vent** pour déterminer la vitesse réelle d'un navire par rapport au fond marin ou à un point fixe.

Vitesse relative

La **vitesse relative** d'un objet A par rapport à un objet B est la vitesse de A telle que la percevrait un observateur situé sur B :

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \tag{1.41}$$

Terminologie maritime

- **Vitesse surface** ($\vec{v}_{surface}$) : vitesse du navire par rapport à l'eau (mesurée par le loch)
- **Vitesse fond** ($\vec{v}_{fond}$) : vitesse du navire par rapport au fond marin (mesurée par GPS)
- **Courant** ($\vec{v}_{courant}$) : vitesse de l'eau par rapport au fond

La relation fondamentale est :

$$\vec{v}_{fond} = \vec{v}_{surface} + \vec{v}_{courant} \tag{1.42}$$

Exemple 1.51 – Navire contre le courant

Un cargo navigue vers l'est à 12 nuds (vitesse surface). Le courant porte vers l'ouest à 3 nuds. Quelle est la vitesse fond du cargo?

Solution :

En prenant l'est comme direction positive :

- $v_{surface} = +12\,\text{nuds}$ (vers l'est)
- $v_{courant} = -3\,\text{nuds}$ (vers l'ouest)

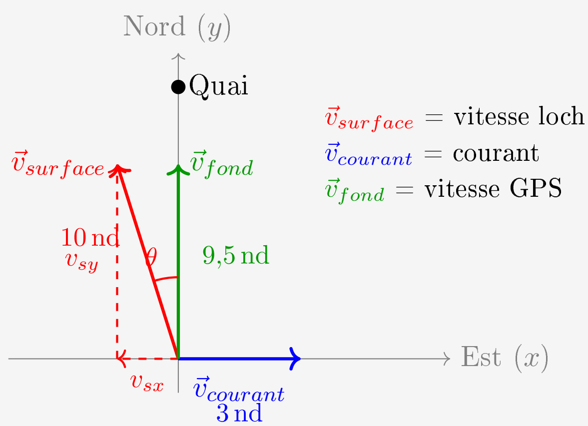
$$v_{fond} = v_{surface} + v_{courant} = 12 + (-3) = 9\,\text{nuds vers l'est}$$

Le navire avance effectivement à 9 nuds par rapport au fond.

Exemple 1.52 – Traversée avec courant latéral — Décomposition vectorielle

Un traversier doit rejoindre un quai situé exactement au nord, à 2 km. Sa vitesse propre (surface) est de 10 nuds, mais un courant de 3 nuds porte vers l'est.

Problème : Si le capitaine pointe directement vers le nord, le navire dérivera vers l'est. Pour atteindre le quai, il doit **compenser** en pointant légèrement vers l'ouest.



Analyse par décomposition vectorielle :

Pour que $\vec{v}_{fond}$ soit dirigée exactement vers le nord, sa composante x doit être nulle :

$$v_{fond,x} = v_{surface,x} + v_{courant,x} = 0$$

$$-v_{surface} \sin\theta + v_{courant} = 0$$

D'où l'**angle de compensation** :

$$\sin\theta = \frac{v_{courant}}{v_{surface}} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 17{,}5^\circ \text{ ouest du nord}}$$

Vitesse fond résultante (composante y) :

$$v_{fond} = v_{fond,y} = v_{surface} \cos\theta = 10 \times \cos(17{,}5^\circ) = \boxed{9{,}5\,\text{nuds}}$$

Vérification par le théorème de Pythagore :

$$v_{surface}^2 = v_{fond}^2 + v_{courant}^2 \quad \Rightarrow \quad 10^2 = 9{,}5^2 + 3^2 = 90{,}25 + 9 = 99{,}25 \approx 100 \quad \checkmark$$

Attention

La vitesse relative est un concept vectoriel. En 2D, il faut décomposer les vitesses en composantes et les additionner vectoriellement. Ce sujet sera approfondi dans le cours de navigation.

Résumé du chapitre

Concept	**Formule / Définition**
La **cinématique** est la branche de la mécanique qui **décrit** le mouvement des corps, sans s'intéresser à ses causes.	Description qualitative et mathématique du mouvement
Le **déplacement** est la variation de position. C'est une grandeur vectorielle (avec signe en 1D).	$\Delta x = x_f - x_i$
La **distance parcourue** est la longueur totale du trajet. C'est une grandeur scalaire (toujours ≥ 0).	$d =$ longueur du trajet
La **vitesse moyenne** est le rapport entre le déplacement et l'intervalle de temps.	$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
La **vitesse scalaire moyenne** est le rapport entre la distance parcourue et l'intervalle de temps.	$v_{scalaire} = \frac{d}{\Delta t}$
La **vitesse instantanée** est la vitesse à un instant précis. Graphiquement, c'est la pente de la tangente à $x(t)$.	$v =$ pente de la tangente à $x(t)$
L'**accélération moyenne** est le rapport entre la variation de vitesse et l'intervalle de temps.	$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
L'**accélération instantanée** est l'accélération à un instant précis. C'est la pente de la tangente à $v(t)$.	$a =$ pente de la tangente à $v(t)$

Concept	Formule / Définition
Équations du MRUA (mouvement à accélération constante)	$v_f = v_i + a\Delta t$ $v_{moy} = \frac{v_i + v_f}{2}$ $\Delta x = \frac{1}{2}(v_i + v_f)\Delta t$ $\Delta x = v_i\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ $v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$
Conversion maritime : Le nœud est l'unité de vitesse en navigation.	$1\,\text{nud} = 1{,}852\,\text{km/h} = 0{,}5144\,\text{m/s}$
Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : mouvement en ligne droite à vitesse constante.	$\Delta x = v \cdot \Delta t$
Chute libre : mouvement sous la seule action de la gravité (MRUA vertical).	$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ (vers le bas)
Mouvement en 2D : décomposer en x et y, traiter séparément, relier par le temps Δt.	$v_x = v\cos\theta$ $v_y = v\sin\theta$
Projectile : en x c'est un MRU, en y c'est une chute libre.	$a_x = 0$ $a_y = -g$
Cinématique de rotation : analogie complète avec la translation.	$\theta = \frac{s}{r}$ $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Relations linéaire-angulaire	$s = r\theta$ $v = r\omega$ $a_t = r\alpha$
Équations rotation (accélération angulaire constante)	$\omega_f = \omega_i + \alpha\Delta t$ $\Delta\theta = \omega_i\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2$ $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Compétences

À la fin de ce chapitre, vous devriez être en mesure de :

Compétence	**Difficile**	**Familier**	**Minimum**	**Maîtrise**
Cinématique de translation (1D)				
Expliquer ce qu'est la cinématique (description du mouvement)				
Différencier un déplacement et une distance parcourue				
Calculer la vitesse moyenne à partir de données ou d'un graphique				
Calculer la vitesse scalaire moyenne				
Interpréter un graphique position-temps $x(t)$				
Déterminer la vitesse instantanée à partir d'un graphique				
Calculer l'accélération moyenne				
Interpréter un graphique vitesse-temps $v(t)$				
Choisir et appliquer les équations du MRUA				
Chute libre et projectile (2D)				
Appliquer les équations du MRUA à la chute libre				
Résoudre des problèmes de chute libre (objet lâché ou lancé)				
Décomposer la vitesse initiale d'un projectile en composantes				
Résoudre des problèmes de projectile en 2D				
Cinématique de rotation				
Convertir des angles entre degrés, radians et tours				
Calculer la vitesse angulaire et convertir entre rad/s et RPM				
Utiliser les relations $s = r\theta$, $v = r\omega$, $a_t = r\alpha$				
Appliquer les équations du mouvement circulaire uniformément accéléré				
Applications				
Convertir entre les unités SI et les unités maritimes (nœuds, NM)				
Résoudre des problèmes de navigation impliquant la cinématique				

Chapitre 2

Dynamique et statique

2.1 Les fondements de la dynamique

2.1.1 Introduction : pourquoi étudier la dynamique?

Au chapitre précédent, nous avons appris à **décrire** le mouvement : position, vitesse, accélération. Mais nous n'avons jamais posé la question fondamentale : *pourquoi* les objets bougent-ils? Qu'est-ce qui *cause* le mouvement?

C'est exactement ce que la **dynamique** cherche à expliquer.

Dynamique

La **dynamique** est la branche de la mécanique qui étudie les **causes** du mouvement. Elle répond aux questions :

- Pourquoi un objet accélère-t-il?
- Quelle force faut-il pour produire un mouvement donné?
- Pourquoi certains objets restent-ils immobiles?

La dynamique au cœur du métier d'officier de marine

En tant que futur officier de navigation, vous serez responsable de navires dont la masse peut atteindre des centaines de milliers de tonnes. Contrairement à une automobile qui peut s'arrêter en quelques mètres, un pétrolier lancé à pleine vitesse peut nécessiter **plusieurs kilomètres** pour s'immobiliser.

Pourquoi une telle différence? La réponse se trouve dans ce chapitre.

Questions auxquelles vous saurez répondre

À la fin de ce chapitre, vous pourrez expliquer :

- Pourquoi un navire met si longtemps à s'arrêter ou à changer de cap
- Comment calculer les forces dans les amarres qui retiennent votre navire au quai
- Pourquoi la cargaison mal arrimée se déplace dangereusement lors des manœuvres
- Les forces en jeu lorsque votre navire affronte une tempête
- Pourquoi un virage serré peut faire chavirer un navire

2.1.2 D'Aristote à Newton : une révolution de la pensée

Avant d'énoncer les lois du mouvement, il est essentiel de comprendre pourquoi notre intuition nous trompe si souvent en physique. Pendant près de deux mille ans, la physique occidentale a été dominée par les idées d'Aristote — et ces idées correspondent remarquablement bien à ce que nous observons au quotidien.

La physique d'Aristote (384–322 av. J.-C.)

La vision aristotélicienne du mouvement

Selon Aristote, le mouvement « naturel » des objets terrestres est de tomber vers le centre de la Terre (leur « lieu naturel »), puis de s'y immobiliser. Tout autre mouvement est « violent » et nécessite une cause permanente.

Conclusion d'Aristote : Pour qu'un objet continue de bouger, il faut continuellement exercer une force sur lui.

Cette vision semble parfaitement logique! Observez autour de vous :

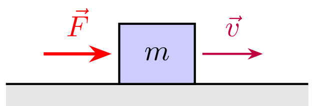
- Quand vous poussez une boîte et que vous arrêtez de pousser, la boîte s'arrête.
- Quand vous pédalez sur un vélo et que vous arrêtez, le vélo ralentit puis s'immobilise.
- Un navire dont on coupe les moteurs finit par s'arrêter.

Il semble bien qu'il faille une force pour *maintenir* le mouvement, n'est-ce pas?

Le problème caché : le frottement

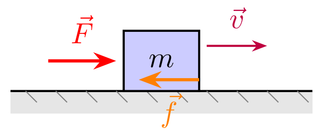
Le problème avec la physique aristotélicienne, c'est qu'elle **confond deux choses** : le mouvement lui-même et les forces de friction qui s'opposent au mouvement. Aristote ne pouvait pas facilement éliminer la friction de ses expériences, alors il l'a intégrée inconsciemment dans sa théorie.

Ce qu'Aristote voyait



« La force cause le mouvement »

Ce qui se passe réellement

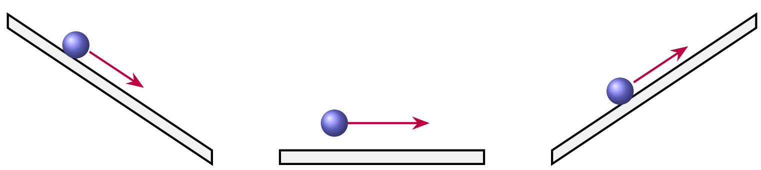


La force $\vec{F}$ compense le frottement $\vec{f}$

Galilée et l'expérience de pensée

Au début du XVIIe siècle, Galilée (1564–1642) a eu une idée révolutionnaire : *et si on pouvait éliminer le frottement?*

Il a imaginé une bille roulant sur un plan incliné parfaitement lisse. Si on lance la bille vers le bas d'une pente, elle accélère. Si on la lance vers le haut, elle décélère. Mais si le plan est parfaitement horizontal et sans friction... la bille devrait continuer indéfiniment à la même vitesse!



Descente : accélère

Horizontal : v constante!

Montée : décélère

La révolution galiléenne

Galilée a compris que **le mouvement à vitesse constante ne nécessite aucune force**. Une force est nécessaire uniquement pour **changer** la vitesse (accélérer ou décélérer), pas pour la maintenir.
Quand vous poussez une boîte et qu'elle s'arrête après que vous cessez de pousser, ce n'est pas parce que « le mouvement a besoin d'une force » — c'est parce que le **frottement** exerce une force qui décélère la boîte!

2.1.3 L'inertie

La découverte de Galilée a mené à un concept fondamental : l'**inertie**.

Inertie

L'**inertie** est la tendance naturelle d'un objet à **résister aux changements** de son état de mouvement.

- Un objet au repos tend à rester au repos.
- Un objet en mouvement tend à continuer en ligne droite à vitesse constante.

L'inertie explique de nombreux phénomènes quotidiens :

- Quand un autobus freine brusquement, les passagers sont « projetés » vers l'avant — en réalité, ils continuent simplement tout droit pendant que l'autobus décélère sous eux.
- Quand un navire vire à tribord, la cargaison non arrimée glisse vers bâbord — elle tend à continuer en ligne droite.
- Un pétrolier de 300 000 tonnes met plusieurs kilomètres à s'arrêter — son énorme inertie résiste au changement de vitesse.

L'inertie n'est PAS une force!

Erreur très fréquente : considérer l'inertie comme une « force » qui pousse les objets.
L'inertie n'est pas une force. C'est une **propriété** de la matière. Dire qu'un passager est « poussé » vers l'avant quand l'autobus freine est incorrect : personne ne le pousse, il continue simplement tout droit par inertie pendant que l'autobus ralentit.
Dans un diagramme de corps libre, on ne dessine **jamais** l'inertie comme une force!

Démystifier nos intuitions

Vrai ou Faux? Pour chaque énoncé, indiquez s'il est vrai ou faux selon la physique newtonienne (pas selon l'intuition aristotélicienne!). Justifiez brièvement.

1. Pour qu'un objet se déplace à vitesse constante, il faut exercer une force constante sur lui.
2. Un objet qui avance est nécessairement soumis à une force qui le pousse.
3. L'inertie est une force qui s'oppose au mouvement.
4. Un passager « projeté vers l'avant » quand l'autobus freine est poussé par une force.
5. Plus un objet est massif, plus il est difficile de changer sa vitesse.
6. Un navire qui avance à 15 nœuds en ligne droite subit nécessairement une force résultante non nulle.

Réponses :

1. **FAUX** — À vitesse constante, la force résultante est nulle. Si vous devez pousser pour maintenir la vitesse, c'est pour compenser le frottement.
2. **FAUX** — Un objet peut continuer à avancer par inertie, sans qu'aucune force ne le

pousse. C'est exactement ce que Galilée a compris!

3. **FAUX** — L'inertie est une propriété, pas une force. On ne la dessine jamais sur un DCL.
4. **FAUX** — Aucune force ne le pousse. Il continue tout droit par inertie pendant que l'autobus décélère.
5. **VRAI** — C'est la définition même de l'inertie : plus la masse est grande, plus la résistance au changement est grande.
6. **FAUX** — Vitesse constante en ligne droite = MRU = force résultante nulle.

2.1.4 La masse : mesure de l'inertie

Si l'inertie est la tendance à résister au changement, comment la quantifier? C'est là qu'intervient la **masse**.

Masse

La **masse** est la mesure quantitative de l'inertie d'un objet. Plus un objet est massif, plus il résiste aux changements de son état de mouvement.

- Symbole : m
- Unité SI : le **kilogramme** (kg)
- La masse est un **scalaire** (toujours positif)
- La masse est une propriété **intrinsèque** : elle ne dépend pas du lieu

Masse vs poids : première distinction

La **masse** et le **poids** sont deux concepts différents :

- La **masse** mesure l'inertie. Elle est la même partout dans l'univers.
- Le **poids** est la force gravitationnelle exercée sur un objet. Il dépend du lieu.

Un astronaute de masse $m = 80\,\text{kg}$ a la même masse sur Terre, sur la Lune ou dans l'espace. Mais son poids est différent à chaque endroit!
Nous reviendrons en détail sur cette distinction dans la section sur les forces.

2.1.5 Les trois lois de Newton

Isaac Newton (1642–1727) a synthétisé les travaux de Galilée et ses propres découvertes en trois lois fondamentales, publiées en 1687 dans les *Principia Mathematica*. Ces trois lois constituent le fondement de toute la mécanique classique.

Première loi de Newton (principe d'inertie)

Première loi de Newton

Tout objet persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'une force extérieure n'agisse sur lui.
En d'autres termes : si la somme des forces sur un objet est nulle, alors :

- S'il était au repos, il reste au repos.
- S'il était en mouvement, il continue en ligne droite à vitesse constante.

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \quad \text{(repos ou MRU)} \tag{2.1}$$

Cette loi formalise ce que Galilée avait compris : le mouvement à vitesse constante est l'état « naturel » d'un objet libre de toute force. Il n'y a pas besoin de force pour maintenir le mouvement — seulement pour le *changer*.

Référentiels inertiels

La première loi n'est valide que dans certains référentiels appelés **référentiels inertiels** (ou galiléens). Un référentiel inertiel est un référentiel dans lequel un objet libre de toute force reste au repos ou en MRU.
Pour nos applications, la surface de la Terre est une bonne approximation d'un référentiel inertiel (les effets de la rotation terrestre sont négligeables à notre échelle).

Deuxième loi de Newton (loi fondamentale)

La première loi nous dit ce qui se passe quand la force résultante est nulle. Mais que se passe-t-il quand elle ne l'est pas?

Deuxième loi de Newton

L'accélération d'un objet est directement proportionnelle à la force résultante qui s'exerce sur lui, et inversement proportionnelle à sa masse.

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}} \tag{2.2}$$

où :

- $\sum \overrightarrow{F}$ est la somme vectorielle de toutes les forces (en newtons, N)
- m est la masse de l'objet (en kilogrammes, kg)
- $\overrightarrow{a}$ est l'accélération résultante (en m/s²)

Cette équation est probablement la plus importante de toute la mécanique. Elle établit le lien quantitatif entre force, masse et accélération :

- Plus la force est grande, plus l'accélération est grande (proportionnalité directe).
- Plus la masse est grande, plus l'accélération est petite (proportionnalité inverse).

Le newton

L'unité de force, le **newton** (N), est définie à partir de la deuxième loi :

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2$$

Un newton est la force nécessaire pour donner à une masse de 1 kg une accélération de 1 m/s².
Ordre de grandeur : Une pomme pèse environ 1 N. Un humain de 70 kg pèse environ 700 N.

Exemple 2.1 – Accélération d'un navire

Un remorqueur de masse $m = 500\,\text{tonnes} = 5{,}0 \times 10^5\,\text{kg}$ est propulsé par une force de poussée $F = 100\,\text{kN}$. En négligeant la résistance de l'eau au démarrage, quelle est son accélération initiale?
Solution :
On applique la deuxième loi de Newton :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{100 \times 10^3\,\mathrm{N}}{5{,}0 \times 10^5\,\mathrm{kg}} = 0{,}20\,\mathrm{m/s}^2$$

Interprétation : Le remorqueur gagne 0,20 m/s de vitesse chaque seconde. Pour atteindre 10 m/s (environ 20 nœuds), il lui faudrait $t = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{0{,}20\,\mathrm{m/s}^2} = 50\,\mathrm{s}$ en l'absence de résistance.
En réalité, la résistance de l'eau augmente avec la vitesse et limite la vitesse maximale atteignable.

Troisième loi de Newton (action-réaction)

Troisième loi de Newton

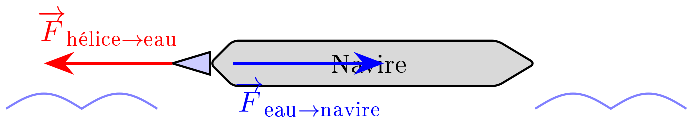
Quand un objet A exerce une force sur un objet B, l'objet B exerce simultanément sur l'objet A une force égale en module mais de sens opposé.

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}} \tag{2.3}$$

Les forces d'action et de réaction possèdent les caractéristiques suivantes :

1. Elles ont le **même module** (même « force »).
2. Elles ont la **même direction** (même ligne d'action).

3. Elles ont des **sens opposés**.
4. Elles agissent sur des **objets différents**.
5. Elles apparaissent et disparaissent **simultanément**.



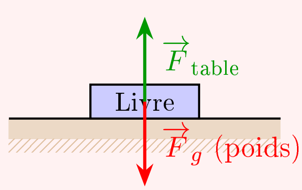
L'hélice pousse l'eau vers l'arrière; en réaction, l'eau pousse le navire vers l'avant.

Exemple 2.2 – Propulsion d'un navire

Comment un navire avance-t-il? L'hélice, en tournant, pousse l'eau vers l'arrière. Par la troisième loi de Newton, l'eau exerce une force égale et opposée sur l'hélice (donc sur le navire), le propulsant vers l'avant.
La force exercée par l'hélice sur l'eau est exactement égale à la force exercée par l'eau sur le navire. Mais l'eau, ayant accès à tout l'océan, ne semble pas accélérer de façon perceptible, tandis que le navire, lui, avance.
C'est le même principe pour la marche : vous poussez le sol vers l'arrière avec votre pied, et le sol vous pousse vers l'avant.

Le poids et la force de la table ne forment PAS une paire action-réaction

Quand un livre est posé sur une table, deux forces agissent **sur le livre** : son poids (vers le bas) et la force que la table exerce sur lui (vers le haut). Ces deux forces sont égales en module et opposées en direction, donc le livre reste immobile.
Mais ces deux forces ne forment PAS une paire action-réaction!
Elles agissent toutes les deux sur le **même objet** (le livre), ce qui viole la caractéristique fondamentale des paires action-réaction (qui doivent agir sur des objets *différents*).



Ces deux forces agissent sur le **même objet**. Ce ne sont **pas** des forces action-réaction!

Les **vraies** paires action-réaction sont :

- Le poids du livre (Terre → livre) et l'attraction du livre sur la Terre (livre → Terre)
- La force de la table sur le livre (table → livre) et la force du livre sur la table (livre → table)

Identifier les paires action-réaction

Pour chaque situation, identifiez la paire action-réaction associée à la force mentionnée.

1. La Terre attire une pomme vers le bas.
2. Un joueur de hockey frappe la rondelle avec son bâton.
3. Un remorqueur tire un navire avec un câble.
4. Les roues d'une voiture poussent le sol vers l'arrière.
5. Un plongeur pousse sur le tremplin vers le bas.

Réponses :

1. La pomme attire la Terre vers le haut (avec la même force!).
2. La rondelle exerce une force sur le bâton (c'est pourquoi on « sent » le choc).
3. Le navire tire le remorqueur vers l'arrière (via le même câble).
4. Le sol pousse les roues (donc la voiture) vers l'avant.
5. Le tremplin pousse le plongeur vers le haut (c'est ce qui le propulse).

2.1.6 L'équilibre : un cas particulier de la première loi

La première loi de Newton nous dit qu'un objet reste au repos (ou en MRU) si aucune force résultante n'agit sur lui. Mais que se passe-t-il si *plusieurs* forces agissent sur un objet, mais que leur somme vectorielle est nulle? L'objet reste également en équilibre!

Équilibre de translation

Un objet est en **équilibre de translation** si et seulement si la somme vectorielle de toutes les forces qui agissent sur lui est nulle :

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}} \tag{2.4}$$

En composantes cartésiennes :

$$\sum F_x = 0 \tag{2.5}$$

$$\sum F_y = 0 \tag{2.6}$$

Un objet en équilibre peut être :

- **Au repos** — et il restera au repos (**équilibre statique**)
- **En mouvement rectiligne uniforme** — et il continuera ainsi (**équilibre dynamique**)

L'équilibre ne signifie pas « immobile »

Un navire qui avance en ligne droite à vitesse constante est en équilibre : la poussée des moteurs est exactement compensée par la résistance de l'eau.
Un parachutiste en chute à vitesse terminale est aussi en équilibre : son poids est compensé par la résistance de l'air.
Dans les deux cas, $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ même si l'objet est en mouvement!

L'étude des systèmes en équilibre statique (au repos) s'appelle la **statique**. C'est un cas particulier de la dynamique où l'accélération est nulle. Les conditions d'équilibre ($\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$) nous permettent de calculer des forces inconnues dans des systèmes comme les câbles de suspension, les amarres de navire, ou les structures en général.

Nous approfondirons l'équilibre et la résolution de problèmes de statique après avoir étudié les différents types de forces.

2.2 Les forces

Maintenant que nous comprenons les lois de Newton, il est temps de dresser l'inventaire des forces que nous rencontrerons en mécanique. Connaître ces forces — leur origine, leur direction, leur formule — est essentiel pour résoudre tout problème de dynamique ou de statique.

2.2.1 Le poids et la gravitation

La gravitation universelle

En 1687, Newton a proposé une loi décrivant l'attraction gravitationnelle entre deux masses quelconques :

Loi de la gravitation universelle

Deux objets de masses m_1 et m_2, séparés par une distance r (mesurée entre leurs centres), s'attirent mutuellement avec une force :

$$\boxed{F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \tag{2.7}$$

où $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ est la **constante gravitationnelle universelle**.

Cette loi explique aussi bien la chute d'une pomme que le mouvement des planètes autour du Soleil. C'est une force **toujours attractive** : les masses s'attirent, elles ne se repoussent jamais.

Le poids : cas particulier près de la Terre

Près de la surface de la Terre, la distance r entre un objet et le centre de la Terre est approximativement constante (le rayon terrestre $R_T \approx 6371\,\mathrm{km}$). On peut alors simplifier l'expression de la force gravitationnelle :

Le poids

Le **poids** d'un objet est la force gravitationnelle exercée par la Terre sur cet objet :

$$\boxed{F_g = mg} \tag{2.8}$$

où :

- m est la masse de l'objet (en kg)
- $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ est l'accélération gravitationnelle près de la surface terrestre
- F_g est exprimé en newtons (N)

Direction : Le poids est **toujours dirigé vers le centre de la Terre**, c'est-à-dire verticalement vers le bas.

D'où vient $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$?

En combinant la loi de la gravitation universelle avec $F_g = mg$, on obtient :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{(6{,}674 \times 10^{-11}) \times (5{,}972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})}{(6{,}371 \times 10^{6}\,\mathrm{m})^2} \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

La valeur de g varie légèrement selon l'altitude et la latitude :

- Au niveau de la mer à l'équateur : $g \approx 9{,}78\,\mathrm{m/s^2}$
- Au niveau de la mer aux pôles : $g \approx 9{,}83\,\mathrm{m/s^2}$
- À $10\,\mathrm{km}$ d'altitude : $g \approx 9{,}78\,\mathrm{m/s^2}$

Pour nos calculs, nous utiliserons $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ ou $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$ pour les estimations rapides.

Masse vs Poids : la distinction fondamentale

	Masse	**Poids**
Nature	Propriété intrinsèque	Force
Symbole	m	F_g ou P
Unité SI	kilogramme (kg)	newton (N)
Dépend du lieu?	Non	Oui
Type de grandeur	Scalaire	Vecteur

Un astronaute de 80 kg a toujours une masse de 80 kg, que ce soit sur Terre, sur la Lune ou dans l'espace. Mais son poids est :

- Sur Terre : $F_g = 80 \times 9,81 = 785\,\text{N}$
- Sur la Lune : $F_g = 80 \times 1,62 = 130\,\text{N}$
- En orbite (« apesanteur ») : $F_g \approx 0\,\text{N}$ (en chute libre)

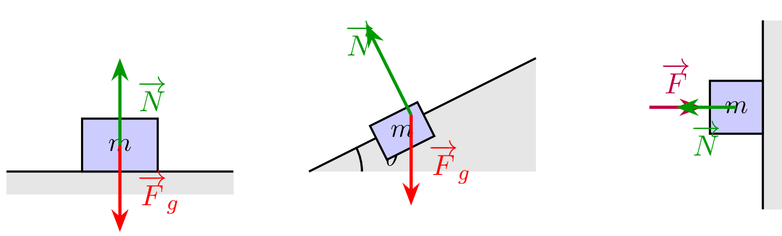
2.2.2 La force normale

Quand un objet est en contact avec une surface, cette surface exerce une force sur l'objet. La composante de cette force qui est **perpendiculaire** à la surface s'appelle la **force normale**.

Force normale

La **force normale** $\overrightarrow{N}$ est la force exercée par une surface sur un objet en contact avec elle.

- **Direction :** Toujours **perpendiculaire** à la surface
- **Sens :** Vers l'**extérieur** de la surface (pousse l'objet, ne le tire pas)
- **Module :** À déterminer par les conditions d'équilibre ou la 2e loi



Surface horizontale $N = mg$ | Plan incliné $N = mg\cos\theta$ | Mur vertical $N = F$

L'origine physique de la normale

À l'échelle microscopique, la force normale provient de la **répulsion électromagnétique** entre les nuages électroniques des atomes. Quand vous posez un livre sur une table, les électrons du livre repoussent les électrons de la table — c'est cette répulsion qui empêche le livre de traverser la table!

La normale n'est pas toujours égale au poids!

Sur une surface horizontale sans autres forces verticales, on a effectivement $N = mg$. Mais ce n'est **pas** une formule générale!

- Sur un plan incliné : $N = mg\cos\theta < mg$
- Si on pousse l'objet vers le bas : $N > mg$
- Si on tire l'objet vers le haut : $N < mg$
- Dans un ascenseur qui accélère vers le haut : $N > mg$

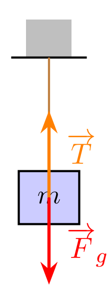
La normale est toujours déterminée par les équations de Newton, jamais par une formule mémorisée.

2.2.3 La tension

Tension

La **tension** $\vec{T}$ est la force exercée par une corde, un câble, une chaîne ou tout objet flexible sur un objet auquel il est attaché.

- **Direction :** Parallèle à la corde, le long de celle-ci
- **Sens :** La tension **tire** toujours l'objet (une corde ne peut pas pousser!)
- **Module :** À déterminer par les conditions d'équilibre ou la 2e loi



La corde tire la masse vers le haut avec une tension $T = mg$ (équilibre)

Hypothèse de la corde idéale

Dans ce cours, nous considérerons généralement des cordes **idéales** :

- **Masse négligeable** : La corde elle-même ne contribue pas à l'inertie du système.
- **Inextensible** : La corde ne s'étire pas sous la tension.
- **Tension uniforme** : La tension est la même partout dans la corde.

Application maritime : les amarres

Les amarres d'un navire sont soumises à des tensions considérables. Un navire de croisière de 100 000 tonnes amarré dans un port peut exercer des forces de plusieurs centaines de kilonewtons sur ses amarres lors de vents forts ou de courants.
La connaissance des tensions dans les amarres est essentielle pour :

- Choisir des cordages de résistance appropriée
- Répartir les amarres de façon à équilibrer les forces
- Éviter la rupture des amarres (danger mortel!)

2.2.4 Le frottement

Quand deux surfaces sont en contact, une force s'oppose au glissement (ou à la tendance au glissement) de l'une sur l'autre : c'est le **frottement**.

Force de frottement

La **force de frottement** $\vec{f}$ est une force qui s'oppose au mouvement relatif (ou à la tendance au mouvement) entre deux surfaces en contact.

- **Direction :** Parallèle à la surface de contact
- **Sens :** Opposé au mouvement (ou à la tendance au mouvement)

On distingue deux types de frottement sec :

Le frottement statique

Le frottement **statique** agit entre deux surfaces qui **ne glissent pas** l'une sur l'autre. C'est une force « adaptative » : elle s'ajuste pour empêcher le glissement, jusqu'à une valeur maximale.

$$\boxed{f_s \leq \mu_s N} \tag{2.9}$$

où :

- μ_s est le **coefficient de frottement statique** (sans dimension)
- N est la force normale
- L'inégalité signifie que f_s prend la valeur *nécessaire* pour empêcher le glissement, jusqu'à un maximum de $\mu_s N$

Le frottement cinétique

Le frottement **cinétique** (ou dynamique) agit entre deux surfaces qui **glissent** l'une sur l'autre. Son module est essentiellement constant :

$$\boxed{f_c = \mu_c N} \tag{2.10}$$

où μ_c est le **coefficient de frottement cinétique**.

Relation entre μ_s et μ_c

En général, $\mu_s > \mu_c$: il est plus difficile de *mettre* un objet en mouvement que de le *maintenir* en mouvement.
C'est pourquoi un objet qu'on pousse semble « partir » brusquement une fois qu'il commence à glisser — on passe soudainement d'un frottement statique maximal à un frottement cinétique plus faible.

Coefficients de frottement typiques

Surfaces en contact	μ_s	μ_c
Acier sur acier (sec)	0,74	0,57
Acier sur acier (lubrifié)	0,15	0,06
Caoutchouc sur asphalte (sec)	0,9	0,7
Caoutchouc sur asphalte (mouillé)	0,7	0,5
Bois sur bois	0,5	0,3
Glace sur glace	0,1	0,03
Téflon sur acier	0,04	0,04

Ce dont le frottement ne dépend PAS

En première approximation (modèle de Coulomb), le frottement :

- **Ne dépend pas de l'aire de contact** : Une brique posée à plat ou sur la tranche a le même frottement.
- **Ne dépend pas de la vitesse de glissement** (pour le frottement cinétique).

Ces approximations sont valables pour le « frottement sec ». Le frottement dans les fluides (air, eau) obéit à des lois différentes.

2.2.5 La force centripète

Au chapitre précédent, nous avons vu qu'un objet en mouvement circulaire possède une **accélération centripète** dirigée vers le centre du cercle, même si sa vitesse (en module) reste constante. Selon la deuxième loi de Newton, cette accélération *doit* être causée par une force.

Force centripète

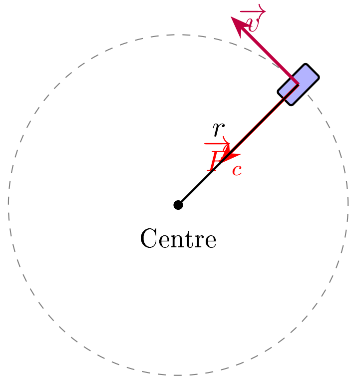
La **force centripète** est la force résultante nécessaire pour maintenir un objet sur une trajectoire circulaire. Elle est toujours dirigée **vers le centre** de la trajectoire.

$$\boxed{F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r} \tag{2.11}$$

La force centripète n'est PAS un nouveau type de force!

La force centripète n'est **pas** une force supplémentaire à ajouter sur un diagramme de corps libre. C'est simplement le **nom** qu'on donne à la composante de la force résultante qui est dirigée vers le centre du cercle.
Cette force peut être fournie par :

- La **tension** d'une corde (balle au bout d'une ficelle)
- Le **frottement** (voiture dans un virage)
- La **gravité** (satellite en orbite)
- La **normale** (dans un virage bancé)
- Une **combinaison** de forces



La force centripète est toujours perpendiculaire à la vitesse et dirigée vers le centre.

Et la « force centrifuge » ?

Vous avez certainement ressenti cette sensation d'être « poussé vers l'extérieur » dans un virage serré. Pourtant, aucune force ne vous pousse réellement vers l'extérieur!

La force centrifuge n'existe pas (dans un référentiel inertiel)

Ce que vous ressentez comme une « force centrifuge » est en réalité votre **inertie** : votre corps tend à continuer en ligne droite, tandis que la voiture tourne sous vous.
Du point de vue du sol (référentiel inertiel), aucune force ne vous pousse vers l'extérieur. C'est le siège et la ceinture qui vous *tirent* vers l'intérieur pour vous faire tourner avec la voiture.
La « force centrifuge » n'apparaît que si vous analysez le mouvement depuis la voiture (référentiel non inertiel), ce que nous n'avons pas besoin de faire dans ce cours.

Exemple 2.3 – Cargaison dans un virage

Un navire effectue un virage à vitesse constante. Une caisse mal arrimée sur le pont glisse vers l'extérieur du virage. Que s'est-il passé?
Analyse incorrecte : « La force centrifuge a poussé la caisse vers l'extérieur. »
Analyse correcte : Le navire tourne, ce qui nécessite une force centripète pour tout ce qui est à bord. Pour la caisse, cette force devrait être fournie par le **frottement** avec le pont. Mais si le frottement est insuffisant (caisse mal arrimée, pont glissant), la caisse ne peut pas tourner avec le navire. Selon la première loi de Newton, elle **continue donc en ligne droite** — ce qui, vu depuis le navire qui tourne, ressemble à un mouvement vers l'extérieur.
Leçon : La cargaison doit être correctement arrimée pour que les forces de friction puissent fournir la force centripète nécessaire lors des manœuvres!

Pour aller plus loin

Les applications détaillées de la force centripète (virage de navire, inclinaison en virage, mouvement circulaire vertical) sont présentées à la section **??**.

2.2.6 La force de rappel (loi de Hooke)

Lorsqu'on comprime ou étire un ressort (ou tout objet élastique), celui-ci exerce une force qui tend à le ramener à sa position naturelle. C'est la **force de rappel**.

Loi de Hooke

La force exercée par un ressort est proportionnelle à son allongement (ou sa compression) :

$$F_{\text{ressort}} = -k\Delta x$$

où k est la **constante de raideur** du ressort (N/m) et Δx est le déplacement par rapport à la position d'équilibre.
Le signe négatif indique que la force s'oppose toujours au déplacement : si on étire le ressort ($\Delta x > 0$), la force tire vers l'arrière ($F < 0$), et inversement.

Exemple 2.4 – Ressort d'amortissement d'un quai

Un navire accoste et comprime un amortisseur de quai (pare-battage à ressort) de $\Delta x = 15\,\text{cm}$. La constante de raideur de l'amortisseur est $k = 8000\,\text{N/m}$. Quelle force l'amortisseur exerce-t-il sur le navire?

La compression vaut $\Delta x = 0{,}15\,\text{m}$. En module :

$$F = k|\Delta x| = 8000 \times 0{,}15 = \boxed{1200\,\text{N}}$$

La force est dirigée vers l'extérieur du quai (elle repousse le navire), ce qui est cohérent : le ressort comprimé pousse pour revenir à sa longueur naturelle.

2.2.7 Tableau récapitulatif des forces

Force	Formule	Direction et caractéristiques
Poids	$F_g = mg$	Toujours verticale, vers le bas (centre de la Terre)
Normale	N (à déterminer)	Perpendiculaire à la surface, vers l'extérieur
Tension	T (à déterminer)	Parallèle à la corde, tire sur l'objet
Frottement statique	$f_s \leq \mu_s N$	Parallèle à la surface, oppose la tendance au glissement
Frottement cinétique	$f_c = \mu_c N$	Parallèle à la surface, oppose le mouvement
Force centripète	$F_c = \dfrac{mv^2}{r}$	Vers le centre de la trajectoire circulaire
Force de rappel	$F = -k\Delta x$	Oppose le déplacement par rapport à la position d'équilibre

Identification des forces

Pour chaque situation, identifiez **toutes** les forces agissant sur l'objet indiqué en gras. Précisez la direction de chaque force.

1. Un **livre** posé sur une table horizontale.
2. Une **caisse** tirée sur le sol par une corde faisant un angle de 30° avec l'horizontale.
3. Un **bloc** immobile sur un plan incliné à 25°.
4. Un **bloc** glissant vers le bas d'un plan incliné (avec frottement).
5. Une **voiture** prenant un virage horizontal à vitesse constante.
6. Un **conteneur** suspendu par deux câbles faisant des angles différents avec l'horizontale.

Réponses :

1. Poids (vers le bas), Normale (vers le haut)
2. Poids (vers le bas), Normale (vers le haut), Tension (30° vers le haut-avant), Frottement (opposé au mouvement)
3. Poids (vertical, vers le bas), Normale (perpendiculaire au plan), Frottement statique (parallèle au plan, vers le haut)

4. Poids (vertical, vers le bas), Normale (perpendiculaire au plan), Frottement cinétique (parallèle au plan, vers le haut)
5. Poids (vers le bas), Normale (vers le haut), Frottement statique (horizontal, vers le centre du virage)
6. Poids (vers le bas), Tension 1 (vers le câble 1), Tension 2 (vers le câble 2)

2.3 Le diagramme de corps libre et l'équilibre

2.3.1 Le diagramme de corps libre (DCL)

Le **diagramme de corps libre** (DCL) est l'outil le plus important pour résoudre des problèmes de mécanique. Avant de pouvoir appliquer les lois de Newton, vous devez identifier **toutes** les forces qui agissent sur l'objet étudié — et le DCL est la méthode systématique pour y parvenir.

Diagramme de corps libre (DCL)

Un **diagramme de corps libre** est un schéma simplifié montrant :

- L'objet étudié, représenté de façon isolée (souvent par un point ou une forme simple)
- **Toutes** les forces extérieures agissant sur cet objet, représentées par des vecteurs
- Un système de coordonnées approprié

Le DCL ne montre **que** les forces sur l'objet étudié, pas les forces qu'il exerce sur d'autres objets.

Pourquoi le DCL est-il si important?

Le DCL est à la mécanique ce que la liste d'épicerie est aux courses : on peut parfois s'en sortir sans, mais on oublie souvent quelque chose d'important!
Sans un DCL correct et complet :

- Vous risquez d'oublier des forces
- Vous risquez d'ajouter des forces qui n'existent pas
- Vous ne pourrez pas écrire correctement les équations de Newton
- Votre solution sera probablement fausse

Investir du temps dans un bon DCL, c'est s'assurer une résolution correcte.

Les cinq règles d'or du DCL

1. **Isoler l'objet** — Dessinez l'objet étudié *seul*, séparé de son environnement. Représentez-le par un point ou une forme simple.

2. **Représenter TOUTES les forces** — Passez en revue mentalement toutes les forces possibles :

   ✓ Le poids (toujours présent!)

   ✓ La normale (s'il y a contact avec une surface)

   ✓ La tension (s'il y a une corde ou un câble)

   ✓ Le frottement (s'il y a contact et mouvement ou tendance au mouvement)

   ✓ Toute autre force appliquée

3. **Partir du centre de masse** — Dessinez toutes les forces comme partant du centre de l'objet (ou d'un point représentant l'objet).

4. **Respecter les directions** — Chaque force doit pointer dans la bonne direction :
   - Poids : vers le bas (vertical)
   - Normale : perpendiculaire à la surface
   - Tension : le long de la corde, tirant l'objet
   - Frottement : parallèle à la surface, opposé au mouvement

5. **Ne JAMAIS dessiner l'accélération** — L'accélération n'est **pas** une force! Elle est la *conséquence* des forces, pas une force elle-même.

Erreurs fréquentes à éviter

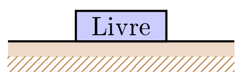
Erreur	**Correction**
Dessiner une « force du mouvement »	Le mouvement n'est pas une force! Un objet en MRU n'a pas besoin de force pour maintenir sa vitesse.
Dessiner l'inertie comme une force	L'inertie est une propriété, pas une force.
Oublier le poids	La Terre attire **toujours** l'objet. Le poids est toujours présent!
Confondre normale et poids	Ce sont deux forces distinctes. $N = mg$ seulement dans des cas particuliers.
Dessiner les forces sur d'autres objets	Le DCL ne montre que les forces **sur** l'objet étudié.
Oublier le frottement	S'il y a contact et mouvement (ou tendance), il y a frottement.

Construction d'un DCL : progression guidée

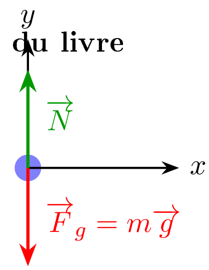
Voyons comment construire un DCL correct dans des situations de complexité croissante.

Niveau 1 : Objet au repos sur surface horizontale

Situation



DCL du livre



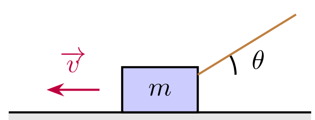
Forces identifiées :

- Poids $\vec{F}_g$: vers le bas
- Normale $\vec{N}$: vers le haut (perpendiculaire à la table)

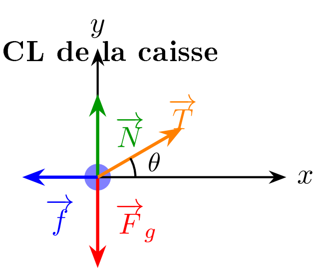
Équilibre : $\sum F_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

Niveau 2 : Objet tiré par une corde

Situation



DCL de la caisse



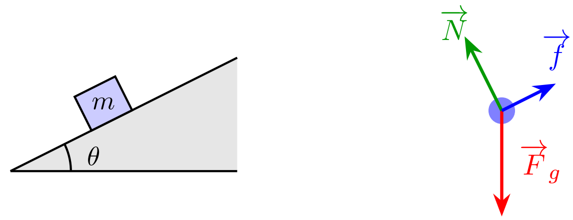
Forces identifiées :

- Poids $\vec{F}_g$: vers le bas
- Normale $\vec{N}$: vers le haut
- Tension $\vec{T}$: le long de la corde, à l'angle θ
- Frottement $\vec{f}$: opposé au mouvement (vers la gauche)

Note : Ici, $N \neq mg$ car la tension a une composante verticale!

Niveau 3 : Objet sur plan incliné

Situation **DCL du bloc**



Forces identifiées :

- Poids $\overrightarrow{F}_g$: vertical vers le bas
- Normale $\overrightarrow{N}$: perpendiculaire au plan (vers l'extérieur)
- Frottement $\overrightarrow{f}$: parallèle au plan, vers le haut (oppose la tendance à glisser)

Note : Le choix judicieux des axes et la décomposition des forces seront présentés dans les exemples de résolution.

2.3.2 L'algorithme de résolution

Voici la méthode systématique pour résoudre **tout** problème de mécanique — qu'il s'agisse d'équilibre (statique) ou de mouvement (dynamique).

Algorithme de résolution en 4 étapes

Étape 1 — SCHÉMA et DCL

a) Dessiner un schéma de la situation physique

b) Isoler l'objet d'intérêt (ou chaque objet, s'il y en a plusieurs)

c) Tracer le DCL : représenter **toutes** les forces agissant sur l'objet

d) Identifier les forces connues et inconnues

Étape 2 — AXES

a) Choisir un système de coordonnées (x, y) adapté au problème

b) *Conseil :* Aligner un axe avec l'accélération (si connue) ou avec la surface de contact

c) Indiquer clairement la direction positive de chaque axe

Étape 3 — ÉQUATIONS DE NEWTON

a) Décomposer chaque force selon les axes x et y

b) Appliquer la deuxième loi de Newton (ou les conditions d'équilibre) :

$$\sum F_x = ma_x \qquad (\text{ou } = 0 \text{ si équilibre})$$
$$\sum F_y = ma_y \qquad (\text{ou } = 0 \text{ si équilibre})$$

c) Écrire les équations explicitement avec les symboles des forces

Étape 4 — ALGÈBRE

a) Compter les équations et les inconnues (il faut autant d'équations que d'inconnues!)

b) Résoudre le système d'équations **algébriquement** (avec des symboles)

c) Substituer les valeurs numériques *à la fin*

d) Vérifier : unités correctes? Ordre de grandeur raisonnable? Signe cohérent?

Pourquoi résoudre algébriquement d'abord?

Résoudre avec des symboles avant de substituer les nombres présente plusieurs avantages :

- On peut vérifier les **unités** de la réponse finale
- On peut analyser les **cas limites** (que se passe-t-il si $\theta \to 0$? si $m \to \infty$?)
- On évite les erreurs de calcul intermédiaires
- La solution est **réutilisable** pour d'autres valeurs numériques

Conseils pour le choix des axes

Le choix du système de coordonnées est libre, mais certains choix simplifient grandement les calculs :

Situation	Choix recommandé
Mouvement horizontal	x horizontal (sens du mouvement), y vertical vers le haut
Plan incliné	x parallèle à la pente, y perpendiculaire à la pente
Objet suspendu	x horizontal, y vertical vers le haut
Mouvement circulaire	Un axe vers le centre du cercle

Peu importe le choix, la physique est la même

Vous pouvez toujours choisir n'importe quel système d'axes — la réponse finale sera la même. Mais un bon choix réduit le nombre de forces à décomposer et simplifie les équations.
Sur un plan incliné, si vous choisissez des axes horizontaux/verticaux, vous devrez décomposer **trois** forces ($\vec{N}$, $\vec{f}$, et $\vec{F}_g$). Avec des axes parallèles/perpendiculaires à la pente, seul le poids doit être décomposé.

2.3.3 Applications : problèmes d'équilibre (statique)

Appliquons maintenant l'algorithme à des problèmes de statique, où $\vec{a} = \vec{0}$.

Exemple 2.5 – Conteneur suspendu par deux câbles

Un conteneur de masse $m = 2000\,\mathrm{kg}$ est suspendu dans la cale d'un navire par deux câbles. Le câble de bâbord fait un angle de $\alpha = 30°$ avec l'horizontale, celui de tribord fait un angle de $\beta = 45°$ avec l'horizontale. Déterminer les tensions T_1 et T_2 dans chaque câble.

Étape 1 — SCHÉMA et DCL

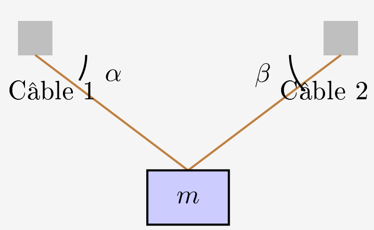
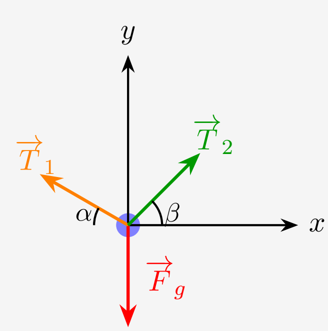


Schéma de situation



DCL du conteneur

Forces sur le conteneur :

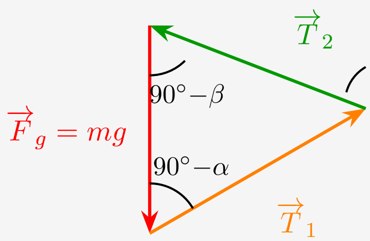
- Poids : $F_g = mg$ (vers le bas)
- Tension 1 : T_1 (vers le câble de bâbord, à l'angle α au-dessus de l'horizontale)
- Tension 2 : T_2 (vers le câble de tribord, à l'angle β au-dessus de l'horizontale)

Étape 2 — MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE (Triangle de forces)

Puisque le conteneur est en équilibre, la somme vectorielle des trois forces est nulle :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = \vec{0}$$

Cela signifie que si on place les trois vecteurs bout à bout, ils forment un **triangle fermé**.



Les angles du triangle sont :

- En bas : $90° - \alpha$
- En haut : $90° - \beta$
- À droite : $\alpha + \beta$

Étape 3 — LOI DES SINUS

Dans un triangle, la loi des sinus stipule que le rapport entre un côté et le sinus de l'angle opposé est constant :

$$\frac{T_1}{\sin(90° - \beta)} = \frac{T_2}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{mg}{\sin(\alpha + \beta)}$$

En utilisant $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$:

$$\frac{T_1}{\cos\beta} = \frac{T_2}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Étape 4 — CALCULS

Application numérique :

Avec $m = 2000\,\text{kg}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(75°) = 0{,}966$$

$$T_1 = \frac{mg\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2000 \times 9{,}81 \times \cos 45°}{\sin 75°} = \frac{19\,620 \times 0{,}707}{0{,}966} = \boxed{14{,}4\,\text{kN}}$$

$$T_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2000 \times 9{,}81 \times \cos 30°}{\sin 75°} = \frac{19\,620 \times 0{,}866}{0{,}966} = \boxed{17{,}6\,\text{kN}}$$

Vérification :

- $T_2 > T_1$: logique car le câble de tribord est plus vertical ($45° > 30°$), il supporte une plus grande partie du poids.
- On peut vérifier : $T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = 14\,400 \times 0{,}5 + 17\,600 \times 0{,}707 = 7\,200 + 12\,440 \approx mg$ ✓

Avantage de la méthode géométrique

La méthode du triangle de forces avec la loi des sinus donne directement les tensions sans avoir à résoudre un système d'équations. Elle est particulièrement efficace quand on a exactement trois forces en équilibre.

Feu de navigation suspendu

Un feu de navigation de masse $m = 15\,\text{kg}$ est suspendu entre deux mâts par deux câbles. Le câble de bâbord fait un angle de $\alpha = 35°$ avec l'horizontale, celui de tribord fait un angle de $\beta = 50°$ avec l'horizontale.

1. Dessinez le DCL du feu de navigation.
2. Écrivez les équations d'équilibre.
3. Calculez les tensions T_1 et T_2 dans chaque câble.

Résolution :

Réponses :
Équation (1) : $-T_1 \cos 35° + T_2 \cos 50° = 0$
Équation (2) : $T_1 \sin 35° + T_2 \sin 50° - mg = 0$
$T_1 = 106\,\text{N}$; $T_2 = 135\,\text{N}$

Exemple 2.6 – Bloc sur plan incliné à l'équilibre

Un bloc de masse $m = 20\,\text{kg}$ est posé sur un plan incliné à $\theta = 20°$ par rapport à l'horizontale. Le bloc reste immobile. Le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0{,}5$.
a) Calculer la force de frottement statique qui maintient le bloc en équilibre.
b) Quel est l'angle maximal avant que le bloc ne commence à glisser?

Étape 1 — SCHÉMA et DCL

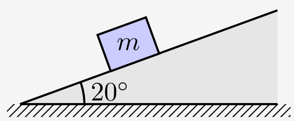
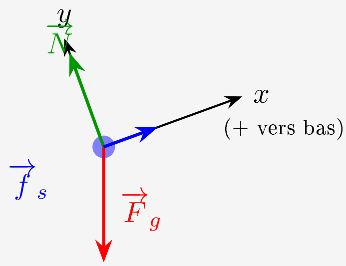


Schéma de situation



DCL du bloc

Forces sur le bloc :

- Poids : $F_g = mg$ (vertical vers le bas)
- Normale : N (perpendiculaire au plan, vers l'extérieur)
- Frottement statique : f_s (parallèle au plan, vers le haut — s'oppose à la tendance à glisser)

Étape 2 — AXES

x : parallèle à la pente, positif vers le bas
y : perpendiculaire à la pente, positif vers l'extérieur
Ce choix est stratégique : seul le poids doit être décomposé.

Étape 3 — ÉQUATIONS DE NEWTON

Décomposition du poids :

$$F_{g,x} = mg\sin\theta \quad \text{(vers le bas de la pente)}$$
$$F_{g,y} = -mg\cos\theta \quad \text{(vers la pente)}$$

Équilibre selon y : $\sum F_y = 0$

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta \tag{1}$$

Équilibre selon x : $\sum F_x = 0$

$$mg\sin\theta - f_s = 0 \quad \Rightarrow \quad f_s = mg\sin\theta \tag{2}$$

Étape 4 — ALGÈBRE

a) Force de frottement :

$$f_s = mg\sin\theta = 20 \times 9{,}81 \times \sin 20^\circ = 196{,}2 \times 0{,}342 = \boxed{67{,}1\,\mathrm{N}}$$

Vérification que le bloc peut rester en équilibre :
Le frottement maximal possible est :

$$f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta = 0{,}5 \times 20 \times 9{,}81 \times \cos 20^\circ = 0{,}5 \times 196{,}2 \times 0{,}940 = 92{,}2\,\mathrm{N}$$

Comme $f_s = 67{,}1\,\mathrm{N} < f_{s,max} = 92{,}2\,\mathrm{N}$, le bloc reste bien en équilibre. ✓

b) Angle maximal :

Le bloc commence à glisser quand $f_s = f_{s,max}$, c'est-à-dire quand :

$$mg \sin \theta_{max} = \mu_s mg \cos \theta_{max}$$

$$\tan \theta_{max} = \mu_s$$

$$\theta_{max} = \arctan(\mu_s) = \arctan(0{,}5) = \boxed{26{,}6°}$$

Remarque : L'angle limite de glissement ne dépend que de μ_s, pas de la masse!

Caisse sur rampe de chargement

Une caisse de 150 kg est posée sur une rampe de chargement inclinée à 25°. Le coefficient de frottement statique entre la caisse et la rampe est $\mu_s = 0{,}6$.

1. La caisse reste-t-elle en place ou glisse-t-elle?
2. Si elle reste en place, quelle est la force de frottement?
3. Quel angle maximal la rampe pourrait-elle avoir avant que la caisse ne glisse?

Résolution :

Réponses :

1. $\tan 25° = 0{,}466 < \mu_s = 0{,}6$, donc la caisse **reste en place**.
2. $f_s = mg \sin 25° = 150 \times 9{,}81 \times 0{,}423 = 622\,\mathrm{N}$
3. $\theta_{max} = \arctan(0{,}6) = 31{,}0°$

2.4 Dynamique : la deuxième loi en action

2.4.1 De l'équilibre à l'accélération

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des situations où les objets sont en équilibre : la force résultante est nulle, donc l'accélération est nulle. Mais que se passe-t-il quand $\sum \overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$?

Maintenant, ça bouge!

	Équilibre (statique)	**Dynamique**
Force résultante	$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\sum \vec{F} \neq \vec{0}$
Accélération	$\vec{a} = \vec{0}$	$\vec{a} \neq \vec{0}$
Mouvement	Repos ou MRU	Accéléré (MRUA ou autre)
Équations	$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$	$\sum F_x = ma_x, \sum F_y = ma_y$

L'algorithme de résolution reste le même! Seules les équations de Newton changent.

2.4.2 Problèmes à une dimension

Commençons par des situations où toutes les forces et le mouvement sont alignés sur une seule direction.

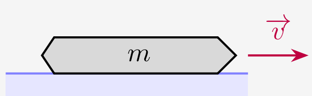
Une seule force

Exemple 2.7 – Remorqueur en accélération

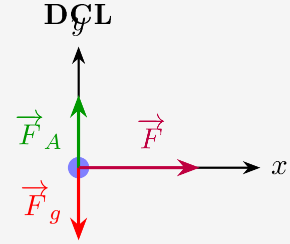
Un remorqueur de masse $m = 800\,\text{tonnes}$ démarre du repos. Ses moteurs fournissent une poussée de $F = 120\,\text{kN}$. En négligeant la résistance de l'eau au démarrage, quelle est son accélération initiale?

Étape 1 — SCHÉMA et DCL

Situation



DCL



Forces : Poids F_g (bas), Poussée d'Archimède F_A (haut), Poussée des moteurs F (avant)
En négligeant la résistance, seule la poussée F contribue à l'accélération horizontale.

Étapes 2-3 — Équation de Newton

Selon x : $\sum F_x = ma_x$

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m}$$

Étape 4 — Calcul

$$a = \frac{120 \times 10^3\,\text{N}}{800 \times 10^3\,\text{kg}} = 0{,}15\,\text{m/s}^2 = \boxed{0{,}15\,\text{m/s}^2}$$

Interprétation : Le remorqueur gagne 0,15 m/s chaque seconde. Pour atteindre 6 m/s (environ 12 nœuds), il faudrait $t = \frac{6}{0{,}15} = 40\,\mathrm{s}$.

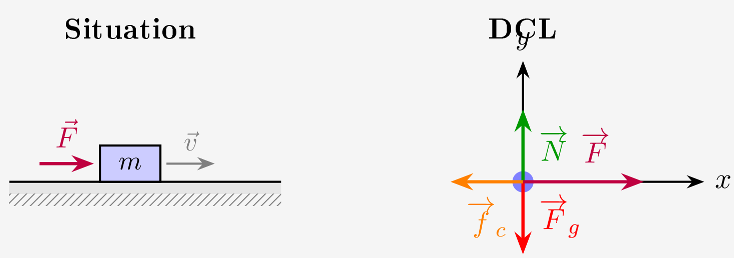
Deux forces opposées : introduction du frottement

En réalité, la résistance de l'eau ou le frottement s'opposent au mouvement. Voyons comment les intégrer.

Exemple 2.8 – Caisse poussée avec frottement

Une caisse de $m = 50\,\mathrm{kg}$ est poussée sur un plancher horizontal avec une force horizontale $F = 200\,\mathrm{N}$. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0{,}25$. Quelle est l'accélération de la caisse?

Étape 1 — SCHÉMA et DCL



Étapes 2-3 — Équations de Newton

Selon y (équilibre vertical) :

$$N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg = 50 \times 9{,}81 = 490{,}5\,\mathrm{N}$$

Frottement cinétique :

$$f_c = \mu_c N = 0{,}25 \times 490{,}5 = 122{,}6\,\mathrm{N}$$

Selon x :

$$F - f_c = ma$$

Étape 4 — Calcul

$$a = \frac{F - f_c}{m} = \frac{200 - 122{,}6}{50} = \frac{77{,}4}{50} = \boxed{1{,}55\,\mathrm{m/s^2}}$$

Remarque : Sans frottement, l'accélération serait $a = \frac{200}{50} = 4\,\mathrm{m/s^2}$. Le frottement réduit l'accélération de plus de 60%!

Chariot de manutention

Un chariot de manutention de $m = 120\,\mathrm{kg}$ est poussé sur le pont d'un navire avec une force horizontale de 180 N. Le coefficient de frottement cinétique entre les roues et le pont est $\mu_c =$

0,08.

1. Calculez l'accélération du chariot.
2. Quelle force minimale faudrait-il pour déplacer le chariot à vitesse constante?
3. Si le chariot part du repos, quelle sera sa vitesse après 5 s?

Résolution :

Réponses :

1. $f_c = 0{,}08 \times 120 \times 9{,}81 = 94{,}2\,\mathrm{N}$; $a = \frac{180-94{,}2}{120} = 0{,}72\,\mathrm{m/s^2}$
2. Pour $a = 0$: $F = f_c = 94{,}2\,\mathrm{N}$
3. $v = v_0 + at = 0 + 0{,}72 \times 5 = 3{,}6\,\mathrm{m/s}$

2.4.3 Problèmes à deux dimensions

Quand les forces ne sont pas toutes alignées, il faut décomposer selon deux axes.

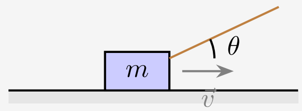
Force appliquée à un angle

Exemple 2.9 – Caisse tirée par une corde à angle

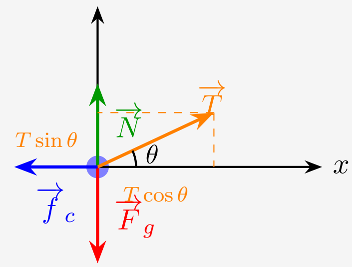
Une caisse de $m = 40\,\mathrm{kg}$ est tirée sur un plancher horizontal par une corde faisant un angle $\theta = 25°$ avec l'horizontale. La tension dans la corde est $T = 150\,\mathrm{N}$ et le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0{,}30$. Calculez l'accélération de la caisse.

Étape 1 — SCHÉMA et DCL

Situation



DCL



Étape 2 — Décomposition

La tension a deux composantes :

$$T_x = T\cos\theta = 150 \times \cos 25^\circ = 136{,}0\,\mathrm{N}$$
$$T_y = T\sin\theta = 150 \times \sin 25^\circ = 63{,}4\,\mathrm{N}$$

Étape 3 — Équations de Newton

Selon y (pas d'accélération verticale) :

$$N + T\sin\theta - mg = 0$$

$$N = mg - T\sin\theta = 40 \times 9{,}81 - 63{,}4 = 392{,}4 - 63{,}4 = 329{,}0\,\mathrm{N}$$

Observation importante : $N < mg$! La composante verticale de la tension « soulage » partiellement le poids, réduisant la normale et donc le frottement.
Frottement :

$$f_c = \mu_c N = 0{,}30 \times 329{,}0 = 98{,}7\,\mathrm{N}$$

Selon x :

$$T\cos\theta - f_c = ma$$

Étape 4 — Calcul

$$a = \frac{T\cos\theta - f_c}{m} = \frac{136{,}0 - 98{,}7}{40} = \frac{37{,}3}{40} = \boxed{0{,}93\,\mathrm{m/s^2}}$$

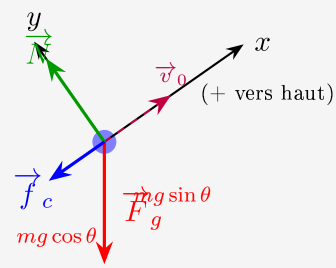
Comparaison : Si la corde était horizontale ($\theta = 0$), on aurait $N = mg = 392{,}4\,\mathrm{N}$, $f_c = 117{,}7\,\mathrm{N}$, et $a = \frac{150-117{,}7}{40} = 0{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Tirer à angle est plus efficace!

Plan incliné avec mouvement

Exemple 2.10 – Bloc lancé vers le haut d'un plan incliné

Un bloc de $m = 10\,\mathrm{kg}$ est lancé vers le haut d'un plan incliné à $\theta = 35^\circ$ avec une vitesse initiale de $4{,}0\,\mathrm{m/s}$. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0{,}20$. Calculez la décélération du bloc pendant sa montée.

Étape 1 — DCL



Étape 2 — Axes
x : parallèle à la pente, positif vers le haut (sens de la vitesse initiale)
y : perpendiculaire à la pente, positif vers l'extérieur
Le frottement est vers le bas de la pente, car il s'oppose au mouvement du bloc qui monte.
Étape 3 — Équations de Newton
Selon y (pas de mouvement perpendiculaire à la pente) :

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

Selon x (attention : les deux forces sont dans le sens $-x$) :

$$-mg\sin\theta - f_c = ma$$

Avec $f_c = \mu_c N = \mu_c mg\cos\theta$:

$$-mg\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta = ma$$

$$a = -g(\sin\theta + \mu_c\cos\theta)$$

Étape 4 — Calcul

$$\begin{aligned} a &= -9{,}81 \times (\sin 35^\circ + 0{,}20 \times \cos 35^\circ) \\ &= -9{,}81 \times (0{,}574 + 0{,}20 \times 0{,}819) \\ &= -9{,}81 \times (0{,}574 + 0{,}164) \\ &= -9{,}81 \times 0{,}738 = \boxed{-7{,}24\,\mathrm{m/s^2}} \end{aligned}$$

Le signe négatif confirme que l'accélération est dirigée vers le bas de la pente : le bloc décélère.
Vérification : Comparons avec le cas sans frottement : $a = -g\sin\theta = -5{,}63\,\mathrm{m/s^2}$. Le frottement *augmente* la décélération de 29%, ce qui est logique puisque frottement et gravité agissent **tous les deux** vers le bas de la pente.
Distance parcourue avant l'arrêt :

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(4{,}0)^2}{2 \times (-7{,}24)} = 1{,}10\,\mathrm{m}$$

Sens du frottement sur un plan incliné

Le frottement s'oppose **toujours** au mouvement relatif :

- Si le bloc glisse vers le **bas** : le frottement est vers le **haut** de la pente.
- Si le bloc est poussé vers le **haut** : le frottement est vers le **bas** de la pente.

Attention à ne pas confondre « s'oppose au mouvement » avec « vers le bas » ou « vers le haut »!

2.4.4 Systèmes à plusieurs objets

Jusqu'ici, nous avons analysé des objets isolés. Mais souvent, plusieurs objets sont reliés et interagissent. Comment traiter ces systèmes?

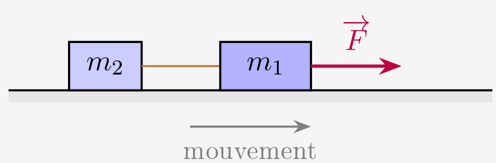
Deux approches possibles :

1. **Analyse séparée :** Tracer un DCL pour chaque objet, écrire les équations de Newton pour chacun, puis résoudre le système d'équations.
2. **Analyse globale :** Traiter le système comme un seul objet (utile pour trouver l'accélération rapidement, mais ne donne pas les forces internes).

Objets reliés sur surface horizontale

Exemple 2.11 – Deux blocs reliés par une corde

Deux blocs de masses $m_1 = 5\,\text{kg}$ et $m_2 = 3\,\text{kg}$ sont reliés par une corde légère et posés sur une surface horizontale sans frottement. On tire le bloc 1 avec une force $F = 24\,\text{N}$.
a) Quelle est l'accélération du système?
b) Quelle est la tension dans la corde?



Méthode 1 : Analyse globale (pour trouver a)
Considérons les deux blocs comme un seul système de masse $m_{tot} = m_1 + m_2 = 8\,\text{kg}$.
La seule force extérieure horizontale est F (la tension est une force *interne* au système).

$$F = m_{tot} \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{24}{8} = \boxed{3{,}0\,\text{m/s}^2}$$

Méthode 2 : Analyse séparée (pour trouver T)

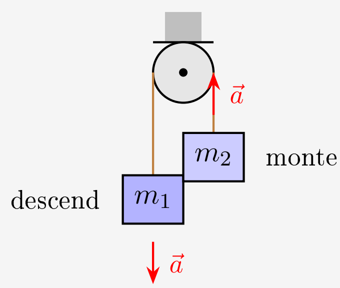
DCL de m_2 DCL de m_1

Pour le bloc 2 : $T = m_2 a = 3 \times 3{,}0 = \boxed{9{,}0\,\mathrm{N}}$
Vérification avec le bloc 1 : $F - T = m_1 a \rightarrow 24 - 9 = 5 \times 3 = 15$ ✓

La machine d'Atwood

Exemple 2.12 – Machine d'Atwood

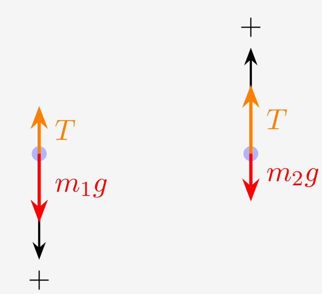
Deux masses $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ sont reliées par une corde légère passant sur une poulie sans frottement. On lâche le système du repos.
a) Quelle est l'accélération du système?
b) Quelle est la tension dans la corde?



Contraintes importantes :

- La corde est **inextensible** : les deux masses ont la même accélération (en module).
- La poulie est **sans masse et sans frottement** : la tension est la même des deux côtés.

Convention : Prenons positif vers le bas pour m_1 et positif vers le haut pour m_2 (les deux dans le sens du mouvement attendu).



DCL de m_1 DCL de m_2

Équations de Newton :
Pour m_1 (positif vers le bas) :

$$m_1 g - T = m_1 a \tag{1}$$

Pour m_2 (positif vers le haut) :

$$T - m_2 g = m_2 a \tag{2}$$

Résolution :
Additionnons (1) et (2) :

$$m_1 g - T + T - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{(5-3) \times 9{,}81}{5+3} = \frac{19{,}62}{8} = \boxed{2{,}45\,\mathrm{m/s^2}}$$

Pour la tension, substituons dans (2) :

$$T = m_2(g + a) = 3 \times (9{,}81 + 2{,}45) = 3 \times 12{,}26 = \boxed{36{,}8\,\mathrm{N}}$$

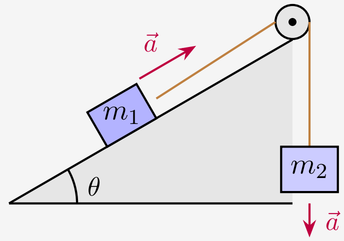
Vérification :

- Si $m_1 = m_2$: $a = 0$ (logique, les masses s'équilibrent)
- Si $m_2 = 0$: $a = g$ (chute libre de m_1)
- T est entre $m_2 g = 29{,}4\,\mathrm{N}$ et $m_1 g = 49{,}1\,\mathrm{N}$ ✓

Poulie avec plan incliné

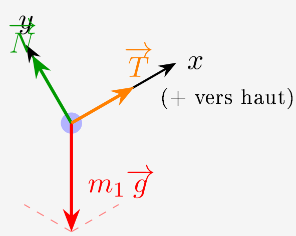
Exemple 2.13 – Bloc sur plan incliné relié à une masse suspendue

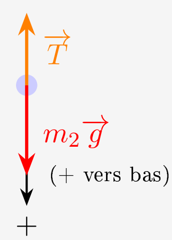
Un bloc de $m_1 = 8\,\mathrm{kg}$ est posé sur un plan incliné à $\theta = 30°$ (sans frottement). Il est relié par une corde passant sur une poulie à une masse suspendue $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$.
Déterminez l'accélération du système et la tension dans la corde.



DCL des deux masses :

DCL de m_1 **DCL de m_2**





Question préliminaire : Dans quel sens le système va-t-il bouger?
Comparons les « forces motrices » :

- Composante du poids de m_1 le long de la pente : $m_1 g \sin\theta = 8 \times 9{,}81 \times 0{,}5 = 39{,}2\,\mathrm{N}$
- Poids de m_2 : $m_2 g = 5 \times 9{,}81 = 49{,}1\,\mathrm{N}$

Comme $49{,}1\,\mathrm{N} > 39{,}2\,\mathrm{N}$, la masse m_2 descend et m_1 monte le plan.
Équations de Newton :
Pour m_1 (positif vers le haut du plan) :

$$T - m_1 g \sin\theta = m_1 a \tag{1}$$

Pour m_2 (positif vers le bas) :

$$m_2 g - T = m_2 a \tag{2}$$

Résolution :
Additionnons (1) et (2) :

$$m_2 g - m_1 g \sin\theta = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\theta}{m_1 + m_2} = \frac{g(m_2 - m_1 \sin\theta)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{9{,}81 \times (5 - 8 \times 0{,}5)}{8 + 5} = \frac{9{,}81 \times 1}{13} = \boxed{0{,}75\,\mathrm{m/s^2}}$$

Tension :

$$T = m_2(g - a) = 5 \times (9{,}81 - 0{,}75) = 5 \times 9{,}06 = \boxed{45{,}3\,\mathrm{N}}$$

Système poulie avec frottement

Reprenons l'exemple précédent, mais avec un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0{,}15$ entre m_1 et le plan.

1. Le système bouge-t-il toujours dans le même sens?
2. Calculez la nouvelle accélération.
3. Calculez la nouvelle tension.

Indice : Le frottement s'oppose au mouvement de m_1 (vers le haut), donc il est dirigé vers le bas de la pente.

Résolution :

Réponses :

1. Oui, m_2 descend toujours (mais il faut vérifier).
2. $f_c = \mu_c N = \mu_c m_1 g \cos\theta = 0{,}15 \times 8 \times 9{,}81 \times 0{,}866 = 10{,}2\,\mathrm{N}$
   Nouvelle équation pour m_1 : $T - m_1 g \sin\theta - f_c = m_1 a$
   $a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\theta - f_c}{m_1 + m_2} = \frac{49{,}1 - 39{,}2 - 10{,}2}{13} = \frac{-0{,}3}{13} \approx 0\,\mathrm{m/s^2}$
   Le système est presque en équilibre! (En fait, avec ces valeurs, il ne bouge pas car le frottement statique suffit.)
3. Si $a \approx 0$: $T \approx m_2 g = 49{,}1\,\mathrm{N}$

2.5 Dynamique du mouvement circulaire

2.5.1 Retour sur l'accélération centripète

Au chapitre précédent, nous avons découvert un résultat surprenant : un objet qui se déplace en cercle à vitesse *constante* possède quand même une accélération! Cette accélération, appelée **centripète**, est dirigée vers le centre du cercle.

Rappel : accélération centripète

Un objet en mouvement circulaire uniforme (vitesse constante en module) possède une accélération dirigée vers le centre :

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{2.12}$$

où :

- v est la vitesse (tangentielle) de l'objet
- r est le rayon de la trajectoire circulaire
- ω est la vitesse angulaire (en rad/s)

Pourquoi une accélération si la vitesse est constante?

Souvenez-vous : l'accélération mesure le **changement de vitesse**, et la vitesse est un **vecteur**. Un vecteur peut changer de deux façons :

- En **module** (la « grandeur » change) → accélération tangentielle
- En **direction** (l'orientation change) → accélération centripète

Dans un mouvement circulaire uniforme, seule la direction change. La vitesse « tourne » constamment, ce qui constitue un changement, donc une accélération.

2.5.2 La force centripète : cause de l'accélération

Maintenant, appliquons la deuxième loi de Newton. S'il y a une accélération vers le centre, alors il *doit* y avoir une force résultante vers le centre!

Force centripète

La **force centripète** est la force résultante nécessaire pour maintenir un objet sur une trajectoire circulaire :

$$\boxed{F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r} \tag{2.13}$$

Cette force est **toujours dirigée vers le centre** de la trajectoire circulaire.

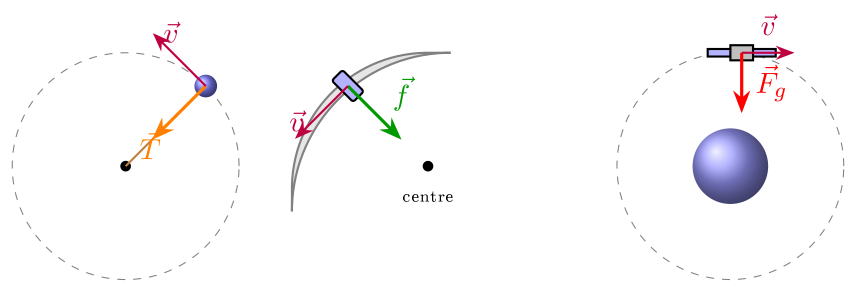
Point crucial : la force centripète n'est PAS une nouvelle force!

C'est l'erreur la plus fréquente dans ce chapitre. La force centripète n'est **pas** un nouveau type de force à ajouter sur votre DCL!
C'est simplement le **nom** qu'on donne à la composante de la force résultante qui pointe vers le centre du cercle. Cette force peut être fournie par :

Situation	**Force qui fournit F_c**
Balle au bout d'une ficelle	Tension de la ficelle
Voiture dans un virage plat	Frottement des pneus
Satellite en orbite	Gravité
Passager dans un manège	Normale du siège
Eau dans un seau qu'on fait tourner	Normale du fond du seau
Lune autour de la Terre	Attraction gravitationnelle

Sur un DCL, on dessine la vraie force (tension, frottement, normale...), jamais « F_c » comme force séparée!

Trois situations, même principe



Balle sur ficelle
$F_c = T$

Voiture
en virage
$F_c = f$

Satellite
en orbite
$F_c = F_g$

2.5.3 La « force centrifuge » : un mirage

Vous avez certainement ressenti cette sensation d'être « poussé vers l'extérieur » dans un virage serré ou sur un manège. Cette sensation est si forte qu'on lui a donné un nom : la « force centrifuge ». Mais existe-t-elle vraiment?

La force centrifuge n'existe pas!

Dans un référentiel inertiel (comme le sol), **aucune force** ne vous pousse vers l'extérieur d'un virage.
Ce que vous ressentez, c'est votre **inertie** : votre corps tend à continuer en ligne droite (première loi de Newton), tandis que la voiture tourne sous vous. C'est le siège et la ceinture qui vous *tirent* vers l'intérieur pour vous faire tourner avec la voiture.
Résumé : La « force centrifuge » est une **sensation**, pas une force réelle. Elle n'apparaît que si vous analysez le mouvement depuis un référentiel *non inertiel* (comme l'intérieur de la voiture qui tourne), ce que nous ne faisons pas dans ce cours.

Analogie pour comprendre

Imaginez que vous êtes debout dans un autobus qui freine brusquement. Vous avez l'impression d'être « poussé vers l'avant ». Mais personne ne vous pousse! C'est simplement que votre corps continue tout droit (inertie) pendant que l'autobus ralentit sous vos pieds.
C'est exactement la même chose dans un virage : vous continuez « tout droit » pendant que la voiture tourne.

2.5.4 Méthode de résolution

Pour résoudre des problèmes de mouvement circulaire, on applique le même algorithme qu'avant, avec une particularité : on choisit un axe pointant **vers le centre** du cercle.

Algorithme pour le mouvement circulaire

Étape 1 — DCL

- Identifier toutes les forces **réelles** (poids, normale, tension, frottement...)
- Ne **jamais** ajouter « F_c » comme force séparée!

Étape 2 — Axes

- Un axe vers le **centre** du cercle (direction de $\vec{a}_c$)
- Un axe perpendiculaire (souvent vertical ou tangentiel)

Étape 3 — Équations de Newton

- Selon l'axe vers le centre : $\sum F_{\to centre} = ma_c = m\dfrac{v^2}{r}$
- Selon l'autre axe : $\sum F_\perp = 0$ (ou $ma_\perp$ s'il y a accélération)

Étape 4 — Résolution algébrique

Exemple 2.14 – Voiture dans un virage

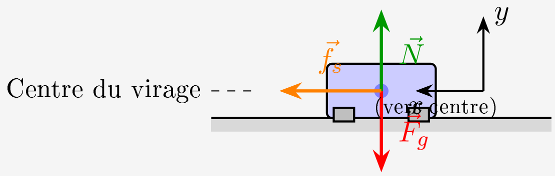
Une voiture de masse $m = 1200\,\text{kg}$ prend un virage horizontal de rayon $r = 50\,\text{m}$. Le coefficient de frottement statique entre les pneus et la route est $\mu_s = 0{,}8$.
Quelle est la vitesse maximale à laquelle la voiture peut négocier ce virage sans déraper?

Analyse physique

Pour que la voiture tourne, il faut une force centripète dirigée vers le centre du virage. Sur une route horizontale, cette force est fournie par le **frottement statique** entre les pneus et la route.

Si la voiture va trop vite, le frottement nécessaire dépasse le frottement maximal disponible → la voiture dérape vers l'extérieur.

DCL (vue de derrière la voiture)



Équations

Selon y (vertical) : $\sum F_y = 0$

$$N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

Selon x (vers le centre) : $\sum F_x = ma_c$

$$f_s = m\frac{v^2}{r}$$

Condition de non-dérapage

Pour que la voiture ne dérape pas, il faut $f_s \leq f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mg$.
À la vitesse maximale, $f_s = f_{s,max}$:

$$\mu_s mg = m\frac{v_{max}^2}{r}$$

Les masses s'annulent (la vitesse maximale ne dépend pas de la masse!) :

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s gr}$$

Application numérique

$$v_{max} = \sqrt{0{,}8 \times 9{,}81 \times 50} = \sqrt{392{,}4} = 19{,}8\,\text{m/s} \approx \boxed{71\,\text{km/h}}$$

Remarques importantes :

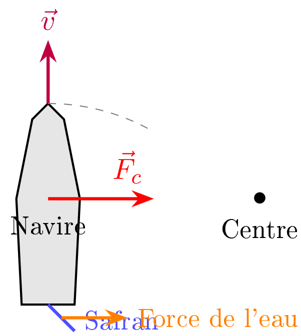
- La vitesse maximale ne dépend **pas** de la masse du véhicule.
- Sur route mouillée ($\mu_s \approx 0{,}5$) : $v_{max} \approx 56\,\text{km/h}$.
- Sur glace ($\mu_s \approx 0{,}1$) : $v_{max} \approx 25\,\text{km/h}$!

Application maritime : cargaison dans un virage

Lorsqu'un navire effectue un virage, une force centripète doit être exercée pour le maintenir sur sa trajectoire circulaire. D'où vient cette force?

Origine de la force centripète sur un navire

Contrairement à une voiture qui utilise le frottement des pneus, un navire utilise principalement le **safran** (gouvernail) pour virer :

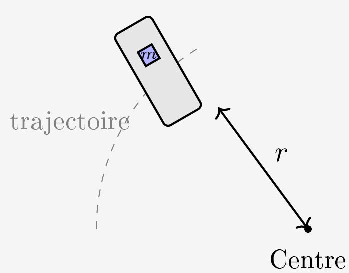


Quand le safran est braqué, il dévie l'écoulement de l'eau. Par réaction (3$^{\text{e}}$ loi de Newton), l'eau exerce une force latérale sur le safran, qui se transmet à tout le navire. Cette force, combinée à la pression latérale de l'eau sur la coque, fournit la force centripète nécessaire au virage.

Exemple 2.15 – Cargaison sur le pont d'un navire virant

Un navire de masse $m = 5000$ tonnes effectue un virage de rayon $r = 500\,\text{m}$ à une vitesse de $v = 10\,\text{m/s}$ (environ 20 nœuds).
a) Quelle force centripète est nécessaire pour le navire?
b) Une caisse de 200 kg est posée sur le pont. Le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0{,}4$. La caisse glisse-t-elle?

<u>**Schéma de situation**</u>



a) Force centripète nécessaire pour le navire

$$F_c = m\frac{v^2}{r} = 5 \times 10^6\,\text{kg} \times \frac{(10)^2}{500} = 5 \times 10^6\,\text{kg} \times 0{,}2\,\text{m/s}^2 = \boxed{1 \times 10^6\,\text{N} = 1\,\text{MN}}$$

Cette force est fournie par l'action du safran et la pression latérale de l'eau sur la coque.
b) Glissement de la caisse
L'accélération centripète subie par la caisse est :

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{100}{500} = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$$

Force centripète nécessaire pour la caisse :

$$F_{c,caisse} = m_{caisse} \times a_c = 200 \times 0{,}2 = 40\,\mathrm{N}$$

Frottement maximal disponible :

$$f_{s,max} = \mu_s m_{caisse} g = 0{,}4 \times 200 \times 9{,}81 = 785\,\mathrm{N}$$

Comme $40\,\mathrm{N} \ll 785\,\mathrm{N}$, le frottement est largement suffisant. **La caisse ne glisse pas.**
Remarque : Lors de manœuvres d'urgence (virage serré à haute vitesse), a_c peut devenir beaucoup plus grand, d'où l'importance critique de l'arrimage de la cargaison! Une caisse mal arrimée qui glisse peut causer des dommages ou déstabiliser le navire.

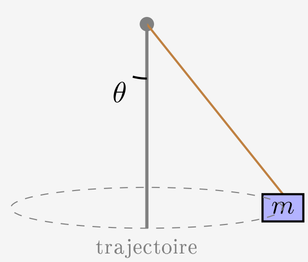
Câble de grue en rotation

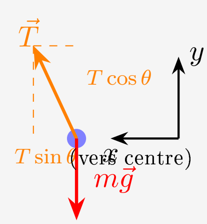
Exemple 2.16 – Charge suspendue à une grue qui pivote

Une grue de navire pivote pour déplacer une charge de $m = 500\,\mathrm{kg}$. Le câble fait un angle θ avec la verticale pendant la rotation. Si le rayon de rotation est $r = 8\,\mathrm{m}$ et la période de rotation est $T = 10\,\mathrm{s}$, quel angle fait le câble avec la verticale?

Analyse
Pendant la rotation, la charge décrit un cercle horizontal. La tension dans le câble doit :

- Compenser le poids (composante verticale)
- Fournir la force centripète (composante horizontale)





Calculs préliminaires
Vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\,\mathrm{rad/s}$$

Équations

Selon y (vertical) : $\sum F_y = 0$

$$T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = mg$$

Selon x (vers le centre, horizontal) : $\sum F_x = ma_c$

$$T\sin\theta = m\omega^2 r$$

Résolution

Divisons :

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{m\omega^2 r}{mg}$$

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{(0{,}628)^2 \times 8}{9{,}81} = \frac{3{,}15}{9{,}81} = 0{,}321$$

$$\theta = \arctan(0{,}321) = \boxed{17{,}8}$$

Tension dans le câble :

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{500 \times 9{,}81}{\cos 17{,}8} = \frac{4905}{0{,}952} = \boxed{5150\,\mathrm{N}}$$

La tension est légèrement supérieure au poids (4905 N) à cause de la composante centripète.

Passager sur le pont d'un traversier

Un traversier effectue un virage de rayon $r = 300\,\mathrm{m}$ à une vitesse de $v = 8\,\mathrm{m/s}$ (environ 16 nœuds). Un passager de 70 kg se tient debout sur le pont.

1. Quelle est l'accélération centripète subie par le passager?
2. Quelle force horizontale le pont doit-il exercer sur les pieds du passager?
3. Si le coefficient de frottement statique entre ses chaussures et le pont est $\mu_s = 0{,}6$, risque-t-il de glisser?
4. À quelle vitesse le passager commencerait-il à glisser?

Résolution :

Réponses :

1. $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{64}{300} = 0{,}213\,\text{m/s}^2$
2. $F_c = ma_c = 70 \times 0{,}213 = 14{,}9\,\text{N}$ (frottement statique)
3. $f_{s,max} = \mu_s mg = 0{,}6 \times 70 \times 9{,}81 = 412\,\text{N}$. Comme $14{,}9\,\text{N} \ll 412\,\text{N}$, **non**, il ne glisse pas.
4. $v_{max} = \sqrt{\mu_s gr} = \sqrt{0{,}6 \times 9{,}81 \times 300} = 42\,\text{m/s} \approx 82$ nœuds (impossible pour un traversier!)

2.5.5 Résumé : mouvement circulaire

Points clés du mouvement circulaire

1. L'accélération centripète existe toujours en mouvement circulaire : $a_c = \frac{v^2}{r}$

2. La force centripète est la force *résultante* vers le centre : $F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r}$

3. Ce n'est PAS une nouvelle force! C'est le nom donné à la composante centripète des forces réelles (tension, frottement, normale, gravité...)

4. La « force centrifuge » n'existe pas dans un référentiel inertiel. C'est l'effet de l'inertie.

5. Méthode : Choisir un axe vers le centre, puis $\sum F_{\to centre} = m\frac{v^2}{r}$

2.6 Résumé du chapitre

2.6.1 Les trois lois de Newton

Loi	Énoncé	Formulation mathématique
1$^{\text{re}}$ loi(Inertie)	Un objet reste au repos ou en MRU si aucune force résultante n'agit sur lui.	$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (équilibre)
2$^{\text{e}}$ loi(Fondamentale)	L'accélération est proportionnelle à la force résultante et inversement proportionnelle à la masse.	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ En composantes : $\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y$
3$^{\text{e}}$ loi(Action-réaction)	Toute force exercée par A sur B s'accompagne d'une force égale et opposée de B sur A.	$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$ (même module, sens opposés, objets différents)

2.6.2 Catalogue des forces

Force	Formule	Direction	Remarques
Poids	$F_g = mg$	Verticale, vers le bas	Toujours présente!
Normale	À déterminer	$\perp$ à la surface, vers l'extérieur	$N \neq mg$ en général
Tension	À déterminer	// à la corde, tire l'objet	Corde idéale : T uniforme
Frottement statique	$f_s \leq \mu_s N$	// à la surface, oppose la tendance	Inégalité! Force adaptative
Frottement cinétique	$f_c = \mu_c N$	// à la surface, oppose le mouvement	Égalité, $\mu_c < \mu_s$
Centripète	$F_c = \dfrac{mv^2}{r}$	Vers le centre du cercle	Ce n'est PAS une nouvelle force!

2.6.3 L'algorithme de résolution

ÉTAPE 1 — SCHÉMA et DCL
- Dessiner la situation physique
- Isoler l'objet d'intérêt
- Tracer le DCL : représenter **toutes** les forces
- Identifier les grandeurs connues et inconnues

ÉTAPE 2 — AXES
- Choisir un système (x, y) adapté
- Plan incliné? $\rightarrow x$ // pente, $y \perp$ pente
- Indiquer clairement les directions positives

ÉTAPE 3 — ÉQUATIONS DE NEWTON
- Décomposer chaque force selon x et y
- Écrire : $\sum F_x = ma_x$ et $\sum F_y = ma_y$
- Équilibre? $\rightarrow \sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$

ÉTAPE 4 — ALGÈBRE
- Résoudre **algébriquement** (avec symboles)
- Substituer les valeurs numériques à la fin
- Vérifier : unités? ordre de grandeur? signes?

2.6.4 Formules essentielles

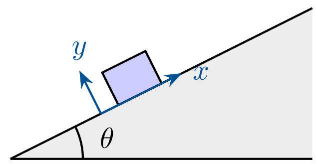
Équilibre (statique ou MRU)

$$\sum F_x = 0 \tag{2.14}$$
$$\sum F_y = 0 \tag{2.15}$$

Dynamique (mouvement accéléré)

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.16}$$
$$\sum F_y = ma_y \tag{2.17}$$

Plan incliné



Avec axes // et ⊥ à la pente :

$$N = mg\cos\theta$$
$$F_{g,x} = mg\sin\theta$$
$$f_{s,max} = \mu_s mg\cos\theta$$
$$f_c = \mu_c mg\cos\theta$$

Mouvement circulaire

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \qquad \text{(dirigée vers le centre)}$$

Angle limite de glissement

$$\theta_{max} = \arctan(\mu_s)$$

2.6.5 Pièges à éviter

Les erreurs les plus fréquentes

1. **Dessiner l'accélération sur le DCL**

   L'accélération n'est **pas** une force! Elle est la *conséquence* des forces.

2. **Dessiner l'inertie ou la « force du mouvement »**

   L'inertie est une propriété, pas une force. Un objet n'a pas besoin de force pour maintenir sa vitesse.

3. **Confondre N et mg**

   $N = mg$ seulement sur surface horizontale sans autres forces verticales. En général, N se calcule!

4. **Oublier le poids**

   La Terre attire toujours l'objet. Le poids est **toujours** présent!

5. **Ajouter F_c comme force supplémentaire**

   La force centripète est le **nom** de la résultante vers le centre, pas une force additionnelle.

6. **Confondre paires action-réaction**

   Les forces d'une paire action-réaction agissent sur des objets **différents**.

7. **Se tromper de sens pour le frottement**

   Le frottement s'oppose au **mouvement** (ou à la tendance), pas à la force appliquée.

8. **Utiliser $f_s = \mu_s N$ au lieu de $f_s \leq \mu_s N$**

   Le frottement statique est une inégalité! Il prend la valeur *nécessaire*, jusqu'au maximum.

2.6.6 Auto-évaluation des compétences

Cochez les compétences que vous maîtrisez :

Compétence	Acquis	En cours	À revoir
Je peux énoncer et expliquer les trois lois de Newton.	☐	☐	☐
Je peux identifier toutes les forces sur un objet et tracer un DCL correct.	☐	☐	☐
Je peux appliquer l'algorithme en 4 étapes pour résoudre un problème.	☐	☐	☐
Je peux résoudre un problème d'équilibre (statique).	☐	☐	☐
Je peux résoudre un problème de dynamique à une dimension.	☐	☐	☐
Je peux résoudre un problème sur plan incliné (avec ou sans frottement).	☐	☐	☐
Je peux analyser un système de deux objets reliés (Atwood, poulie).	☐	☐	☐
Je peux appliquer le concept de force centripète au mouvement circulaire.	☐	☐	☐
Je peux expliquer pourquoi la « force centrifuge » n'est pas une vraie force.	☐	☐	☐

2.6.7 Ce qu'il faut retenir

L'essentiel du chapitre en quelques phrases

1. **La dynamique répond au « pourquoi »** : Les forces causent les accélérations, pas les vitesses.
2. **L'inertie explique la résistance au changement** : Plus un objet est massif, plus il est difficile de modifier son mouvement.
3. **Le DCL est votre meilleur outil** : Un DCL correct et complet garantit presque une solution correcte.
4. **L'algorithme en 4 étapes fonctionne toujours** : Schéma → Axes → Équations → Algèbre.
5. **La normale se calcule, ne se devine pas** : $N = mg$ n'est vrai que dans des cas particuliers.
6. **Le frottement s'oppose au mouvement relatif** : Pas à la force appliquée, pas à la vitesse absolue.
7. **La force centripète est une résultante** : Ce n'est pas une nouvelle force à ajouter.
8. **Résolvez algébriquement d'abord** : Les symboles révèlent la physique, les chiffres la cachent.

Chapitre 3

Énergie et travail

3.1 Introduction : qu'est-ce que l'énergie?

Le concept d'**énergie** est l'un des plus fondamentaux et des plus puissants de toute la physique. Pourtant, il est difficile de donner une définition simple de l'énergie : on ne peut pas la voir, la toucher ou la peser directement. Ce que l'on peut observer, ce sont ses **manifestations** et ses **transformations**.

Énergie

L'**énergie** est la capacité d'un système à produire un changement, que ce soit mettre un objet en mouvement, le déformer, le chauffer ou modifier son état d'une quelconque façon.
L'unité SI de l'énergie est le **joule** (J).

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Pourquoi l'énergie est-elle si importante?

Toute l'utilité de l'énergie en physique réside dans le fait qu'elle est une **quantité qui se conserve**. L'énergie peut changer de forme — passer de cinétique à potentielle, de mécanique à thermique — mais elle ne peut être ni créée ni détruite. Ce principe de conservation fait de l'énergie un outil de résolution de problèmes souvent plus puissant que les lois de Newton.

3.1.1 L'énergie dans le contexte maritime

Pour un officier de navigation, la notion d'énergie est omniprésente, même si elle n'est pas toujours formulée explicitement :

- L'**énergie cinétique** d'un navire de 50 000 tonnes à 15 nœuds est colossale — c'est cette énergie qu'il faut dissiper lors du freinage
- L'**énergie potentielle** de l'eau dans un réservoir surélevé permet d'alimenter les systèmes de bord par gravité

- La **puissance** des moteurs détermine la vitesse maximale et la capacité d'accélération du navire

- Le **travail** effectué par les treuils et les grues permet de charger et décharger la cargaison

Exemple 3.1 – Énergie cinétique d'un vraquier

Un vraquier de masse $m = 80\,000\,\text{tonnes} = 80 \times 10^6\,\text{kg}$ navigue à une vitesse de $v = 12\,\text{nuds} \approx 6{,}2\,\text{m/s}$.
Son énergie cinétique est :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 80 \times 10^6\,\text{kg} \times (6{,}2\,\text{m/s})^2 \approx 1{,}5 \times 10^9\,\text{J} = 1{,}5\,\text{GJ}$$

Pour mettre ce chiffre en perspective, cette énergie équivaut à celle libérée par l'explosion d'environ 360 kg de TNT! C'est pourquoi les distances de freinage des grands navires se mesurent en **kilomètres**.

3.1.2 Les deux formes d'énergie mécanique

En mécanique, on distingue deux formes principales d'énergie :

Énergie cinétique

L'**énergie cinétique** K est l'énergie associée au **mouvement** d'un corps. Plus un objet est massif et rapide, plus son énergie cinétique est grande.

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2} \tag{3.1}$$

où m est la masse (en kg) et v est la vitesse (en m/s).

Énergie potentielle

L'**énergie potentielle** U est l'énergie **emmagasinée** par un système en raison de sa position ou de sa configuration. C'est une énergie « en réserve » qui peut être convertie en énergie cinétique.
Exemples courants :

- Énergie potentielle **gravitationnelle** : un conteneur soulevé par une grue
- Énergie potentielle **élastique** : un ressort comprimé ou étiré

Comment repérer l'énergie?

- **Énergie cinétique** : facile à repérer — là où il y a du mouvement, il y a de l'énergie cinétique.
- **Énergie potentielle** : il faut être capable d'**anticiper le mouvement**. Si un objet peut se mettre en mouvement spontanément (une bille en haut d'une pente, un ressort comprimé), c'est qu'il possède de l'énergie potentielle.

3.2 Le travail

On sait maintenant qu'un corps en mouvement possède de l'énergie cinétique. Or, en vertu de la première loi de Newton, les corps ne se mettent pas en mouvement d'eux-mêmes : une modification du mouvement nécessite l'intervention d'une **force**. Il doit donc y avoir un lien entre l'action d'une force et l'énergie. Ce lien, c'est le **travail**.

3.2.1 Définition du travail

Travail d'une force

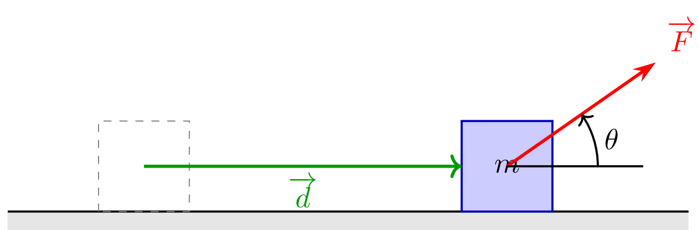
Le **travail** (W) est l'énergie transférée à un système (ou retirée d'un système) par l'action d'une force dont le point d'application se déplace.
Pour une force **constante** $\overrightarrow{F}$ appliquée sur un objet qui se déplace d'une distance d :

$$\boxed{W = Fd\cos\theta \qquad (3.2)}$$

où :

- F est le module de la force (en N)
- d est la distance parcourue (en m)
- θ est l'angle entre la force et le déplacement

L'unité SI du travail est le **joule** (J), la même que pour l'énergie.



Déplacement d

3.2.2 Interprétation du travail

Le travail peut être positif, négatif ou nul selon l'orientation de la force par rapport au déplacement :

Signe du travail

Angle θ	$\cos\theta$	**Travail**	**Interprétation**
$0°$	$+1$	$W = +Fd$	Force dans le sens du mouvement $\rightarrow$ **énergie ajoutée**
$90°$	0	$W = 0$	Force perpendiculaire $\rightarrow$ **aucun transfert d'énergie**
$180°$	-1	$W = -Fd$	Force opposée au mouvement $\rightarrow$ **énergie retirée**

Le travail ne crée pas d'énergie

Le travail fait sur un système ne **crée** pas de nouvelle énergie : il ne fait que **transférer** l'énergie d'un endroit à un autre ou d'une forme à une autre. Le travail est le **mécanisme** par lequel l'énergie est échangée entre un système et son environnement.

3.2.3 Cas particuliers importants

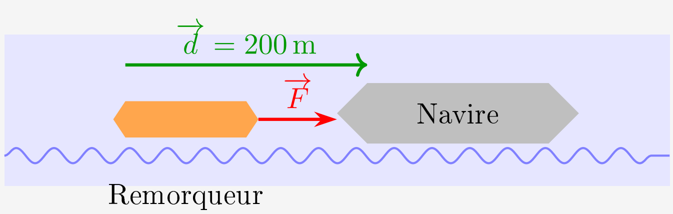
Force dans le sens du mouvement ($\theta = 0°$)

Lorsque la force est appliquée dans la **même direction** que le déplacement, le travail est **maximal et positif** :

$$W = Fd\cos(0°) = Fd$$

Exemple 3.2 – Remorqueur poussant un navire

Un remorqueur exerce une force de poussée de $F = 150\,\text{kN}$ sur un navire, dans la direction du mouvement. Le navire se déplace de $d = 200\,\text{m}$.



Travail effectué par le remorqueur :

$$W = Fd = 150 \times 10^3\,\text{N} \times 200\,\text{m} = 30 \times 10^6\,\text{J} = 30\,\text{MJ}$$

Ce travail positif signifie que le remorqueur **ajoute** de l'énergie au navire (augmentation de l'énergie cinétique ou compensation des pertes par frottement).

Force perpendiculaire au mouvement ($\theta = 90°$)

Lorsque la force est **perpendiculaire** au déplacement, le travail est **nul** :

$$W = Fd\cos(90°) = 0$$

Travail nul $\neq$ force inutile

Une force perpendiculaire au mouvement n'effectue aucun travail, mais elle n'est pas sans effet! Elle peut modifier la **direction** du mouvement sans changer sa **vitesse**.
Exemples :

- La force centripète dans un virage (change la direction, pas la vitesse)
- La force normale sur un objet glissant sur une surface horizontale
- La tension d'une corde retenant un pendule au point le plus bas de sa trajectoire

Force opposée au mouvement ($\theta = 180°$)

Lorsque la force est dans la direction **opposée** au déplacement, le travail est **négatif** :

$$W = Fd\cos(180°) = -Fd$$

Exemple 3.3 – Freinage d'un navire par inversion des moteurs

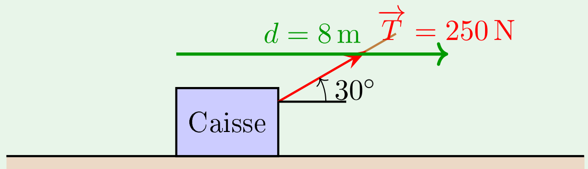
Un cargo de 20 000 tonnes navigue à 8 m/s. Pour freiner, on inverse les moteurs qui exercent une force de résistance de $F = 400\,\text{kN}$ pendant que le navire parcourt encore $d = 500\,\text{m}$.
Travail effectué par la force de freinage :

$$W = Fd\cos(180°) = 400 \times 10^3\,\text{N} \times 500\,\text{m} \times (-1) = -200\,\text{MJ}$$

Ce travail **négatif** signifie que de l'énergie est **retirée** au navire (diminution de l'énergie cinétique).

▷ Pratique autonome 3.1

Un matelot tire une caisse de matériel sur le pont d'un navire. La corde fait un angle de 30° avec l'horizontale et exerce une tension de 250 N. La caisse se déplace horizontalement de 8 m.



Calculez le travail effectué par la tension de la corde sur la caisse.

Résolution :

Rép. : $W = Td\cos\theta = 250 \times 8 \times \cos(30°) = 250 \times 8 \times 0,866 \approx 1730\,\mathrm{J}$

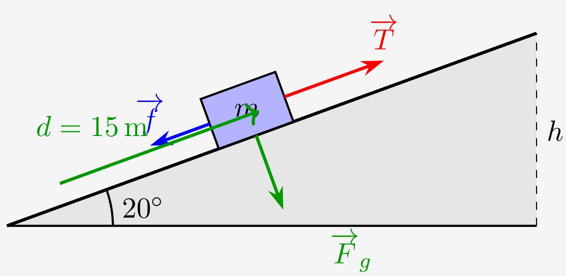
3.2.4 Travail effectué par plusieurs forces

Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un objet, le **travail total** (ou travail résultant) est la somme des travaux effectués par chacune des forces :

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots = \sum_i W_i \tag{3.3}$$

Exemple 3.4 – Chargement d'un conteneur sur un plan incliné

Un conteneur de masse $m = 2000\,\mathrm{kg}$ est tiré vers le haut d'une rampe inclinée à $\theta = 20°$ par un câble parallèle à la rampe. Le conteneur monte de $d = 15\,\mathrm{m}$ le long de la rampe. La tension dans le câble est $T = 12\,000\,\mathrm{N}$ et la force de frottement est $f = 2000\,\mathrm{N}$.



Calculons le travail effectué par chaque force :

1. Travail de la tension (parallèle au déplacement, $\theta = 0°$) :

$$W_T = Td\cos(0°) = 12\,000\,\mathrm{N} \times 15\,\mathrm{m} \times 1 = +180\,000\,\mathrm{J}$$

2. Travail du frottement (opposé au déplacement, $\theta = 180°$) :

$$W_f = fd\cos(180°) = 2000\,\mathrm{N} \times 15\,\mathrm{m} \times (-1) = -30\,000\,\mathrm{J}$$

3. Travail de la gravité (angle de $90° + 20° = 110°$ avec le déplacement) :

$$W_g = F_g d\cos(110°) = mg \cdot d\cos(110°)$$

$$W_g = 2000\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 15\,\mathrm{m} \times \cos(110°)$$

$$W_g = 294\,000\,\mathrm{N \cdot m} \times (-0,342) = -100\,500\,\mathrm{J}$$

4. Travail de la normale (perpendiculaire au déplacement, $\theta = 90°$) :

$$W_N = Nd\cos(90°) = 0$$

Travail total :

$$W_{\text{total}} = W_T + W_f + W_g + W_N = 180000 - 30000 - 100500 + 0 = +49\,500\,\mathrm{J}$$

Le travail total est positif, ce qui signifie que le conteneur **gagne** de l'énergie (il accélère en montant).

▷ Pratique autonome 3.2

Une chaloupe de sauvetage de masse $m = 500\,\mathrm{kg}$ est hissée verticalement de $h = 6\,\mathrm{m}$ à l'aide d'un treuil. La tension dans le câble est $T = 5500\,\mathrm{N}$.

a) Calculez le travail effectué par la tension.

b) Calculez le travail effectué par la gravité.

c) Calculez le travail total sur la chaloupe.

d) La chaloupe accélère-t-elle, ralentit-elle ou se déplace-t-elle à vitesse constante?

Résolution :

Rép. : a) $W_T = +33\,000\,\mathrm{J}$ b) $W_g = -29\,400\,\mathrm{J}$ c) $W_{\text{total}} = +3600\,\mathrm{J}$ d) Elle accélère (travail total positif)

3.2.5 Travail effectué par la gravité

La force gravitationnelle est une force particulièrement importante en physique. Son travail dépend uniquement de la **variation de hauteur** de l'objet, et non du chemin parcouru.

Travail de la gravité

Le travail effectué par la force gravitationnelle sur un objet dont la hauteur varie de y_i (position initiale) à y_f (position finale) est :

$$\boxed{W_g = -mg(y_f - y_i) = -mg\Delta y} \tag{3.4}$$

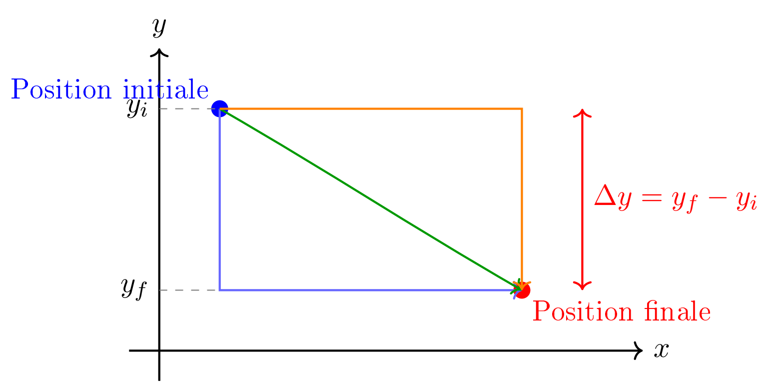
où :

- m est la masse de l'objet (en kg)
- $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ est l'accélération gravitationnelle
- $\Delta y = y_f - y_i$ est le changement de hauteur (positif vers le haut)

Interprétation du signe

- Si l'objet **monte** ($\Delta y > 0$) : $W_g < 0$ (la gravité s'oppose au mouvement)
- Si l'objet **descend** ($\Delta y < 0$) : $W_g > 0$ (la gravité aide le mouvement)

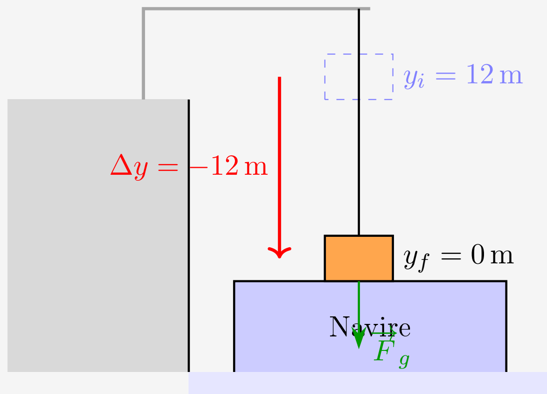
Le travail de la gravité est **indépendant du chemin** parcouru : seule la différence de hauteur compte!



Peu importe le chemin, $W_g = -mg\Delta y$

Exemple 3.5 – Conteneur descendu par une grue

Une grue de port descend un conteneur de masse $m = 15\,000\,\text{kg}$ d'une hauteur de $h = 12\,\text{m}$ jusqu'au pont d'un navire.



Changement de hauteur :

$$\Delta y = y_f - y_i = 0 - 12 = -12\,\text{m}$$

Travail de la gravité :

$$W_g = -mg\Delta y = -(15\,000\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m/s}^2)(-12\,\text{m})$$

$$W_g = +1\,764\,000\,\text{J} = +1{,}76\,\text{MJ}$$

Le travail est **positif** car la gravité aide à descendre le conteneur (la force et le déplacement sont dans le même sens).

▷ Pratique autonome 3.3

Un ascenseur de navire de croisière transporte des passagers ($m_{\text{total}} = 800\,\text{kg}$) entre deux ponts séparés de $4\,\text{m}$.

a) Calculez le travail effectué par la gravité lorsque l'ascenseur monte.

b) Calculez le travail effectué par la gravité lorsque l'ascenseur descend.

Résolution :

Rép. : a) $W_g = -31\,360\,\mathrm{J}$ b) $W_g = +31\,360\,\mathrm{J}$

3.2.6 Travail effectué par un ressort

La force de rappel d'un ressort ($\overrightarrow{F}_R = -k\overrightarrow{x}$) est une force **variable** : son module dépend de la déformation du ressort. Le calcul du travail nécessite donc une approche différente.

Travail d'un ressort

Le travail effectué par la force de rappel d'un ressort lorsque sa déformation passe de x_i à x_f est :

$$\boxed{W_{\text{ressort}} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2} \tag{3.5}$$

où k est la constante de rappel du ressort (en N/m) et x est la déformation par rapport à la position d'équilibre.

Interprétation

- Si le ressort **se détend** ($|x_f| < |x_i|$) : $W_{\text{ressort}} > 0$ (le ressort fournit de l'énergie)
- Si le ressort **se comprime davantage** ($|x_f| > |x_i|$) : $W_{\text{ressort}} < 0$ (le ressort absorbe de l'énergie)

3.3 Théorème de l'énergie cinétique

Le lien fondamental entre le travail et l'énergie cinétique est exprimé par le **théorème de l'énergie cinétique**, l'un des résultats les plus importants de la mécanique.

3.3.1 Énoncé du théorème

Théorème de l'énergie cinétique

Le travail total (ou résultant) effectué sur un objet est égal à la variation de son énergie cinétique :

$$\boxed{W_{\text{total}} = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (3.6)}$$

où :

- $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ est l'énergie cinétique initiale
- $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ est l'énergie cinétique finale
- $\Delta K = K_f - K_i$ est la variation d'énergie cinétique

Interprétation physique

Ce théorème nous dit que :

- Si $W_{\text{total}} > 0$: l'objet **accélère** ($v_f > v_i$)
- Si $W_{\text{total}} < 0$: l'objet **ralentit** ($v_f < v_i$)
- Si $W_{\text{total}} = 0$: la vitesse reste **constante** ($v_f = v_i$)

L'énergie cinétique comme travail accumulé

L'énergie cinétique d'un corps peut être interprétée comme :

- Le travail qu'il a **fallu effectuer** sur ce corps pour l'accélérer depuis le repos jusqu'à sa vitesse actuelle
- Le travail que ce corps **peut effectuer** sur son environnement en s'arrêtant

Cette interprétation concorde avec la définition de l'énergie comme « capacité à effectuer un travail ».

3.3.2 Démonstration du théorème

Considérons une force constante $\vec{F}$ qui agit sur un corps de masse m le long d'un déplacement d, dans la même direction que ce déplacement.

Le travail effectué est :

$$W = Fd$$

Par la 2ᵉ loi de Newton, $F = ma$, donc :

$$W = mad$$

En utilisant l'équation cinématique $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$, on peut isoler ad :

$$ad = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2}$$

En substituant dans l'expression du travail :

$$W = m \cdot \frac{v_f^2 - v_i^2}{2} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

Ce résultat est général et s'applique même lorsque la force n'est pas dans la direction du mouvement.

3.3.3 Applications du théorème de l'énergie cinétique

Exemple 3.6 – Distance de freinage d'un navire

Un navire de masse $m = 25\,000\,\text{tonnes} = 25 \times 10^6\,\text{kg}$ navigue à $v_i = 10\,\text{nuds} \approx 5{,}14\,\text{m/s}$. Les moteurs sont inversés et exercent une force de freinage constante de $F = 800\,\text{kN}$. Quelle distance le navire parcourt-il avant de s'arrêter?

Données :

- Masse : $m = 25 \times 10^6\,\text{kg}$
- Vitesse initiale : $v_i = 5{,}14\,\text{m/s}$
- Vitesse finale : $v_f = 0$ (arrêt)
- Force de freinage : $F = 800 \times 10^3\,\text{N}$

Énergie cinétique initiale :

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2} \times 25 \times 10^6\,\text{kg} \times (5{,}14\,\text{m/s})^2 = 330 \times 10^6\,\text{J}$$

Énergie cinétique finale :

$$K_f = 0 \text{ (le navire est arrêté)}$$

Variation d'énergie cinétique :

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - 330 \times 10^6\,\text{J} = -330 \times 10^6\,\text{J}$$

Application du théorème :

$$W_{\text{total}} = \Delta K$$
$$-Fd = -330 \times 10^6\,\text{J}$$
$$d = \frac{330 \times 10^6\,\text{J}}{800 \times 10^3\,\text{N}} = 413\,\text{m}$$

Le navire parcourt environ 413 m (ou 0,22 NM) avant de s'arrêter.

Remarque

Cette distance ne tient pas compte du temps de réaction ni de la résistance de l'eau. En pratique, la distance de freinage serait légèrement différente, mais l'ordre de grandeur est correct : les grands navires ont besoin de **plusieurs centaines de mètres** pour s'arrêter!

Exemple 3.7 – Vitesse d'un conteneur après chute

Un conteneur de $m = 5000\,\text{kg}$ tombe accidentellement d'une hauteur de $h = 8\,\text{m}$. En négligeant la résistance de l'air, quelle est sa vitesse juste avant l'impact?
Méthode énergétique :
La seule force qui effectue un travail est la gravité (la résistance de l'air est négligée).
Travail de la gravité :

$$W_g = -mg\Delta y = -mg(y_f - y_i) = -mg(0 - h) = mgh$$

$$W_g = 5000\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \times 8\,\text{m} = 392\,000\,\text{J}$$

Application du théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{\text{total}} = \Delta K = K_f - K_i$$

Puisque le conteneur part du repos ($v_i = 0$, donc $K_i = 0$) :

$$392\,000\,\text{J} = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f^2 = \frac{2 \times 392\,000\,\text{J}}{5000\,\text{kg}} = 156{,}8\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \sqrt{156,8} = 12{,}5\,\text{m/s} \approx 45\,\text{km/h}$$

Remarque

Notez que la masse s'annule dans le calcul! La vitesse finale ne dépend que de la hauteur de chute :

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

C'est le même résultat que celui obtenu par les équations cinématiques, mais la méthode énergétique est souvent plus simple.

▷ Pratique autonome 3.4

Un canot de sauvetage de masse $m = 300\,\text{kg}$ est lancé d'un navire le long d'une glissière inclinée. Il part du repos et atteint une vitesse de $8\,\text{m/s}$ après avoir parcouru $12\,\text{m}$ le long de la glissière.

a) Calculez l'énergie cinétique initiale et finale du canot.

b) Calculez le travail total effectué sur le canot.

c) Si la glissière fait un angle de 30 avec l'horizontale, calculez le travail effectué par la gravité.

d) Déduisez-en le travail effectué par le frottement.

Résolution :

Rép. : a) $K_i = 0$, $K_f = 9600\,\mathrm{J}$ b) $W_{\text{total}} = 9600\,\mathrm{J}$ c) $W_g = mgh = 300 \times 9{,}8 \times 6 = 17\,640\,\mathrm{J}$ d) $W_f = W_{\text{total}} - W_g = 9600 - 17640 = -8040\,\mathrm{J}$

▷ Pratique autonome 3.5

Un remorqueur doit accélérer un pétrolier de $m = 100\,000$ tonnes du repos jusqu'à une vitesse de $2\,\mathrm{m/s}$.

a) Quelle quantité de travail le remorqueur doit-il effectuer (en négligeant les frottements)?

b) Si le remorqueur exerce une force constante de $500\,\mathrm{kN}$, quelle distance sera nécessaire?

Résolution :

Rép. : a) $W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 = 200\,\mathrm{MJ}$ b) $d = W/F = 400\,\mathrm{m}$

3.4 Énergie potentielle

Dans la section précédente, nous avons vu que le travail effectué par une force modifie l'énergie cinétique d'un objet. Mais que se passe-t-il lorsqu'on soulève un objet à vitesse constante? Le travail effectué ne se retrouve pas sous forme d'énergie cinétique... Où va-t-il?

3.4.1 Le concept d'énergie potentielle

Prenons l'exemple d'un conteneur qu'on soulève avec une grue. On effectue un travail sur le conteneur en le soulevant, mais sa vitesse reste essentiellement constante. L'énergie transférée au conteneur est en quelque sorte **emmagasinée** : elle sera éventuellement retransformée en énergie cinétique si le conteneur se met à tomber.

Énergie potentielle

L'**énergie potentielle** est l'énergie qu'un système possède en raison de sa **position** ou de sa **configuration**. C'est une énergie « en réserve » qui peut être convertie en énergie cinétique. L'énergie potentielle confère à un système la **capacité d'accomplir un travail**, tout comme l'énergie cinétique.

Exemples d'énergie potentielle dans le contexte maritime

- L'eau retenue derrière un barrage possède de l'énergie potentielle gravitationnelle qui peut faire tourner des turbines
- Un ancre soulevée au-dessus du fond marin possède de l'énergie potentielle
- Les ressorts des amortisseurs de choc sur les bollards stockent de l'énergie potentielle élastique
- Un conteneur suspendu par une grue possède de l'énergie potentielle qui pourrait causer des dommages s'il tombait

3.4.2 Énergie potentielle gravitationnelle

Lorsqu'un objet est soulevé près de la surface de la Terre, il acquiert de l'énergie potentielle gravitationnelle. Cette énergie dépend de la hauteur de l'objet.

Énergie potentielle gravitationnelle

L'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet de masse m situé à une hauteur y au-dessus d'un niveau de référence est :

$$\boxed{U_g = mgy \tag{3.7}}$$

où :

- m est la masse de l'objet (en kg)
- $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ est l'accélération gravitationnelle
- y est la hauteur au-dessus du niveau de référence (en m)

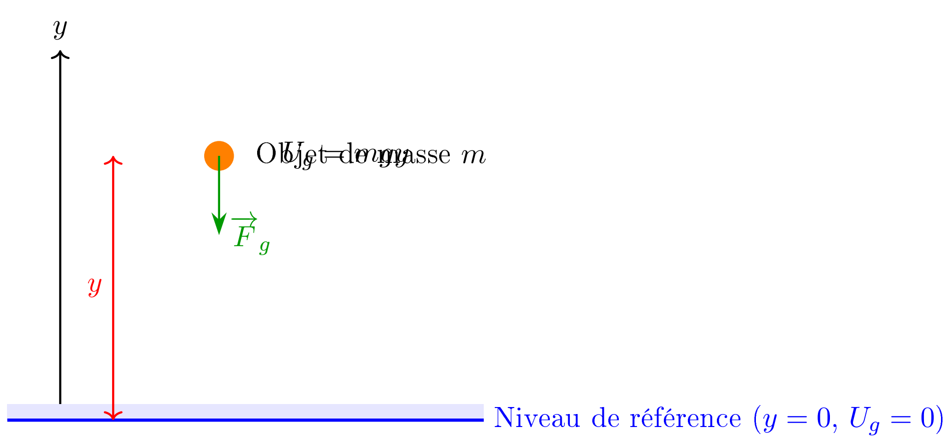
L'unité est le **joule** (J).

Choix du niveau de référence

Le niveau de référence ($y = 0$) peut être choisi **arbitrairement**. En pratique, on choisit généralement :

- Le point le plus bas du problème
- Le sol ou le niveau de l'eau
- Tout autre niveau qui simplifie les calculs

Important : Seules les **variations** d'énergie potentielle ont une signification physique, pas la valeur absolue. Le choix du niveau de référence n'affecte pas le résultat final d'un problème.



L'axe y pointe vers le haut

Lien entre travail et énergie potentielle gravitationnelle

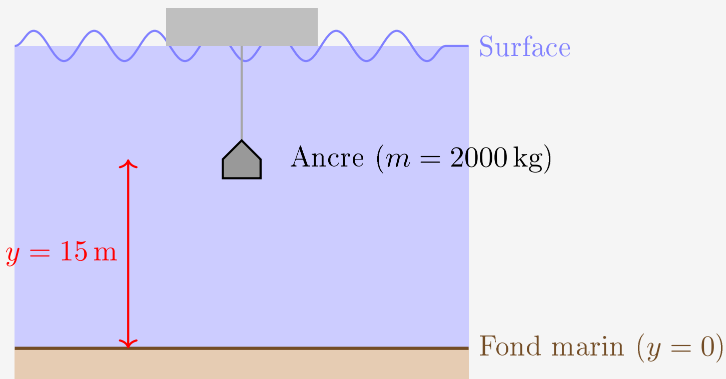
Le travail effectué par la gravité et la variation d'énergie potentielle sont reliés par :

$$W_g = -\Delta U_g = -(U_{g,f} - U_{g,i}) = U_{g,i} - U_{g,f}$$

En d'autres mots : quand un objet **descend**, il **perd** de l'énergie potentielle et la gravité effectue un travail **positif**. Quand un objet **monte**, il **gagne** de l'énergie potentielle et la gravité effectue un travail **négatif**.

Exemple 3.8 – Énergie potentielle d'une ancre

Une ancre de masse $m = 2000\,\text{kg}$ est suspendue à $15\,\text{m}$ au-dessus du fond marin. Calculez son énergie potentielle gravitationnelle en prenant le fond marin comme niveau de référence.



Énergie potentielle gravitationnelle :

$$U_g = mgy = 2000\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \times 15\,\text{m}$$

$$U_g = 294\,000\,\text{J} = 294\,\text{kJ}$$

Cette énergie serait convertie en énergie cinétique (et éventuellement en chaleur et son) si l'ancre tombait jusqu'au fond.

▷ Pratique autonome 3.6

Un conteneur de masse $m = 12\,000\,\text{kg}$ est chargé sur un navire. Il passe d'une hauteur de $2\,\text{m}$ (sur le quai) à une hauteur de $8\,\text{m}$ (dans la cale).

a) En prenant le niveau du quai comme référence, calculez l'énergie potentielle initiale et finale du conteneur.

b) Calculez la variation d'énergie potentielle ΔU_g.

c) Quel travail la grue a-t-elle dû effectuer contre la gravité pour soulever le conteneur?

Résolution :

Rép. : a) $U_{g,i} = 235\,200$ J, $U_{g,f} = 940\,800$ J b) $\Delta U_g = +705\,600$ J c) $W_{\text{grue}} = +705\,600$ J (au minimum, contre la gravité)

3.4.3 Énergie potentielle élastique

Les ressorts et autres éléments élastiques peuvent également stocker de l'énergie potentielle. Cette énergie dépend de la déformation du ressort par rapport à sa position d'équilibre.

Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'un ressort déformé de x par rapport à sa position d'équilibre est :

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}kx^2} \tag{3.8}$$

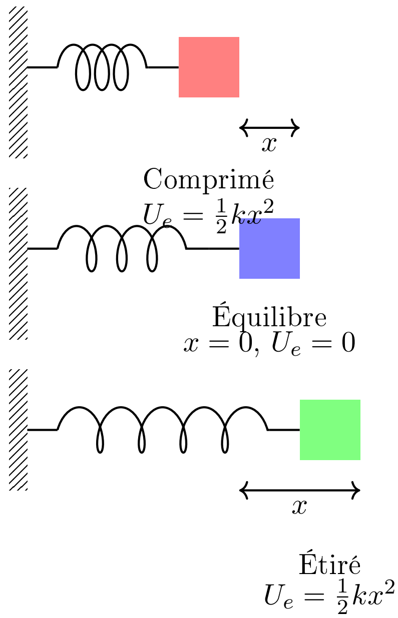
où :

- k est la constante de rappel du ressort (en N/m)
- x est la déformation (compression ou étirement) par rapport à l'équilibre (en m)

L'unité est le **joule** (J).

Propriétés de l'énergie potentielle élastique

- U_e est **toujours positive ou nulle** (car $x^2 \geq 0$)
- $U_e = 0$ uniquement lorsque le ressort est à sa position d'équilibre ($x = 0$)
- La même énergie est stockée pour une compression ou un étirement de même amplitude



Exemple 3.9 – Amortisseur de bollard

Un bollard d'amarrage est équipé d'un système d'amortissement à ressort avec une constante $k = 50\,000\,\mathrm{N/m}$. Lorsqu'un navire tire sur l'amarre, le ressort se comprime de $x = 0{,}15\,\mathrm{m}$.
Énergie potentielle élastique stockée :

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 50\,000\,\mathrm{N/m} \times (0{,}15\,\mathrm{m})^2$$

$$U_e = \frac{1}{2} \times 50000 \times 0,0225 = 562{,}5\,\mathrm{J}$$

Cette énergie est restituée au navire lorsque la tension diminue, ce qui amortit les à-coups.

▷ Pratique autonome 3.7

Un système de lancement de canot de sauvetage utilise un ressort de constante $k = 8000\,\mathrm{N/m}$. Le ressort est comprimé de $0{,}5\,\mathrm{m}$ avant le lancement.

a) Calculez l'énergie potentielle élastique stockée dans le ressort.

b) Si toute cette énergie est transférée à un canot de $200\,\mathrm{kg}$, quelle sera sa vitesse de lancement?

Résolution :

Rép. : a) $U_e = \frac{1}{2} \times 8000 \times 0,25 = 1000\,\mathrm{J}$ b) $v = \sqrt{2U_e/m} = \sqrt{2 \times 1000/200} = 3{,}16\,\mathrm{m/s}$

3.4.4 Lien entre travail et énergie potentielle

Il existe une relation fondamentale entre le travail effectué par certaines forces et la variation d'énergie potentielle associée.

Relation travail – énergie potentielle

Pour les forces qui possèdent une énergie potentielle associée (comme la gravité et la force de rappel), le travail effectué par ces forces est égal à **moins** la variation d'énergie potentielle :

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i) = U_i - U_f \tag{3.9}$$

Interprétation

Cette relation nous dit que :

- Quand l'énergie potentielle **diminue** ($\Delta U < 0$), la force effectue un travail **positif** (elle « libère » de l'énergie)
- Quand l'énergie potentielle **augmente** ($\Delta U > 0$), la force effectue un travail **négatif** (elle « stocke » de l'énergie)

C'est exactement ce qu'on observe : un objet qui tombe perd de l'énergie potentielle gravitationnelle, et la gravité effectue un travail positif sur lui.

Exemple 3.10 – Vérification de la relation pour la gravité

Vérifions la relation $W_g = -\Delta U_g$ pour un conteneur de $1000\,\mathrm{kg}$ qui descend de $5\,\mathrm{m}$.
Méthode 1 – Par le travail :

$$W_g = -mg\Delta y = -(1000\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(-5\,\mathrm{m}) = +49\,000\,\mathrm{J}$$

Méthode 2 – Par l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} U_{g,i} &= mgy_i = 1000 \times 9,8 \times 5 = 49\,000\,\mathrm{J} \\ U_{g,f} &= mgy_f = 1000 \times 9,8 \times 0 = 0\,\mathrm{J} \\ \Delta U_g &= U_{g,f} - U_{g,i} = 0 - 49000 = -49\,000\,\mathrm{J} \\ W_g &= -\Delta U_g = -(-49000) = +49\,000\,\mathrm{J}\checkmark \end{aligned}$$

Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui confirme la relation.

3.5 Forces conservatives et non-conservatives

Dans les sections précédentes, nous avons vu que certaines forces (comme la gravité et la force de rappel) permettent l'accumulation d'énergie potentielle, alors que d'autres (comme le frottement) ne le permettent pas. Cette distinction fondamentale mène à la classification des forces en deux catégories.

3.5.1 Définition et propriétés

Force conservative

Une force est dite **conservative** si le travail qu'elle effectue sur un objet qui se déplace d'un point A à un point B est **indépendant du chemin** parcouru.
De manière équivalente, une force est conservative si le travail qu'elle effectue sur un objet qui parcourt un trajet fermé (retour au point de départ) est **nul**.

Force non-conservative

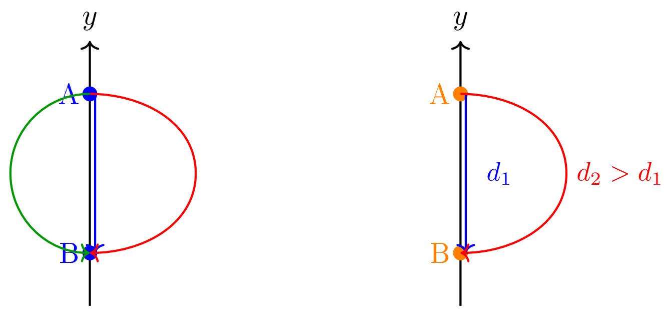
Une force est dite **non-conservative** si le travail qu'elle effectue **dépend du chemin** parcouru.
Pour une force non-conservative, le travail sur un trajet fermé est généralement **non nul**.

Classification des forces courantes

Forces conservatives	**Forces non-conservatives**
Force gravitationnelle ($\overrightarrow{F}_g$)	Force de frottement ($\overrightarrow{f}$)
Force de rappel d'un ressort ($\overrightarrow{F}_R$)	Force de résistance de l'air
Force électrostatique ($\overrightarrow{F}_E$)	Force motrice (poussée)
	Force appliquée par une personne
	Tension (dans la plupart des cas)

3.5.2 Pourquoi cette distinction est-elle importante?

Comparaison : gravité vs frottement



W_g identique
pour tous les chemins
CONSERVATIVE

W_f dépend du chemin
(plus long ⇒ plus de travail)
NON-CONSERVATIVE

Conséquences fondamentales :

- Les forces **conservatives** permettent de définir une **énergie potentielle** associée. Le travail qu'elles effectuent peut être « récupéré ».
- Les forces **non-conservatives** ne permettent pas de définir une énergie potentielle. Le travail qu'elles effectuent est généralement « perdu » (transformé en chaleur, par exemple).

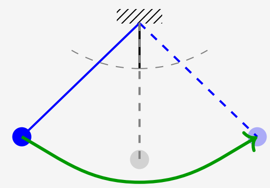
Exemple 3.11 – Illustration avec un pendule

Un pendule est un excellent exemple pour comprendre la différence :
Pendule idéal (sans frottement) :

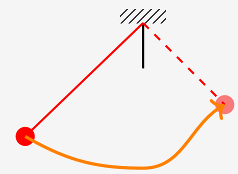
- Seule la gravité (force conservative) agit
- Le pendule oscille indéfiniment entre les mêmes hauteurs
- L'énergie se transforme continuellement entre K et U_g, mais l'énergie totale reste constante

Pendule réel (avec frottement) :

- Le frottement (force non-conservative) agit en plus de la gravité
- L'amplitude des oscillations diminue progressivement
- De l'énergie est « perdue » sous forme de chaleur à chaque oscillation
- Le pendule finit par s'arrêter



Pendule idéal
Même hauteur atteinte



Pendule réel
Amplitude décroissante

3.6 Conservation de l'énergie mécanique

3.6.1 Énergie mécanique

Énergie mécanique

L'**énergie mécanique** E d'un système est la somme de son énergie cinétique K et de son énergie potentielle U :

$$E = K + U \tag{3.10}$$

où :

- $K = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique
- $U = U_g + U_e$ est l'énergie potentielle totale (gravitationnelle + élastique, si applicable)

3.6.2 Principe de conservation

Lorsqu'un système n'est soumis qu'à des forces conservatives, quelque chose de remarquable se produit : l'énergie mécanique totale reste constante.

Conservation de l'énergie mécanique

En l'absence de forces non-conservatives, l'énergie mécanique d'un système se conserve :

$$E_i = E_f \quad \Leftrightarrow \quad K_i + U_i = K_f + U_f \tag{3.11}$$

De manière équivalente : $\Delta E = 0$ ou $\Delta K + \Delta U = 0$

Démonstration

Par le théorème de l'énergie cinétique : $W_{\text{total}} = \Delta K$
Si seules des forces conservatives agissent, alors : $W_{\text{total}} = W_c = -\Delta U$
Donc : $\Delta K = -\Delta U$, ce qui donne $\Delta K + \Delta U = 0$, soit $E_f = E_i$.

Quand utiliser la conservation de l'énergie?

Le principe de conservation de l'énergie mécanique s'applique **uniquement** lorsque :

- Aucune force non-conservative n'effectue de travail sur le système
- Ou le travail des forces non-conservatives est négligeable

En pratique, cela signifie : **pas de frottement**, **pas de résistance de l'air**, **pas de force motrice externe**.

3.6.3 L'algorithme de résolution par méthode énergétique

Résoudre un problème par la méthode énergétique est souvent plus simple qu'utiliser les lois de Newton, car l'énergie est une grandeur **scalaire** — pas besoin de décomposer en composantes x et y! En revanche, cette méthode exige un bilan énergétique rigoureux.

Algorithme de résolution par méthode énergétique (4 étapes)

Étape 1 — SCHÉMA et ÉTATS

a) Dessiner un schéma de la situation physique

b) Identifier clairement l'**état initial** (i) et l'**état final** (f)

c) Choisir un **niveau de référence** pour l'énergie potentielle ($y = 0$)

d) Indiquer les grandeurs connues et inconnues à chaque état (v_i, v_f, y_i, y_f, x_i, x_f)

Étape 2 — BILAN ÉNERGÉTIQUE

a) Lister les formes d'énergie **présentes** à l'état initial : K_i, U_{gi}, U_{ei}

b) Lister les formes d'énergie **présentes** à l'état final : K_f, U_{gf}, U_{ef}

c) Identifier les forces non-conservatives qui effectuent un travail (W_{nc}) : frottement, force motrice, résistance de l'eau...

d) Si $W_{nc} = 0$: conservation de l'énergie mécanique ($E_i = E_f$)

e) Si $W_{nc} \neq 0$: bilan complet ($E_i + W_{nc} = E_f$)

Étape 3 — ÉQUATION D'ÉNERGIE

a) Écrire l'équation de conservation complète :

$$K_i + U_{gi} + U_{ei} + W_{nc} = K_f + U_{gf} + U_{ef}$$

b) Éliminer les termes nuls (objet au repos? au niveau de référence? pas de ressort?)

c) Remplacer chaque terme par son expression algébrique

Étape 4 — ALGÈBRE

a) Isoler l'inconnue **algébriquement** (avec des symboles)

b) Substituer les valeurs numériques *à la fin*

c) Vérifier : unités correctes? Ordre de grandeur raisonnable? Signe cohérent?

Quand choisir la méthode énergétique plutôt que les lois de Newton?

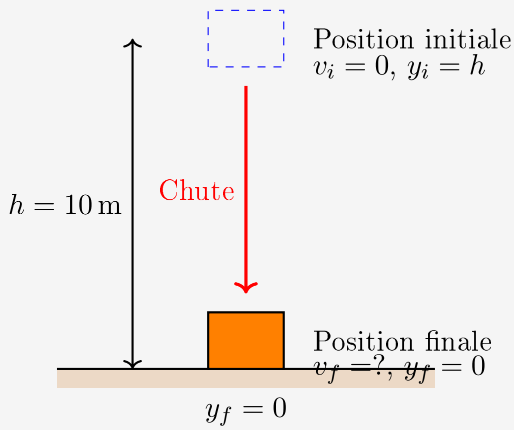
- **Méthode énergétique** : quand on s'intéresse à la **vitesse** à un point donné, sans avoir besoin de connaître l'accélération ou les forces individuelles. Idéale pour les trajectoires courbes ou les situations avec plusieurs forces.
- **Lois de Newton** : quand on cherche une **force** spécifique (tension, normale, etc.) ou l'**accélération** du système.

Les deux méthodes donnent toujours le même résultat — le choix est une question d'efficacité.

3.6.4 Applications de la conservation de l'énergie

Exemple 3.12 – Chute libre d'un conteneur

Un conteneur de masse $m = 8000\,\mathrm{kg}$ tombe accidentellement d'une hauteur de $h = 10\,\mathrm{m}$. En négligeant la résistance de l'air, calculez sa vitesse juste avant l'impact.
Système : Le conteneur
Forces : Gravité (conservative)
Conclusion : L'énergie mécanique se conserve.



Application de la conservation de l'énergie :

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_{g,i} = K_f + U_{g,f}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Avec $v_i = 0$, $y_i = h$ et $y_f = 0$:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

On peut simplifier par m :

$$gh = \frac{1}{2}v_f^2$$

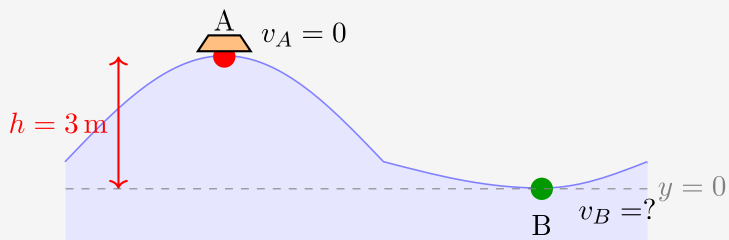
$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 10} = \sqrt{196} = 14\,\mathrm{m/s}$$

Remarque

Notez que la masse s'annule! La vitesse de chute libre ne dépend pas de la masse, seulement de la hauteur. C'est le même résultat que Galilée a découvert il y a plus de 400 ans.

Exemple 3.13 – Navire sur une vague (modèle simplifié)

Un petit bateau de masse $m = 500\,\text{kg}$ descend une vague. Au sommet de la vague (point A), le bateau est momentanément immobile à une hauteur de $3\,\text{m}$ au-dessus du creux. Quelle est sa vitesse au point le plus bas (point B)?
Hypothèses : On néglige la résistance de l'eau et on traite le bateau comme une particule.



Conservation de l'énergie :

$$E_A = E_B$$

$$K_A + U_{g,A} = K_B + U_{g,B}$$

En prenant le creux (point B) comme niveau de référence ($y_B = 0$) :

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 3} = 7{,}7\,\text{m/s} \approx 15\,\text{nuds}$$

Le bateau atteint une vitesse de près de 15 nœuds au bas de la vague!

▷ Pratique autonome 3.8

Une bille de masse $m = 0{,}5\,\text{kg}$ est lâchée du repos au sommet d'une glissière sans frottement de hauteur $h = 2\,\text{m}$.

a) Quelle est l'énergie mécanique totale de la bille? (Prenez le bas de la glissière comme référence.)

b) Quelle est sa vitesse au bas de la glissière?

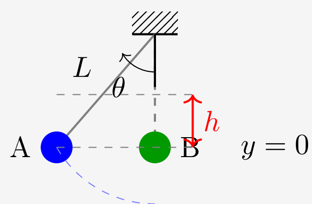
c) Si la bille remonte ensuite une autre pente, à quelle hauteur maximale pourra-t-elle s'élever?

Résolution :

Rép. : a) $E = mgh = 9{,}8\,\mathrm{J}$ b) $v = \sqrt{2gh} = 6{,}26\,\mathrm{m/s}$ c) $h_{\max} = 2\,\mathrm{m}$ (même hauteur qu'au départ)

Exemple 3.14 – Pendule simple

Un pendule de longueur $L = 1{,}5\,\mathrm{m}$ est écarté de $\theta = 30$ de la verticale, puis lâché. Quelle est sa vitesse au point le plus bas de sa trajectoire?



Calcul de la hauteur initiale :
Par géométrie, la hauteur du point A au-dessus du point B est :

$$h = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

$$h = 1,5 \times (1 - \cos 30) = 1,5 \times (1 - 0,866) = 1,5 \times 0,134 = 0{,}201\,\mathrm{m}$$

Conservation de l'énergie :

$$E_A = E_B$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,201} = 1{,}98\,\mathrm{m/s}$$

▷ Pratique autonome 3.9

Un pendule de longueur $L = 2\,\mathrm{m}$ passe par sa position d'équilibre (point le plus bas) avec une vitesse de $v = 3\,\mathrm{m/s}$.

a) Quelle hauteur maximale atteindra-t-il de chaque côté?

b) Quel angle maximal fera-t-il avec la verticale?

Résolution :

Rép. : a) $h = v^2/(2g) = 0{,}459\,\text{m}$ b) $\theta = \arccos(1 - h/L) = \arccos(0,770) \approx 39,6$

3.6.5 Conservation de l'énergie avec forces non-conservatives

Dans la réalité, le frottement et d'autres forces non-conservatives sont presque toujours présents. L'énergie mécanique n'est alors plus conservée, mais l'énergie **totale** (incluant l'énergie thermique) l'est toujours.

Bilan énergétique avec forces non-conservatives

Lorsque des forces non-conservatives agissent sur un système, la variation de l'énergie mécanique est égale au travail effectué par ces forces :

$$\boxed{W_{nc} = \Delta E = E_f - E_i = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)} \tag{3.12}$$

De manière équivalente :

$$K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f \tag{3.13}$$

Interprétation du travail des forces non-conservatives

- Si $W_{nc} > 0$ (force motrice, poussée) : l'énergie mécanique **augmente**
- Si $W_{nc} < 0$ (frottement, résistance) : l'énergie mécanique **diminue**

Le frottement effectue toujours un travail négatif car il s'oppose au mouvement. L'énergie « perdue » est en fait transformée en chaleur.

L'énergie totale se conserve toujours!

Le principe fondamental de conservation de l'énergie stipule que l'énergie ne peut être ni créée ni détruite, seulement transformée. Lorsque le frottement fait « perdre » de l'énergie mécanique, cette énergie est en fait convertie en **énergie thermique** (chaleur).

$$E_{\text{mécanique}} + E_{\text{thermique}} = \text{constante}$$

C'est pourquoi les freins d'un véhicule chauffent lors d'un freinage prolongé!

Exemple 3.15 – Freinage d'un navire avec frottement de l'eau

Un navire de masse $m = 15\,000$ tonnes navigue à $v_i = 6\,\text{m/s}$. Les moteurs sont coupés et le navire ralentit uniquement sous l'effet de la résistance de l'eau jusqu'à $v_f = 2\,\text{m/s}$ après avoir parcouru $d = 800\,\text{m}$. Quelle est la force moyenne de résistance de l'eau?

Bilan énergétique :

Le navire se déplace horizontalement, donc $\Delta U_g = 0$.

$$W_{nc} = \Delta K = K_f - K_i$$

$$W_{nc} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W_{nc} = \frac{1}{2} \times 15 \times 10^6\,\text{kg} \times [(2\,\text{m/s})^2 - (6\,\text{m/s})^2]$$

$$W_{nc} = \frac{1}{2} \times 15 \times 10^6 \times (4 - 36) = \frac{1}{2} \times 15 \times 10^6 \times (-32)$$

$$W_{nc} = -240 \times 10^6\,\text{J} = -240\,\text{MJ}$$

Calcul de la force de résistance :
Le travail de la résistance est $W_{nc} = -F_r \times d$ (négatif car opposé au mouvement) :

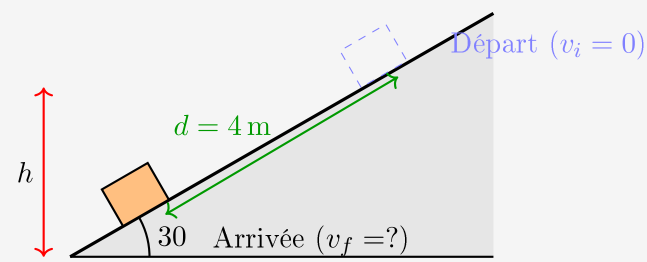
$$-F_r \times 800 = -240 \times 10^6\,\text{J}$$

$$F_r = \frac{240 \times 10^6\,\text{J}}{800\,\text{m}} = 300\,000\,\text{N} = 300\,\text{kN}$$

La force moyenne de résistance de l'eau est d'environ 300 kN.

Exemple 3.16 – Descente d'une rampe avec frottement

Une caisse de $m = 50\,\text{kg}$ glisse sur une rampe inclinée à 30, parcourant une distance de $d = 4\,\text{m}$ le long de la rampe. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0,25$. Si la caisse part du repos, quelle est sa vitesse au bas de la rampe?



Calcul de la hauteur :

$$h = d\sin(30) = 4 \times 0,5 = 2\,\text{m}$$

Calcul de la force de frottement :

$$N = mg\cos(30) = 50 \times 9,8 \times 0,866 = 424\,\text{N}$$

$$f = \mu_c N = 0,25 \times 424 = 106\,\text{N}$$

Travail du frottement : (opposé au déplacement)

$$W_f = -fd = -106 \times 4 = -424\,\text{J}$$

Bilan énergétique :

$$K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f$$

$$0 + mgh + W_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

$$50 \times 9,8 \times 2 + (-424) = \frac{1}{2} \times 50 \times v_f^2$$
$$980 - 424 = 25v_f^2$$
$$v_f^2 = \frac{556}{25} = 22,24$$
$$v_f = \sqrt{22,24} = 4,7\,\mathrm{m/s}$$

Remarque

Sans frottement, la vitesse aurait été $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 2} = 6{,}3\,\mathrm{m/s}$. Le frottement a réduit la vitesse finale de près de 25%.

▷ Pratique autonome 3.10

Un traîneau de $m = 80\,\mathrm{kg}$ est tiré sur une surface horizontale enneigée par une force de $F = 200\,\mathrm{N}$ parallèle au sol. Le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0,15$. Le traîneau part du repos.

a) Calculez le travail effectué par la force de traction sur une distance de 10 m.

b) Calculez le travail effectué par le frottement sur cette distance.

c) En utilisant le bilan énergétique, déterminez la vitesse du traîneau après 10 m.

Résolution :

Rép. : a) $W_F = 200 \times 10 = 2000\,\mathrm{J}$ b) $W_f = -\mu_c mg \times d = -0,15 \times 80 \times 9,8 \times 10 = -1176\,\mathrm{J}$ c) $\Delta K = W_F + W_f = 824$ J, donc $v = \sqrt{2 \times 824/80} = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$

3.7 La puissance

En pratique, lorsqu'on essaye d'accomplir un travail physique, il est pertinent de se questionner non seulement sur la **quantité** de travail accomplie, mais aussi sur le **temps** requis pour l'accomplir. C'est la notion de puissance.

3.7.1 Définition de la puissance

Puissance moyenne

La **puissance moyenne** est la quantité de travail effectué par unité de temps :

$$P_{\text{moy}} = \frac{W}{\Delta t} \tag{3.14}$$

où :

- W est le travail effectué (en J)
- Δt est l'intervalle de temps (en s)

L'unité SI de la puissance est le **watt** (W) : $1\,\text{W} = 1\,\text{J/s}$

Autres unités de puissance

Unité	**Symbole**	**Équivalence**
Watt	W	$1\,\text{W} = 1\,\text{J/s}$
Kilowatt	kW	$1\,\text{kW} = 1000\,\text{W}$
Mégawatt	MW	$1\,\text{MW} = 10^6\,\text{W}$
Cheval-vapeur (métrique)	ch ou cv	$1\,\text{ch} = 735{,}5\,\text{W}$
Horsepower (impérial)	hp	$1\,\text{hp} = 745{,}7\,\text{W}$

3.7.2 Puissance instantanée

Puissance instantanée

La puissance instantanée peut s'exprimer en fonction de la force et de la vitesse :

$$P = Fv\cos\theta \tag{3.15}$$

Lorsque la force est dans la direction du mouvement ($\theta = 0$) :

$$P = Fv \tag{3.16}$$

Démonstration

Pour une force constante dans la direction du mouvement :

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Fd}{\Delta t} = F \times \frac{d}{\Delta t} = Fv$$

3.7.3 Applications maritimes de la puissance

Exemple 3.17 – Puissance des moteurs d'un navire

Un cargo de 30 000 tonnes navigue à vitesse constante de $v = 12\,\text{nuds} \approx 6{,}2\,\text{m/s}$. La force de résistance totale (eau + air) est estimée à $F_r = 800\,\text{kN}$.
Quelle puissance les moteurs doivent-ils fournir?
Analyse : À vitesse constante, la force de propulsion doit exactement compenser la résistance : $F_{\text{prop}} = F_r = 800\,\text{kN}$.
Puissance requise :

$$P = F_{\text{prop}} \times v = 800 \times 10^3\,\text{N} \times 6{,}2\,\text{m/s} = 4{,}96 \times 10^6\,\text{W} \approx 5\,\text{MW}$$

En chevaux-vapeur : $P = \dfrac{5 \times 10^6\,\text{W}}{735{,}5\,\text{W/ch}} \approx 6800\,\text{ch}$

Remarque

Cette puissance est nécessaire juste pour maintenir la vitesse. Pour accélérer, il faudrait encore plus de puissance!

Exemple 3.18 – Grue de chargement

Une grue portuaire soulève un conteneur de $m = 20\,000\,\text{kg}$ à une vitesse constante de $v = 0{,}5\,\text{m/s}$. Quelle puissance la grue doit-elle fournir?
Force requise : Pour soulever à vitesse constante, la tension du câble doit égaler le poids :

$$T = mg = 20\,000\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 = 196\,000\,\text{N}$$

Puissance :

$$P = Tv = 196\,000\,\text{N} \times 0{,}5\,\text{m/s} = 98\,000\,\text{W} = 98\,\text{kW}$$

En chevaux-vapeur : $P \approx 133\,\text{ch}$

▷ Pratique autonome 3.11

Un treuil électrique hisse une chaloupe de sauvetage de $m = 400\,\text{kg}$ sur une hauteur de $h = 8\,\text{m}$ en $t = 20\,\text{s}$.

a) Quel travail le treuil effectue-t-il contre la gravité?

b) Quelle est la puissance moyenne du treuil?

c) Si le rendement du système est de 75%, quelle puissance électrique le treuil consomme-t-il?

Résolution :

Rép. : a) $W = mgh = 31\,360\,\mathrm{J}$ b) $P = W/t = 1568\,\mathrm{W}$ c) $P_{\text{élec}} = P/0,75 = 2091\,\mathrm{W}$

3.7.4 Relation entre puissance et énergie

Puisque la puissance est le taux de transfert d'énergie, on peut aussi écrire :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{3.17}$$

Cette relation est utile pour calculer l'énergie consommée ou produite pendant un certain temps :

$$E = P \times \Delta t \tag{3.18}$$

Le kilowattheure (kWh)

En pratique, l'énergie est souvent mesurée en **kilowattheures** (kWh), particulièrement pour la facturation de l'électricité :

$$1\,\mathrm{kWh} = 1000\,\mathrm{W} \times 3600\,\mathrm{s} = 3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$$

Exemple 3.19 – Consommation énergétique d'un navire

Un ferry consomme une puissance moyenne de 8 MW pour ses moteurs pendant une traversée de 2 heures.
Énergie consommée :

$$E = P \times t = 8\,\mathrm{MW} \times 2\,\mathrm{h} = 16\,\mathrm{MWh}$$

En joules : $E = 16 \times 10^6\,\mathrm{Wh} \times 3600\,\mathrm{s/h} = 57{,}6 \times 10^9\,\mathrm{J} = 57{,}6\,\mathrm{GJ}$

Si le carburant fournit environ 45 MJ/kg, la masse de carburant consommée est :

$$m_{\text{carb}} = \frac{57{,}6 \times 10^9\,\text{J}}{45 \times 10^6\,\text{J/kg}} \approx 1280\,\text{kg}$$

(En pratique, le rendement des moteurs réduit cette efficacité.)

▷ Pratique autonome 3.12

Un navire utilise un groupe électrogène de 500 kW pendant 8 heures pour alimenter les systèmes de bord.

a) Quelle énergie est produite (en kWh et en MJ)?

b) Si le diesel marin fournit 42 MJ par litre, combien de litres sont consommés (en supposant un rendement de 40%)?

Résolution :

Rép. : a) $E = 4000\,\text{kWh} = 14\,400\,\text{MJ}$ b) Énergie du carburant nécessaire $= 14400/0,4 = 36\,000\,\text{MJ}$, donc $V = 36000/42 \approx 857\,\text{L}$

3.8 Quantité de mouvement et impulsion

3.8.1 Introduction : pourquoi une nouvelle grandeur?

Au chapitre précédent, nous avons vu que l'énergie est une grandeur conservée — un outil puissant pour résoudre des problèmes. Mais l'énergie est une grandeur **scalaire** : elle ne contient aucune information sur la **direction** du mouvement. Or, dans de nombreuses situations, la direction est cruciale.

Considérons l'exemple suivant : un vraquier de 80 000 tonnes naviguant à 12 nœuds vers l'est et un porte-conteneurs de 40 000 tonnes naviguant à 24 nœuds vers l'ouest possèdent la **même énergie cinétique**. Pourtant, si ces deux navires entrent en collision, le résultat dépendra clairement de la direction de chaque navire — pas seulement de l'énergie.

Nous avons besoin d'une grandeur qui combine la masse, la vitesse **et** la direction du mouvement.

Cette grandeur, c'est la **quantité de mouvement**.

3.8.2 Définition de la quantité de mouvement

Quantité de mouvement

La **quantité de mouvement** $\vec{p}$ d'un objet de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \tag{3.19}$$

- C'est une grandeur **vectorielle** : elle a un module, une direction et un sens
- Sa direction est la même que celle de la vitesse $\vec{v}$
- L'unité SI est le $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ (il n'y a pas de nom spécial)

Quantité de mouvement et inertie en mouvement

La quantité de mouvement représente la « difficulté à arrêter un objet en mouvement ». Un objet massif et rapide possède une grande quantité de mouvement et est donc très difficile à arrêter. C'est pourquoi on l'appelle parfois **momentum** (terme anglais couramment utilisé en sciences).
En notation scalaire (1D), si l'on choisit un axe, la quantité de mouvement s'écrit simplement :

$$p = mv$$

où v peut être positif ou négatif selon le sens du mouvement.

Exemple 3.20 – Quantité de mouvement de différents navires

Comparons la quantité de mouvement de trois navires :

Navire	**Masse**	**Vitesse**	$\lvert\vec{p}\rvert = mv$
Canot de sauvetage	300 kg	8 m/s	$2400\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Traversier	5000 tonnes	8 m/s	$4{,}0 \times 10^7\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Pétrolier (VLCC)	300 000 tonnes	8 m/s	$2{,}4 \times 10^9\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$

À la même vitesse, le pétrolier a une quantité de mouvement **un million de fois** plus grande que le canot. C'est pourquoi le pétrolier a besoin de plusieurs kilomètres pour s'arrêter, tandis que le canot s'arrête en quelques mètres.

▷ Pratique autonome 3.13

Un porte-conteneurs de masse $m = 60\,000$ tonnes navigue à 14 nuds ($\approx 7{,}2$ m/s) vers le nord. Un vraquier de masse $m = 80\,000$ tonnes navigue à 10 nuds ($\approx 5{,}1$ m/s) vers l'est.

a) Calculez la quantité de mouvement de chaque navire.

b) Lequel des deux navires sera le plus difficile à arrêter? Justifiez.

Résolution :

Rép. : a) $p_1 = 4{,}32 \times 10^8$ kg · m/s (nord), $p_2 = 4{,}08 \times 10^8$ kg · m/s (est) b) Le porte-conteneurs ($|\vec{p}_1| > |\vec{p}_2|$)

3.8.3 L'impulsion

En pratique, les forces agissent pendant un certain **temps**. L'effet d'une force sur un objet dépend non seulement de son intensité, mais aussi de sa **durée d'application**. C'est la notion d'impulsion.

Impulsion

L'**impulsion** $\vec{J}$ est le produit d'une force par l'intervalle de temps pendant lequel elle agit :

$$\vec{J} = \vec{F} \cdot \Delta t \tag{3.20}$$

- C'est une grandeur **vectorielle**
- Sa direction est la même que celle de la force $\vec{F}$
- L'unité SI est le N · s, qui est équivalent au kg · m/s

Force moyenne

En réalité, la force n'est pas toujours constante pendant la collision. L'impulsion est alors définie avec la **force moyenne** $\overrightarrow{F}_{moy}$:

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{F}_{moy} \cdot \Delta t$$

Graphiquement, l'impulsion correspond à l'**aire sous la courbe** $F(t)$.

3.8.4 Le théorème de l'impulsion et de la quantité de mouvement

Le lien fondamental entre l'impulsion et la quantité de mouvement s'obtient directement à partir de la deuxième loi de Newton.

Théorème de l'impulsion et de la quantité de mouvement

L'impulsion totale exercée sur un objet est égale à la **variation de sa quantité de mouvement** :

$$\boxed{\overrightarrow{J} = \Delta \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_f - \overrightarrow{p}_i = m\overrightarrow{v}_f - m\overrightarrow{v}_i \qquad (3.21)}$$

En notation scalaire (1D) :

$$F_{moy} \cdot \Delta t = mv_f - mv_i$$

Démonstration

Par la deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$
En remplaçant $\overrightarrow{a}$ par $\dfrac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t}$:

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{m\overrightarrow{v}_f - m\overrightarrow{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{p}}{\Delta t}$$

En multipliant les deux côtés par Δt :

$$\overrightarrow{F} \cdot \Delta t = \Delta \overrightarrow{p}$$

C'est la forme originale de la deuxième loi de Newton, telle que formulée par Newton lui-même!

Pourquoi ce théorème est-il utile?

Le théorème de l'impulsion est particulièrement utile pour analyser les **collisions** et les **interactions brèves**, car :

- On connaît souvent les vitesses **avant** et **après** l'interaction
- On peut calculer la force moyenne même si la force réelle varie de façon complexe
- Il fait le lien entre le **temps** de contact et la **force** subie

Exemple 3.21 – Accostage d'un traversier

Un traversier de masse $m = 5000\,\text{tonnes} = 5{,}0 \times 10^6\,\text{kg}$ s'approche du quai à une vitesse de $0{,}5\,\text{m/s}$. Le système d'amortissement (défenses de quai) immobilise le traversier en $4\,\text{s}$.
Quelle est la force moyenne exercée par les défenses sur le traversier?
Données : $m = 5{,}0 \times 10^6\,\text{kg}$, $v_i = 0{,}5\,\text{m/s}$, $v_f = 0\,\text{m/s}$, $\Delta t = 4\,\text{s}$
Théorème de l'impulsion :

$$F_{moy} \cdot \Delta t = mv_f - mv_i$$
$$F_{moy} \cdot 4 = 5{,}0 \times 10^6 \times 0 - 5{,}0 \times 10^6 \times 0{,}5$$
$$F_{moy} = \frac{-2{,}5 \times 10^6}{4} = -625\,\text{kN}$$

Le signe négatif indique que la force s'oppose au mouvement du traversier. La force moyenne est de $625\,\text{kN}$, soit l'équivalent du poids d'environ 64 tonnes!

Exemple 3.22 – Temps de contact et force d'impact

Un conteneur de $8000\,\text{kg}$ tombe de $5\,\text{m}$ et frappe le pont du navire.
Comparez la force d'impact si le conteneur s'arrête en :

a) $\Delta t_1 = 0{,}5\,\text{s}$ (pont avec amortisseurs)

b) $\Delta t_2 = 0{,}02\,\text{s}$ (pont rigide en acier)

Vitesse juste avant l'impact (conservation de l'énergie ou chute libre) :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 5} = 9{,}9\,\text{m/s}$$

Quantité de mouvement avant l'impact :

$$p_i = mv = 8000 \times 9{,}9 = 79\,200\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Impulsion nécessaire (identique dans les deux cas) :

$$|\Delta p| = |0 - 79200| = 79\,200\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Force moyenne :

a) Avec amortisseurs : $F_1 = \dfrac{79200}{0{,}5} = 158\,\text{kN}$

b) Sans amortisseurs : $F_2 = \dfrac{79200}{0{,}02} = 3960\,\text{kN} \approx 4{,}0\,\text{MN}$

Conclusion : En augmentant le temps de contact d'un facteur 25, la force est réduite d'un facteur 25. C'est le principe fondamental de **tous** les systèmes d'amortissement : airbags, défenses de quai, pare-chocs, zones de déformation.

La grande leçon de l'impulsion

Pour une même variation de quantité de mouvement (Δp fixé), il y a un compromis :

- **Grand** $\Delta t \rightarrow$ **petite force** (atterrissage en parachute, défenses de quai)
- **Petit** $\Delta t \rightarrow$ **grande force** (coup de marteau, collision rigide)

Ce compromis est au cœur de la conception des systèmes de sécurité maritime et automobile.

▷ Pratique autonome 3.14

Un remorqueur de 500 tonnes se déplaçant à 3 m/s heurte une bouée d'amarrage qui l'immobilise en 2 s.

a) Calculez la quantité de mouvement initiale du remorqueur.

b) Calculez l'impulsion reçue par le remorqueur.

c) Calculez la force moyenne exercée par la bouée sur le remorqueur.

d) Si la bouée était rigide et que l'arrêt se faisait en 0,1 s, quelle serait la force?

Résolution :

Rép. : a) $p_i = 1{,}5 \times 10^6\,\mathrm{kg \cdot m/s}$ b) $J = -1{,}5 \times 10^6\,\mathrm{N \cdot s}$ c) $F = -750\,\mathrm{kN}$ d) $F = -15\,\mathrm{MN}$

3.8.5 Conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de l'impulsion mène directement à l'un des principes les plus fondamentaux de la physique : la **conservation de la quantité de mouvement**.

Système isolé et forces internes

Système isolé

Un **système** est un ensemble d'objets que l'on choisit d'étudier ensemble. Un système est dit **isolé** si la somme des forces **extérieures** agissant sur lui est nulle :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$$

Les forces que les objets du système exercent **entre eux** sont des forces **internes** — elles ne changent pas la quantité de mouvement totale du système.

Forces internes vs externes

Lors d'une collision entre deux navires :

- Les forces de contact entre les deux navires sont des forces **internes** au système (navire A + navire B). Par la 3ᵉ loi de Newton, elles sont égales et opposées : $\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}$. Leur somme est nulle.
- La gravité, la poussée d'Archimède et la résistance de l'eau sont des forces **externes**. Si elles s'annulent (ou sont négligeables par rapport aux forces de collision), le système est isolé.

Principe de conservation

Conservation de la quantité de mouvement

Si la résultante des forces extérieures sur un système est nulle ($\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$), alors la quantité de mouvement totale du système est **conservée** :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{total,i} = \overrightarrow{p}_{total,f}} \tag{3.22}$$

Pour un système de deux objets (en 1D) :

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{3.23}$$

Démonstration pour deux objets

Considérons deux objets qui interagissent. Par la 3e loi de Newton :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}$$

Par le théorème de l'impulsion, appliqué à chaque objet pendant le temps Δt de l'interaction :

$$\overrightarrow{F}_{2\to 1} \cdot \Delta t = \Delta \overrightarrow{p}_1 = m_1 \overrightarrow{v}_{1f} - m_1 \overrightarrow{v}_{1i}$$
$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} \cdot \Delta t = \Delta \overrightarrow{p}_2 = m_2 \overrightarrow{v}_{2f} - m_2 \overrightarrow{v}_{2i}$$

En additionnant ces deux équations et en utilisant $\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}$:

$$\Delta \overrightarrow{p}_1 + \Delta \overrightarrow{p}_2 = \overrightarrow{0}$$

Donc : $\overrightarrow{p}_{1i} + \overrightarrow{p}_{2i} = \overrightarrow{p}_{1f} + \overrightarrow{p}_{2f}$

Conditions d'application

La conservation de la quantité de mouvement est **exacte** si le système est parfaitement isolé. En pratique, on peut l'appliquer de façon approximative lorsque :

- Les forces **internes** (collision) sont beaucoup plus grandes que les forces **externes** (frottement, résistance)
- L'interaction est **brève** (le temps de la collision est si court que les forces externes n'ont pas le temps d'agir significativement)

Dans le cas d'une collision entre navires, les forces d'impact (millions de newtons) sont largement supérieures à la résistance de l'eau (milliers de newtons). La conservation s'applique donc très bien pendant la collision elle-même.

Exemple 3.23 – Recul d'un canon naval

Un canon naval de masse $M = 12\,000\,\mathrm{kg}$ tire un obus de masse $m = 50\,\mathrm{kg}$ à une vitesse de $800\,\mathrm{m/s}$.
Quelle est la vitesse de recul du canon?
Système : Canon + obus (isolé dans la direction horizontale, car la force d'explosion est interne)
État initial : Tout est au repos → $p_i = 0$
Conservation de $\overrightarrow{p}$:

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ 0 &= m \cdot v_{obus} + M \cdot v_{canon} \\ 0 &= 50 \times 800 + 12000 \times v_{canon} \\ v_{canon} &= \frac{-50 \times 800}{12000} = -3{,}3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Le signe négatif confirme que le canon recule dans la direction **opposée** à celle de l'obus. La vitesse de recul est relativement faible grâce à la grande masse du canon.

Exemple 3.24 – Largage de cargaison en mouvement

Un navire de masse $M = 20\,000$ tonnes navigue à $6\,\text{m/s}$ vers l'est. Il largue une ancre de masse $m = 2000\,\text{kg}$ verticalement (la composante horizontale de la vitesse de l'ancre au moment du largage est la même que celle du navire).
La vitesse du navire change-t-elle?
Attention! Au moment du largage, l'ancre conserve la même vitesse horizontale que le navire ($v_{ancre} = 6\,\text{m/s}$ vers l'est). Le largage est **vertical**, pas horizontal.
Conservation de p_x :

$$p_{xi} = p_{xf}$$
$$(M + m) \times 6 = M \times v_{navire,f} + m \times 6$$

Puisque $v_{ancre,x} = 6\,\text{m/s}$ (inchangé au moment du largage) :

$$(M + m) \times 6 = M \times v_{navire,f} + m \times 6$$

$$v_{navire,f} = 6 \text{ m/s}$$

La vitesse horizontale du navire ne change **pas** immédiatement! C'est seulement lorsque l'ancre touchera le fond et exercera une force de freinage que le navire ralentira.

▷ Pratique autonome 3.15

Un marin de $80\,\text{kg}$ se tient debout à la poupe d'un canot de $120\,\text{kg}$ initialement au repos sur l'eau (sans frottement). Le marin marche vers la proue à $2\,\text{m/s}$ par rapport au sol.

a) Quelle est la vitesse du canot par rapport au sol?

b) Quelle est la vitesse du marin par rapport au canot?

Résolution :

Rép. : a) $v_{canot} = -1{,}33\,\mathrm{m/s}$ (vers la poupe) b) $v_{rel} = 2 - (-1{,}33) = 3{,}33\,\mathrm{m/s}$

▷ Pratique autonome 3.16

Deux barges naviguent sur le même cap. La barge A ($m_A = 500\,\text{tonnes}$, $v_A = 4\,\mathrm{m/s}$) rattrape la barge B ($m_B = 300\,\text{tonnes}$, $v_B = 1\,\mathrm{m/s}$). Après le contact, les deux barges restent accrochées et se déplacent ensemble.
Quelle est leur vitesse commune après la collision?

Résolution :

Rép. : $v_f = \dfrac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \dfrac{500 \times 4 + 300 \times 1}{800} = 2{,}9\,\mathrm{m/s}$

3.8.6 Comparaison : énergie vs quantité de mouvement

Il est important de comprendre les différences entre ces deux grandeurs conservées :

	Énergie cinétique	**Quantité de mouvement**
Formule	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$\vec{p} = m\vec{v}$
Type de grandeur	Scalaire	Vectorielle
Toujours conservée?	Non (dissipation possible)	Oui (si système isolé)
Dépendance en v	Quadratique (v^2)	Linéaire (v)
Peut être négative?	Non (toujours ≥ 0)	Oui (signe = direction)
Liée à...	Travail ($W = \Delta K$)	Impulsion ($J = \Delta p$)

Relation entre K et p

On peut exprimer l'énergie cinétique en fonction de la quantité de mouvement :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Cette relation est utile pour analyser les collisions : si $\overrightarrow{p}$ est conservée, cela ne signifie **pas** que K l'est aussi (puisque K dépend de p^2 et de m différemment pour chaque objet).

3.9 Les collisions

3.9.1 Introduction : qu'est-ce qu'une collision?

En physique, une **collision** désigne toute interaction brève entre deux (ou plusieurs) objets pendant laquelle les forces internes sont beaucoup plus grandes que les forces externes. Les objets n'ont pas nécessairement besoin de se toucher physiquement — par exemple, deux aimants qui se repoussent subissent une « collision magnétique ».

Lors de toute collision dans un système isolé :

- La quantité de mouvement totale est **toujours conservée** ($\overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{p}_f$)
- L'énergie cinétique totale n'est **pas nécessairement conservée**

C'est précisément le comportement de l'énergie cinétique qui permet de **classifier** les collisions.

3.9.2 Classification des collisions

Types de collisions

1. **Collision parfaitement inélastique** : les objets **restent collés** après la collision. La perte d'énergie cinétique est **maximale** (mais pas totale).
2. **Collision inélastique** : les objets se **séparent** après la collision, mais une partie de l'énergie cinétique est transformée en déformation, chaleur ou son. C'est le cas le plus **courant** dans la réalité.
3. **Collision élastique** : les objets se séparent et l'énergie cinétique totale est **conservée**. Aucune énergie n'est perdue en déformation. C'est un cas **idéal**, approché par les collisions entre billes dures ou particules subatomiques.

	Parf. inélastique	**Inélastique**	**Élastique**
Après la collision	Objets collés	Objets séparés	Objets séparés
$\overrightarrow{p}$ **conservée?**	Oui	Oui	Oui
K **conservée?**	Non (perte max.)	Non (perte partielle)	Oui
Équations	1 ($\overrightarrow{p}$)	1 ($\overrightarrow{p}$) + info	2 ($\overrightarrow{p}$ + K)
Exemple maritime	Abordage (navires soudés)	Accostage avec rebond	Billes de billard

Dans la réalité

La grande majorité des collisions dans le monde réel sont **inélastiques**. Les collisions élastiques sont un cas idéal rarement atteint à l'échelle macroscopique. Les collisions parfaitement inélastiques sont un autre cas limite qui se produit lorsque les objets se déforment suffisamment pour rester en contact (accostage brutal, abordage).

3.9.3 Collision parfaitement inélastique

C'est le type de collision le plus simple à analyser, car les deux objets ont la **même vitesse finale**.

Collision parfaitement inélastique

Après une collision parfaitement inélastique, les objets restent collés et se déplacent ensemble à la vitesse v_f :

$$\boxed{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f} \tag{3.24}$$

D'où :

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{3.25}$$

Perte d'énergie cinétique

Même si la quantité de mouvement est conservée, l'énergie cinétique **diminue** lors d'une collision parfaitement inélastique. L'énergie « perdue » est transformée en :

- Déformation des structures (coque, pare-chocs)
- Chaleur (échauffement des matériaux)
- Son (bruit de l'impact)

La perte d'énergie cinétique se calcule par :

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2\right)$$

Exemple 3.25 – Abordage entre deux navires

Un cargo de masse $m_1 = 30\,000$ tonnes naviguant à $v_{1i} = 5\,\mathrm{m/s}$ vers l'est percute un vraquier de masse $m_2 = 20\,000$ tonnes naviguant à $v_{2i} = -3\,\mathrm{m/s}$ (vers l'ouest). Les deux navires restent soudés après l'impact.

Données :

- $m_1 = 30 \times 10^6\,\mathrm{kg}$, $v_{1i} = 5\,\mathrm{m/s}$ (est = positif)
- $m_2 = 20 \times 10^6\,\mathrm{kg}$, $v_{2i} = -3\,\mathrm{m/s}$ (ouest = négatif)

Conservation de $\vec{p}$:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{30 \times 10^6 \times 5 + 20 \times 10^6 \times (-3)}{30 \times 10^6 + 20 \times 10^6} \\ &= \frac{150 \times 10^6 - 60 \times 10^6}{50 \times 10^6} = \frac{90 \times 10^6}{50 \times 10^6} = 1{,}8\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Les navires se déplacent vers l'est à $1{,}8\,\mathrm{m/s}$ ($\approx 3{,}5$ nuds).

Perte d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}(30 \times 10^6)(5)^2 + \frac{1}{2}(20 \times 10^6)(3)^2 = 375 + 90 = 465\,\mathrm{MJ} \\ K_f &= \frac{1}{2}(50 \times 10^6)(1{,}8)^2 = 81\,\mathrm{MJ} \\ \Delta K &= 81 - 465 = -384\,\mathrm{MJ} \end{aligned}$$

Plus de **80%** de l'énergie cinétique initiale a été transformée en déformation des coques, chaleur et son. C'est la réalité des abordages : la destruction est massive.

▷ Pratique autonome 3.17

Un pendule balistique est un dispositif classique pour mesurer la vitesse d'un projectile. Un boulet de canon de masse $m = 10\,\mathrm{kg}$, tiré horizontalement, s'enfonce dans un bloc de bois de masse $M = 50\,\mathrm{kg}$ suspendu par des câbles. Après l'impact, le bloc (avec le boulet) s'élève de $h = 0{,}8\,\mathrm{m}$.

a) En utilisant la conservation de l'énergie, calculez la vitesse du bloc+boulet juste après l'impact.

b) En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, calculez la vitesse initiale du boulet.

c) Calculez le pourcentage d'énergie cinétique perdue lors de l'impact.

Résolution :

Rép. : a) $v_f = \sqrt{2gh} = 3{,}96\,\mathrm{m/s}$ b) $v_{boulet} = \dfrac{(m+M)v_f}{m} = 23{,}8\,\mathrm{m/s}$ c) $K_i = 2822\,\mathrm{J}$, $K_f = 470\,\mathrm{J}$, perte $= 83\%$

3.9.4 Collision élastique

Dans une collision élastique, **deux** grandeurs sont conservées simultanément :

Collision élastique

Lors d'une collision élastique entre deux objets, on a conservation de la quantité de mouvement **et** de l'énergie cinétique :

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{3.26}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \tag{3.27}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues (v_{1f} et v_{2f}) se résout algébriquement.

Résolution simplifiée

On peut montrer (en combinant les équations **??** et **??**) que la conservation de l'énergie cinétique dans une collision élastique est **équivalente** à dire que la **vitesse relative** d'approche est égale à la vitesse relative de séparation :

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \tag{3.28}$$

Cette relation est souvent plus facile à utiliser que l'équation d'énergie cinétique, car elle est **linéaire** (pas de termes au carré).

Démonstration de l'équation des vitesses relatives

En partant de la conservation de K :

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

En factorisant $(a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad \text{(I)}$$

De la conservation de $\overrightarrow{p}$:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad \text{(II)}$$

En divisant (I) par (II) :

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

Ce qui se réarrange en : $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$
Interprétation : les objets s'éloignent l'un de l'autre aussi vite qu'ils se sont approchés.

Méthode de résolution pour une collision élastique

Pour résoudre une collision élastique en 1D, on utilise le système de deux équations **linéaires** :

1. Conservation de $\overrightarrow{p}$: $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$
2. Vitesses relatives : $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$

Ce système est plus simple à résoudre que le système avec K (pas de termes quadratiques).

Cas particuliers importants

Cas particulier : cible au repos

Si l'objet 2 est initialement au repos, les vitesses finales d'une collision élastique sont :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \tag{3.29}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \tag{3.30}$$

Ces formules révèlent trois situations physiquement intéressantes :

Situation	v_{1f}	v_{2f}	**Interprétation**
$m_1 = m_2$ (masses égales)	0	v_{1i}	L'objet 1 s'arrête, l'objet 2 repart avec toute la vitesse.
$m_1 \gg m_2$ (boule de bowling $\to$ bille)	$\approx v_{1i}$	$\approx 2v_{1i}$	L'objet lourd continue presque inchangé; le léger repart à 2× la vitesse.
$m_1 \ll m_2$ (bille $\to$ mur)	$\approx -v_{1i}$	≈ 0	L'objet léger rebondit; le lourd ne bouge presque pas.

Exemple 3.26 – Collision élastique entre deux bateaux-jouets

Dans un bassin d'essai, un bateau-jouet A ($m_A = 2\,\mathrm{kg}$, $v_{Ai} = 3\,\mathrm{m/s}$) frappe un bateau-jouet B ($m_B = 1\,\mathrm{kg}$, au repos) dans une collision élastique.
Méthode : système de 2 équations linéaires
Conservation de $\overrightarrow{p}$:

$$\begin{aligned} m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} &= m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \\ 2 \times 3 + 0 &= 2v_{Af} + 1 \times v_{Bf} \\ 6 &= 2v_{Af} + v_{Bf} \quad \text{(I)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Vitesses relatives :

$$\begin{aligned} v_{Ai} - v_{Bi} &= -(v_{Af} - v_{Bf}) \\ 3 - 0 &= -(v_{Af} - v_{Bf}) \\ 3 &= v_{Bf} - v_{Af} \quad \text{(II)} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Résolution : De (II) : $v_{Bf} = v_{Af} + 3$. En substituant dans (I) :

$$\begin{aligned} 6 &= 2v_{Af} + (v_{Af} + 3) = 3v_{Af} + 3 \\ v_{Af} &= 1\,\mathrm{m/s} \\ v_{Bf} &= 1 + 3 = 4\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Vérification (conservation de K) :

$$\begin{aligned} K_i &= \tfrac{1}{2}(2)(3)^2 = 9\,\mathrm{J} \\ K_f &= \tfrac{1}{2}(2)(1)^2 + \tfrac{1}{2}(1)(4)^2 = 1 + 8 = 9\,\mathrm{J} \quad \checkmark \end{aligned}$$

▷ Pratique autonome 3.18

Un neutron ($m_n = 1\,\mathrm{u}$) se déplaçant à $v_i = 2{,}0 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$ frappe un noyau de carbone-12 ($m_C = 12\,\mathrm{u}$) au repos dans une collision élastique frontale. (L'unité de masse atomique u se simplifie dans les rapports.)

a) Calculez les vitesses finales du neutron et du noyau de carbone.

b) Quel pourcentage de l'énergie cinétique du neutron est transféré au noyau?

c) Expliquez pourquoi les réacteurs nucléaires utilisent de l'eau (contenant de l'hydrogène, $m \approx 1\,\mathrm{u}$) plutôt que du carbone comme modérateur.

Résolution :

Rép. : a) $v_{nf} = \dfrac{1-12}{1+12} \times 2{,}0 \times 10^6 = -1{,}69 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$ (rebondit), $v_{Cf} = \dfrac{2 \times 1}{13} \times 2{,}0 \times 10^6 = 3{,}08 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$ b) $\approx 28\%$ c) Avec $m_H \approx m_n$, le transfert est de presque 100% (masses égales)

3.9.5 Collision inélastique

La plupart des collisions réelles ne sont ni parfaitement inélastiques ni élastiques — elles sont **inélastiques**. La quantité de mouvement est conservée, mais une fraction de l'énergie cinétique est perdue.

Collision inélastique

Lors d'une collision inélastique :

- $\vec{p}$ est conservée : $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$
- K n'est **pas** conservée : $K_f < K_i$

On dispose alors d'une seule équation (conservation de $\vec{p}$) pour deux inconnues (v_{1f} et v_{2f}). Il faut donc une **information supplémentaire** fournie par l'énoncé, par exemple :

- La vitesse finale de l'un des objets
- Le pourcentage d'énergie cinétique perdue
- Le **coefficient de restitution** e

Coefficient de restitution

Le **coefficient de restitution** e caractérise l'élasticité de la collision :

$$\boxed{e = \frac{|v_{2f} - v_{1f}|}{|v_{1i} - v_{2i}|} = \frac{\text{vitesse relative de séparation}}{\text{vitesse relative d'approche}} \qquad (3.33)}$$

- $e = 1$: collision **élastique** (pas de perte)
- $0 < e < 1$: collision **inélastique** (perte partielle)
- $e = 0$: collision **parfaitement inélastique** (les objets restent collés)

Exemple 3.27 – Accostage avec coefficient de restitution

Un traversier de masse $m_1 = 4000\,\text{tonnes}$ arrive au quai ($m_2 \to \infty$, le quai ne bouge pas) à $v_{1i} = 0{,}8\,\text{m/s}$. Les défenses en caoutchouc ont un coefficient de restitution $e = 0{,}4$.
À quelle vitesse le traversier rebondit-il?
Puisque le quai ne bouge pas ($v_{2i} = v_{2f} = 0$) :

$$e = \frac{|v_{2f} - v_{1f}|}{|v_{1i} - v_{2i}|} = \frac{|0 - v_{1f}|}{|0{,}8 - 0|}$$

$$0{,}4 = \frac{|v_{1f}|}{0{,}8}$$

$$|v_{1f}| = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32\,\text{m/s}$$

Le traversier rebondit à $0{,}32\,\text{m/s}$ (dans la direction opposée).
Énergie perdue :

$$K_i = \tfrac{1}{2}(4 \times 10^6)(0{,}8)^2 = 1280\,\text{kJ}$$

$$K_f = \tfrac{1}{2}(4 \times 10^6)(0{,}32)^2 = 204{,}8\,\text{kJ}$$

$$\text{Perte} = 1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - e^2 = 1 - 0{,}16 = 84\%$$

Résultat important : la fraction d'énergie cinétique conservée dans un rebond contre un mur est e^2. Les 84% restants sont absorbés par les défenses (déformation élastique du caoutchouc, chaleur).

Relation entre e et la perte d'énergie

Pour une collision contre un objet infiniment massif (mur, quai) :

$$\frac{K_f}{K_i} = e^2$$

Pour une collision entre deux objets de masses finies, la relation est plus complexe, mais le principe reste le même : plus e est petit, plus la perte d'énergie est grande.

▷ Pratique autonome 3.19

Une balle de caoutchouc de 0,2 kg est lâchée d'une hauteur de 2 m et rebondit à une hauteur de 1,5 m.

a) Calculez la vitesse de la balle juste avant et juste après le rebond.

b) Déterminez le coefficient de restitution de la balle.

c) Quel pourcentage de l'énergie cinétique est perdu à chaque rebond?

d) Après combien de rebonds la balle sera-t-elle sous 0,5 m?

Résolution :

Rép. : a) $v_{avant} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 2} = 6{,}26\,\mathrm{m/s}$, $v_{aprs} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1{,}5} = 5{,}42\,\mathrm{m/s}$ b) $e = 5{,}42/6{,}26 = 0{,}866$ c) $1 - e^2 = 25\%$ d) $h_n = 2 \times e^{2n} < 0{,}5 \Rightarrow n \geq 5$ rebonds

3.9.6 Collisions en deux dimensions

Dans la réalité, les collisions ne sont pas toujours frontales. Lorsque les objets se frappent en biais, il faut traiter la conservation de la quantité de mouvement **séparément selon chaque axe** :

Conservation de $\vec{p}$ en 2D

Pour un système isolé dans le plan, la quantité de mouvement est conservée composante par composante :

$$\text{Axe } x : \quad m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \tag{3.34}$$

$$\text{Axe } y : \quad m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \tag{3.35}$$

Rappel des décompositions :

$$v_x = v\cos\theta \qquad v_y = v\sin\theta$$

Exemple 3.28 – Collision en T entre deux navires

Un cargo ($m_1 = 20\,000$ tonnes, $v_1 = 4$ m/s vers l'est) est percuté par un traversier ($m_2 = 5000$ tonnes, $v_2 = 6$ m/s vers le nord) dans une collision parfaitement inélastique.
Trouvez la vitesse (module et direction) de l'ensemble après la collision.
Choix d'axes : x vers l'est, y vers le nord.
Conservation de p_x :

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= (m_1 + m_2) v_{fx} \\ 20 \times 10^6 \times 4 + 5 \times 10^6 \times 0 &= 25 \times 10^6 \times v_{fx} \\ v_{fx} &= 3{,}2\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Conservation de p_y :

$$\begin{aligned} m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= (m_1 + m_2) v_{fy} \\ 20 \times 10^6 \times 0 + 5 \times 10^6 \times 6 &= 25 \times 10^6 \times v_{fy} \\ v_{fy} &= 1{,}2\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Module et direction :

$$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 1{,}2^2} = 3{,}4\,\text{m/s} \approx 6{,}6\,\text{nuds}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = \arctan\left(\frac{1{,}2}{3{,}2}\right) = 20{,}6 \text{ nord de l'est}$$

L'ensemble se déplace à 3,4 m/s dans la direction N69E (cap $\approx$ 069).

▷ Pratique autonome 3.20

Deux bateaux de pêche entrent en collision en eau libre :

- Bateau A : $m_A = 15$ tonnes, vitesse 5 m/s vers le nord (cap 000°)
- Bateau B : $m_B = 10$ tonnes, vitesse 8 m/s vers l'est (cap 090°)

Les bateaux restent enchevêtrés après la collision.

a) Calculez les composantes v_{fx} et v_{fy} de la vitesse finale.

b) Calculez le module de la vitesse finale.

c) Calculez le cap (direction) de l'ensemble après la collision.

d) Calculez l'énergie cinétique perdue et le pourcentage de perte.

Résolution :

Rép. : a) $v_{fx} = 3{,}2\,\mathrm{m/s}$, $v_{fy} = 3{,}0\,\mathrm{m/s}$ b) $v_f = 4{,}4\,\mathrm{m/s}$ c) $\theta = 43$ est du nord, cap ≈ 043 d) $K_i = 508\,\mathrm{kJ}$, $K_f = 242\,\mathrm{kJ}$, perte $\approx 52\%$

3.9.7 Algorithme de résolution des problèmes de collision

Méthode systématique pour les problèmes de collision

Étape 1 — IDENTIFIER

a) Définir le **système** (quels objets?)

b) Vérifier que le système est **isolé** (forces externes négligeables)

c) Identifier le **type** de collision (parfaitement inélastique, inélastique, élastique)

Étape 2 — ORGANISER

a) Dessiner un schéma « avant / après »

b) Choisir un axe (ou deux axes en 2D) avec une direction positive

c) Lister les données : m_1, m_2, v_{1i}, v_{2i} (attention aux signes!)

Étape 3 — ÉQUATIONS

a) Écrire la conservation de $\vec{p}$ (toujours!)

b) Si collision élastique : ajouter l'équation des vitesses relatives

c) Si collision parfaitement inélastique : poser $v_{1f} = v_{2f} = v_f$

d) Si collision inélastique : utiliser l'information supplémentaire

Étape 4 — RÉSOUDRE et VÉRIFIER

a) Résoudre algébriquement, puis substituer les valeurs

b) Vérifier les signes : la direction est-elle physiquement cohérente?

c) Calculer K_i et K_f : vérifier que $K_f \leq K_i$ (et $K_f = K_i$ si élastique)

Erreurs fréquentes dans les problèmes de collision

- **Oublier les signes des vitesses :** si les objets se déplacent en sens opposés, leurs vitesses ont des signes **contraires**
- **Confondre masse en tonnes et en kg :** toujours convertir en kg avant de calculer
- **Supposer que K est conservée :** la conservation de K n'est valide que pour les collisions **élastiques**
- **Appliquer la conservation de $\vec{p}$ composante par composante** en 2D, pas sur les modules

3.10 Résumé du chapitre

3.10.1 Tableau récapitulatif des formules

Concept	**Formule**	**Unité SI**
Travail d'une force constante	$W = Fd\cos\theta$	Joule (J)
Travail de la gravité	$W_g = -mg\Delta y$	Joule (J)
Travail d'un ressort	$W_R = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$	Joule (J)
Énergie cinétique	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Joule (J)
Énergie potentielle gravitationnelle	$U_g = mgy$	Joule (J)
Énergie potentielle élastique	$U_e = \frac{1}{2}kx^2$	Joule (J)
Théorème de l'énergie cinétique	$W_{\text{total}} = \Delta K$	–
Énergie mécanique	$E = K + U$	Joule (J)
Conservation (sans frottement)	$K_i + U_i = K_f + U_f$	–
Avec forces non-conservatives	$K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f$	–
Puissance moyenne	$P = W/\Delta t$	Watt (W)
Puissance instantanée	$P = Fv$	Watt (W)
Quantité de mouvement et collisions		
Quantité de mouvement	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Impulsion	$\vec{J} = \vec{F}_{moy} \cdot \Delta t$	$\text{N} \cdot \text{s}$
Théorème de l'impulsion	$\vec{J} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$	–
Conservation de $\vec{p}$	$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$	–
Collision parf. inélastique	$v_f = \dfrac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}$	–
Collision élastique (vit. rel.)	$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$	–
Coefficient de restitution	$e = \dfrac{\lvert v_{2f} - v_{1f}\rvert}{\lvert v_{1i} - v_{2i}\rvert}$	–

3.10.2 L'algorithme de résolution

ÉTAPE 1 — SCHÉMA et ÉTATS
- Dessiner la situation physique
- Identifier l'état **initial** (i) et l'état **final** (f)
- Choisir le niveau de référence ($y = 0$)
- Inscrire les grandeurs connues et inconnues (v, y, x)

ÉTAPE 2 — BILAN ÉNERGÉTIQUE
- Lister les énergies présentes : K, U_g, U_e à chaque état
- Identifier les forces non-conservatives : W_{nc}?
- Pas de W_{nc}? → Conservation : $E_i = E_f$
- $W_{nc} \neq 0$? → Bilan : $E_i + W_{nc} = E_f$

ÉTAPE 3 — ÉQUATION D'ÉNERGIE
- Écrire : $K_i + U_{gi} + U_{ei} + W_{nc} = K_f + U_{gf} + U_{ef}$
- Éliminer les termes nuls
- Remplacer par les expressions : $\frac{1}{2}mv^2$, mgy, $\frac{1}{2}kx^2$, $fd\cos\theta$

ÉTAPE 4 — ALGÈBRE
- Isoler l'inconnue **algébriquement** (avec symboles)
- Substituer les valeurs numériques à la fin
- Vérifier : unités? ordre de grandeur? signes?

3.10.3 Erreurs fréquentes

Pièges à éviter

1. **Oublier de définir le niveau de référence ($y = 0$)**

   L'énergie potentielle gravitationnelle dépend du choix de $y = 0$. Ce choix est libre, mais il **doit** être explicite. Un bon choix simplifie les calculs (souvent : $y = 0$ au point le plus bas).

2. **Confondre le travail de la gravité et l'énergie potentielle**

   $W_g = -\Delta U_g$. Le travail de la gravité et la variation d'énergie potentielle sont liés mais de **signes opposés**. Si un objet descend : $W_g > 0$ mais $\Delta U_g < 0$.

3. **Oublier le travail des forces non-conservatives**

   Le frottement est presque toujours présent dans la réalité. Son travail est **toujours négatif** ($W_f = -f_c \cdot d$, car $\theta = 180$).

4. **Utiliser $E_i = E_f$ quand il y a du frottement**

   La conservation **simple** ne s'applique que sans forces non-conservatives. Avec frottement, il faut utiliser le bilan complet : $E_i + W_{nc} = E_f$.

5. **Confondre puissance et énergie**

   L'énergie est une **quantité** (en joules); la puissance est un **taux** (en watts = joules/seconde). Un moteur peut fournir beaucoup d'énergie s'il travaille longtemps, même avec une faible puissance.

6. **Oublier de convertir les unités**

   Les nœuds en m/s, les tonnes en kg, les chevaux-vapeur en watts, les kWh en joules — **avant** de substituer dans les équations.

7. **Oublier les signes des vitesses dans les collisions**

   Si deux objets se déplacent en sens opposés, leurs vitesses ont des signes **contraires**. Une erreur de signe change complètement le résultat.

8. **Supposer que K est conservée dans toute collision**

   L'énergie cinétique n'est conservée que dans les collisions **élastiques**. En revanche, la quantité de mouvement est **toujours** conservée dans un système isolé.

9. **Appliquer la conservation de $\vec{p}$ sur les modules en 2D**

   On ne peut **pas** écrire $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f$ avec les modules. Il faut conserver p_x et p_y **séparément**.

3.10.4 Auto-évaluation des compétences

Cochez les compétences que vous maîtrisez :

Compétence	**Acquis**	**En cours**	**À revoir**
Travail			
Calculer le travail d'une force constante ($W = Fd\cos\theta$).	☐	☐	☐
Interpréter le signe du travail (positif, négatif, nul).	☐	☐	☐
Déterminer le travail effectué par la gravité ($W_g = -mg\Delta y$).	☐	☐	☐
Déterminer le travail effectué par un ressort.	☐	☐	☐
Calculer le travail total effectué par plusieurs forces.	☐	☐	☐
Énergie cinétique			
Calculer l'énergie cinétique d'un objet.	☐	☐	☐
Appliquer le théorème de l'énergie cinétique ($W_{\text{total}} = \Delta K$).	☐	☐	☐
Déterminer une vitesse ou une distance à l'aide du théorème.	☐	☐	☐
Énergie potentielle			
Choisir un niveau de référence approprié ($y = 0$).	☐	☐	☐
Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle ($U_g = mgy$).	☐	☐	☐
Calculer l'énergie potentielle élastique ($U_e = \frac{1}{2}kx^2$).	☐	☐	☐
Expliquer le lien entre travail d'une force conservative et ΔU.	☐	☐	☐
Conservation de l'énergie			
Distinguer une force conservative d'une force non-conservative.	☐	☐	☐
Appliquer la conservation de l'énergie mécanique ($E_i = E_f$).	☐	☐	☐
Résoudre un problème avec forces non-conservatives ($E_i + W_{nc} = E_f$).	☐	☐	☐
Appliquer l'algorithme de résolution en 4 étapes (méthode énergétique).	☐	☐	☐
Puissance			
Calculer la puissance moyenne ($P = W/\Delta t$).	☐	☐	☐
Calculer la puissance instantanée ($P = Fv$).	☐	☐	☐
Convertir entre watts, kilowatts, chevaux-vapeur et kWh.	☐	☐	☐
Applications			
Résoudre un problème complet combinant travail, conservation et puissance.	☐	☐	☐
Appliquer les concepts d'énergie dans un contexte maritime.	☐	☐	☐
Quantité de mouvement et impulsion			
Calculer la quantité de mouvement d'un objet ($\vec{p} = m\vec{v}$).	☐	☐	☐

3.10.5 Ce qu'il faut retenir

L'essentiel du chapitre en quelques phrases

1. **Le travail est un transfert d'énergie** : une force qui agit sur un objet en mouvement lui transfère (ou lui retire) de l'énergie.
2. **L'énergie mécanique a deux formes** : l'énergie cinétique (mouvement) et l'énergie potentielle (position). Leur somme est l'énergie mécanique.
3. **Les forces conservatives stockent l'énergie de façon réversible** : la gravité et le ressort permettent des échanges $K \leftrightarrow U$ sans perte.
4. **Les forces non-conservatives dissipent l'énergie** : le frottement transforme l'énergie mécanique en chaleur — cette énergie est perdue pour le système.
5. **L'algorithme en 4 étapes fonctionne toujours** : Schéma/États → Bilan énergétique → Équation d'énergie → Algèbre.
6. **La méthode énergétique est souvent plus simple que Newton** : pas de décomposition vectorielle, pas besoin de connaître la trajectoire en détail.
7. **La puissance mesure le rythme** : ce n'est pas la quantité d'énergie qui compte, mais la vitesse à laquelle elle est transférée.
8. **Convertissez toujours en SI** : nœuds → m/s, tonnes → kg, chevaux-vapeur → watts, kWh → joules.
9. **La quantité de mouvement est toujours conservée** dans un système isolé : c'est une conséquence directe de la 3^{e} loi de Newton.
10. **L'impulsion relie force et temps** : pour une même Δp, augmenter le temps de contact réduit la force (principe des systèmes d'amortissement).
11. **L'énergie cinétique n'est conservée que dans les collisions élastiques** : dans la réalité, une partie de l'énergie est toujours transformée en déformation et chaleur.
12. **En 2D, conservez $\vec{p}$ composante par composante** : p_x et p_y se conservent indépendamment.