6.3 定点运算

- 一、移位运算
- 二、加减法运算
- 三、乘法运算
- 四、除法运算

6.3 定点运算

- 三、乘法运算
  - 1. 分析笔算乘法
  - 2. 笔算乘法的改进
  - 3. 改进后的乘法笔算过程
  - 4. 原码一位乘
  - 5. 补码一位乘

5. 补码乘法

(1) 补码一位乘运算规则

以小数为例　设 被乘数 $[x]_补 = x_0.x_1x_2 \cdots x_n$

乘数 $[y]_补 = y_0.y_1y_2 \cdots y_n$

① 被乘数任意，乘数为正

与原码乘相似 但 加 和 移位 按 补码规则 运算

乘积的符号自然形成

② 被乘数任意，乘数为负

乘数$[y]_补$，去掉符号位，操作同 ①

最后 加$[-x]_补$，校正

③ Booth 算法（被乘数、乘数符号任意）6.3

设$[x]_补 = x_0.x_1x_2 \cdots x_n$　　$[y]_补 = y_0.y_1y_2 \cdots y_n$

$[x \cdot y]_补$

$-[x]_补 = +[-x]_补$

$= [x]_补(0.y_1 \cdots y_n) - [x]_补 \cdot y_0$

$= [x]_补(y_1 2^{-1}+y_2 2^{-2}+ \cdots +y_n 2^{-n}) - [x]_补 \cdot y_0$　　$2^{-1} = 2^0 - 2^{-1}$

$= [x]_补(-y_0+y_1 2^{-1}+y_2 2^{-2}+ \cdots +y_n 2^{-n})$　　$2^{-2} = 2^{-1} - 2^{-2}$

$= [x]_补[-y_0+(y_1-y_1 2^{-1})+(y_2 2^{-1}-y_2 2^{-2})+ \cdots +(y_n 2^{-(n-1)}-y_n 2^{-n})]$

$= [x]_补[(y_1-y_0)+(y_2-y_1)2^{-1}+ \cdots +(y_n-y_{n-1})2^{-(n-1)}+(0-y_n)2^{-n})]$

$= [x]_补[(y_1-y_0)+(y_2-y_1)2^{-1}+ \cdots +(y_{n+1}-y_n)2^{-n}]$　　附加位 y_{n+1}

$y'_1 2^{-1} + \cdots + y'_n 2^{-n}$

$= y'_0[x]_补+2^{-1}(y'_1[x]_补+2^{-1}(y'_2[x]_补+ \cdots 2^{-1}(y'_n[x]_补 + 0)\cdots))$

④ Booth 算法递推公式 6.3

$[z_0]_{补} = 0$

$[z_1]_{补} = 2^{-1}\{(y_{n+1} - y_n)[x]_{补} + [z_0]_{补}\}$ $\quad y_{n+1} = 0$

$\vdots$

$[z_n]_{补} = 2^{-1}\{(y_2 - y_1)[x]_{补} + [z_{n-1}]_{补}\}$

$[x \cdot y]_{补} = (y_1 - y_0)[x]_{补} + [z_n]_{补}$ 最后一步不移位

如何实现

$+(y_{i+1} - y_i)[x]_{补}$?

y_i y_{i+1}	$y_{i+1} - y_i$	操作
0 0	0	$\rightarrow 1$
0 1	1	$+[x]_{补} \rightarrow 1$
1 0	-1	$+[-x]_{补} \rightarrow 1$
1 1	0	$\rightarrow 1$

例6.23 已知 $x = +0.0011$ $y = -0.1011$ 求$[x\cdot y]_{补}$ 6.3

解：

	部分积	乘数	附加位	
	00.0000	1.0101	0	
	+ 11.1101			$+[-x]_{补}$
	11.1101			
补码右移	11.1110	1 1010	1	→1
	+ 00.0011			$+[x]_{补}$
	00.0001	1		
补码右移	00.0000	11 101	0	→1
	+ 11.1101			$+[-x]_{补}$
	11.1101	11		
补码右移	11.1110	111 10	1	→1
	+ 00.0011			$+[x]_{补}$
	00.0001	111		
补码右移	00.0000	1111 1	0	→1
	+ 11.1101			$+[-x]_{补}$
	11.1101	1111		最后一步不移位

$[x]_{补} = 0.0011$

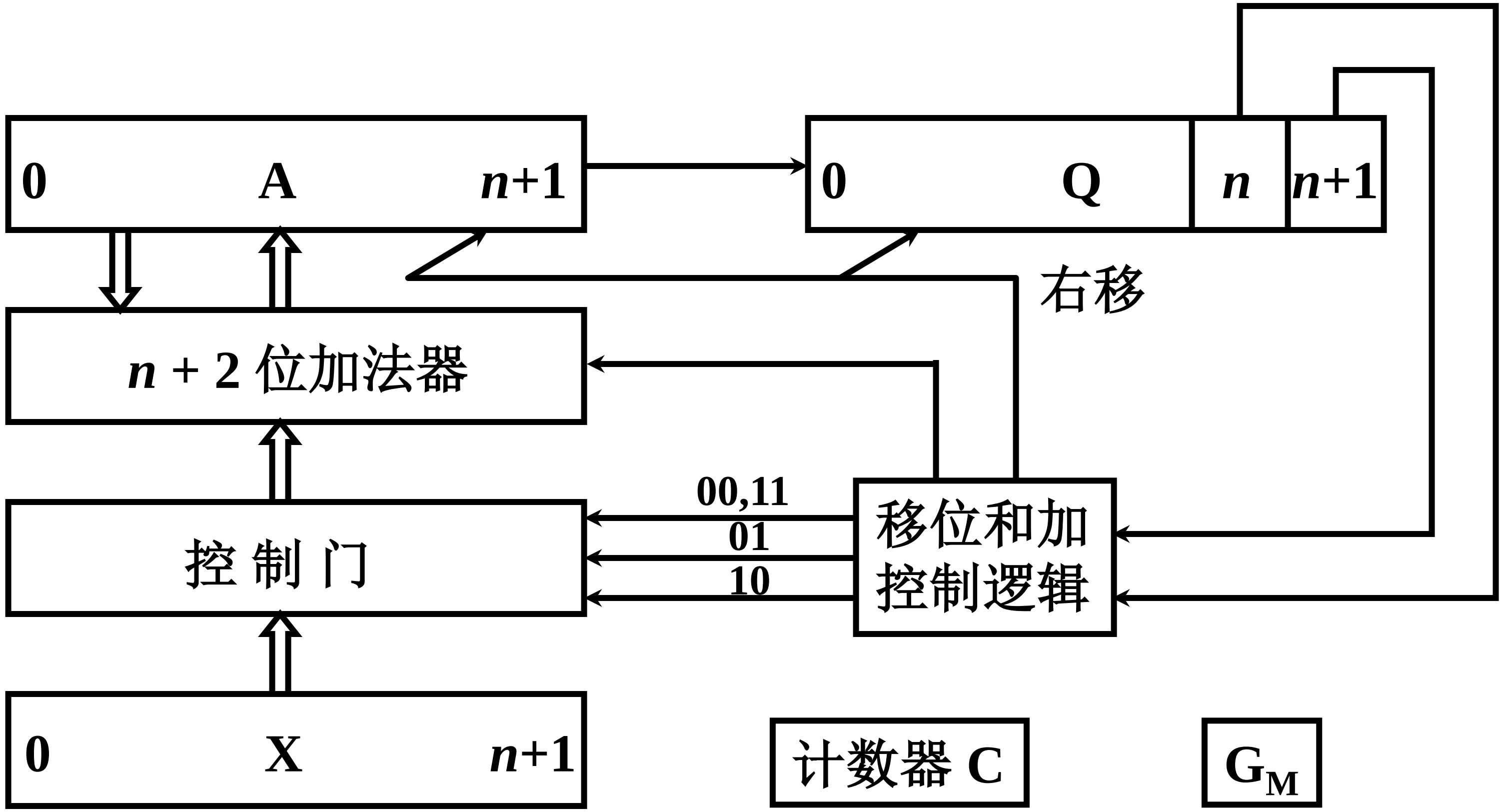
$[y]_{补} = 1.0101$

$[-x]_{补} = 1.1101$

$\therefore [x\cdot y]_{补}$

$= 1.11011111$

(2) Booth 算法的硬件配置 6.3



A、X、Q 均 $n + 2$ 位

移位和加法操作受乘数末两位控制

乘法小结

6.3

- 整数乘法与小数乘法过程完全相同
  可用 逗号 代替小数点
- 原码乘　符号位 单独处理
  补码乘　符号位 自然形成
- 原码乘去掉符号位运算　即为无符号数乘法
- 不同的乘法运算需有不同的硬件支持

6.3 定点运算

- 一、移位运算
- 二、加减法运算
- 三、乘法运算
- 四、除法运算

6.3 定点运算

- 四、除法运算
  - 1. 笔算除法是怎么做的
  - 2. 如何用计算机硬件来模拟笔算除法的过程
    - 恢复余数法
    - 加减交替法

四、除法运算

6.3

1. 分析笔算除法

$x = -0.1011 \quad y = 0.1101 \quad$ 求 $x \div y$

$$
\begin{array}{r l}
 & 0.1101 \\
\cline{2-2}
0.1101 \,\big) & 0.10110 \\
 & \underline{0.01101} \\
 & 0.010010 \\
 & \underline{0.001101} \\
 & 0.00010100 \\
 & \underline{0.00001101} \\
 & 0.00000111
\end{array}
$$

✓商符单独处理

? 心算上商

? 余数不动低位补“0”
减右移一位的除数

? 上商位置不固定

$x \div y = -0.1101$ 商符心算求得

余数 0.00000111

2. 笔算除法和机器除法的比较 6.3

笔算除法	机器除法
商符单独处理	符号位异或形成
心算上商	$\lvert x \rvert - \lvert y \rvert > 0$ 上商 1
	$\lvert x \rvert - \lvert y \rvert < 0$ 上商 0
余数 不动 低位补 “0” 减右移一位 的除数	余数 左移一位 低位补 “0” 减 除数
2 倍字长加法器	1 倍字长加法器
上商位置 不固定	在寄存器 最末位上商

3. 原码除法

6.3

以小数为例

$$[x]_{原} = x_0.x_1x_2 \dots x_n$$

$$[y]_{原} = y_0.y_1y_2 \dots y_n$$

$$\left[\frac{x}{y}\right]_{原} = (x_0 \oplus y_0).\frac{x^*}{y^*}$$

式中 $x^* = 0.x_1x_2 \cdots x_n$ 为 x 的绝对值

$y^* = 0.y_1y_2 \cdots y_n$ 为 y 的绝对值

商的符号位单独处理 $x_0 \oplus y_0$

数值部分为绝对值相除 $\frac{x^*}{y^*}$

约定

小数定点除法 $x^* < y^*$ 整数定点除法 $x^* > y^*$

被除数不等于 0

除数不能为 0

(1) 恢复余数法

6.3

例6.24 $x = -0.1011$ $y = -0.1101$ 求 $[\frac{x}{y}]_{原}$

解：$[x]_{原} = 1.1011$ $[y]_{原} = 1.1101$ $[y^*]_{补} = 0.1101$ $[-y^*]_{补} = 1.0011$

① $x_0 \oplus y_0 = 1 \oplus 1 = 0$

②

被除数（余数）	商	说　明
$\boxed{0.1011}$	0.0000	
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$
1.1110	0	余数为负，上商 0
+ 0.1101		恢复余数 $+[y^*]_{补}$
$\boxed{0.1011}$	0	恢复后的余数
1.0110	0	←1
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$
0.1001	01	余数为正，上商 1
1.0010	01	←1
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$

逻辑左移

逻辑左移

被除数（余数）	商	说　明
0 . 0 1 0 1	0 1 1	余数为正，上商 1
0 . 1 0 1 0	0 1 1	← 1
+ 1 . 0 0 1 1		$+[-y^*]_{补}$
1 . 1 1 0 1	0 1 1 0	余数为负，上商 0
+ 0 . 1 1 0 1		恢复余数 $+[y^*]_{补}$
0 . 1 0 1 0	0 1 1 0	恢复后的余数
1 . 0 1 0 0	0 1 1 0	← 1
+ 1 . 0 0 1 1		$+[-y^*]_{补}$
0 . 0 1 1 1	0 1 1 0 1	余数为正，上商 1

逻辑左移

逻辑左移

$$\frac{x^*}{y^*} = 0.1101$$

$$\therefore \left[\frac{x}{y}\right]_{原} = 0.1101$$

上商 5 次

第一次上商判溢出

移 4 次

余数为正　上商 1

余数为负　上商 0，恢复余数

(2) 不恢复余数法（加减交替法） 6.3

- 恢复余数法运算规则

余数 $R_i > 0$ 上商 “1”， $2R_i - y^*$

余数 $R_i < 0$ 上商 “0”， $R_i + y^*$ 恢复余数

$$2(R_i + y^*) - y^* = 2R_i + y^*$$

- 不恢复余数法运算规则

上商 “1” $2R_i - y^*$

上商 “0” $2R_i + y^*$

加减交替

例6.25 $x = -0.1011$ $y = -0.1101$ 求 $[\frac{x}{y}]_{原}$ 6.3

解：

被除数/余数	商	说明
0 . 1 0 1 1	0 . 0 0 0 0	
+1 . 0 0 1 1		$+[-y^*]_{补}$
1 . 1 1 1 0	0	余数为负，上商 0
1 . 1 1 0 0	0	$\leftarrow 1$
+0 . 1 1 0 1		$+[y^*]_{补}$
0 . 1 0 0 1	0 1	余数为正，上商 1
1 . 0 0 1 0	0 1	$\leftarrow 1$
+1 . 0 0 1 1		$+[-y^*]_{补}$
0 . 0 1 0 1	0 1 1	余数为正，上商 1
0 . 1 0 1 0	0 1 1	$\leftarrow 1$
+1 . 0 0 1 1		$+[-y^*]_{补}$
1 . 1 1 0 1	0 1 1 0	余数为负，上商 0
1 . 1 0 1 0	0 1 1 0	$\leftarrow 1$
+0 . 1 1 0 1		$+[y^*]_{补}$
0 . 0 1 1 1	0 1 1 0 1	余数为正，上商 1

逻辑左移

逻辑左移

逻辑左移

逻辑左移

$[x]_{原} = 1.1011$

$[y]_{原} = 1.1101$

$[x^*]_{补} = 0.1011$

$[y^*]_{补} = 0.1101$

$[-y^*]_{补} = 1.0011$

例6.25 结果

① $x_0 \oplus y_0 = 1 \oplus 1 = 0$

② $\dfrac{x^*}{y^*} = 0.1101$

$\therefore \ [\dfrac{x}{y}]_{原} = 0.1101$

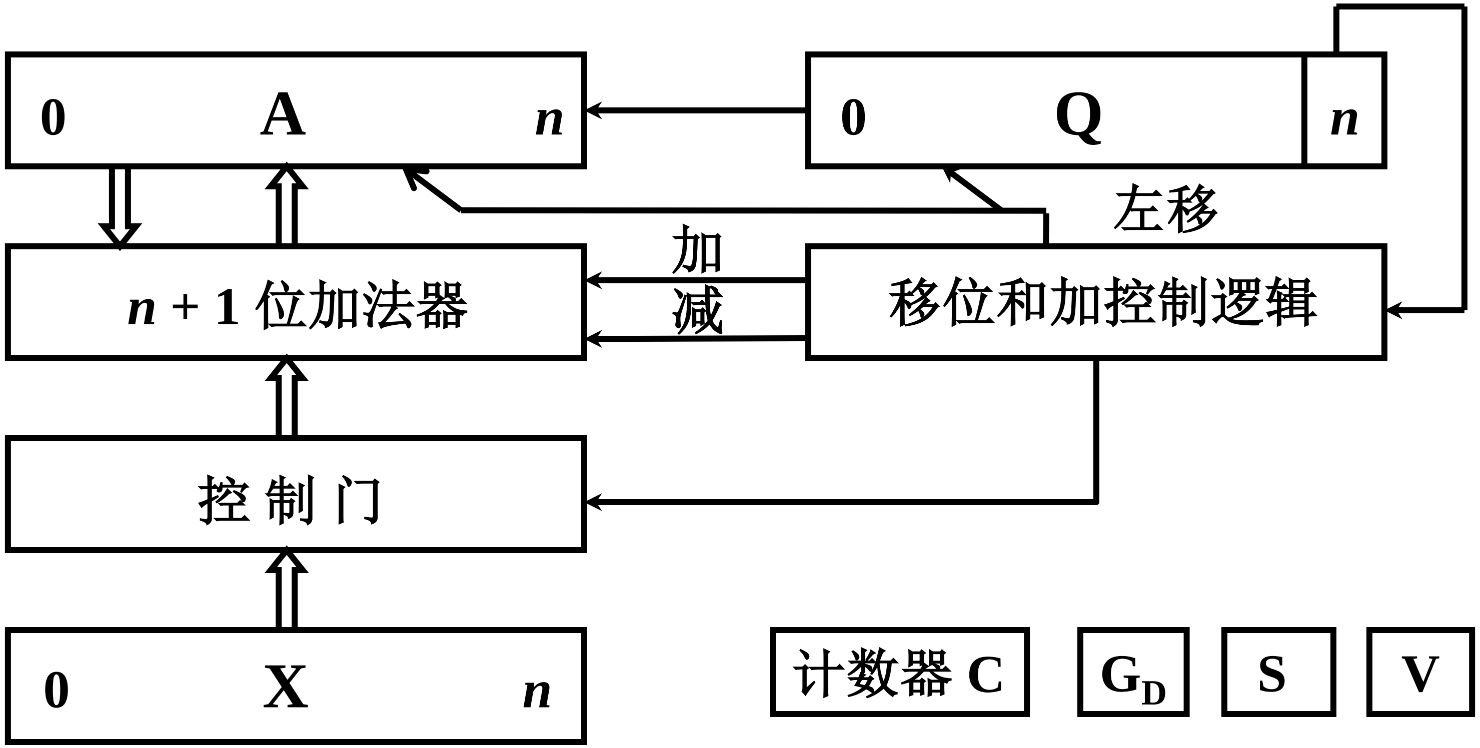
特点 上商 n+1 次

第一次上商判溢出

移 n 次，加 n+1 次

用移位的次数判断除法是否结束

(3) 原码加减交替除法硬件配置



A、X、Q 均 n+1 位

用 Q_n 控制加减交替