****

**FATEC-SCS**

**MATEMÁTICA DISCRETA CURSO: ADS / SEG**

**PROFESSOR: EDISON**

**TÓPICOS DE:**

**TEORIA DOS CONJUNTOS**

**LÓGICA PROPOSICIONAL**

**RELAÇÕES BINÁRIAS/ FUNÇÕES**

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES SIMPLES**

* **IGUALDADE**

A = A REFLEXIVA

Se A = B e B = A SIMÉTRICA

Se A = B e B = C então A = C TRANSITIVA

* **INCLUSÃO**

 e  REFLEXIVA

 e    SIMÉTRICA

 e    SIMÉTRICA

 e    TRANSITIVA

 e    TRANSITIVA

* **UNIÃO**

 COMUTATIVA

 ASSOCIATIVA

 IDEMPOTÊNCIA

 e  IDENTIDADE

Se  então 

Se  então 

* **INTERSECÇÃO**

 COMUTATIVA

 ASSOCIATIVA

 IDEMPOTÊNCIA

 e  IDENTIDADE

Se  então 

Se  então 

* **DIFERENÇA**

 

* **COMPLEMENTAR**

 se 



* **DISTRIBUTIVIDADE**





* **INVOLUÇÃO**



* **OUTRAS**

   

* **LEIS DE MORGAN**





* **DUALIDADE**

   

* **DEFINIÇÕES**

****

****

****

****

****

* **USO DE CONECTIVOS NA LÓGICA PROPOSICIONAL**

**A diz a B:**

**- Amanhã irei à Fatec e ao teatro**

**Possibilidades:**

A vai à Fatec e ao teatro

A vai à Fatec e não vai ao teatro

A não vai à Fatec mas vai ao teatro

A não vai à Fatec nem ao teatro

Em qual das possibilidades a afirmação de A foi plenamente cumprida?

**A diz a B:**

**- Amanhã irei à Fatec ou ao teatro**

**Possibilidades:**

A vai à Fatec e ao teatro

A vai à Fatec mas não vai ao teatro

A não vai à Fatec mas vai ao teatro

A não vai à Fatec nem ao teatro

Em qual possibilidade a afirmação de A foi descumprida?

**A diz a B:**

**Se fizer Sol amanhã, então passarei em sua casa’**

**Possibilidades:**

Fez Sol e A passou na casa de B

Fez Sol e A não passou na casa de B

Não fez Sol e A passou na casa de B

Não fez Sol e A não passou na casa de B.

**Em qual das possibilidades a afirmação de A foi descumprida?**

**A diz a B:**

**Irei à sua casa amanhã se e somente se fizer Sol**

**Possibilidades:**

Fez Sol e A passou na casa de B

Fez Sol e A não passou na casa de B

Não fez Sol e A passou na casa de B

Em quais possibilidades a afirmação de A foi cumprida?

* **TABELA VERDADE**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** |  |  |  |  |
| **v** | **v** | **v** | **v** | **v** | **v** |
| **v** | **f** | **f** | **v** | **f** | **f** |
| **f** | **v** | **f** | **v** | **v** | **f** |
| **f** | **f** | **f** | **f** | **v** | **v** |

**Um exemplo bem escolhido**

Há muita dificuldade por parte dos alunos em compreender frases do tipo:

**“se p então q”** e associá-las com as expressões **“ condição necessária**” e **“condição suficiente”.**

Veja o exemplo:

Se nasceu em Belo Horizonte (proposição p) , então é mineiro(proposição q).

Observe que nascer em Belo Horizonte (p) é condição suficiente para ser mineiro (q).

Nascer em Belo Horizonte (p) não é condição necessária para ser mineiro(q).

A recíproca da primeira frase acima é falsa: se q, então p.

Se é mineiro(q) então nasceu em Belo Horizonte(p). (falsa)

Um comentário:

Admitindo que a sentença “ se p, então q” é verdadeira, podemos afirmar que a sentença “p somente se q” é também verdadeira?

Voltando ao exemplo:

Nasceu em Belo Horizonte(p) somente se é mineiro(q) é verdadeira.

Em lógica, as frases “ **p é condição suficiente para q” e “q é condição necessária para p”, “p somente se q” são equivalentes a “se p, então q”.**

(adaptado de Um exemplo bem escolhido. Artigo publicado na Revista do professor de Matemática, RPM- 81, p. 11, 2º quadrimestre 2013, por Cícero Paz de Carvalho, CDERJ-UFF-Resende).

**LÓGICA NAS EMBALAGENS**

Em um supermercado comprei um pão de forma **die**t e lá estava escrito: sem adição de açúcar e gorduras. O que estava escrito é que não foi adicionado açúcar e gorduras,isto é, os dois juntos. No entanto pode ter sido adicionado açúcar ou gorduras.

A frase é do tipo   o que significa sem adição de açúcar ou sem adição de gorduras, podendo ser: ou açúcar sem gorduras ou gorduras sem açúcar, ou nem açúcar nem gorduras

Além disso podemos entender que haja açúcar e gorduras sem terem sido adicionados. A afirmação sem adição de açúcar e gorduras não é equivalente a não contém açúcar e gorduras.

O mesmo ocorre com as balas **no sugar** e outros produtos que anunciam: sem adição de açúcar.

O mau uso dos conectivos  **“e” , “ou”** é muito comum. Num restaurante estava escrito:

- PROIBIDO FUMAR CIGARRO, CHARUTO E CACHIMBO.

Mas, quem vai fumar cigarro, charuto e cachimbo (ao mesmo tempo?)

Numa outra embalagem de **pão de forma** está escrito: Pão de forma para sanduiche com semolina. O que devo entender? Que o pão não serve para sanduiche sem semolina?

O que dizer sobre a frase: PENTE PARA CABELO COM PLÁSTICO!

Nas garrafas de água aparece a frase: **Água mineral natural.**

Ora, se é água é mineral e não animal ou vegetal, água de torneira é mineral e natural.

Água mineral natural é pleonasmo duplo.

CUIDADO COM O USO DOS CONECTIVOS LÓGICOS E QUANTIFICADORES UNIVERSAIS.

...**Todo**s foram mal na prova...

...**Ninguém** está entendendo nada...

**EXERCÍCIOS**

**ASSUNTO : CONJUNTOS**

1)Sejam A e B subconjuntos do universo U. Admitindo que A e B são disjuntos, mostre que: 

2) Usando definição prove a igualdade

a)

b) 

3) Determine  sendo 

4) Considere os conjuntos  e . Determine:

a)  b)  c) \ B d) B\A

5) Construa o conjunto das partes do Conjunto 

6) Classifique como V ou F as seguintes sentenças, admitindo A e B dois conjuntos quaisquer:



7) Sejam os conjuntos . Se  então podemos afirmar que:



8) Em uma escola que tem 451 alunos, 221 estudam Inglês, 163 estudam Francês e 52 estudam ambos os idiomas. Quantos alunos estudam Inglês ou Francês? Quantos alunos não estudam nenhum desses dois idiomas?

9) Numa Universidade são lidos apenas dois Jornais X e Y: 80% dos alunos lêem o jornal X, 60% lêem o jornal Y. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos dois jornais, assinale a alternativa que corresponde ao percentual dos alunos que lêm ambos:

a) 80% b) 14% c) 40% d) 60% e) 48%

10) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências em relação a 3 produtos. Os resultados da pesquisa indicam que:

40% das pessoas compram o produto A

55% das pessoas compram o produto B

35% das pessoas compram o produto C

7% das pessoas compram os 3 produtos

135 pessoas não compram nenhum dos 3 produtos

12% das pessoas compram os produtos A e B

15% das pessoas compram os produtos A e C

19% das pessoas compram os produtos B e C

Quantas pessoas foram entrevistadas?

11) Um engenheiro, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de uma fábrica, obteve os seguintes dados:

28% dos funcionários são mulheres

1/6 dos homens são menores de idade

85% dos funcionários são maiores de idade

Qual é a porcentagem dos menores de idade que são mulheres?

12) Em um exame vestibular, 30% dos candidatos eram da área de Humanas; dentre esses candidatos, 20% optaram pelo curso de Direito.. Do total de candidatos, qual a porcentagem dos que optaram por Direito?

13) Dentre os inscritos em um concurso público, 60% são homens e 40% são mulheres.Já têm emprego 80% dos homens e 30% das mulheres. Qual a porcentagem dos candidatos que já têm emprego?

14) Numa Faculdade com  **n**  alunos, 80 estudam Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física, 23 Química e Física, 16 Biologia e Química, 8 cursam as três disciplinas. Sabendo que essa Faculdade mantém apenas esses três cursos, quantos alunos estão matriculados na Faculdade?

**ASSUNTO: PRODUTO CARTESIANO, RELAÇÕES BINÁRIAS**

15) Sejam A = {a, b, c, d} e B = {1, 2}. Determine:

a) A x A;

b) A x B;

c) B x A;

d) B x B;

16) Sejam A = {1, {2}} e B = {1, 2, {1, 2}}. Determine:

a) A ∩ B;

b) A ∪ B;

c) P(A);

d) B ∩ P(A);

e) A x B;

f) B x A;

g) (A x B) ∩ (B x A);

17) Escreva os pares ordenados pertencentes à relação R de A = {0, 1, 2, 3} em

B = {0, 1, 2} em que (a, b) ∈ R se e só se:

a) a = b;

b) a + b = 2;

c) a + b > 3;

d) a < b;

e) b é múltiplo de a;

18) Represente as seguintes relações no conjunto {a, b, c, d} sob a forma matricial e sob a forma de diagrama de setas:

a) R = {(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)};

b) S = { (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)};

c) T = {(b, d), (d, b)};

d) U = {(a, b), (b, c), (c, d)};

19) Das relações do exercício anterior, indique as que são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e transitivas.

20) Relativamente às relações definidas em 5, determine:

a) R-1;

b) S ∪ T;

c) R ∩ U;

21) Seja R uma relação definida no conjunto A= {a, b, c}, representada pela seguinte matriz:



a) Defina a relação R;

b) Determine uma matriz que represente R-1;

c) Defina a relação R-1;

22) Considere definida por 

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.

b) Determine D(R) e Im(R).

c) Escreva a relação  como um conjunto de pares ordenados

23) Seja relação sobre  definida como  x – y é múltiplo de 2.

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.

b) Determine D( R) e Im(R).

c) Escreva a relação  como um conjunto de pares ordenados.

**ASSUNTO: RELAÇOES BINÁRIAS, PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES INTERNAS**

24) Seja . Considere em  as seguintes relações binárias:



Escreva  como conjunto de pares ordenados.

1. Considere a relação binária em *A* definida por:

*n R m*

Escreva *R* como conjunto de pares ordenados.

1. Desenhe o grafo orientado para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto A.

a) 

b) 

c) 

1. Apresente cada uma das relações binárias definidas no exercício 3 por uma matriz.
2. Para cada uma das relações binárias definidas no exercício 3, diga justificando, se a relação é: Reflexiva, Simétrica, Transitiva
3. Seja =. Considere em  as seguintes relações:







Quais destas relações são reflexivas? Simétricas? anti-simétricas? transitivas?

30**)** Classifique as seguintes relações binárias:

**a)** Em N, a relação  definida por 

**NOTA:** **Dois números naturais são primos entre si se o único divisor comum entre eles é 1.**

**b)** Em , a relação definida por 

**NÚMEROS PRIMOS**

Um número  é chamado inteiro primo ou simplesmente primo se  é primo em N.

Seja . Então p é um inteiro primo se, e somente se,  e  e os únicos divisores de p são  e .

Sejam a, b e p números inteiros. Se ab divide p e p é primo então a divide p e b divide p.

31) Sejam e 

Considere, em  a relação: 

a) Determine a matriz de *R.*

b) Desenhe o diagrama de setas de *R*.

c) Determine .

32) Seja . Considere, em *A,* a relação *R*: 

1. Escreva *R* como conjunto de pares ordenados. Determine o domínio e a imagem de *R*.
2. Desenhe o grafo orientado de *R*.
3. Determine . Como traduz  por palavras?

33) Sejam R e S as relações em :

 e .

Determine as relações:

1.  b)  c)  d) 

34) Seja  a matriz de uma relação definida em .

Diga se *R* é simétrica e se é reflexiva. Justifique.

**EXERCÍCIO DE LÓGICA**

Um técnico suspeita que um ou mais dos processadores de um sistema distribuído não está funcionando corretamente. Os processadores A, B e C são todos capazes de relatar informação sobre o estado (funcionando ou não funcionando) de processadores do sistema. O técnico não tem certeza se um processador de fato não funciona ou se o problema está nas rotinas de transmissão de estado de um ou mais processadores. Depois de sondar cada processador, o técnico recebeu o seguinte relatório de estados.

* O processador A relata que o processador B não está funcionando e que o processador C está funcionando
* O processador B relata que A está funcionando se e somente se B está funcionando.
* O processador C relata que pelo menos um dos outros dois processadores não está funcionando.

Ajude o técnico a resolver as seguintes questões:

1. Sejam a=“A está funcionando”;b=“B está funcionando”;c= C está funcionando”. Escreva os três relatórios de estado nos termos de a, b e c, usando os símbolos da lógica formal.
2. Complete a tabela verdade seguinte

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | Relatório de A | Relatório de B | Relatório de C |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

(adaptado de Fundamentos de Matemática Discreta, de David J. Hunter, editora LTC, 201

**EXERCÍCIOS SOBRE GRAFOS**

1) Os dados seguintes foram obtidos no estudo de um grupo de seis pessoas durante um estudo sociológico:

-Carlos influencia Solange e Gilda

-Gilda influencia João

-Solange é influenciada por Pedro

-Renata é influenciada por Carlos, Solange e Gilda

-Pedro é influenciado por Renata

-João influencia Carlos e Renata

-Solange influencia João

-Carlos é influenciado por Pedro

-Pedro influencia João e Gilda

Construa o grafo orientado, a matriz de adjacência e responda:

1. Quem influencia mais pessoas?
2. Quem é influenciado por mais pessoas?
3. Considere uma rede de comunicações entre 5 pessoas P1,P2,P3,P4 e P5, cuja matriz de adjacência é:



Construa o grafo orientado e responda:

1. De quantas maneiras P2 tem acesso a P1 por meio de uma pessoa?
2. Qual o menor número de pessoas por meio das quais P2 pode acessar a si mesmo?

3) Considere a seguinte relação de influência entre 5 pessoas

P1 influencia P2, P4 e P5

P2 influencia P3 e P4

P3 influencia P1 e P4

P4 influencia P5

P5 influencia P2 e P3

Construa o grafo, a matriz de adjacência e responda:

1. P4 pode influenciar P1 em no máximo dois estágios?
2. De quantas maneiras P1 influencia P4 em exatamente três estágios?
3. De quantas maneiras P1 influencia P4 em um, dois ou três estágios?
4. Considere uma rede de comunicações entre cinco pessoas, com a matriz de adjacência



Construa o grafo orientado e responda:

1. P3 pode mandar uma mensagem a P5 em no máximo dois estágios?
2. Qual o número mínimo de estágios que garantirão que todas as pessoas possam receber uma mensagem de qualquer outra pessoa (diferente)?
3. Qual o número mínimo de estágios que garantirão que todas as pessoas possam receber uma mensagem de qualquer outra pessoa (incluindo ela mesma)?
4. Considere a matriz de adjacência:



Elabore uma situação que possa ser descrita pela matriz dada e represente o respectivo grafo orientado.

* **Matrizes de transformação linear no espaço R²**

|  |  |
| --- | --- |
| **Reflexão no eixo x:** | **Reflexão no eixo y:** |
| **Reflexão na origem:** | **Reflexão na reta y = x:** |
| **Reflexão na reta y = -x:** | **Dilatação/contração no vetor:** |
| **Dilatação/contração no x:** | **Dilatação/contração no y:** |
| **Cisalhamento no x:** | **Cisalhamento no y:** |
| **Rotação no espaço R²** |  |

**considerações sobre o fator **

 **ocorre dilatação**

** ocorre contração**

**>0 conserva o sentido do vetor**

* **TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO ESPAÇO R³**

**reflexão no plano xOy reflexão no plano yOz**

** **

**reflexão no plano xOz reflexão no eixo x**

** **

**Reflexão no eixo Oy: Reflexão no eixo Oz:**

** **

**Rotação no R³:**

****

COMPLEMENTOS

**Reflexão no eixo x:**

** transforma T(x,y,z) em T’(x,-y,-z)**

**Reflexão no eixo y:**

** transforma T( x,y,z) em T’(-x,y,-z)**

**Reflexão no eixo z:**

** transforma T(x,y,z) em T’( -x,-y,z)**

**EXERCÍCIOS : TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO ESPAÇO R²**

1. O vetor v = (5,3) experimenta seqüencialmente:
2. Uma reflexão em torno da reta y = x
3. Um cisalhamento horizontal de fator 2
4. Uma contração na direção Oy de fator 
5. Uma rotação de 90° no sentido anti-horário

Determine o vetor resultante dessa sequência de operações.

1. O vetor v = (-3,-2) experimenta sequencialmente:
2. Uma reflexão em torno da reta y = - x
3. Um cisalhamento horizontal de fator 2
4. Uma contração na direção Oy de fator 
5. Uma rotação de 60° no sentido anti-horário

Determine o vetor resultante dessa sequência de operações.

1. Considere o vetor v =( 4, -3). Efetue cada sequência de transformações para esse vetor.

a) Reflexão em torno do eixo Oy, seguida de um cisalhamento de fator 5 na direção horizontal

1. Rotação de 30° no sentido horário, seguida de uma duplicação dos módulos e inversão dos sentidos.
2. Rotação de 60°, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Oy
3. Rotação de um ângulo de 45º, seguida de uma reflexão na origem.
4. Reflexão em torno da reta y = -x seguida de uma dilatação de fator 2 na direção Ox e, finalmente, de um cisalhamento de fator 3 na direção Oy.
5. Considere o triângulo de vértices A (1,1), B(5,1) e C( 2,5). Efetue uma rotação de 90º no sentido horário; a seguir efetue uma dilatação de fator 4 na direção Ox e, finalmente, uma reflexão em torno da reta y = x.
6. Considere o polígono cujos vértices estão representados na matriz



Efetue:

* Uma reflexão em torno do eixo Ox
* Uma reflexão em torno do eixo Oy
* Uma rotação de 30º
* Uma rotação de 45º no sentido horário

**Uma sequência de transformações lineares aplicadas em um vetor pode ser representada por uma única transformação cuja matriz é obtida pelo produto das matrizes canônicas, em ordem inversa.**



1. Determine a matriz única de transformação linear de R² em R² que representa um cisalhamento por um fator 2 na direção horizontal seguida de uma reflexão em torno do eixo Oy.
2. Determine, em cada caso, a matriz única de transformação linear de R² em R² que representa a seqüência de transformações dadas:
3. Reflexão em torno do eixo Oy, seguida de um cisalhamento de fator 5 na direção horizontal
4. Rotação de 30° no sentido horário, seguida de uma duplicação dos módulos e inversão dos sentidos.
5. Rotação de 60°, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Oy
6. Rotação de um ângulo , seguida de uma reflexão na origem.
7. Reflexão em torno da reta y = -x seguida de uma dilatação de fator 2 na direção Ox e, finalmente, de um cisalhamento de fator 3 na direção Oy.
8. Localize num gráfico cartesiano os pontos P(3,5), Q(6,-5), R(-6,-5) e S(-3,5). Observe que esses pontos são vértices do trapézio PQRS.

Considere a matriz  onde a 1ª linha é a das abscissas ou eixo “x” e a 2ª linha é a das ordenadas ou eixo “y”.

Considere também a matriz 

1) Efetue o produto B.A

2) Represente os vértices de B.A no plano cartesiano, formando um polígono.

3) Compare a figura gerada por B.A com o trapézio PQRS. As figuras são congruentes?

4) Observe que a figura gerada por B.A é uma rotação do trapézio PQRS. Em qual sentido e quantos graus o trapézio PQRS girou?

9) Considere as matrizes  e .

1) represente no plano cartesiano o polígono cujos vértices estão na matriz A.

2) determine o produto B.A

3) Represente os vértices de B.A no plano cartesiano, formando um polígono e compare-o com o que você obteve na matriz A. São congruentes?

4) Efetue o produto B(BA); represente graficamente os pontos e compare o polígono obtido com os polígonos representados por A e BA.

5) Qual deverá ser o procedimento para o polígono representado por A girar 270º no sentido anti-horário?

6) Efetue o produto BBB. Efetue também o produto (BBB)A. Represente a figura gerada por (BBB)A.

10) Considere as matrizes  , ,  e 

1. Represente o polígono gerado pela matriz A.
2. Efetue BA e represente o polígono gerado.
3. Efetue CA e represente o polígono gerado.
4. Descreva como a multiplicação da matriz B alterou o tamanho da figura representada por A. Faça o mesmo com a figura gerada pela multiplicação da matriz C.
5. Efetue D(BA) e represente o polígono gerado.
6. Descreva com a multiplicação da matriz D alterou o polígono gerado por BA.
7. Se X(CA)= A, qual é a matriz X?

11) Considere as matrizes  ,  e 

1) Efetue e represente BA. Descreva a transformação.

2) Efetue e represente . Descreva a transformação.

3) Efetue . Compare-o com a figura gerada por A.

4) Compare as transformações obtidas nos itens 1 e 2 com a figura gerada por A.

No que elas se assemelham? No que elas diferem?

5) Efetue o produto CA e represente a figura gerada.

6) Efetue . Descreva a transformação.

7) Efetue . Compare-o com a figura gerada por A.