

## **Matemática Discreta**

Curso: Jogos Digitais / Segurança da Informação

### **Conceito de Função**

#### **1. DEFINIÇÃO E CONCEITO (FUNÇÕES COMO RELAÇÕES)**

O conceito de função é um dos mais importantes na Matemática e em suas aplicações e, devido a isso, são apresentadas várias definições diferentes nos livros didáticos. É natural que todas as definições, mesmo que variem na forma, têm o mesmo significado e assim escolhemos a definição que mais se encaixa com os conteúdos vistos anteriormente, ou seja, a definição de Função como uma Relação, apresentada a seguir:

***Uma função  $f$  é uma Relação de  $A$  em  $B$  tal que:***

***(a)  $D(f) = A$***

***(b) Para todo  $x$  em  $A$ , existe um único  $y$  em  $B$ .***

Isto significa que, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  quaisquer, uma função é definida como uma relação entre esses conjuntos, portanto como um conjunto de pares ordenados com os primeiros elementos em  $A$  e os segundos elementos em  $B$ . As restrições que fazem com que uma relação seja definida como função estabelecem que: (a) absolutamente todos os elementos de  $A$  pertençam a pelo menos um dos pares ordenados de  $f$  e que (b) cada um desses primeiros elementos se relacionem com no máximo um elemento de  $B$ .

Assim sendo, uma função de  $A$  em  $B$  é um conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  com  $x$  em  $A$  e  $y$  em  $B$  tal que cada um de TODOS os elementos de  $A$  se relacionem a um ÚNICO elemento de  $B$ .

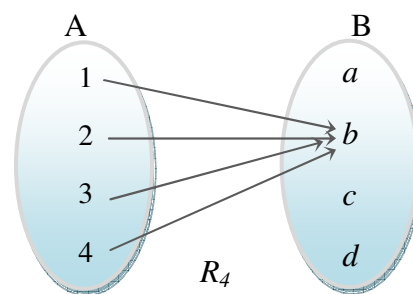
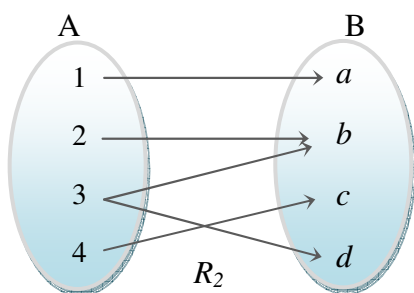
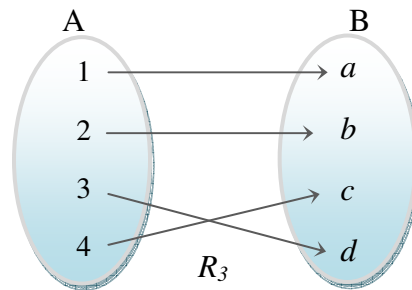
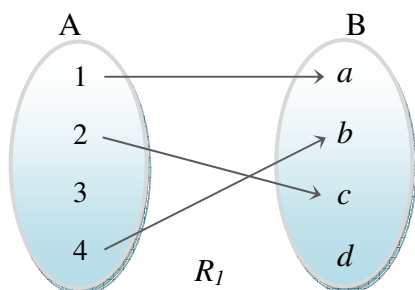
Denota-se uma função de  $A$  em  $B$  com uma das seguintes notações:

$$\begin{array}{ccc} f : A \rightarrow B & & \\ x \mapsto f(x) & \text{ou} & y = f(x) \end{array}$$

A primeira notação é mais completa e caracteriza “ $f$ ” como o “nome” da função, citando explicitamente o conjunto de partida, ou Domínio, “ $A$ ” e o conjunto de chegada, ou Contradomínio, “ $B$ ”. Já a segunda notação é mais usada para funções reais, onde os conjuntos ficam subentendidos e a “lei” que define a função é uma equação algébrica com duas variáveis que calcula o valor de cada elemento “ $y$ ” da imagem da função a partir do valor de cada elemento “ $x$ ” de seu domínio.

**Exemplo 1:** Sejam os conjuntos A e B abaixo e as **relações de A em B** definidas nos diagramas de Venn que seguem. Quais dentre estas relações podem ser consideradas **funções de A em B** e quais não podem (justifique)?

*Desenvolver resolução*



**Exemplo 2:** Considere o conjunto A como o conjunto de todas as cidades do mundo e o conjunto B como todos os países. Pode-se definir uma função de A em B que associa cada cidade do mundo ao país a qual pertence, pois (i) toda cidade pertence a algum país, portanto  $D(f) = A$  e (ii) cada cidade do mundo está associada a somente um país.

Assim, temos que: a imagem de São Paulo é o Brasil, ou seja,  $f(\text{São Paulo}) = \text{Brasil}$ ;  
a imagem de Paris é a França, ou seja,  $f(\text{Paris}) = \text{França}$ ;  
a imagem de Tóquio é o Japão, ou seja,  $f(\text{Tóquio}) = \text{Japão}$ ;

Por sua vez, não seria possível definir uma função de B em A com os conjuntos acima pois, mesmo que o domínio seja igual a B (já que todo país possui alguma cidade), não poderíamos associar cada país em B a uma ÚNICA cidade em A como feito anteriormente.

## 1.1 Função Real

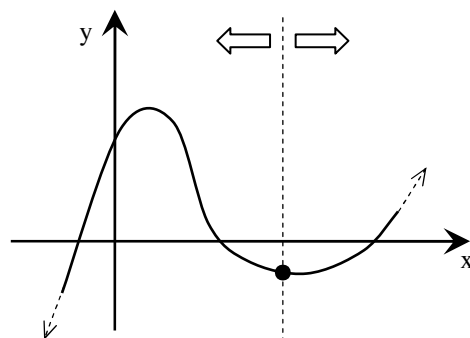
Chama-se “**Função Real**” ou “*Função Real de uma variável Real*” uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $A$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  para o qual  $f$  é definida ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ).

Dessa forma, uma função real é um conjunto de pares ordenados de números reais, ou seja, uma lei que “leva” número real em número real. Assim, como temos infinitos números em  $\mathbb{R}$ , uma função real é usualmente definida como uma equação algébrica com duas variáveis na forma  $y = f(x)$  onde o valor de cada “ $y$ ” da Imagem é calculado em função do valor de cada “ $x$ ” do Domínio.

**Gráfico no Plano Cartesiano:** vimos que uma função é um conjunto de pares ordenados e, no caso de uma função real, teremos quase que obrigatoriamente uma quantidade infinita desses pares no conjunto. Portanto, a melhor forma de visualizarmos uma função real é através de seu gráfico.

Além disso, devemos lembrar que temos de lidar com três conjuntos ao construir o gráfico de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : o conjunto de partida  $\mathbb{R}$ , cujos elementos são representados por pontos na Reta Real “ $x$ ” ou **eixo das abscissas**; o conjunto de chegada  $\mathbb{R}$ , cujos elementos são representados por pontos na Reta Real “ $y$ ” ou **eixo das ordenadas** e o conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , cujos elementos são pares ordenados de números reais, representados por pontos no **Plano Cartesiano** propriamente dito. Isto significa que, ao olharmos para o gráfico de uma função real não devemos apenas enxergar uma bela linha desenhada no papel, mas como um conjunto de infinitos pontos onde cada um representa um par de valores numéricos que torna uma equação algébrica  $y = f(x)$  VERDADEIRA.

Assim sendo, as restrições existentes na definição de função se refletem no gráfico de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fazendo com que este seja sempre uma “CURVA”, ou seja, uma linha contínua e de comprimento infinito na qual, ao se imaginar uma reta paralela ao eixo  $y$  se deslocando continuamente pelo eixo  $x$ , esta irá sempre encontrar o gráfico de  $f$  em **exatamente** um ponto.



**Restrições do Domínio:** define-se uma função real  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  com  $A \subseteq \mathbb{R}$  (e não igual a  $\mathbb{R}$ ) devido ao fato de que algumas leis algébricas que podem ser definidas como funções não se encaixam corretamente na definição por não terem correspondente para TODOS os números reais. Assim, para que seja possível defini-las como funções, modificamos o conjunto de partida que a define retirando deste o número ou os números que não tenham correspondente real.

Na grande maioria dos casos, essas restrições feitas ao conjunto  $A$  se referem a: (a) divisões por zero e a (b) raízes com índice par de números negativos (que existem somente no conjunto dos números complexos).

**Exemplo 3:** Determinar o domínio das funções reais abaixo:

a)  $f(x) = \sqrt{2x-5}$

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[4]{4-x}}$

*Desenvolver resolução*

**Exemplo 4:** Considere a “equação”  $y = \frac{1}{x}$ . Pode-se considerar essa “equação” como uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ? Qual será gráfico dessa função?

*Desenvolver resolução*

## **2. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES**

Sejam as funções  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ , ou seja, duas funções tais que o contradomínio da primeira seja igual ao domínio da segunda. Nessas condições, pode-se definir uma nova função de A em C denominada **composta de f e g** e denotada por  $g \circ f$ , como segue:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Isto é, para cada elemento x em A é calculada a imagem de x por f e depois calculada a imagem de f(x) por g. Assim sendo, visto que toda função é uma relação, a composição de funções se comporta exatamente da mesma maneira que a composição de relações já vista anteriormente, com exceção à notação usada que aqui “inverte” a posição dos nomes das funções, ou seja, a composta de f e g (nessa ordem) é denotada por  $g \circ f$  (e não por  $f \circ g$  como nas relações).

**Exemplo 5:** Sejam as funções reais  $f(x) = 2x - 3$  e  $g(x) = x^2 + 3x$ . Determinar as leis que definem  $g \circ f$ ;  $f \circ g$  e  $f \circ f$ .

*Desenvolver resolução*

## **3. INJETIVIDADE, SOBREJETIVIDADE E FUNÇÕES INVERSÍVEIS**

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita **Injetora** se elementos diferentes do Domínio A têm imagens distintas. Uma abordagem mais algébrica considera que f é injetora quando  $f(a) = f(a')$  implica  $a = a'$ .

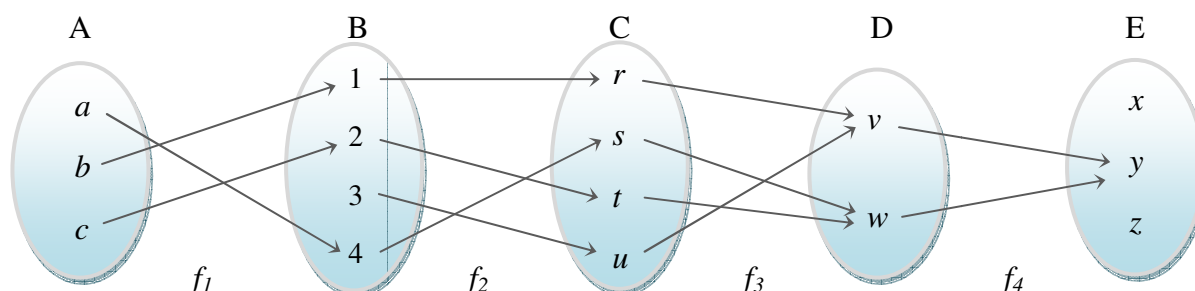
Em termos mais simples, uma função se diz injetora quando cada “y” da imagem (todos eles) está relacionado a um único elemento “x” do Domínio, ou seja, estamos aplicando a restrição (b) da definição de função aos elementos de sua Imagem.

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita **Sobrejetora** se a Imagem de f é todo o contradomínio. Algebricamente, f é sobrejetora quando  $Im(f) = B$ .

Dessa forma, uma função se diz sobrejetora quando se aplica a restrição (a) da definição de função aos elementos de sua Imagem.

Se uma função é simultaneamente injetora e sobrejetora é comum chamá-la de função **Bijetora**.

**Exemplo 6:** Considere as funções  $f_1: A \rightarrow B$ ,  $f_2: B \rightarrow C$ ,  $f_3: C \rightarrow D$  e  $f_4: D \rightarrow E$ , definidas pelo diagrama de Venn abaixo:



Quais delas são injetoras? Quais são sobrejetoras? Quais são bijetoras?

*Desenvolver resolução*

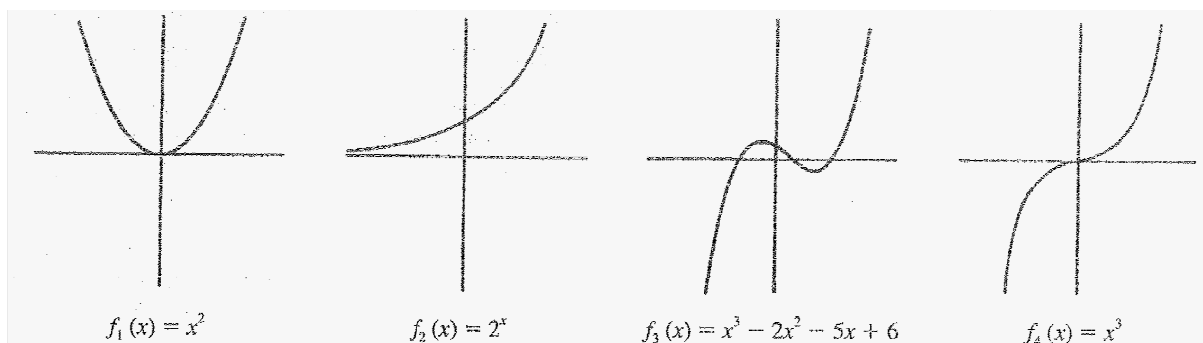
**Caracterização Geométrica:** como as funções reais podem ser caracterizadas por seus gráficos, é possível identificar os comportamentos das funções injetoras e sobrejetoras através de seus significados geométricos. Para isso, ao visualizarmos o gráfico de uma função no plano cartesiano, devemos imaginar uma reta horizontal, ou seja, paralela ao “eixo x”, e visualizá-la se deslocando infinitamente para cima e para baixo em toda a extensão do “eixo y”.

Se a função for **injetora**, isto significa que esta reta irá interceptar o gráfico de “f” em NO MÁXIMO um ponto em toda a extensão do eixo y, ou seja, a reta deverá sempre cortar o gráfico de “f” em apenas um ou até em nenhum ponto de cada vez.

Se a função for **sobrejetora**, isto significa que a reta irá interceptar o gráfico de “f” em PELO MENOS um ponto em toda a extensão do eixo y, ou seja, a reta deverá sempre cortar o gráfico de “f” em um ou mais de um ponto de cada vez.

Assim sendo, se a função for **bijetora**, a reta irá interceptar o gráfico de “f” em EXATAMENTE um ponto em toda a extensão do eixo y.

**Exemplo 7:** Dados os gráficos das funções reais abaixo, determinar quais são injetoras, sobrejetoras e bijetoras (justifique).



### 3.1 Funções Inversíveis

Define-se um função  $f: A \rightarrow B$  como **Inversível** se a relação inversa de " $f$ " for, de fato, uma função de  $B$  em  $A$ , ou seja quando a inversa de  $f$ , ou  $f^{-1}$ , é uma **FUNÇÃO** e não apenas uma relação de  $B$  em  $A$ . É uma aplicação imediata dos conceitos de injetividade e sobrejetividade aparece justamente se deseja determinar se uma dada função é ou não Inversível.

Devemos lembrar que toda função é uma relação e, portanto, toda função possui inversa (que é obtida simplesmente invertendo-se a ordem de todos os seus pares ordenados). Porém, o que está em jogo aqui é como garantir que a relação inversa  $f^{-1}$  seja de fato uma função e, para isso, vale o teorema abaixo:

**"Uma função  $f: A \rightarrow B$  é inversível se e somente se " $f$ " é injetora e sobrejetora."**

Este teorema é facilmente justificado ao lembrarmos que as definições de função injetora e sobrejetora essencialmente verificam se as mesmas condições que definem uma relação como função são válidas para a sua Imagem. Assim, caso isto ocorra, ao determinarmos a inversa de uma função bijetora (que transforma Domínio em Imagem e vice-versa) teremos garantidas as condições que a definem como função.

**Exemplo 8:** Dada a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , pede-se: (a) Construir o gráfico de  $f$  no Plano Cartesiano. (b) Verificar se a função é bijetora e determinar a lei que define sua inversa ( $f^{-1}$ ). (c) Traçar o gráfico de  $f^{-1}$ .

*Desenvolver resolução*

**Estudo de Caso:** Pesquisar em livros didáticos de Ensino Médio ou na Internet as definições de **Função Exponencial** e **Função Logarítmica** particularmente no que se refere à definição de seus respectivos Domínios e Imagens. Estabelecer uma correspondência entre essas funções no campo das funções inversíveis e justificar tal correspondência com os conceitos de injetividade e sobrejetividade. Analisar o comportamento algébrico e no gráfico no Plano Cartesiano de ambas as funções.

### 4. FUNÇÕES ESPECIAIS

Este item apresenta algumas funções matemáticas que são frequentemente utilizadas na construção de algoritmos computacionais e serão apresentadas juntamente com suas notações convencionais na Ciência da Computação e na maioria das linguagens de programação.

### – Floor, Ceiling e Valor Inteiro

Seja  $x$  um número real qualquer. Definem-se as funções **floor de  $x$** , **ceiling de  $x$**  e **integer de  $x$**  como:

$\lfloor x \rfloor$  é definido como **floor de  $x$**  se denotar o maior número inteiro que não excede o valor de  $x$ , ou seja, é o **maior inteiro** que não é maior que  $x$ .

$\lceil x \rceil$  é definido como **ceiling de  $x$**  se denotar o menor número inteiro que não inferior ao valor de  $x$ , ou seja, é o **menor inteiro** que não é menor que  $x$ .

**INT( $x$ )** é definido como **integer de  $x$**  se denotar o **valor inteiro** que se obtém ao se desprezar a parte decimal do número, ou seja, é o número inteiro obtido “deletando-se” (ou truncando) a parte fracionária de  $x$ .

Exemplo 9: Calcular o valor das funções abaixo:

$\lfloor \pi \rfloor = 3$	$\lfloor -\pi \rfloor = -4$	$\lfloor -8,005 \rfloor = -9$	$\lceil 7 \rceil = 7$	$\lceil -6 \rceil = -6$
$\lceil \pi \rceil = 4$	$\lceil -\pi \rceil = -3$	$\lceil -8,005 \rceil = -8$	$\lfloor 7 \rfloor = 7$	$\lfloor -6 \rfloor = -6$
$\text{int}(\pi) = 3$	$\text{int}(-\pi) = -3$	$\text{int}(-8,005) = -8$	$\text{int}(7) = 7$	$\text{int}(-6) = -6$

Note que o valor de  $\text{int}(x) = \lfloor x \rfloor$  ou  $\text{int}(x) = \lceil x \rceil$  dependendo de  $x$  ser positivo ou negativo.

### – Valor Absoluto

O valor absoluto de um número real  $x$ , denotado como **ABS( $x$ )** ou  **$|x|$** , é definido como sendo o maior dos valores entre  $x$  e  $-x$ , ou seja,  $\text{ABS}(x) = x$ , se  $x \geq 0$  e  $\text{ABS}(x) = -x$ , se  $x < 0$ .

Exemplo 10: Calcular o valor das funções abaixo:

$\text{abs}(\pi) = \pi$	$\text{abs}(-\pi) = \pi$	$\text{abs}(-8,005) = 8,005$	$\text{abs}(7) = 7$	$\text{abs}(-6) = 6$
-------------------------	--------------------------	------------------------------	---------------------	----------------------

Note que, em geral, o “valor absoluto de  $x$ ” é geralmente chamado de “módulo de  $x$ ” em vários livros de Matemática, mas cabe aqui ressaltar que o termo “módulo” é usualmente utilizado na Ciência da Computação para denotar outra função matemática (que retorna o “resto” de uma divisão inteira).

### Exercícios Propostos

1. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Determine se cada uma das relações abaixo é uma função de  $A$  em  $A$ :

(a)  $f = \{ (2,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,4) \}$

(b)  $g = \{ (3,1), (4,2), (1,1) \}$

(c)  $h = \{ (2,1), (3,4), (1,4), (2,1), (4,4) \}$

2. Determinar o domínio das funções reais abaixo:

(a)  $f(x) = \sqrt{3x-7}$

(b)  $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{3-x}}$

(c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{2x^2-6}$

(d)  $f(x) = \frac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{2x-8}}$

(e)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x+8}}{\sqrt[4]{6-3x}}$

3. Construir o gráfico das funções reais abaixo no Plano Cartesiano.

(a)  $f(x) = 2x - 6$

(b)  $f(x) = -x + 3$

(c)  $f(x) = -2x + 2$

(d)  $f(x) = x^2 + x - 6$

(e)  $f(x) = -x^2 + 4$

(f)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

(g)  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

(h)  $f(x) = 2^x$

4. Dadas as funções  $f(x) = 2x - 3$ ;  $g(x) = x^2 + 3x - 2$  e  $h(x) = x^2 - 4$  determine as leis que definem as funções compostas abaixo:

(a)  $f \circ g(x)$

(b)  $g \circ f(x)$

(c)  $f \circ f(x)$

(d)  $f \circ h(x)$

(e)  $h \circ f(x)$

(f)  $g \circ h(x)$

5. Tomando como base as funções reais dadas no exercício 3, pede-se:

(a) determinar quais funções são injetoras, sobrejetoras e bijetoras;

(b) determinar a "lei" das funções que forem inversíveis;

(c) traçar o gráfico das funções inversíveis no mesmo plano utilizado no exercício 3.

6. Construir o gráfico das funções  $f(x) = \text{INT}(x)$  e  $f(x) = \text{ABS}(x)$ .