

El método del elemento frontera de reciprocidad dual

Jefferson Pinzón Morantes

Julio 2020

1 Introducción

Los métodos clásicos para resolver problemas continuos en ingeniería generalmente hacen uso de alguna forma de discretización de dominio. Una cuadrícula en el caso del método de diferencia finita, y una serie de elementos en el caso del método de elemento finito.

Las técnicas de diferencia finita se aproximan a las derivadas en las ecuaciones diferenciales que rigen cada problema utilizando algún tipo de expansión truncada de Taylor y así expresarlas en términos de los valores en una serie de puntos de malla discretos. Esto da lugar a una serie de ecuaciones algebraicas a las que se aplican condiciones de frontera para resolver el problema.

Principales dificultades de la técnica radican en la consideración de las geometrías curvas y la aplicación de condiciones de frontera. Para el caso de la frontera, la cuadrícula de diferencias finitas no puede reproducir con precisión la geometría del problema. Además, la introducción de condiciones de frontera que impliquen derivadas requiere el uso de puntos externos ficticios o la definición de una expansión de orden inferior que disminuye la precisión de los resultados.

En el lado más positivo, los códigos de diferencias finitos son comparativamente económicos debido a la simplicidad de la generación y manipulación de matrices. Debido a esto, todavía se utilizan ampliamente en aplicaciones como la dinámica de fluidos que requiere mallas refinadas y un gran número de operaciones repetidas.

Las técnicas de elementos finitos se desarrollaron originalmente para obtener una mejor representación de la geometría del problema y simplificar la introducción de las condiciones de frontera. El método implica la aproximación de las variables sobre pequeñas partes del dominio, llamadas elementos, en términos de las funciones de interpolación polinómica. Una declaración residual ponderada

puede ser escrito con el fin de distribuir el error introducido por esta aproximación sobre cada elemento o alternativamente esta operación puede ser vista como la minimización de una energía Funcional. Esto da como resultado matrices de influencia que expresan las propiedades de cada elemento en términos de un número discreto de valores nodales. Ensamblar todas estas además produce una matriz global que representa las propiedades del continuo. La aplicación de las condiciones de frontera puede llevarse a cabo de manera simple. No sólo se pueden representar geometrías de la frontera generales mediante elementos con lados curvos, sino cualquier derivada puede expresarse en términos de las funciones de interpolación ya propuestas.

El método es mucho más versátil que la diferencia finita en que las mallas se pueden calificar fácilmente y los tipos generales de condiciones de frontera son fáciles de incorporar.

Las desventajas de los elementos finitos son que se requieren grandes cantidades de datos para discretizar todo el dominio, en particular para los problemas tridimensionales, y que la técnica a veces da resultados inexactos. Esto es particularmente así para los casos de funciones discontinuas, singularidades o funciones que varían rápidamente. También hay dificultades al modelar regiones infinitas y mover problemas de frontera.

El método sólo requiere la discretización de frontera, reduciendo así la cantidad de datos necesarios para ejecutar un problema. Su idea básica consiste en relacionar las variables en diferentes puntos de frontera mediante el uso de funciones analíticas, es decir, la solución fundamental, dando como resultado una serie de coeficientes de influencia que se pueden arreglar en forma de matriz; las condiciones de frontera se aplican de manera similar a la que se hace en elementos finitos.

Los elementos de frontera pueden ser de un tipo general y retener la instalación de modelar fronteras curvas a pesar de haber reducido la dimensionalidad de la problema por uno. Debido a la formulación del problema en términos de soluciones, discontinuidades y singularidades se pueden modelar sin dificultades especiales. Como la solución es necesaria sólo la frontera, la técnica es ideal para problemas de superficie móvil. Otra ventaja importante del método es que puede lidiar con problemas que se extienden hasta el infinito sin tener que truncar el dominio a una distancia finita.

COMPARACIÓN

Es interesante notar que si bien las diferencias finitas implican sólo la aproximación de las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, los elementos finitos requieren integración por partes de los términos de dominio resultantes de la representación de las variables utilizando funciones polinómicas.

En los elementos de frontera, por otro lado, aunque el problema se expresa utilizando sólo integrales en la frontera, estos son más complejos que los presentes en elementos finitos. Debido a esto, las técnicas especiales de integración son necesarias para obtener resultados precisos y gran parte de los primeros trabajos sobre el nuevo enfoque concentrado sobre el cómputo de las integrales.

Acotamiento de elementos curvilíneos técnica con el mismo grado de versatilidad que elementos finitos para representar la geometría del problema.

Método de elemento de frontera

1. El énfasis de los elementos de frontera en los principios de variación de tipo mixto o formulaciones residuales ponderadas para producir las ecuaciones integrales directas. La formulación residual ponderada parte de las ecuaciones de gobierno del problema y es extremadamente conveniente cuando se trabaja con problemas dependientes. Este enfoque facilita el uso de diferentes tipos de minimización de errores en la frontera, como la colocación, que normalmente se utiliza, Galerkin, mínimos cuadrados, etc. La formulación es de carácter general y no usa las funciones de Green como soluciones fundamentales.
2. El método hace hincapié en el desarrollo de elementos de frontera de orden superior, especialmente curvados, que permiten la correcta representación de la superficie de los límites generales. Los elementos de orden superior son importantes en muchos casos y su comprensión adecuada es esencial para obtener una representación de rígidos en el análisis de tensión, por ejemplo, así como para lograr la convergencia de la solución.
3. El menor grado de continuidad requerido por las formulaciones de elementos frontera que admiten la presencia de discontinuidades y ayudan a representar mejor las singularidades. Esta característica importante da como resultado una representación más sencilla de las condiciones y restricciones de frontera complejos sin el alto grado de continuidad necesario en los elementos finitos o las diferencias finitas.

El principal inconveniente en estos casos fue la necesidad de discretizar el dominio en una serie de celdas internas para tratar los términos no llevados a la frontera por la aplicación de la solución fundamental, como términos no lineales. Esta discretización adicional destruyó parte de la atracción del método en términos de los datos necesarios para ejecutar el problema y la complejidad de las operaciones adicionales involucradas.

Entonces se dio cuenta de que se necesitaba un nuevo enfoque para hacer frente a las integrales de dominio en elementos de frontera. Varios métodos han sido propuestos por diferentes autores, los más importantes son:

1. Integración analítica de las Integrales de Dominio. Este enfoque, aunque resultados muy precisos, sólo es aplicable a un número limitado de casos para el cual las integrales pueden ser evaluadas analíticamente.
2. El uso de las expansiones de Fourier. El método de expansión de Fourier no es fácil de aplicar en muchos casos, ya que el cálculo de los coeficientes puede ser computacionalmente engorroso, aunque el método se ha aplicado con algunos éxitos en casos relativamente simples.
3. La Técnica Vectorial Galerkin. Este enfoque utiliza una primitiva, solución fundamental y la identidad de Green para transformar ciertos tipos de integrales de dominio en integrales de frontera equivalentes. La principal dificultad del enfoque es que sólo puede resolver casos comparativamente simples.
4. El método de reciprocidad múltiple. Esta es una extensión de la Galerkin técnica vectorial que utiliza tantas soluciones fundamentales de orden superior como requiere en lugar de usar sólo uno. La principal dificultad es que el método no se puede aplicar fácilmente a problemas generales no lineales, aunque se ha utilizado con éxito para resolver algunos problemas dependientes del tiempo.
5. El método de reciprocidad dual. Este es el tema del presente libro y constituye la única técnica general distinta de la integración de celdas.

El Método de Reciprocidad Dual fue introducido por Nardini y Brebbia en 1982 para problemas elastodinámicos y extendido por Wrobel y Brebbia a difusión en 1986. El método se amplió aún más a problemas más generales Partridge y Brebbia y Partridge y Wrobel en 1989/90.

El Método de Reciprocidad Dual es esencialmente una forma generalizada de construir soluciones particulares que se pueden utilizar para resolver problemas no lineales y dependientes del tiempo así como para representar cualquier distribución de origen interna. El método se puede aplicar para definir fuentes en todo el dominio o sólo en parte de él.

El capítulo 2 de este libro presenta el método de elemento de frontera para el tipo Poisson y discute varios enfoques para tratar con la técnica de integración de celdas, el uso de soluciones particulares, el Método Monte Carlo, el enfoque Galerkin Vector y Técnica de reciprocidad múltiple.

Se incluye un código informático que puede resolver la ecuación de Poisson usando celdas internas y la ecuación de Laplace como un caso particular.

El Método de Reciprocidad Dual se introduce en el capítulo 3 para ecuaciones de tipo Poisson en las que el término no homogéneo es una función conocida del espacio. El método se explica en detalle junto con los diferentes funciones de aproximación que pueden utilizarse para definir la solución particular y la implementación de código de equipo correspondiente. El mecanismo de aplicación del enfoque se describe incluyendo el uso de puntos internos o nodos. Muchos ejemplos aplicaciones se dan utilizando elementos lineales y cuadráticos.

En el capítulo 4, la aplicación del Método de Reciprocidad Dual se extiende a los casos en el que el lado derecho de la ecuación de gobierno es una función desconocida de la variable de problema, así como una función del espacio.

Esto incluye casos no lineales como la ecuación de Burger y la ignición espontánea, así como otras aplicaciones como convección y la ecuación Helmholtz, que de lo contrario requeriría el uso de soluciones fundamentales complejas o la subdivisión del dominio en celdas.

La aplicación de la doble reciprocidad también se extiende al análisis tridimensional. Un código informático se da para una ecuación bidimensional donde el lado derecho es un función de la variable problemática y la posición.

El capítulo 5 se refiere a la aplicación del Método de Reciprocidad Dual a casos lineales y casos no lineales dependientes del tiempo. Esto incluye difusión, propagación de ondas y problemas de convección-difusión. Se describe un código informático para la solución de la ecuación de difusión.

En el capítulo 6 el método se extiende a los problemas para los que una solución fundamental diferente de la ecuación de Laplace se utiliza.

La solución fundamental Kelvin para la elasticidad bidimensional, solución fundamental bi-armónica para la delgada teoría de placas y la solución fundamental para la convección-difusión en estado estacionario con coeficientes constantes, y se dan pautas cómo método para problemas que impliquen otras soluciones fundamentales. Este libro presenta el estado de la técnica en la aplicación de la Doble Reciprocidad, Método de elemento de frontera y describe en detalle cómo se puede aplicar la técnica en la práctica. El estado de desarrollo del método es tal que puede ser utilizado como herramienta general para el análisis de elementos de frontera.

2 El caso de la ecuación de Laplace

2.1 Relaciones fundamentales

La ecuación integral de frontera inicial requerida por el método puede deducirse de manera simple en función de consideraciones de residuos ponderados, el teorema recíproco de Betti, la tercera identidad de Green o principios fundamentales como el trabajo virtual. La ventaja de utilizar una técnica residual ponderada es su generalidad; permite la extensión del método a la solución de ecuaciones diferenciales parciales más complejas y también se puede utilizar para relacionar elementos frontera con otras técnicas numéricas.

Considere que estamos buscando la solución de una ecuación de Laplace en un dominio bidimensional o tridimensional (figure 1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = \bar{u} \text{ sobre } \Gamma_1 \\ q = \partial u / \partial n = \bar{q} \text{ sobre } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (1)$$

Donde n es el vector normal en la frontera, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ y \bar{q}, \bar{u} son valores conocidos

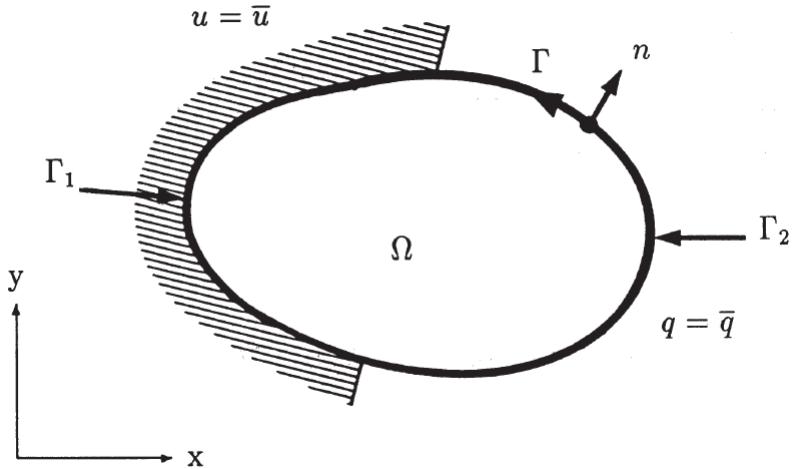


Figure 1: Definición geométrica del problema

En principio, los errores introducidos en las ecuaciones anteriores si los valores exactos (pero desconocidos) de u y q se reemplazan por una solución aproximada, pueden minimizarse ortogonalizándolos con respecto a una función de ponderación u^* , cuya derivada normal a lo largo de la frontera es

$$q^* = \partial u^*/\partial n \quad (2)$$

En otras palabras, si R son los residuos, se puede escribir en general que

$$\begin{aligned} R &= \nabla^2 u \neq 0 \text{ in } \Omega \\ R_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \text{ on } \Gamma_1 \\ R_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3)$$

donde u y q son valores aproximados (el hecho de que uno o más de los residuos puedan ser idénticamente cero no resta valor a la generalidad del argumento).

Los residuales anteriores pueden ser ponderados por las funciones u^* y q^* de la siguiente manera

$$\int_{\Omega} Ru^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (4)$$

ó

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (5)$$

El objetivo de este procedimiento es forzar que los residuos sean cero en un sentido promedio.

El signo de los diferentes términos quedará claro durante el proceso de integración por partes.

$$\begin{aligned} \text{Recuerde que } \int_{\Omega} \Delta u \cdot u^* d\Omega &= \int_{\partial\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega \\ \text{donde } \int_{\partial\Omega} u^* q ds &= \int_{\Gamma_1} u^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u^* q d\Gamma \text{ y } q = \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned} \quad (6)$$

Integrando una vez el laplaciano en (5) da

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (7)$$

utilizando la llamada convención de suma de Einstein para índices repetidos, con $k = 1, 2, 3$.

Integrando por partes nuevamente los términos en el lado izquierdo en 10 y recordando

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \cdot u \, dS + \int_{\Omega} (\Delta u^*) u d\Omega \quad (8)$$

$$\int_{\partial\Omega} q^* u \, dS = \int_{\Gamma_1} q^* u d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q^* u d\Gamma \quad (9)$$

que se obtiene,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (10)$$

Esta importante ecuación es el punto de partida para la aplicación del método del elemento Frontera. Nuestro objetivo ahora es transformar la fórmula (10) en una ecuación integral de frontera. Esto se realiza mediante el uso de un tipo especial de función de ponderación u^* llamada solución fundamental.

Solución fundamental

La solución fundamental u^* representa el campo generado por una fuente unitaria concentrada que actúa en un punto i . El efecto de esta fuente se propaga desde i hasta el infinito sin tener en cuenta las condiciones de frontera. Debido a esto, u^* satisface la siguiente ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (11)$$

$$\text{donde } \Delta_i := \begin{cases} \infty & \text{Si } x = x_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}; \int_{\partial\Omega} \Delta_i = 1 \text{ Función delta de Dirac} \quad (12)$$

La integral de una función delta de Dirac multiplicada por cualquier otra función es igual al valor de esta última en el punto i . Por lo tanto

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u (-\Delta_i) d\Omega = -u_i \quad (13)$$

La ecuación (10) ahora se puede escribir como

$$u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (14)$$

Debe recordarse que la ecuación (14) se aplica a una fuente concentrada en i y, en consecuencia, los valores de u^* y q^* son los correspondientes a esa posición

particular del punto fuente. Para cada posición diferente se obtiene una nueva ecuación integral.

Para un medio tridimensional isotrópico, la solución fundamental de la ecuación (11) es

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (15)$$

y para un medio isotrópico bidimensional

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (16)$$

donde r es la distancia desde el punto i de aplicación de la fuente concentrada a cualquier otro punto considerado.

Es fácil comprobar que las soluciones (16) y (17) satisfacen las ecuaciones tridimensionales y bidimensionales de Laplace. Para demostrar esto, las coordenadas esféricas se pueden usar por simplicidad en problemas tridimensionales y esto permite descuidar los términos que son cero debido a la simetría de la solución, i.e.

$$\nabla^2 u^* \rightarrow \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = -\Delta_i \quad (17)$$

Para el caso donde $r=0$ se puede demostrar que

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta_i d\Omega = -1 \quad (18)$$

Esto se puede demostrar integrando alrededor de una esfera de radio ϵ y luego tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Donde la **esfera** tiene un **dominio** Ω_{ϵ} , se integra por partes el laplaciano en términos de "Flujos acotados" := $\frac{\partial u^*}{\partial n}$

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \quad (19)$$

donde $n = r$ en la superficie de la esfera y $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r}$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \right\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\epsilon}} -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{4\pi\epsilon^2}{4\pi\epsilon^2} \right\} = -1 \end{aligned} \quad (20)$$

de (18) debe ser igual a -1 , así la superficie de la esfera debe ser igual a

$$\Gamma_{\epsilon} = 4\pi\epsilon^2 \quad (21)$$

Del mismo modo para dos dimensiones, se define un círculo de radio ε y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ i.e,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} -\frac{1}{2\pi\epsilon} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{2\pi\epsilon}{2\pi\epsilon} \right\} = -1 \end{aligned} \quad (22)$$

Así el perímetro del círculo es $\Gamma_\varepsilon = 2\pi\varepsilon$.

2.2 Ecuaciones integrales de frontera

Ahora hemos deducido una ecuación integral (14) que es válida para cualquier punto dentro del dominio Ω .

En los elementos de frontera, generalmente es preferible por razones computacionales aplicar la ecuación (14) en la frontera y, por lo tanto, es necesario averiguar qué sucede cuando el punto i está en Γ . Una manera simple de hacer esto es considerar que el punto i está en la frontera, pero el dominio en sí mismo es aumentado por un hemisferio de radio ϵ (en 3D) como se muestra en la figura 2 (i) (para 2D lo mismo se aplica, pero se considera un semicírculo, figura 2).

Se considera que el punto i está en el centro y luego se evalúa el límite a medida que el radio $\epsilon \rightarrow 0$. El punto se convertirá nuevamente en un punto frontera y la expresión resultante será la especialización de (14) para un punto en Γ . En la actualidad se considerarán las superficies lisas representadas en la figura 2, el caso de las esquinas se discutirá en la sección 2.6 Tratamiento de esquinas.

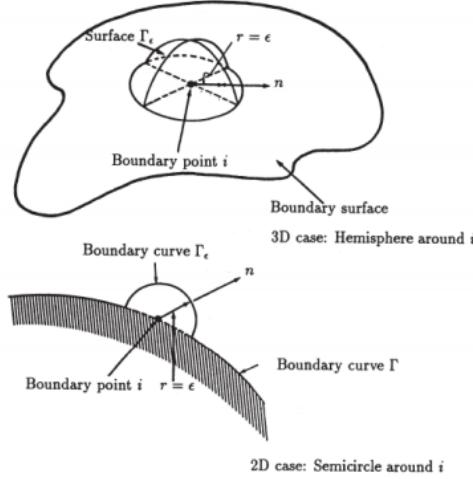


Figure 2: Puntos frontera para casos de dos y tres dimensiones, Aumentado por un pequeño hemisferio o semicírculo.

Es importante en esta etapa diferenciar entre dos tipos de integrales de frontera en (14) ya que la solución fundamental y su derivada normal se comportan de manera diferente. Considere, en aras de la simplicidad, la ecuación (14) antes de que se apliquen las condiciones frontera, es decir

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (23)$$

Notemos que en (23) la primera parte se comporta diferente y la segunda parte es continua en la frontera.

Recordemos que,

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (24)$$

Para el caso tridimensional la integral alrededor de Γ_ε es dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} qu^* d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ q \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Mitad de la superficie de una esfera, que es el área de $\Gamma_\varepsilon = 2\pi\varepsilon^2$

Alrededor de Γ_ε tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \right\} = -\frac{1}{2}u_i \end{aligned} \quad (26)$$

Esto significa que la integral tiene una discontinuidad o salto en la frontera, y produce lo que se llama un término libre. Es fácil verificar que ocurrirá lo mismo para el problema bidimensional, en cuyo caso la integral del lado derecho alrededor de Γ_ε también es idénticamente cero y la integral del lado izquierdo se convierte en

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{2\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2}u_i \end{aligned} \quad (27)$$

Usando (25) a (27) se puede escribir la siguiente expresión para problemas bidimensionales o tridimensionales cuando el punto i está en la frontera

$$\frac{1}{2}u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma \quad (28)$$

donde las integrales están en el sentido de los valores principales de Cauchy. Esta es la ecuación integral de frontera generalmente utilizada como punto de partida para la formulación del elemento frontera.

2.3 El método del elemento Frontera para la ecuación de Laplace

Consideremos ahora cómo se puede discretizar la expresión (28) para encontrar el sistema de ecuaciones a partir del cual se pueden encontrar los valores frontera. Suponga por simplicidad que el cuerpo es bidimensional y su límite está dividido en N segmentos o elementos como se muestra en la figura 3.

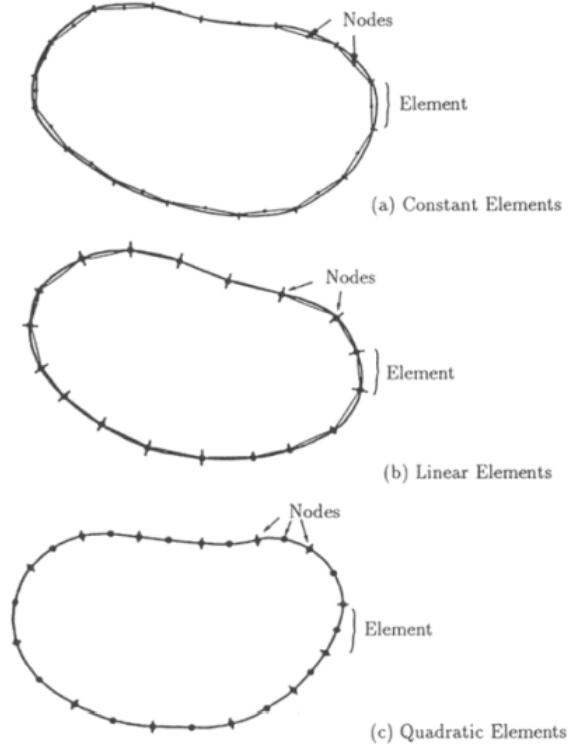


Figure 3: Diferentes tipos de elementos de frontera

Los puntos donde se consideran los valores desconocidos se denominan "nodos" y se consideran en el medio del elemento para los llamados elementos constantes (figura 3 (a)). Estos son los elementos considerados en esta sección, pero más adelante en el caso de los elementos lineales, es decir, aquellos elementos para los que los nodos están en los extremos (figura 3 (b)) y elementos curvos como los cuadráticos que se muestran en la figura 3(c) y para el cual se requiere un nodo adicional de elemento medio se discutirá después. Se supone que la frontera se divide en N elementos.

La ecuación (28) se puede discretizar para un punto dado i antes de aplicar cualquier condición de contorno, de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad (29)$$

En el caso de los **elementos constantes**, se supone que los valores de u y q son constantes sobre cada elemento e iguales al valor en el nodo del elemento medio. Los puntos en los extremos de los elementos se usan solo para definir la geometría del problema. Tenga en cuenta que para este tipo de elemento (es decir, constante) la frontera siempre es "uniforme" en los nodos, ya que estos se encuentran en el centro de los elementos, por lo tanto, el multiplicador de u_i , siempre es igual a $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (30)$$

Los valores de u y q se pueden sacar de la integral, son llamado los elementos u_j y q_j para el elemento j .

Las integrales relacionan el nodo i donde la solución fundamental se aplica a cualquier otro nodo j . Debido a esto, sus valores resultantes a veces se denominan coeficientes de influencia.

$$\bar{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma; \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (31)$$

Observe que se supone que **la solución fundamental se aplica en un nodo particular i** , aunque esto no se indica explícitamente en la notación u^* , q^* para evitar la proliferación de índices. Por lo tanto, para un punto particular i , uno puede escribir

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (32)$$

Llamemos ahora

$$H_{ij} = \bar{H}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij} \text{ delta de kroneckten donde se le suma } \frac{1}{2} \text{ cuando } i = j \quad (33)$$

$$\text{Porque } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (34)$$

Entonces la ecuación (32) ahora se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (35)$$

Si ahora se supone que la posición del nodo i también varía de 1 a N , es decir, se supone que la solución fundamental se aplica en cada nodo sucesivamente, se obtiene un sistema de ecuaciones resultante de la aplicación de (35) a cada punto frontera.

Este conjunto de ecuaciones se puede expresar en forma de matriz como

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (36)$$

donde \mathbf{H} y \mathbf{G} son dos matrices $N \times N$, \mathbf{u} y \mathbf{q} son vectores de longitud N . Los valores N_1 de \mathbf{u} y N_2 de \mathbf{q} son conocidos en Γ_1 y Γ_2 , respectivamente ($N_1 + N_2 = N$), por lo tanto hay N incógnitas en (36)

Para introducir estas condiciones de frontera en (36), uno tiene que reorganizar el sistema moviendo las columnas de la \mathbf{H} y \mathbf{G} de un lado al otro. Una vez que todas las incógnitas se pasan al lado izquierdo, se puede escribir

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (37)$$

donde \mathbf{x} es un vector de valores en la frontera desconocidos de \mathbf{u} y \mathbf{q} , **se encuentra** \mathbf{x} multiplicando las columnas de \mathbf{H} y \mathbf{G} por los valores conocidos de \mathbf{u} y \mathbf{q} .

Es interesante señalar que las incógnitas ahora son una mezcla del potencial \mathbf{n} y su derivada normal, en lugar del potencial solo como en elementos finitos. Esto es una consecuencia de que el método del **elemento frontera** es una formulación "mixta" y constituye una ventaja importante sobre los **elementos finitos**.

La ecuación (37) ahora se puede resolver y se conocerán todos los valores de frontera. Una vez hecho esto, es posible calcular los valores internos de \mathbf{u} o sus derivadas. Los valores de \mathbf{u} se calculan en cualquier punto interno i utilizando la fórmula (14) que puede ser escrita en forma condensada como

$$u_i = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma \quad (38)$$

Observe que **ahora se considera que la solución fundamental es actuar**

sobre un punto interno i y que todos los valores de \mathbf{u} y \mathbf{q} ya son conocidos. El proceso es entonces uno de integración directa. Se utiliza la misma discretización para las integrales de frontera, es decir.

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j \quad (39)$$

Los coeficientes G_{ij} y \bar{H}_{ij} deben calcularse nuevamente para cada punto interno diferente.

Los valores de los flujos internos en las dos direcciones cartesianas, $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, se calculan llevando a cabo derivadas en (38), es decir

$$\begin{aligned} (q_x)_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \\ (q_y)_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma \end{aligned} \quad (40)$$

Observe que las derivadas se llevan a cabo solo en las soluciones fundamentales u^* y q^* ya que estamos calculando las variaciones de flujo alrededor del punto i [4].

El cálculo de integrales para puntos internos en (38) y (40) generalmente se realiza numéricamente. El procedimiento es algo engoroso, pero en el capítulo 4 se dará un enfoque más simple usando el Método de Reciprocidad Dual.

2.4 Evaluación de integrales

Los coeficientes G_{ij} y \bar{H}_{ij} se puede calcular utilizando fórmulas de integración numérica (como la cuadratura de Gauss) para el caso $i \neq j$.

Cuando $i = j$, la singularidad de la solución fundamental requiere un esquema de integración más preciso. Para estas integrales, se recomienda utilizar reglas de integración de orden superior o una fórmula especial (como las transformaciones logarítmicas y de otro tipo que se analizarán más adelante).

Para el caso particular de **elementos constantes**, los coeficientes H_{ii} y G_{ii} pueden calcularse analíticamente. Los \bar{H}_{ii} términos, por ejemplo, son idénticamente cero, ya que la normal n y la distancia r desde el punto fuente siempre son perpendiculares entre sí, es decir.

$$\bar{H}_{ii} = \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \equiv 0 \quad (41)$$

Los G_{ii} para un elemento bidimensional, por ejemplo, tienen la forma

$$G_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma \quad (42)$$

Para integrar la expresión anterior, se puede realizar un cambio de coordenadas (figura 4) de modo que

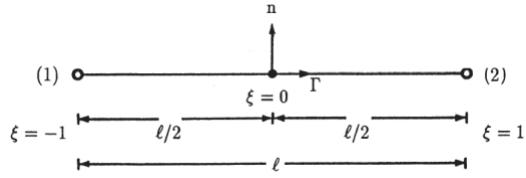


Figure 4: Sistema de coordenadas de elementos

$$r = \left| \frac{\ell}{2} \xi \right| \quad d\Gamma = dr = \frac{\ell}{2} d\xi \quad (43)$$

donde ℓ es la longitud del elemento. Por lo tanto, teniendo en cuenta la simetría, la expresión (42) se puede escribir como

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Point 1}}^{\text{Point 2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma = \frac{1}{\pi} \int_{\text{node } i}^{\text{node } 2} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr = \\ &= \frac{\ell}{2\pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\ell\xi}\right) d\xi = \\ &= \frac{\ell}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2}{\ell}\right) + \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

La última integral es igual a 1 para que

$$G_{ii} = \frac{\ell}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2}{\ell}\right) + 1 \right\} \quad (45)$$

Para casos más complejos, como **elementos curvos**, se debe utilizar una fórmula especial ponderada (ver Apéndice 2). En los códigos bidimensionales descritos en este y en capítulos posteriores, se ha utilizado una regla de cuadratura de Gauss de 4 puntos para evaluar las integrales no singulares.

2.5 Elementos lineales

Hasta esta sección, solo se ha discutido el caso de elementos constantes, es decir, aquellos con los valores de las variables que se supone son los mismos en todo el elemento. Consideremos ahora una variación lineal de u y q , en cuyo caso los nodos se consideran en los extremos del elemento como se muestra en la figura 5.

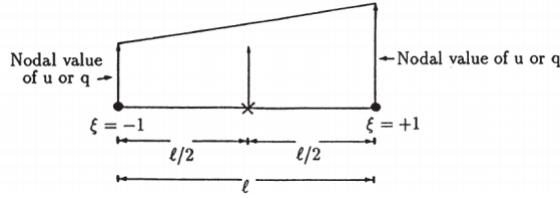


Figure 5: Definiciones de elementos lineales

La ecuación integral de frontera (28) ahora se puede generalizar como

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (46)$$

donde

$$c_i = \frac{\theta}{2\pi} \quad (47)$$

θ : es el ángulo interno en el punto i en radianes.

Este resultado se obtiene definiendo una pequeña región esférica o circular alrededor del punto y y luego llevando su radio a cero (similar a lo que se muestra en la sección 2.2). Otra posibilidad es determinar el valor de C_j implícitamente (ver sección 2.6), y en este caso no es necesario calcular el ángulo.

Después de discretizar la frontera en una serie de N elementos, la ecuación (47) se puede escribir como en la sección anterior:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad (48)$$

Las integrales en esta ecuación son más difíciles de evaluar que las del elemento constante ya que u y q varían linealmente sobre cada elemento Γ_j y, por lo tanto, no es posible sacarlas de las integrales.

Los valores de u y q en cualquier punto del elemento se pueden definir en términos de sus valores nodales y dos funciones de interpolación lineal ϕ_1 y ϕ_2 , que se dan en términos de la coordenada homogénea ξ como se muestra en la figura 5 ,i.e

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ q(\xi) &= \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

donde u_1 y u_2 son valores nodales

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{donde } \xi \in [-1, 1] \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (50)$$

Consideremos las integrales sobre un elemento j . Los del lado izquierdo de (49) se pueden escribir como

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \quad \phi_2] q^* d\Gamma \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

donde, para cada elemento j , tenemos los dos términos

$$h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma \quad \text{y} \quad h_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \quad (52)$$

Del mismo modo, la integral en el lado derecho de (49) da

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \quad \phi_2] u^* d\Gamma \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij}^1 & g_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Donde

$$g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma \quad \text{y} \quad g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma \quad (54)$$

2.6 Tratamiento de esquinas

En general, la discretización de un elemento frontera presentará una serie de puntos de discontinuidad geométrica que requieren atención especial ya que las condiciones en ambos lados pueden no ser las mismas.

Cuando la frontera de la región se discretiza en elementos lineales, el nodo 2 del elemento j es el mismo punto que el nodo 1 del elemento $j + 1$ (figura 6).

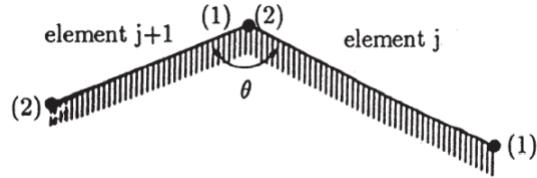


Figure 6: Intersección de elementos

Si bien existen esquinas con diferentes valores de flujo en ambos lados en muchos problemas prácticos, rara vez se prescriben valores discontinuos del potencial. Como el potencial es único en cualquier punto de la frontera, u_2 del elemento j y u_1 del elemento $j + 1$ tienen el mismo valor. Sin embargo, este argumento no puede aplicarse como regla general al flujo.

Para tener en cuenta la posibilidad de que el flujo en el nodo 2 de un elemento pueda ser diferente del flujo en el nodo 1 del siguiente elemento, **los flujos se pueden organizar en una matriz $2N$** .

Sustituyendo las ecuaciones (52) y (53) para todos los elementos j en (48) se obtiene la siguiente ecuación para el nodo i :

Tenemos

$$c_i u_i + \begin{bmatrix} \bar{H}_{i1} & \bar{H}_{i2} & \cdots & \bar{H}_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i1} & G_{i2} & \cdots & G_{i2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2N} \end{bmatrix} \quad (55)$$

donde \bar{H}_{ij} es igual al término h_{ij}^1 del elemento j más el término $h_{i,j-1}^2$ del elemento $j - 1$.

Por lo tanto, la fórmula (55) representa la ecuación ensamblada para el nodo i .

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (56)$$

esta fórmula se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (57)$$

y todo el conjunto en forma de matriz se convierte

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (58)$$

donde \mathbf{G} es ahora una matriz rectangular de tamaño $N \times 2N$.

Pueden ocurrir varias situaciones en un nodo frontera. Primero, que la frontera es suave en el nodo; en tal caso, ambos flujos "antes" y "después" del nodo son iguales a menos que se prescriban como diferentes, pero en cualquier caso solo se desconocerá una variable, ya sea el potencial o el flujo único.

Segundo, que el nodo es un punto de esquina. En este caso, hay cuatro posibilidades según las condiciones de frontera:

1. Valores conocidos: flujos "antes" y "después" de la esquina.

Valor desconocido: potencial.

2. Valores conocidos: potencial y flujo "antes" de la esquina.

Valor desconocido: flujo "después" de la esquina.

3. Valores conocidos: potencial y flujo "después" de la esquina.

Valor desconocido: flujo "antes" de la esquina.

4. Valor conocido: potencial.

Valores desconocidos: flujo "antes" y "después" de la esquina.

Para **los tres primeros casos** hay un valor desconocido por nodo, los dos valores conocidos se llevan al lado derecho y se obtiene el sistema habitual de ecuaciones $N \times N$, i.e

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (59)$$

donde \mathbf{x} es un vector de incógnitas y \mathbf{A} es una matriz cuadrada, cuyas columnas contienen columnas de la matriz \mathbf{H} , columnas de la matriz \mathbf{G} después de un cambio de signo o la suma de dos columnas consecutivas de \mathbf{G} con un cambio de signo cuando lo desconocido es el valor único del flujo en el nodo correspondiente.

El vector conocido \mathbf{y} se calcula a partir del producto de las condiciones frontera

conocidas y los coeficientes correspondientes de las matrices G o H.

Cuando el número de incógnitas en un nodo de esquina es dos (**caso 4**), se necesita una ecuación adicional para el nodo.

El problema también puede resolverse utilizando la idea de elementos "discontinuos" [15]. En este caso, el segundo nodo del elemento j y el primer nodo del elemento $j + 1$ se desplazan dentro de los dos elementos lineales que se encuentran en la esquina y permanecen como dos nodos distintos en lugar de unirse en uno en la esquina (ver figura 7).

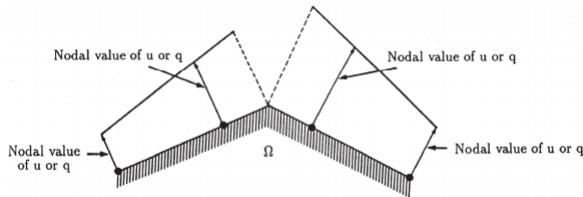


Figure 7: Elementos discontinuos

En la figura 5, 6 y 7 corresponde al Elemento lineal: definiciones básicas y tratamiento de esquinas

Por lo tanto, se puede escribir una ecuación para cada nodo. El potencial y el flujo están representados por funciones lineales a lo largo de todo el elemento en términos de sus valores nodales, pero en principio son discontinuos en la esquina.

Determinación numérica de coeficientes c

Si la frontera no es uniforme en el punto i , el valor $C_i = \frac{1}{2}$ (ecuación (26)) ya no es válido y es necesario aplicar la fórmula (48). Otra posibilidad es calcular los términos diagonales de la matriz H en la ecuación (58) utilizando el hecho de que cuando se aplica un potencial uniforme sobre una región acotada, todas las derivadas (incluidos los valores q) deben ser cero. Por lo tanto, la ecuación (58) se convierte en

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = 0 \quad (60)$$

donde \mathbf{u} es un vector de valores constantes.

Por lo tanto, la suma de todos los elementos de cualquier fila de H debería ser cero, y los valores de los coeficientes diagonales pueden calcularse fácilmente

una vez que se conocen todos los coeficientes fuera de la diagonal, es decir,

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (\text{para } j \neq i)}}^N H_{ij} \quad (61)$$

De esta manera los valores de c_i no es necesario calcularlo explícitamente.

Las consideraciones anteriores son válidas estrictamente para dominios cerrados. Cuando se trata de regiones infinitas, la ecuación (61) debe modificarse. Si se prescribe un potencial de unidad sobre una región no acotada, la integral

$$\int_{\Gamma_\infty} q^* d\Gamma \quad (62)$$

sobre un límite externo ficticio x en el infinito no será cero y dará el resultado [4]

$$\int_{\Gamma_\infty} q^* d\Gamma = -1 \quad (63)$$

Los términos diagonales en este caso están dados por la siguiente fórmula,

$$H_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (\text{para } j \neq i)}}^N H_{ij} \quad (64)$$

2.7 Elementos cuadráticos y de orden superior

Por lo general, es más conveniente para geometrías arbitrarias implementar algún tipo de elemento curvilínea. El más simple de ellos es el elemento cuadrático de tres nodos que requiere trabajar con transformaciones.

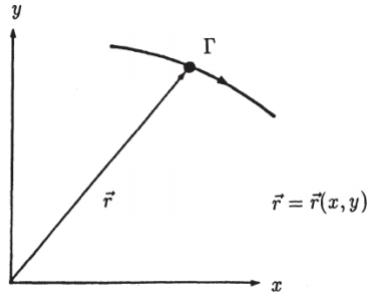


Figure 8: Frontera curvada

Considere la frontera curva que se muestra en la figura 8 donde se definen a lo largo de la frontera y el vector de posición \vec{r} una función del sistema cartesiano (x,y) . Las variables u o q se pueden escribir en términos de funciones de interpolación que dependen de la coordenada homogénea ξ , es decir,

$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (66)$$

donde las funciones de interpolación son

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ \phi_2 &= (1 - \xi)(1 + \xi) \\ \phi_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{aligned} \quad (67)$$

Estas funciones son cuadráticas en ξ , expresiones(66) y (67) dan los valores nodales de las variables u o q cuando están especializadas para los nodos, es decir, con referencia a la figura 9.

| Nodo | ξ | ϕ_1 | ϕ_2 | ϕ_3 | |
|------|-------|----------|----------|----------|--|
| 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 3 | +1 | 0 | 0 | 1 | |

(68)

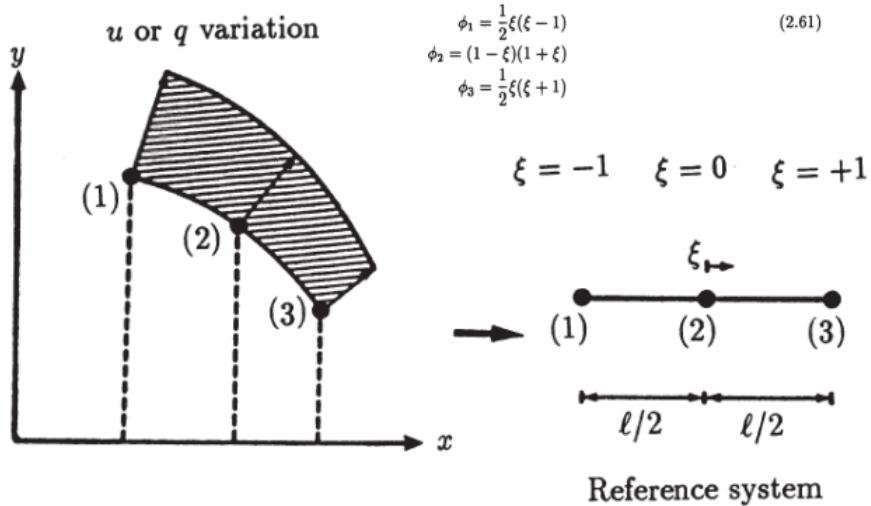


Figure 9: Elemento Cuadrático

Las integrales a lo largo de los elementos cuadráticos son similares a las de los elementos lineales, pero ahora hay tres valores nodales desconocidos. Consideremos, por ejemplo, la integral para los coeficientes de la matriz H , es decir,

$$\int_{\Gamma_j} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] q^* d\Gamma \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 & h_{ij}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (69)$$

donde,

$$\begin{aligned}h_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma \\ h_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \\ h_{ij}^3 &= \int_{\Gamma_j} \phi_3 q^* d\Gamma\end{aligned}\quad (70)$$

La evaluación de estos términos requiere el uso de un jacobiano como las funciones ϕ ; son expresadas en términos de ξ , pero las integrales son funciones de r . Para una curva como esa en la figura 8, la transformación es simple,

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi = |G| d\xi \quad (71)$$

donde $|G|$ es el jacobino.

Por lo tanto, se puede escribir

$$h_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} \phi_k q^* d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \phi_k q^* |G| d\xi \quad (72)$$

Fórmulas como (72) son generalmente demasiado difíciles de integrar analíticamente y la Integración numéricamente debe utilizarse en todos los casos, incluidos los elementos con singularidad. Para más detalles, véanse los Apéndices 1 y 2.

Observe que para calcular los valores del $|G|$ jacobiano en (71) uno necesita para conocer la variación de las coordenadas x e y en términos de ξ . Esto se puede hacer definiendo la forma geométrica del elemento de la misma manera que las variables que u y q se definen, es decir, utilizando interpolación cuadrática,

$$\begin{aligned} x &= \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \\ y &= \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \end{aligned} \quad (73)$$

donde el subíndice indica el número de nodo. Este es un concepto similar al de elementos isoparamétricos comúnmente utilizados en el análisis de elementos finitos.

Elementos cúbicos

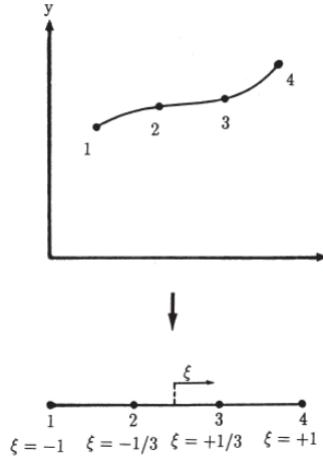


Figure 10: Elementos cúbicos con cuatro nodos

Elementos de mayor orden que cuadrático rara vez se utilizan en la práctica, pero pueden ser interesantes en algunas aplicaciones particulares.

Debido a esto, el caso de elementos con una variación cúbica de geometría y de variables u o q se describirán brevemente. En este caso, las funciones se definen tomando cuatro nodos sobre cada elemento (figura 10)

$$\begin{aligned} u &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 + \phi_4 u_4 \\ q &= \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 + \phi_4 q_4 \end{aligned} \quad (74)$$

y de manera similar

$$\begin{aligned} x &= \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 \\ y &= \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \phi_4 y_4 \end{aligned} \quad (75)$$

donde las funciones de interpolación son

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{16}(1 - \xi) [-10 + 9(\xi^2 + 1)] \\ \phi_2 &= \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi) \\ \phi_3 &= \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi) \\ \phi_4 &= \frac{1}{16}(1 + \xi) [-10 + 9(\xi^2 + 1)] \end{aligned} \quad (76)$$

Las funciones de interpolación toman los siguientes valores en los nodos:

| Nodo | ξ | ϕ_1 | ϕ_2 | ϕ_3 | ϕ_4 | (77) |
|------|----------------|----------|----------|----------|----------|------|
| 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 3 | $+\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 4 | +1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |

Otra posibilidad con los elementos cúbicos es definir la variación de u y q en términos de la función y su derivada a lo largo del elemento en los dos puntos extremos como se muestra en la figura 11.

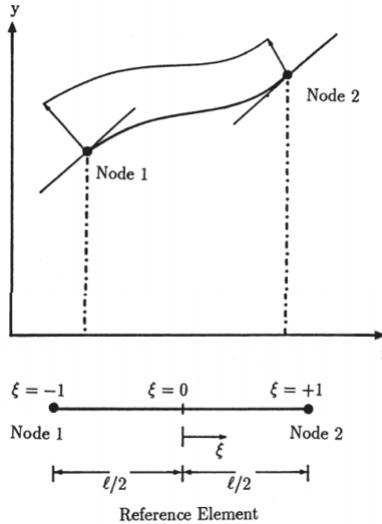


Figure 11: Elementos cúbicos con solo dos nodos

Este tipo de elemento cúbico podría utilizarse en los casos en que se deseé tener una definición correcta de la derivada a lo largo de r , por ejemplo para calcular los flujos en la dirección tangencial, o si una reducción en el número de nodos a lo largo del elemento es obligatorio. En algunos casos, todavía puede ser mejor seguir describiendo la geometría con cuatro nodos a menos que esto se defina mediante una función analítica

La función correspondiente es dada por

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \Gamma} \right)_1 + \phi_3 u_2 + \phi_4 \left(\frac{\partial u}{\partial \Gamma} \right)_2 \quad (78)$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(2 + \xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{8}\ell(\xi - 1)^2(\xi + 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(2 - \xi) \\ \phi_4 &= \frac{1}{8}\ell(\xi + 1)^2(\xi - 1) \end{aligned} \quad (79)$$

donde ℓ es la longitud del elemento. En el caso de un elemento curvo 1 se puede calcular integrando el $|G|$ jacobiano, dado por la ecuación (72), sobre el elemento. Las mismas funciones ϕ se utilizan para q, x e y .

Resultados numéricos para un problema de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad (80)$$

se resuelve en este ejemplo para la geometría que se muestra en la figura

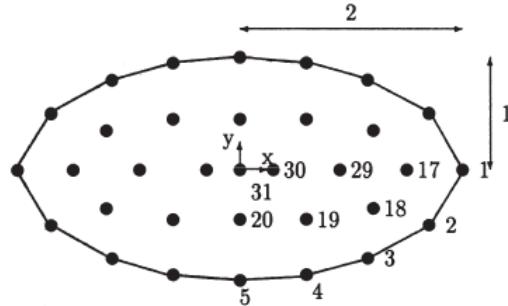


Figure 12: Problema de la ecuación de Laplace

Aquí una elipse del eje semi-mayor de longitud 2 y eje semi-menor de la longitud 1 es discretizado utilizando 16 elementos de contorno lineal como se describe en la sección 2.5. También 17 nodos internos donde se requiere la solución.

No se pueden prescribir condiciones de frontera homogéneas para la ecuación de Laplace, el resultado será $u = q = 0$ en todos los nodos. Como consecuencia, una Condición de frontera tiene que ser impuesta, por ejemplo

$$u = \bar{u} = x + y \quad (81)$$

El lector puede verificar fácilmente que (81) es una solución particular a la ecuación de Laplace (80) que se puede utilizar para verificar los resultados que se dan en la tabla

| Node | X | Y | BEM | Exact |
|------|-----|-------|--------|--------|
| 17 | 1.5 | 0.0 | 1.507 | 1.500 |
| 18 | 1.2 | -0.35 | 0.857 | 0.850 |
| 19 | 0.6 | -0.45 | 0.154 | 0.150 |
| 20 | 0.0 | -0.45 | -0.451 | -0.450 |
| 29 | 0.9 | 0.0 | 0.913 | 0.900 |
| 30 | 0.3 | 0.0 | 0.304 | 0.300 |
| 31 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Tabla 2.1: Resultados BEM para la ecuación de Laplace

Para obtener estos resultados, el Programa 1 de la sección 4 se puede utilizar con CONST = 0.

3 Formulación para la Ecuación de Poisson

3.1 Relaciones Básicas

Las integrales de dominio en los elementos de contorno pueden surgir debido a una variedad de efectos tales como fuerzas del cuerpo, estados iniciales, términos no lineales y otros. En lo que sigue, se estudiará el uso de la ecuación diferencial de Poisson no homogénea. La formulación resultante se extenderá más adelante a los casos para los que el término del lado derecho es, entre otros, una función del espacio, el propio potencial o incluye efectos dependientes del tiempo.

Considere primero el caso de la ecuación de Poisson, es decir.

$$\nabla^2 u = b \quad \text{en } \Omega \quad (82)$$

donde en se supone que b es una función conocida. Se puede comenzar aplicando formulaciones residuales ponderadas para deducir las ecuaciones integrales básicas, de una manera similar a la realizada para la ecuación de Laplace en la sección 2, es decir.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (83)$$

que se integra por partes dos veces produce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega - \int_{\Omega} bu^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \end{aligned} \quad (84)$$

Después de sustituir la solución fundamental u^* de la ecuación de Laplace en (84) y agrupar todos los términos frontera, se obtiene

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} bu^* d\Omega = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma \quad (85)$$

Observe que aunque se conoce la función b y, en consecuencia, la integral en Ω no introduce ninguna nueva incógnita, el problema ha cambiado de carácter, ya que ahora necesitamos llevar a cabo una integral de dominio, así como las integrales de frontera. La constante c_i , como se explicó anteriormente, depende únicamente de la geometría de contorno en el punto i considerado.

3.2 Enfoque de integración de celdas

La forma más sencilla de calcular el término de dominio en la ecuación (85) es subdividiendo la región en una serie de celdas internas, en cada una de las cuales se puede aplicar un esquema de integración numérica como la cuadratura Gauss.

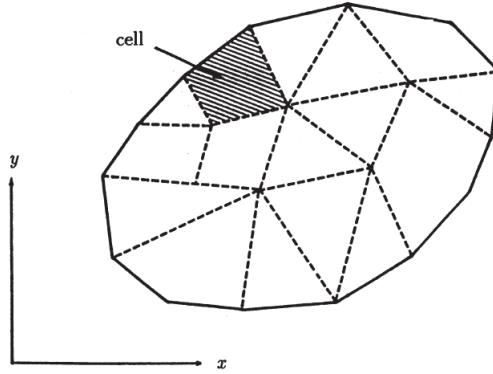


Figure 13: Elementos de frontera y celdas internas

En este caso, para cada punto frontera i , la integral de dominio en (85) se puede escribir como

$$d_i = \int_{\Omega} bu^* d\Omega = \sum_{c=1}^M \left[\sum_{k=1}^R w_k (bu^*)_k \right] \Omega_e \quad (86)$$

donde la integral será aproximado por una suma sobre diferentes celdas

- M es el número total de celdas

- w_k son los pesos de integración de Gauss

-la función (bu^*) debe evaluarse en los puntos de integración k de cada celda

- R es el número total de puntos de integración en cada celda.

- Ω_e es el área de la celda e .

- El término d_i es el resultado de la integración numérica y es diferente para cada posición i de los nodos de frontera.

La ecuación (85) ahora se puede escribir como

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j + d_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (87)$$

o en forma de matriz,

$$Hu + d = Gq \quad (88)$$

Tenga en cuenta que las integrales de dominio también deben calcularse al calcular cualquier valor de potencial o flujos en puntos internos, por lo tanto

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j - d_i \quad (89)$$

donde i es ahora un punto interno.

Los orígenes concentrados son muy fáciles de manejar en los elementos de frontera. Pueden ser vistos como un caso especial para el cual la función b en el punto interno ℓ se convierte en

$$b = Q_\ell \Delta_\ell \quad (90)$$

donde

$-Q_\ell$ es la magnitud de la fuente.

$-\Delta_\ell$ es la función delta Dirac.

Suponiendo que existan varias de estas funciones, se pueden escribir en un término de suma como sigue,

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega + \sum_{\ell=1}^P Q_\ell u_\ell^* = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (91)$$

donde u_ℓ^* es el valor de la solución fundamental en el punto ℓ y P es el número de fuentes concentradas dentro del dominio.

Resultados de la ecuación de Poisson utilizando células internas

La ecuación $\Delta u = -2$ se resolvió para la geometría mostrada en la figura 14 con la condición de frontera homogénea $\bar{u} = 0$. Este problema se discute en detalle en la sección 3.4.5 donde se presentan los resultados de DRM para la misma geometría.

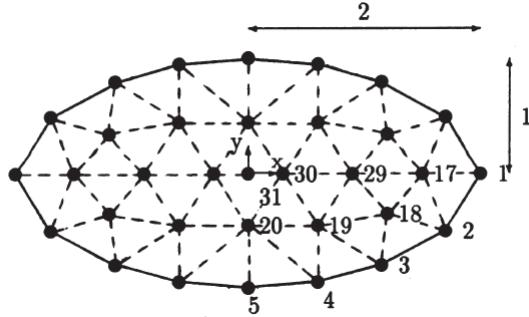


Figure 14: Sección elíptica: Elementos de frontera y celdas internas

Se utilizó el mismo elemento de frontera que en el problema anterior, sin embargo, el dominio se discretizó mediante 48 celdas internas.

Los resultados se presentan en la tabla 2.2. Estos resultados se pueden obtener con el Programa 1 usando CONST=2.

3.3 Método de Monte Carlo

Se ha propuesto otra forma de integrar los términos de dominio en elementos de frontera por Gipson [16] y consiste en utilizar un sistema de puntos de integración aleatorios en lugar de aplicar una cuadrícula de integración regular como se hace en el método de integración de celda.

| Nodo | X | Y | Celda | Exacto |
|------|-----|-------|-------|--------|
| 17 | 1.5 | 0.0 | 0.331 | 0.350 |
| 18 | 1.2 | -0.35 | 0.401 | 0.414 |
| 19 | 0.6 | -0.45 | 0.557 | 0.566 |
| 20 | 0.0 | -0.45 | 0.629 | 0.638 |
| 29 | 0.9 | 0.0 | 0.626 | 0.638 |
| 30 | 0.3 | 0.0 | 0.772 | 0.782 |
| 31 | 0.0 | 0.0 | 0.791 | 0.800 |

Tabla 2.2: Resultados de celdas para el problema de Poisson

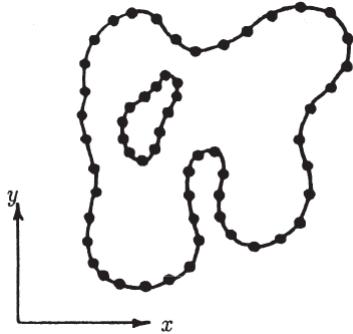


Figure 15: Geometría de la región

La técnica de Monte Carlo se puede utilizar para generar los puntos aleatorios. A pesar de que el concepto puede aplicarse a problemas tridimensionales y bidimensionales, solo este último será considerado aquí por simplicidad. Considere una región Ω (figura 15) de una geometría muy general sobre la cual se quiere integrar el siguiente término

$$d_i = \int_{\Omega} bu^* d\Omega \quad (92)$$

El único requisito para la técnica de Monte Carlo es que la función b sea integrable.

Además, se supondrá aquí que la región está acotada y los límites de la integración se puede definir dentro de un área rectangular como se muestra en la figura 16.

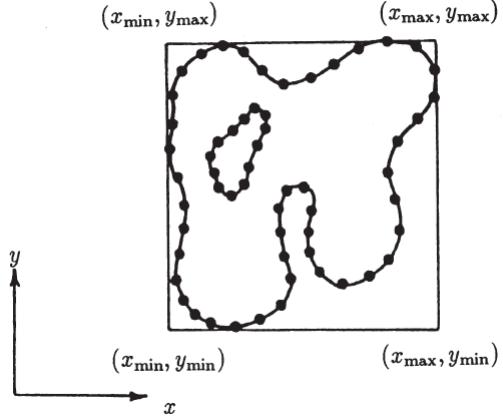


Figure 16: Definición del Rectángulo Mínimo

A continuación, una serie de puntos de coordenadas aleatorias distribuidas uniformemente (x_k, y_k) es elegido en el rectángulo, y cada punto se prueba para verificar si pertenece al dominio Ω , de lo contrario, el punto se descarta.

Uno puede considerar (x_k, y_k) como un punto de integración en el que el valor de la función bu^* se calcula, es decir

$$u^*b(x_k, y_k) = (u^*b)_k \quad (93)$$

y agregue esto al total acumulado de $\sum_{k=1}^M (u^*b)_k$. Se realiza un cálculo similar con el cuadrado de esta función, es decir

$$\sum_{k=1}^M [(u^*b)_k]^2 \quad (94)$$

La operación puede repetirse hasta que se haya obtenido el número deseado M de puntos. Luego se puede encontrar el valor de la integral (8) , es decir

$$d_i = \frac{\Omega}{M} \sum_{k=1}^M (u^*b)_k \quad (95)$$

con la varianza dada por la siguiente relación

$$v_i = \frac{\Omega}{M} \sum_{k=1}^M (u^*b)_k^2 - d_i^2 \quad (96)$$

La varianza se puede usar para estimar el error en el cálculo.

El algoritmo ha sido implementado por Gipson [16] para la solución de un amplio variedad de problemas de tipo Poisson. Los resultados, aunque alentadores, tienden a ser costoso en tiempo de computadora ya que generalmente se requiere una gran cantidad de puntos para calcular el término del dominio, sin embargo, la idea es interesante porque es simple de aplicar. Se podrían intentar mejoras en el método dando puntos aleatorios, diferentes pesos correspondientes a su posición con respecto a otros puntos.

Resultados usando el método de Monte Carlo

Este ejemplo del uso del método Monte Carlo está tomado de Gipson [16]. El problema es la generación de calor en una placa cuadrada isotrópica de lado 12.

Usando la simetría del problema, solo se modela una cuarta parte de la placa. La discretización del elemento frontera utilizada se muestra en la figura 17.

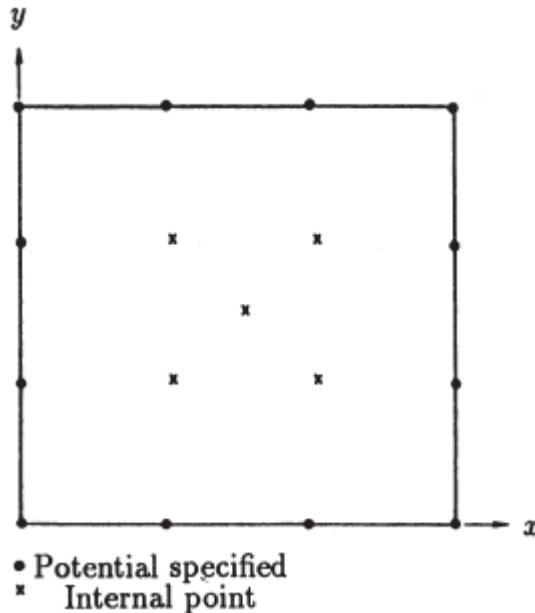


Figure 17: Un cuarto de plato cuadrado

Dado el uso de simetría, las condiciones de frontera son $u = 0$ en los bordes $x = 6$ y $y = 6$ y $q = 0$ en los bordes $x = 0$ e $y = 0$.

12 elementos lineales fueron empleado, utilizando el concepto de elementos discontinuos, discutido en la sección 2.6, en puntos de esquina.

La ecuación que rige para este caso es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -Q \quad (97)$$

donde Q es la tasa de generación interna de calor, k_x y k_y son conductividades térmicas y u es la temperatura. Si Q , k_x y k_y tienen valores unitarios, la ecuación (97) se reduce a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = -1$$

La solución se calculó utilizando 500,1000 y 3000 puntos de integración aleatorios, con los resultados dados en la tabla 2.3. La solución exacta se toma de la referencia [17]

| X | Y | u_{500} | u_{1000} | u_{3000} | Exact |
|-----|-----|-----------|------------|------------|-------|
| 2.0 | 2.0 | 8.985 | 8.543 | 8.537 | 8.690 |
| 4.0 | 2.0 | 5.802 | 5.645 | 5.736 | 5.748 |
| 3.0 | 3.0 | 6.498 | 6.362 | 6.477 | 6.522 |
| 2.0 | 4.0 | 5.718 | 5.634 | 5.633 | 5.748 |
| 4.0 | 4.0 | 3.961 | 3.987 | 3.981 | 3.928 |
| 2.0 | 0.0 | 9.761 | 9.607 | 9.718 | 9.588 |
| 4.0 | 0.0 | 6.628 | 6.161 | 6.234 | 6.286 |

Tabla : Resultados del método de Monte Carlo para placa cuadrada

3.4 El uso de soluciones particulares

Una manera simple de resolver la ecuación (85) sin tener que calcular ninguna integral de dominio es cambiando las variables de tal manera que estas integrales desaparezcan [18] Esto se puede intentar dividiendo la función u en una solución particular \tilde{u} y la solución de la ecuación homogénea asociada.

Para ilustrar este procedimiento, considere la ecuación de Poisson con condiciones de contorno como se da en la sección (2). Suponga ahora que la función potencial u se puede escribir como

$$u = \tilde{u} + \hat{u} \quad (98)$$

donde \tilde{u} es la solución de la ecuación homogénea y \hat{u} es una solución particular de la ecuación de Poisson tal que

$$\nabla^2 \hat{u} = b \quad (99)$$

Ahora se puede escribir la integral de dominio en (85) como

$$\int_{\Omega} bu^* d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}) u^* d\Omega \quad (100)$$

Integrando por partes esta ecuación y tomando en consideración el carácter especial de la solución fundamental se encuentran las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} bu^* d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}) u^* d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \hat{u} (\nabla^2 u^*) d\Omega + \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \hat{u} d\Gamma = \\ &= -c_i \hat{u}_i + \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \hat{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (101)$$

donde $\hat{q} = \partial \hat{u} / \partial n$

Sustituyendo en (85) uno encuentra la siguiente expresión,

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = c_i \hat{u}_i + \int_{\Gamma} q^* \hat{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma \quad (102)$$

Observe que ahora todas las integrales se calculan solo a lo largo de la frontera. La ecuación anterior se puede escribir en una forma más compacta en función de la nueva variable \tilde{u} de la siguiente manera,

$$c_i \tilde{u}_i + \int_{\Gamma} q^* \tilde{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \tilde{q} d\Gamma \quad (103)$$

donde $\tilde{u} = u - \hat{u}$

La fórmula (102) se puede escribir después de la discretización de frontera como

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j = c_i \hat{u}_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} \hat{u}_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} \hat{q}_j \quad (104)$$

La aplicación de lo anterior a todos los puntos frontera produce el siguiente sistema,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}} \quad (105)$$

o simplemente

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{d} \quad (106)$$

donde el vector \mathbf{d} es dado por

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}} \quad (107)$$

La principal desventaja de este enfoque es la necesidad de describir el comportamiento de la función b en una forma analítica que en algunos casos puede ser difícil o imposible de hacer.

En los capítulos posteriores, la técnica se generalizará para dar cuenta de tipos arbitrarios o desconocidos de funciones b mediante el uso de una suma de soluciones particulares localizadas con coeficientes que se determinarán. Esta idea dio origen al Método de Reciprocidad Dual propuesto por primera vez por Nardini y Brebbia en 1982 [12]

Resultados usando soluciones particulares

La ecuación de Poisson $\nabla^2 u = -2$ se resuelve utilizando el procedimiento de solución descrito anteriormente, es decir

$$u = \tilde{u} + \hat{u} \quad (108)$$

lo que significa que la solución completa u se expresará como la suma de la solución a la ecuación homogénea de Laplace \tilde{u} , más una solución particular a la ecuación de Poisson \hat{u} .

El lector puede verificar fácilmente que

$$\hat{u} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad (109)$$

Es una solución.

Ahora se pueden obtener resultados para la ecuación de Poisson resolviendo la ecuación de Laplace, utilizando el Programa 1 con CONST=0. Las condiciones de contorno se definen por $\hat{u} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ con un cambio de signo para que cuando se realice la suma $u = \tilde{u} + \hat{u}$, el resultado neto sea la imposición de una condición de frontera homogénea en Γ .

La geometría del problema es la misma que la utilizada en la sección 3.2, figura 14, pero sin las celdas internas, con las cuales se pueden comparar los resultados de este procedimiento de solución. El procedimiento de solución puede entenderse fácilmente examinando la tabla

| Nodo | X | Y | \tilde{u} | \hat{u} | $u = \tilde{u} + \hat{u}$ | Celda | Exacto |
|------|-----|-------|-------------|-----------|---------------------------|-------|--------|
| 17 | 1.5 | 0.0 | 1.473 | -1.125 | 0.348 | 0.331 | 0.350 |
| 18 | 1.2 | -0.35 | 1.200 | -0.781 | 0.419 | 0.401 | 0.414 |
| 19 | 0.6 | -0.45 | 0.855 | -0.281 | 0.574 | 0.557 | 0.566 |
| 20 | 0.0 | -0.45 | 0.747 | -0.101 | 0.646 | 0.629 | 0.638 |
| 29 | 0.9 | 0.0 | 1.049 | -0.405 | 0.644 | 0.626 | 0.638 |
| 30 | 0.3 | 0.0 | 0.835 | -0.045 | 0.790 | 0.772 | 0.782 |
| 31 | 0.0 | 0.0 | 0.808 | 0.000 | 0.808 | 0.791 | 0.800 |

Tabla: Resultados para el problema de Poisson usando soluciones particulares

La columna \tilde{u} en la tabla es la solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno esenciales definidas por la ecuación $\hat{u} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ con un cambio de signo.

La columna \hat{u} es el resultado de evaluar $\hat{u} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ las coordenadas de los nodos.

La columna $u = \tilde{u} + \hat{u}$ es la suma de los dos, por lo tanto, es la solución

del problema. Tenga en cuenta que aquí se ha resuelto un problema con una integral de dominio sin el uso de celdas internas.

El Método de Reciprocidad Dual puede interpretarse como una superposición de soluciones particulares localizadas. Una instancia en la que el DRM es equivalente al método de solución particular se discute en la sección 3.2.3.

3.5 El enfoque vectorial de Galerkin

Otra forma de tratar con las fuentes de volumen es transformar la integral de dominio resultante en integrales de frontera equivalentes. En principio, esto es posible cuando la función b es armónica (aunque en la siguiente sección se mostrará cómo este proceso puede generalizarse para ocuparse de otras funciones). Armónico significa que b obedece la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 b = 0 \quad (110)$$

Para efectuar la transformación, que básicamente se logra mediante la integración por partes, se utiliza una nueva función w^* que cumple

$$\nabla^2 w^* = u^* \quad (111)$$

donde u^* es la solución fundamental definida en la ecuación (11) solución fundamental.

A continuación, la **identidad de Green** se escribe en la forma

$$\int_{\Omega} (b \nabla^2 w^* - w^* \nabla^2 b) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(b \frac{\partial w^*}{\partial n} - w^* \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (112)$$

Si se tiene en cuenta $\nabla^2 b = 0$ y (111), la ecuación (112) se reduce a

$$\int_{\Omega} b u^* d\Omega = \int_{\Gamma} b \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} w^* \frac{\partial b}{\partial n} d\Gamma \quad (113)$$

Por lo tanto, la integral de dominio se ha reducido efectivamente a dos integrales de frontera diferentes.

La función w^* requerida en este caso es simplemente la solución fundamental de la ecuación bi-armónica, es decir,

$$\nabla^2 u^* = \nabla^2 (\nabla^2 w^*) = \nabla^4 w^* = -\Delta_i \quad (114)$$

que para dos dimensiones es bien conocido,

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) + 1 \right] \quad (115)$$

y para tres dimensiones viene dado por

$$w^* = \frac{1}{8\pi}r \quad (116)$$

Observe que para dos dimensiones w^* satisface (111) de la siguiente manera,

$$\nabla^2 w^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) = u^* \quad (117)$$

y para tres dimensiones uno encuentra que

$$\nabla^2 w^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) = \frac{1}{4\pi r} = u^* \quad (118)$$

3.6 El método de reciprocidad múltiple

El Método de Reciprocidad Múltiple (MRM) es una nueva técnica de transformación de integrales de dominio a la frontera que puede verse como una generalización del enfoque vectorial de Galerkin descrito anteriormente. Emplea un conjunto de soluciones fundamentales de orden superior que permiten la aplicación de la identidad de Green a cada término de la sucesión en secuencia.

Como resultado, el método puede conducir en el límite a la formulación solo en la frontera exacta del problema.

Considere nuevamente el caso de la ecuación de Poisson, pero ahora con el subíndice 0 en el lado derecho de la ecuación para diferenciar de funciones similares que se generarán durante la solución, es decir

$$\nabla^2 u = b_0 \quad \text{en } \Omega \quad (119)$$

donde u y b_0 son las funciones habituales de potencial y fuente, respectivamente. La solución fundamental de la ecuación de Laplace definida por (11) también tendrá un subíndice 0 por las razones explicadas anteriormente.

Al aplicar los principios de reciprocidad, se obtiene la misma expresión que antes, que se escribe a continuación para completar

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q_0^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_0 u_0^* d\Omega = \int_{\Gamma} q u_0^* d\Gamma \quad (120)$$

La integral de dominio en (120) se puede transformar en una serie de integrales de frontera equivalentes. Para hacer esto, uno puede comenzar como en la sección anterior introduciendo una función u_1^* relacionada con la solución fundamental u_0^* por la fórmula (111), i.e

$$u_0^* = \nabla^2 u_1^* \quad (121)$$

Por lo tanto, la integral de dominio en (120) puede expandirse como antes, ecuación (112), pero sin suponer que $\nabla^2 b_0 \equiv 0$

$$\int_{\Omega} b_0 u_0^* d\Omega = \int_{\Omega} b_0 \nabla^2 u_1^* d\Omega = \int_{\Gamma} b_0 q_1^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_1^* \frac{\partial b_0}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u_1^* \nabla^2 b_0 d\Omega \quad (122)$$

Como se supone que la función fuente b_0 es una función conocida del espacio, el valor de $\nabla^2 b_0$ se puede obtener analíticamente; por lo tanto, se puede definir una nueva función b_1 de modo que

$$b_1 = \nabla^2 b_0 \quad (123)$$

La integral de dominio en el lado derecho de (122) se puede escribir de forma similar a la integral anterior y expandirse de la misma manera,

$$\int_{\Omega} b_1 u_1^* d\Omega = \int_{\Gamma} b_1 q_2^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_2^* \frac{\partial b_1}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u_2^* \nabla^2 b_1 d\Omega \quad (124)$$

Tenga en cuenta que ahora se puede calcular una función b_2 de modo que

$$b_2 = \nabla^2 b_1 \quad (125)$$

y este procedimiento continuó tantas veces como se deseé. El enfoque puede generalizarse mediante la introducción de dos sucesiones de funciones definidas por las siguientes fórmulas de recurrencia,

$$\begin{aligned} b_{j+1} &= \nabla^2 b_j \\ \nabla^2 u_{j+1}^* &= u_j^* \text{ for } j = 0, 1, 2 \dots \end{aligned} \quad (126)$$

La integral de dominio finalmente se puede expresar como,

$$\int_{\Omega} b_0 u_0^* d\Omega = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(b_j q_{j+1}^* - u_{j+1}^* \frac{\partial b_j}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (127)$$

donde $q_{j+1}^* = \partial u_{j+1}^* / \partial n$

Al introducir la expresión (127) en la ecuación integral de frontera original, se obtiene la formulación exacta del problema de la sola frontera, i.e.

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q_0^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u_0^* d\Gamma = - \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(b_j q_{j+1}^* - u_{j+1}^* \frac{\partial b_j}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (128)$$

Las integrales se pueden evaluar numéricamente subdividiendo la frontera Γ en elementos como de costumbre. Como las funciones b_j se suponen actualmente como funciones conocidas del espacio, las integrales en la suma pueden calcularse directamente. El mismo tipo de interpolación utilizado para u y q se puede aplicar a b_j y $\partial b_j / \partial n$. Entonces, la ecuación (128) se puede expresar

en términos de el elemento frontera habitual que influye en las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} (que ahora se llamarán \mathbf{H}_0 y \mathbf{G}_0 para diferenciarse de los demás) más aquellas matrices que resultan del uso de soluciones fundamentales de orden superior, se definen como \mathbf{H}_{j+1} y \mathbf{G}_{j+1} ($j = 0, 1, 2, \dots$), ie

$$\mathbf{H}_0\mathbf{u} - \mathbf{G}_0\mathbf{q} = - \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{H}_{j+1}\mathbf{p}_j - \mathbf{G}_{j+1}\mathbf{r}_j) \quad (129)$$

donde los vectores \mathbf{p}_j y \mathbf{r}_j contienen la función b_j y su derivada normal $\partial b_j / \partial n$ respectivamente, evaluado en los nodos frontera.

Los términos de la serie en el lado derecho de la ecuación (129) desaparecen rápidamente siempre que el problema se haya ajustado correctamente (es decir, todas las dimensiones se dividen por la dimensión máxima del problema). Se ha demostrado que la convergencia de la serie es muy rápida en una variedad de casos prácticos. Además, esta convergencia se puede controlar fácilmente ya que todos los términos son conocidos y se puede evaluar la contribución de cada uno de ellos. También debe señalarse que las funciones u_j^* y q_j^* no tienen singularidades para $j = 1, 2, \dots$ y, por lo tanto, su integración no requiere cualquier técnica especial.

Finalmente, la ecuación (129) se puede resolver utilizando subrutinas de elementos de frontera estándar después de tener en cuenta las condiciones de frontera.

Soluciones fundamentales de orden superior

Las soluciones fundamentales de orden superior requeridas aquí están definidas por la fórmula de recurrencia (126). Esta ecuación se puede resolver fácilmente analíticamente cuando el operador de Laplace se escribe en términos de un cilindro (para problemas de 2 - D) o sistema de coordenadas esférico (para 3 - D).

Por ejemplo, para problemas 2 - D, la forma general de la función u_j^* viene dada por la siguiente expresión

$$u_j^* = \frac{1}{2\pi} r^{2j} (A_j \ln r - B_j) \quad (130)$$

Los coeficientes A_j y B_j se obtienen de las siguientes relaciones de recurrencia

$$A_{j+1} = \frac{A_j}{4(j+1)^2} \quad (131)$$

$$B_{j+1} = \frac{1}{4(j+1)^2} \left(\frac{A_j}{j+1} + B_j \right) \quad (132)$$

Para $j = 0$ se obtiene la solución fundamental clásica, es decir, $A_0 = 1$ y $B_0 = 0$.

Observe que las fórmulas (131) y (132) introducen factoriales en los denominadores de coeficientes A_j y B_j y, por lo tanto, garantizan su rápida convergencia.

4 Programa de computadora 1

Se proporcionará una lista completa del Programa 1 a continuación, junto con una descripción de cada subrutina. Los datos y la salida para un problema de prueba se presentan al final de la sección. Este programa resuelve la ecuación de Poisson, $\nabla^2 u = b$, usando elementos de frontera lineales y hasta un máximo de 200 nodos. La función b que se utilizará en este caso es una constante llamada CONST en el programa y se lee como datos. Si CONST $\neq 0$ la integral de dominio resultante se evalúa utilizando la integración numérica sobre las celdas internas. El programa puede usarse para ecuaciones del tipo discutido en el capítulo 5 cuyo lado derecho es una función conocida de (x, y) , que altera solo una línea de la rutina NECMOD que se indica en el listado . Este código no es adecuado para ecuaciones de los tipos discutidos desde el capítulo 6 en adelante, en el que aparece la variable del problema en el dominio integral. En cualquier caso, como se describe el método DRM mucho más potente y conveniente a partir del próximo capítulo, se espera que el lector no necesite recurrir más a las células internas.

Si $b = 0$, entonces CONST se lee como cero, se modela la ecuación de Laplace y se omiten los datos de la celda, ya que en este caso no hay integral de dominio.

La cuadratura de Gauss de cuatro puntos se usa para la integración sobre los elementos de frontera. Una cuadratura gaussiana modificada debido a Hammer [19] se utiliza para la integración sobre las celdas internas. Los factores de peso y las coordenadas del punto de integración se dan como DATOS en la subrutina INPUT1.

Los nombres de las variables en el programa siguen lo más cerca posible a los utilizados en el texto. El programa está en forma modular y muchas de las subrutinas se usarán nuevamente en los programas DRM que se dan en capítulos posteriores. Dado que el objetivo de este libro es una explicación clara del método de doble reciprocidad y sus aplicaciones, se han evitado los refinamientos de programas que no tienen relación con el método en aras de la simplicidad.

4.1 MAINPI

Los datos se leen en INPUT1. En la rutina ASSEM2 se calculan las matrices H y G y almacenado Las condiciones de contorno se aplican a la ecuación.

$$Hu = Gq \quad (133)$$

para reducirlo a la forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (134)$$

como se explica en la sección 2.3. Si la rutina $b \neq 0$ NECMOD lleva a cabo la integración sobre las celdas internas para calcular el vector adicional d. Los vectores d y y se agregan en el programa principal. El vector x se calcula en SOLVER, produciendo los valores desconocidos de u y q. INTERM calcula los valores interiores utilizando los valores frontera ahora conocidos de u y q más las partes de las matrices H y G almacenadas que se relacionan con los nodos internos. Los resultados se imprimen por OUTPUT de rutina.

Este proceso se resume en la figura 18, que muestra los módulos del Programa 1.

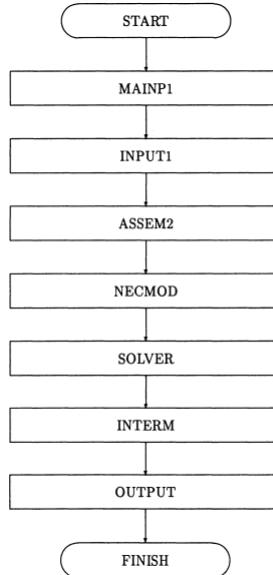


Figure 18: Modular Structure for Program 1

4.2 Subrutina INPUT1

Esta subrutina difiere de la que se utilizará en los programas DRM posteriores en que, en el presente caso, los datos de la celda deben leerse. Todo el material en COMMON/CELL se refiere a las celdas internas. Los puntos de integración y los factores de peso. Se definen en DATA: POEI, FDEP respectivamente para integración sobre elementos y CP, WW para integración sobre celdas. Primero, se lee la constante b o CONST. Si es cero, se está modelando la ecuación de Laplace; de lo contrario, la ecuación de Poisson. A continuación, se leen los datos globales: NN Número de nodos frontera, NE Número de elementos frontera, L Número de nodos internos Si $b \neq 0$ NCI también se necesita el número de celdas internas.

A continuación, u y q se inicializan. Si $b \neq 0$ se definen los nodos de celda, los números se almacenan en MKJ para evitar confusión con CON, que se utiliza para los nodos de los elementos de frontera. Para las celdas triangulares utilizadas aquí, MKJ (I, 1), MKJ (I, 2) y MKJ (I, 3) contendrán los números de los tres nodos de la celda I. Estos tres puntos deben indicarse en orden antihorario a partir de cualquiera de ellos. Las coordenadas de los nodos de frontera se dan en el sentido de las agujas del reloj para que el programa pueda almacenar los números de los nodos de cada elemento en CON correctamente, seguidos de las coordenadas de todos los vértices internos de la celda. A continuación, el programa calcula el área de las celdas internas que se almacenan en la matriz DA.

Luego se tratan las condiciones de contorno. El tipo de condición de frontera se almacena en KODE de la siguiente manera: 1 u conocido, q desconocido; 2 q conocido, u desconocido. Después de KODE está el parámetro VAL, que es el valor conocido de u o q respectivamente. En los nodos internos, u es desconocido y q no está definido. No es necesario leer KODE para los nodos internos, la rutina los asignará automáticamente a cero.

Todos los datos de entrada se imprimen.

4.3 Subrutina ASSEM2

El nombre de esta subrutina proviene de elementos de frontera lineal de 2 nodos ASSEMble, y también se utilizará más adelante en los programas 2 y 3. Primero, las matrices de la H y G se calculan y almacenan. Las condiciones de frontera se aplican a la ecuación $Hu = Gq$ para reducirla a la forma $Ax = y$. La variable de control de bucle DO J1 será el número total de puntos de origen, i.e. NN+L, desde donde se lleva a cabo la integración en todo el frontera. XX, YY son las coordenadas cartesianas de cada punto de integración. Cuando el punto extremo de un elemento coincide con el nodo J1, los coeficientes correspondientes de H para el elemento son cero, y los de G se calculan utilizando la integración exacta. El valor exacto de G se almacena en GE. Los coeficientes diagonales de H se calculan sumando los términos fuera de la diagonal en la misma fila y el resultado se almacena en CC. H se almacena ensamblado pero

G se almacena sin ensamblar debido a la posible discontinuidad de las normales externas en los nodos frontera. Las condiciones de contorno se aplican a continuación. Los valores conocidos de u se multiplican por el coeficiente respectivo de H y se restan de XY y los valores conocidos de q se multiplican por el coeficiente respectivo de G y se suman a XY . Después de la solución, este vector contendrá las incógnitas. Los coeficientes de H y G que corresponden a valores desconocidos de u y q se almacenan en la posición apropiada en A . Tenga en cuenta que, al formar la matriz A y el vector XY correspondiente, solo se utilizan las primeras líneas NN de H y G . Las últimas líneas L se usan en la rutina INTERM.

4.4 Subrutina NECMOD

Esta rutina se llama solo si $b \neq 0$ para evaluar las integrales del dominio utilizando celdas internas. En el programa 2, esto será sustituido por un RHSVEC de rutina que calcula la misma integral utilizando el DRM. Para cada punto fuente I , la integración se lleva a cabo en todo el dominio, i.e. en todas las celdas internas. La integral de dominio se calcula numéricamente utilizando la fórmula (86) y el resultado de la integración se almacena en la matriz D .

4.5 Subrutina SOLVER

Esta es una rutina estándar con las características descritas en las declaraciones de comentarios. Una discusión sobre el mecanismo de eliminación de Gauss está fuera del alcance de este texto, pero se hace referencia al lector [20] donde también se pueden encontrar otros tipos de solucionador. Los resultados se almacenan en XV .

4.6 Subrutina INTERM

Esta rutina calcula los resultados en puntos internos una vez que los valores frontera están disponibles. Dado que la H y G se ha almacenado y la matriz D contiene los resultados de la integración sobre las celdas, el proceso es de simple multiplicación de la matriz. Tenga en cuenta la diferencia en el tratamiento de la H y G debido a que este último no está ensamblado.

4.7 Subrutina OUTPUT

Esta rutina imprime todos los resultados. Es la rutina final que se llamará en el programa principal.

4.8 Resultados de un problema de prueba

Los datos para el Programa 1 se enumeran a continuación. Los conjuntos de datos (iii) y (iv) se omiten si $b = 0$, i.e. si se está modelando la ecuación de Laplace.

i) 1 línea para definir b en $\nabla^2 u = b$

Nombre interno CONST
FORMATO (F11. 5)

ii) 1 línea de datos globales, Número de nodos frontera, Número de elementos frontera, Número de nodos internos.

Nombres internos NN, NE, L
FORMATO (314)

(iii) 1 línea para definir el número de celdas internas.

Nombre interno NCI
FORMATO (14)

(iv) NCI/4 líneas (4 celdas por línea) con los siguientes datos: Número de celda, Nodo 1, Nodo 2, Nodo 3.

Nombre interno MKJ
FORMATO (16I4)

v) NN+L líneas para definir coordenadas de cada nodo. Dos coordenadas (un nodo) por línea. Nodos frontera en el sentido de las agujas del reloj.

Nombres internos X,Y
FORMATO (2F13.6)

vi) NN líneas para definir condiciones de frontera. Un tipo de condición de frontera y un valor por línea.

Nombres internos KODE, VAL
FORMATO (I3,2F11.5)

Datos para el problema de Poisson

Los archivos de datos y resultados enumerados a continuación son para el caso del problema de Poisson considerado en la sección 3.2 (figura 14).

5 El método de reciprocidad dual para ecuaciones del tipo $\nabla^2 u = b(x, y)$

5.1 Desarrollo de ecuaciones

5.1.1 Consideraciones preliminares

En las primeras aplicaciones de BEM siempre había un requisito de que una solución fundamental para el problema en consideración tuviera que estar disponible. Esta solución fundamental tenía que tener en cuenta todos los términos en la ecuación de gabinete para evitar integrales de dominio en la formulación de la ecuación integral de frontera, de lo contrario las celdas internas tenían que definirse [1].

Con los desarrollos recientes en el método, se han encontrado soluciones fundamentales para muchas ecuaciones diferentes [2] ; sin embargo, esto no asegura que haya una disponible para un caso determinado. Además, en muchos casos, es inconveniente alterar un programa incorporando una nueva solución fundamental simplemente porque el usuario desea estudiar una ecuación diferencial ligeramente diferente. El uso de celdas para evaluar integrales de dominio implica una discretización interna que aumenta considerablemente la cantidad de datos necesarios para ejecutar el programa y, por lo tanto, el método pierde algo de su atracción en relación con el Método de Elementos Finitos u otras técnicas de dominio. El uso del método del elemento frontera con integrales de dominio evaluadas por integración sobre celdas internas se explicó en el capítulo 2.

Para evitar los problemas mencionados anteriormente, es deseable tener disponible una técnica de Elemento frontera que:

- Permite obtener una solución de "solo frontera", es decir, sin discretizar el dominio en celdas;
- No depende de obtener una nueva solución fundamental para cada caso;
- Se puede aplicar utilizando un enfoque similar en cada caso, como en el análisis de elementos finitos,

Actualmente existen al menos cinco técnicas que tienen como objetivo satisfacer las condiciones anteriores:

1. Integración analítica del dominio integral;
2. El uso de expansiones de Fourier;
3. La técnica vectorial de Galerkin;

4. El método de reciprocidad múltiple;
5. El método de doble reciprocidad.

El uso de la integración analítica es relativamente reciente, y aunque es un método preciso, su aplicación se limita a casos muy simples [3]. El método de transformación de Fourier no es tan sencillo en la mayoría de los casos, ya que el cálculo de los coeficientes de las expansiones de Fourier es computacionalmente engorroso, sin embargo, el método se ha aplicado con cierto éxito [4]. La técnica vectorial de Galerkin es capaz de transformar ciertos tipos de integrales de dominio en integrales de frontera, pero también tiene una aplicación restringida [2]. El Método de Reciprocidad Múltiple es, en cierto sentido, una extensión reciente y más poderosa de esto [5].

El Método de Reciprocidad Dual se propuso por primera vez en 1982 [6] y se puede decir que satisface todas las condiciones citadas anteriormente: es decir, puede usarse con cualquier tipo de solución fundamental y no necesita celdas internas, sin embargo, permite la definición de nodos internos si el usuario así lo desea. Además, es el método más fácil de usar en la práctica.

En este capítulo, se desarrollará el Método de Reciprocidad Dual para la ecuación de Poisson, que es el tipo más simple de ecuación no homogénea. Se consideran varios términos fuente diferentes. Se presentará un programa de computadora con el cual se pueden obtener los resultados de los ejemplos analizados en este capítulo. Este programa está escrito en forma modular como lo fue el Programa 1 en la sección 2.4

5.1.2 Desarrollo matemático del DRM para la ecuación de Poisson

El DRM se explica en esta sección con referencia a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = b \quad (135)$$

En el presente capítulo $b = b(x, y)$, es decir, b se considera una función conocida de posición. En el capítulo 6, b se considerará en función del potencial, así como de la posición, *i.e.* $b = b(x, y, u)$ y en el capítulo 7, b también se permitirá que sea una función del tiempo, es decir, $b = b(x, y, u, t)$, extendiendo así el Método para problemas no lineales, transitorios y otros.

La solución a la ecuación anterior se puede expresar como la suma de la solución de una ecuación de Laplace homogénea y una solución particular \hat{u} , como se ve en la sección 3.4, tal que

$$\nabla^2 \hat{u} = b \quad (136)$$

En general, es difícil encontrar una solución \hat{u} que satisfaga lo anterior, particularmente en el caso de problemas no lineales o dependientes del tiempo.

El Método de Reciprocidad Dual propone el uso de una serie de soluciones particulares \hat{u}_j en lugar de una sola función \hat{u} . El número de \hat{u}_j utilizado es igual al número total de nodos en el problema. Si hay nodos de frontera de N y nodos internos de L , habrá valores de $N+L$ de \hat{u}_j , ver figura 19 se propone la siguiente aproximación para b :

$$b \simeq \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (137)$$

donde α_j son un conjunto de coeficientes inicialmente desconocidos y f_j son funciones aproximadas. Las soluciones particulares \hat{u}_j , y las funciones aproximadas f_j , están vinculadas a través de la relación

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (138)$$

Las funciones f_j in (137) se pueden comparar con las funciones de interpolación habituales ϕ_i en expansiones tales como,

$$u = \sum \phi_i u_i \quad (139)$$

que se utilizan en los elementos de frontera en sí mismos y en el análisis de elementos finitos. La ecuación (137) es exacta en los puntos de nodo, como lo es la ecuación (139).

La expansión (137) puede entonces considerarse válida sobre todo el dominio del problema como en el caso de un gran superelemento. Las funciones f_j son dependientes de la geometría, como lo son los ϕ_i en la ecuación (139). En la actualidad, no se aplicará ninguna restricción a estas funciones y, de hecho, se pueden usar muchos tipos diferentes, cada uno de los cuales resulta en una función diferente \hat{u}_j según se determina a partir de (136). La cuestión de qué

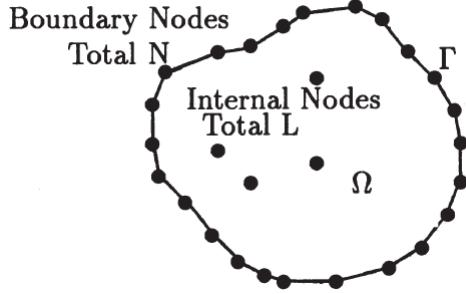


Figure 19: Frontera y nodos internos

tipo de función f_j usar se considerará en detalle en la sección 5.2. Sustituir la ecuación (135) en (136) da

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (140)$$

La ecuación (140) puede sustituirse en la ecuación original (136) para dar la siguiente expresión:

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (141)$$

El término fuente b de (136) ha sido reemplazado en la ecuación (141) por una suma de productos de coeficientes α_j y el Laplaciano que opera en las soluciones particulares \hat{u}_j . Ahora se aplicará el procedimiento visto en el capítulo 2 para desarrollar el método del elemento frontera para la ecuación de Laplace. La ecuación (141) puede multiplicarse por la solución fundamental e integrarse sobre el dominio, produciendo

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (142)$$

Tenga en cuenta que se puede obtener el mismo resultado a partir de la ecuación

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad (143)$$

y sustituyendo por b (ecuación(140)).

Al integrar por partes los términos laplacianos en (142), como se muestra en el capítulo 2, produce la siguiente ecuación integral para cada nodo fuente i ,

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (144)$$

El término \hat{q}_j en la ecuación (144) se define como $\hat{q}_j = \partial \hat{u}_j / \partial n$, donde n es la unidad exterior normal a Γ , y se puede expandir a

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (145)$$

Tenga en cuenta que la ecuación (144) no implica integrales de dominio.

El término fuente b en (135) ha sido sustituido por integrales de frontera equivalentes. Esto se realizó aproximando primero b usando la ecuación (140), y luego expresando los lados derecho e izquierdo de la expresión resultante como integrales de frontera usando una técnica residual ponderada. Se puede lograr el mismo resultado utilizando la segunda identidad de Green o un principio de reciprocidad. Es esta operación la que le da el nombre al método: la reciprocidad se ha aplicado a ambos lados de (142) para llevar todos los términos a la frontera, de ahí el Método de Reciprocidad Dual.

El siguiente paso, como se explica en el capítulo 2, es escribir la ecuación (144) en forma discreta, con sumas sobre los elementos de frontera que reemplacen a las integrales. Esto da para un nodo fuente i la expresión

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* u d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (146)$$

Cabe señalar que, dado que \hat{u} y \hat{q} son funciones conocidas una vez que se define f , no es necesario aproximar su variación dentro de cada elemento frontera mediante el uso de funciones de interpolación y valores nodales como se hace para u y q . Sin embargo, hacerlo implica que las mismas matrices H y G definidas en el capítulo 2 pueden usarse en ambos lados de la ecuación. Este procedimiento introduce una aproximación en la evaluación de los términos en el lado derecho de la ecuación (146); sin embargo, se ha demostrado que el error es pequeño y la eficiencia del método se ha incrementado considerablemente. Después de introducir las funciones de interpolación e integrar sobre cada frontera elemento, la ecuación anterior se puede escribir en términos de valores nodales como

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (147)$$

El índice k se usa para los nodos de frontera que son los puntos de campo. Después de la aplicación a todos los nodos frontera utilizando una técnica de colocación, la ecuación (147) se puede expresar en forma de matriz como

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}_j - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}}_j) \quad (148)$$

En la ecuación (148), los términos c_i se han incorporado a la diagonal principal de \mathbf{H} . Tenga en cuenta que para los nodos internos se adoptará un procedimiento diferente.

Si cada uno de los vectores $\hat{\mathbf{u}}_j$ y $\hat{\mathbf{q}}_j$; se considera una columna de las matrices $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{Q}}$ respectivamente, entonces la ecuación (148) puede escribirse sin la suma para producir

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad (149)$$

La ecuación (149) es la base para la aplicación del método de reciprocidad dual del elemento frontera e implica la discretización del frontera solamente. Los nodos internos pueden definirse en el número y en las ubicaciones deseadas por el usuario; Esto generalmente se hace en puntos donde es deseable conocer la solución interior. Si las ubicaciones exactas de los nodos interiores no son importantes, otra posibilidad es que el código de la computadora los elija de acuerdo con la variación de los términos fuente.

Nodos Interiores

La definición de nodos interiores normalmente no es una condición necesaria para obtener una solución frontera; sin embargo, la solución generalmente será más precisa si se utilizan varios de estos nodos. Las comparaciones de resultados para diferentes números de nodos interiores se presentan para la ecuación de Poisson en la sección 4.5, para la ecuación de Helmholtz en el capítulo 4 y para un problema de difusión dependiente del tiempo en el capítulo 5.

Una situación obvia donde los nodos interiores son necesarios para obtener una solución surge si se aplica una condición de frontera homogénea $u = 0$ en todos los nodos de frontera.

Cuando se definen los nodos interiores, cada uno se coloca de forma independiente y no forman parte de ningún elemento o celda, por lo que solo se necesitan las coordenadas como datos de entrada. Por lo tanto, estos nodos pueden definirse en cualquier orden.

El vector $\boldsymbol{\alpha}$

Ahora se considerará el vector $\boldsymbol{\alpha}$ en la ecuación (149). Se vio en la ecuación (137) que

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} f_j \alpha_j \quad (150)$$

Al tomar el valor de b en $(N + L)$ diferentes puntos, se obtiene un conjunto de ecuaciones como (150); esto puede expresarse en forma de matriz como

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \quad (151)$$

donde cada columna de \mathbf{F} consiste en un vector f_j que contiene los valores de la función f_j en los puntos de colocación de DRM $(N + L)$. En el caso de los problemas considerados en este capítulo, la función b en (135) y (150) es una función conocida de posición. Así (151) puede invertirse para obtener $\boldsymbol{\alpha}$, i.e.

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (152)$$

El lado derecho de la ecuación (149) es, por lo tanto, un vector conocido. Escribiendo (149) como

$$Hu - Gq = d \quad (153)$$

donde

$$\mathbf{d} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad (154)$$

se ve que el vector \mathbf{d} puede ser obtenido directamente multiplicando matrices y vectores conocidos. La ecuación (154) se puede comparar con (86) que obtiene el mismo resultado al integrarse sobre las células internas.

Aplicando condiciones de frontera a (153) como se explica en el capítulo 2 (los valores de N de u y q se conocen en Γ), esta ecuación se reduce a la forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (155)$$

donde \mathbf{x} contiene N valores frontera desconocidos de u o q . Una discusión completa de la implementación de diferentes condiciones de frontera en el análisis BEM se puede encontrar en [2].

Solución interior

Después de obtener la solución de (155) utilizando técnicas estándar, los valores en cualquier nodo interno se pueden calcular a partir de la ecuación (147), cada uno de los cuales implica una multiplicación separada de vectores y matrices conocidos. En el caso de los nodos internos, como se explicó en el capítulo 2, $c_i = 1$ y la ecuación (147) se convierte en

$$u_i = - \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k + \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k + \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (156)$$

El desarrollo de DRM para ecuaciones de tipo Poisson está ahora completo. En la siguiente sección, se considerarán las diferentes funciones de aproximación f y las respectivas expresiones \hat{u} y \hat{q} y en la sección 3.3 se discutirá la implementación de la computadora.

5.2 Diferentes f expansions

La solución particular \hat{u} , su derivada normal \hat{q} y las correspondientes funciones

aproximadas f utilizadas en el análisis DRM no están limitadas por la formulación, excepto que la matriz F resultante, la ecuación (151), no debe ser singular.

Para definir estas funciones, es habitual proponer una expansión para f y luego calcular \hat{u} y \hat{q} usando las ecuaciones (138) y (145), respectivamente.

Nardini y Brebbia, los creadores del método, han propuesto los siguientes tipos de funciones para f [6,7]:

1. Elementos del triángulo de Pascal;
2. Series trigonométricas;
3. La función de distancia r utilizada en la definición de la solución fundamental.

Se pueden proponer muchos otros tipos de funciones. La función r fue adoptada primero por Nardini y Brebbia y luego por la mayoría de los investigadores como la alternativa más simple y precisa.

Si $f = r$, entonces se puede demostrar fácilmente que la función \hat{u} correspondiente es $r^3/9$, en el caso bidimensional, recordando la definición de r

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (157)$$

donde r_x y r_y son los componentes de r en la dirección de los ejes x e y.
La función q estará dada por

$$\hat{q} = \frac{r}{3} [r_x \cos(n, x) + r_y \cos(n, y)] \quad (158)$$

En lo anterior, los cosenos de dirección se refieren a la normal exterior en el frontera con respecto a los ejes x e y. La fórmula (158) se puede obtener fácilmente usando (145) y recordando que $\partial_r/\partial_x = r_x/r$ y $\partial_r/\partial_y = r_y/r$.

El trabajo reciente [8-14] sugiere que $f = r$ es de hecho un componente de la serie

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad (159)$$

Las funciones \hat{u} y \hat{q} correspondientes a (159) son:

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2} \quad (160)$$

$$\hat{q} = \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} + \dots + \frac{r^m}{(m+2)} \right) \quad (161)$$

En principio, cualquier combinación de términos puede seleccionarse de (159). Para ilustrar esto, para las ecuaciones de tipo Poisson, se considerarán tres casos:

1. $f = r$
2. $f = 1 + r$
3. $f = 1$ en un nodo y $f = r$ en los nodos restantes

El caso (2) generalmente se recomienda y se usa en el programa de la sección 3.4. Las alternativas (1) y (3) requieren algunas modificaciones, pero producen resultados similares. Dos casos adicionales,

4. $f = 1 + r + r^2$
5. $f = 1 + r + r^2 + r^3$

se consideran en el próximo capítulo para problemas convectivos y no lineales donde las ecuaciones de gobierno son más complejas. Sin embargo, en todos los casos, los resultados difieren poco de los obtenidos con $1 + r$, que es, como se explicará, el más simple. alternativa.

5.2.1 Caso $f = r$

En este caso, la matriz F contendrá ceros en la diagonal inicial, pero la matriz no es singular si no se utilizan nodos dobles (si dos nodos tienen las mismas coordenadas, dos filas y columnas de F serán idénticas). El solucionador utilizado para obtener α tendrá que ser capaz de intercambiar filas y columnas. Una vez que α se determina con precisión, se pueden esperar buenos resultados. Los resultados para el caso de una ecuación de Poisson analizada usando $f = r$ se dan en la figura 28.

5.2.2 Caso $f = 1 + r$

La presencia de la constante garantiza la "integridad" de la expansión, y también implica que la diagonal inicial de F ya no es cero. La ecuación (151) puede resolverse para α utilizando la eliminación estándar de Gauss. Esta es la alternativa más simple al programa, y la que se adoptó en el Programa 2, sección 3.4. Ya ha produjo excelentes resultados para una amplia gama de problemas de ingeniería como se verá en este y en capítulos posteriores. Los resultados para un ejemplo de Poisson analizado usando $f = 1 + r$ se dan en la figura 28.

Tenga en cuenta que en este caso $\hat{u} = r^2/4+r^3/9$ and $\hat{q} = (r_x \partial x / \partial n + r_y \partial y / \partial n) (1/2+r/3)$

5.2.3 Caso $f = 1$ en un nodo y $f = r$ en los nodos restantes

Otro conjunto de funciones aproximadas que se ha sugerido es una combinación de $f = r$ y $f = 1$. La idea de incluir una función $f = \text{constante}$ es simular mejor los efectos de una fuente constante. Sin embargo, tenga en cuenta que $f = 1$ no se puede usar en más de un nodo, ya que de lo contrario la matriz F se vuelve singular.

Usando la notación $f_{\ell j}$, donde ambos índices se refieren a puntos de colocación DRM, deje que el valor de j en el que $f = 1$ sea k . En todos los demás valores de j , $f = r$. En este caso, f puede expresarse mediante la fórmula

$$f_{\ell j} = \delta_{jk} + (1 - \delta_{jk}) r_{\ell j} \quad (162)$$

donde δ es el delta de Kronecker y k tiene un valor fijo igual al número del nodo en el que se aplica la constante, generalmente el nodo central del problema. En el caso del problema que se muestra en la figura 3.5, por ejemplo, el nodo central está numerado 31, entonces k en la ecuación (162) debe tener el valor 31. Entonces, para la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = -2$, la ecuación (151) ahora tendrá la forma:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} r_{\ell j} & \dots & 1 & r_{\ell j} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \end{matrix}} \\ \boxed{\alpha} = \boxed{\begin{matrix} -2 \\ -2 \\ \vdots \end{matrix}} \end{array}$$

j=k

Figure 20: 3.29

Resolver este sistema produce un vector α que consiste completamente en ceros excepto en la posición k donde $\alpha_k = -2$.

Lo anterior es equivalente a una expansión de b , ecuación (137), en la forma

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j = \alpha_k = -2 \quad (163)$$

es decir, no hay sumatoria involucrada ni aproximación para el caso del término fuente constante; de hecho, para una constante b ,

$$\int_{\Omega} bu^* d\Omega = b \int_{\Omega} u^* d\Omega = b \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}) u^* d\Omega \quad (164)$$

desde $\nabla^2 \hat{u} = 1$ para $\hat{u} = r^2/4$. Ahora se puede aplicar un principio de reciprocidad al último término en el anterior; así, en este caso, el Método de Reciprocidad Dual es equivalente a la técnica de soluciones particulares descritas en la sección 3.4.

5.3 Implementación de computadora

La implementación de la computadora del DRM se explica en esta sección. Primero, las ecuaciones (149) y (156) se escriben en una forma esquematizada, y luego se escribe otra ecuación esquematizada que las incluye a ambas. Finalmente, se discute el signo de los componentes de la función r y sus derivados.

5.3.1 Ecuaciones matriciales esquematizadas

La ecuación (149), a partir de la cual se obtiene la solución en los nodos frontera, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{N \times N} & \boxed{N} & - & \boxed{N \times N} & \boxed{N} = \\
 \mathbf{H} & \mathbf{u} & & \mathbf{G} & \mathbf{q} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 \boxed{N \times N} & \boxed{N \times (N+L)} & - & \boxed{N \times N} & \boxed{N \times (N+L)} \\
 \mathbf{H} & \mathbf{\hat{U}} & & \mathbf{G} & \mathbf{\hat{Q}}
 \end{array} \right] & & & & \boxed{N+L} \\
 & & & & \alpha
 \end{array}$$

Figure 21: 3.32

Observe que hay un vector conocido de tamaño N en el lado derecho de la figura 21, llamado d en la ecuación (153). Después de aplicar las condiciones de frontera se obtiene la ecuación (155). Los coeficientes de las matrices H y G en la ecuación anterior se calculan de la manera habitual como se muestra en el capítulo 2. Estas matrices son las mismas en ambos lados de la ecuación.

Cada coeficiente de las matrices \hat{U} y \hat{Q} es una función de la distancia entre dos nodos. Llamando los coeficientes de \hat{U} por \hat{u}_{kj} , y los de \hat{Q} por \hat{q}_{kj} , entonces los k puntos son los nodos de frontera, y los puntos j se refieren a todos los nodos, frontera e interno. Por lo tanto, hay N k puntos y $(N + L)$ j puntos, generando matrices de tamaño Nx $(N + L)$.

En esta etapa es importante recordar que, para facilitar el tratamiento de puntos de discontinuidad geométrica, el Programa 1 del capítulo 2 consideró la matriz G en forma desarmada, i.e. como una matriz rectangular de dimensiones $N \times 2N$. Dado que se utilizará la misma estructura de programa para la implementación de DRM, la matriz \hat{Q} también deberá considerarse en forma no ensamblada. Por lo tanto, \hat{Q} tendrá, de hecho, las dimensiones $2N \times (N + L)$, con dos valores de \hat{q}_{kj} para cada nodo frontera k, obtenido aplicando la expresión (145) para los dos elementos que se unen en ese nodo.

La discontinuidad de la normalidad externa en los nodos frontera se puede ver en la figura 22.

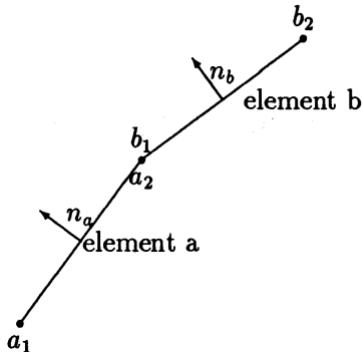


Figure 22: Unión de dos elementos frontera

Para obtener el vector α , la matriz F está construida de tamaño $(N + L) \times (N + L)$. Cada uno de sus términos $f_{\ell j}$ es una función de la distancia entre los puntos ℓ y j , los cuales toman todos los valores de 1 a $(N + L)$. F es, por lo tanto, una matriz simétrica. El vector b también se construye, siendo sus coeficientes los valores nodales de la función b. Por el momento, se supone que b es una función conocida, por lo tanto, α se puede encontrar a través de la ecuación (151) utilizando la eliminación estándar de Gauss.

Una vez obtenidos los valores de las incógnitas en el frontera, el siguiente paso es calcular los valores en los nodos internos. Para esto, la ecuación (156) se usa en la siguiente forma esquematizada

$$\begin{aligned}
 & \boxed{L \times L} \quad \boxed{L} = \boxed{L \times N} \quad \boxed{N} - \boxed{L \times N} \quad \boxed{N} \\
 & \boxed{\mathbf{I}} \quad \boxed{\mathbf{u}} \quad \boxed{\mathbf{G}} \quad \boxed{\mathbf{q}} \quad \boxed{\mathbf{H}} \quad \boxed{\mathbf{u}} \\
 & + \left[\boxed{L \times N} \quad \boxed{N \times (N+L)} - \boxed{L \times N} \quad \boxed{N \times (N+L)} \right] \boxed{N+L} \\
 & \quad \boxed{\mathbf{H}} \quad \boxed{\hat{\mathbf{U}}} \quad \boxed{\mathbf{G}} \quad \boxed{\hat{\mathbf{Q}}} \quad \boxed{\alpha} \\
 & + \boxed{L \times L} \quad \boxed{L \times (N+L)} \quad \boxed{N+L} \\
 & \quad \boxed{\mathbf{I}} \quad \boxed{\hat{\mathbf{U}}} \quad \boxed{\alpha}
 \end{aligned}$$

Figure 23: 3.33

La figura 23 será considerada, término por término. En el lado izquierdo, una matriz de identidad de tamaño $L \times L$ multiplica los valores L de \mathbf{u} en los nodos internos. Esto se debe a los términos c_i , que son todos la unidad en los nodos internos. La misma matriz aparece en el último término en el lado derecho. Las particiones de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} de tamaño $L \times N$ que aparecen en ambos lados de (figura 23) se producen integrando sobre el frontera de cada nodo interno y, por lo tanto, no son las mismas particiones de \mathbf{H} y \mathbf{G} dadas en (figura 21). En el primer y segundo términos en el lado derecho, \mathbf{G} y \mathbf{H} multiplican los valores frontera ahora conocidos de \mathbf{q} y \mathbf{u} , respectivamente.

Las matrices $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{Q}}$ de tamaño $N \times (N + L)$ que aparecen en el tercer y cuarto términos son exactamente las mismas que se dan en (figura 21).

El último término en (figura 23) es extremadamente importante. Es, en cierto sentido, un término "extra" ya que no aparece en (figura 21), ya que se ha incorporado a la diagonal principal de \mathbf{H} . Se genera por el término $\alpha_j \hat{u}_{ij}$ de la ecuación (156). Su contribución a la solución interna es importante, y en ningún caso debe omitirse. La matriz $\hat{\mathbf{U}}$ en este término es diferente de la del tercer término. Considerando que un coeficiente genérico es \hat{u}_{ij} , entonces tendrá el rango 1, L y j tendrá el rango 1, $(N + L)$. El vector α es como se describió anteriormente para la ecuación (figura 21).

La relación entre las ecuaciones (figura 21) y (figura 23) se puede ver fácilmente si se dibuja una tercera representación esquemática en la que ambas se muestran en un esquema global, ahora válido para los nodos internos y de frontera. Esto se hace de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline BS & 0 \\ \hline N \times N & N \times L \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline BS \\ \hline IS \\ \hline \end{array}} - \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline BS & 0 \\ \hline IS & 0 \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline BS \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}} = \\
 \\
 \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline BS & 0 \\ \hline N \times N & N \times L \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline (BS + IS) & 0 \\ \hline N \times (N+L) & L \times (N+L) \\ \hline \end{array}} - \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline BS & 0 \\ \hline IS & 0 \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline (BS + IS) & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline BS \\ \hline IS \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\alpha}
 \end{array}$$

Figure 24: 3.34

En la ecuación anterior, las particiones matriciales marcadas BS se usan exclusivamente en la solución frontera, mientras que las marcadas IS se usan exclusivamente en la solución de nodos internos; los marcados (BS+IS) se usan en ambos. Las particiones vacías se indican como 0 y las matrices de identidad que aparecen en la (figura 23) están marcadas con I.

Esta representación con todas las matrices en forma $(N + L) \times (N + L)$ simplifica la comprensión del método y se utilizará en el próximo capítulo para problemas para los cuales b es una función desconocida.

Dado lo anterior, ambas figuras (figura 21) y (figura 23) pueden representarse juntas por la ecuación matricial

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (165)$$

De las ecuaciones esquematizadas se puede ver que es necesario usar los puntos de asignación de DRM $(N + L)$ para obtener resultados mejorados tanto en los nodos de frontera como en los nodos interiores. Aunque las soluciones no están acopladas, el número y la posición de los nodos internos influirán en la solución frontera a través del término b, de acuerdo con ecuación (137).

Un programa de computadora escrito para ecuaciones de tipo Poisson se presentará en la sección 5.4. Al examinarlo, y los programas de computadora posteriores en los capítulos 4 y 5, se debe tener en cuenta la representación esquemática anterior.

5.3.2 Signo de los componentes de \mathbf{r} y sus derivados

La función de distancia r utilizada en el análisis bidimensional BEM se define como $r^2 = r_x^2 + r_y^2$, donde r_x y r_y son las proyecciones de r en los ejes x e y, respectivamente.

Las derivadas de r con respecto a x e y están dadas por r_x/r y r_y/r . Expresiones similares se mantienen en tres dimensiones.

Al calcular los coeficientes de cada fila de las matrices H y G, se define un punto fijo i (punto fuente) y la integración se lleva a cabo sobre el frontera. Por lo tanto, r puede considerarse como el módulo de un vector \vec{r}_{ik} donde i es un punto fijo y k variable a lo largo del frontera.

Al calcular los coeficientes de las matrices DRM \hat{U} y \hat{Q} , se ha demostrado en la ecuación (147) y en las representaciones esquemáticas anteriores que los índices son diferentes de los utilizados en el caso de las matrices H y G. Para las matrices DRM r puede considerarse como el módulo de un vector \vec{r}_{kj} donde, para cada punto frontera k, j representa cada uno de los otros nodos, frontera e interno. Para calcular una línea dada de \hat{U} y \hat{Q} , el punto k se fija y se considera que j varía, como se muestra en la figura 25.

Los puntos i son puntos fuente, los puntos k son nodos de frontera y los puntos j son puntos de colocación DRM. Las matrices BEM H y G usan los puntos fuente i, mientras que las matrices DRM, que son relaciones geométricas, no lo hacen.

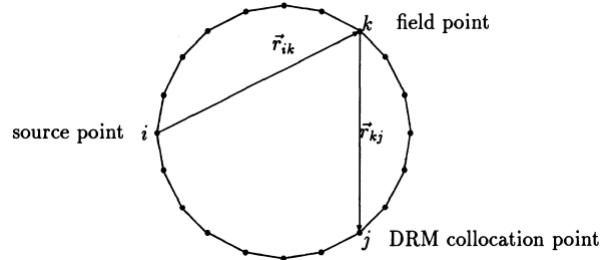


Figure 25: Vectores \vec{r}_{ik} y \vec{r}_{kj}

Así

$$\begin{aligned} r_{ik}^2 &= (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \\ r_{kj}^2 &= (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 \end{aligned} \quad (166)$$

Las filas y columnas de las matrices H y G están dadas por i y k respectivamente, mientras que las de \hat{U} y \hat{Q} están dadas por k y j, respectivamente.

Dejando $j = i$ se puede ver que r_x y r_y cambiarán los signos en el segundo caso.

Lo anterior no es importante en el cálculo de \hat{U} ya que esta matriz no contiene derivados; sin embargo, si no se usa el signo correcto de r_x y r_y , se obtendrá la transposición de la matriz \hat{Q} , lo que dará como resultado una solución errónea.

La matriz DRM F también se genera teniendo en cuenta los puntos de colocación DRM, ya que también representa relaciones geométricas y no incluye los nodos de origen i . El cambio de signo mencionado anteriormente también se produce al calcular sus derivados, que serán necesarios en la sección 6.2.

5.4 Programa de computadora 2

En esta sección, el DRM proporcionará un programa de computadora para la solución de ecuaciones de tipo Poisson. El programa adopta la expansión $f = 1+r$ y está especializado para el caso de la función b en la ecuación (5.1) que es una función conocida de posición. Se puede emplear una sola función o una suma de funciones conocidas (por ejemplo, $b = 1 + x^2 + \sin x$). El tipo de función que se utilizará debe ser proporcionado por el usuario e incorporado a la subrutina ALFAF2 en la posición indicada en la sección 5.4.3.

Si b es una función de la variable del problema, se debe utilizar el Programa 3 (capítulo 4); si b es una función dependiente del tiempo, debe emplearse el Programa 4 (capítulo 5).

Los elementos lineales se usan por simplicidad, aunque cualquier tipo de elemento se puede usar con el DRM. Otro tipo de elemento implicaría la revisión completa de la rutina ASSEM2 y algunos pequeños cambios en INPUT2, INTERM y RHSVEC. Si se van a utilizar elementos curvos, se debe emplear una integración especial, como se describe en el Apéndice 2.

El programa de computadora que se presentará está en forma modular, utilizando algunas de las subrutinas que se han dado en el Programa 1 (capítulo 2), que resuelve la ecuación de Poisson utilizando celdas internas. Nuevamente, el programa está dimensionado para hasta 200 nodos, y su estructura se muestra en la figura 26.

Los módulos del programa:

- ASSEM2
- SOLVER
- INTERM
- OUTPUT

se describieron y enumeraron en el capítulo 2 y se utilizarán en el formulario ya proporcionado. En esta sección, se describirán y enumerarán las siguientes nuevas rutinas:

- MAINP2
- INPUT2
- ALFAF2
- RHSVEC

Para construir el Programa 2 a partir del Programa 1, se llevan a cabo las siguientes operaciones:

1. Sustitución de MAINP2 por MAINP1
2. Sustitución de INPUT2 por INPUT1
3. Sustitución de RHSVEC por NECMOD
4. Inclusión de ALFAF2

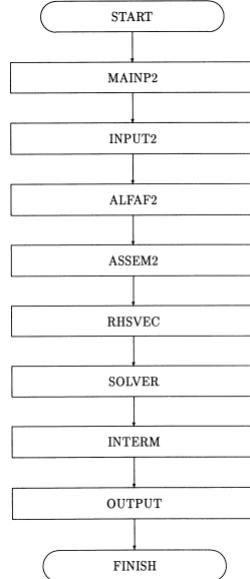


Figure 26: Estructura modular para el programa 2

Los nombres de las variables utilizadas en el programa son los mismos que los utilizados en el Programa 1. Cuando se introducen nuevas variables, estos tendrán símbolos lo más cercanos posible a los utilizados en el texto. Al final de la sección, se proporcionan resultados y datos para un problema de prueba.

5.4.1 MAINP2

La estructura de MAINP2 es muy similar a la de MAINP1. Los datos se leen con una nueva rutina, INPUT2, de la que se ha purgado toda referencia a las celdas.

A continuación, el vector α se calcula en función de los valores conocidos de la función $b(x,y)$, a partir de la siguiente relación

$$\alpha = F^{-1}b \quad (167)$$

y se explica en la sección 5.4.3 sobre la subrutina ALFAF2.

El resto de la rutina sigue a MAINP1, excepto que ahora se llama a la rutina DRM RHSVEC para calcular el vector d, i.e.

$$d = (\hat{H} - \hat{G}\hat{Q})\alpha \quad (168)$$

en lugar de la rutina celular NECMOD.

5.4.2 Subrutina INPUT2

Al comparar INPUT2 e INPUT1, el lector ya puede ver algunas de las ventajas del DRM. La subrutina INPUT2 es mucho más corta ya que se han eliminado los puntos de integración, los factores de peso, la conectividad y otros datos relacionados con las celdas. La lista de INPUT2 es la siguiente:

5.4.3 Subrutina ALFAF2

Esta es una rutina muy simple. El usuario define el tipo de función b que se utilizará en la línea marcada por la declaración de comentario. Luego se construye la matriz F, y se obtiene α mediante eliminación de Gauss utilizando la rutina SOLVER. El vector α se almacena en la matriz ALFA.

5.4.4 Subrutina RHSVEC

Esta rutina DRM evalúa el vector $d = (\hat{H} - \hat{G}\hat{Q})\alpha$. Las matrices G y H ya están disponibles, ya que se almacenaron cuando se llamó a la subrutina ASSEM2. ASSEM2 aparece en la sección 4.

La rutina tiene cinco etapas:

1. Calcular $\hat{Q}\alpha$.

El resultado es un vector que se almacena en QH. Los coeficientes de \hat{q} se almacenan en QH1 y QH2 para los nodos al principio y al final de cada elemento, a fin de tener en cuenta la posible discontinuidad en la normalidad externa en los

nodos frontera como se discutió en la sección 3.

2. Calcule $\hat{G}\hat{Q}\alpha$.

El vector resultante se almacena en D. La multiplicación se lleva a cabo teniendo en cuenta que G se ha almacenado sin ensamblar.

3. Calcule $\hat{U}\alpha$.

El vector resultante se almacena en UH. El valor de \hat{u} para un nodo dado se pone en UH1. Este proceso es más directo que la etapa (1) ya que no hay discontinuidad en \hat{u} en los nodos, por lo que no es necesario hacer referencia a los elementos en el cálculo.

4. Calcule $H\hat{U}\alpha$.

Aquí el resultado para $\hat{U}\alpha$ se multiplica por H.

5. Calcular $c_i \hat{u}_{ij} \alpha_j$.

La contribución de estos términos debe tenerse en cuenta para los nodos interiores. Tenga en cuenta que como $c_i = 1$ este proceso es equivalente a agregar $\hat{U}\alpha$ a D para los nodos interiores como se muestra en las representaciones esquemáticas dadas en las figuras 21 - 24.

La lista de RHSVEC es la siguiente:

5.4.5 Comparación de resultados para un problema de torsión utilizando Diferentes funciones aproximadas

Los resultados se presentarán para el problema de la torsión de una sección elíptica [15] ya discutida en el capítulo 2.

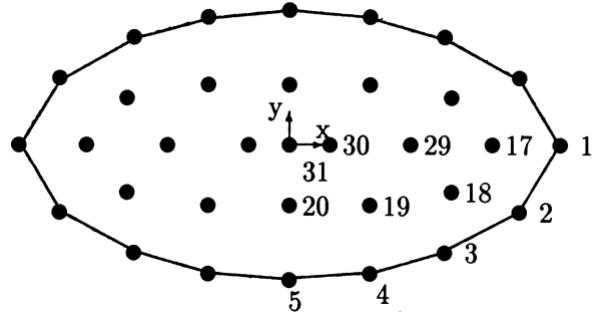


Figure 27: Discretización del problema de elipse

Formulación

El problema de la torsión de Saint-Venant de un miembro de sección transversal constante se rige por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -2\theta \quad (169)$$

donde G es el módulo de corte y θ el ángulo de giro. La variable del problema es la función de estrés v , de modo que

$$\tau_{xz} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (170)$$

La definición de $u = v/G\theta$ ecuación (169) se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad (171)$$

que es lo mismo que la ecuación (135) con $b = -2$ y la ecuación de Poisson estudiada en la sección 3.2.

La sección elíptica que se muestra en la figura 27 tiene un eje semi-mayor $a = 2$ y un eje semi-menor $b = 1$. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (172)$$

La ecuación (172) no solo permite generar las coordenadas de los nodos frontera en la figura 27, sino que también aparece en la solución exacta que para $G = \theta = 1$ viene dada por:

$$u = -0.8 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (173)$$

Por lo tanto, se puede ver que (173) satisface la condición frontera $u = 0$ en Γ . La ecuación puede verificarse mediante sustitución en (171). La solución para q se obtiene a partir de

$$q = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (174)$$

En el caso de una elipse, los cosenos de dirección de la normal exterior en cualquier punto del frontera están dados por $\partial x/\partial n = x/a$ y $\partial y/\partial n = y/b$ de modo que

$$q = -0.2(x^2 + 8y^2) \quad (175)$$

Resultados DRM

Para la solución DRM se utilizaron 16 elementos de frontera lineales y se definieron 17 nodos internos. Los resultados se dan en la figura 28 para todas las funciones f consideradas en las secciones 2.1-2.3. Los resultados en los doce puntos de la tabla describen la solución completa debido a la simetría. Los resultados de las fronteras son bastante pobres en el nodo 1 debido a la discreta discreción allí. Los resultados obtenidos en la sección 3.2 usando integración celular también se incluyen para comparación.

| Variable | Node | X | Y | $f = r$ | $f = 1 + r$ | $f = 1 \text{ or } r$ | Cell | Exact |
|----------|------|-------|--------|---------|-------------|-----------------------|--------|--------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | -0.680 | -0.680 | -0.682 | -0.733 | -0.8 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | -1.019 | -1.020 | -1.024 | -1.046 | -1.018 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | -1.357 | -1.359 | -1.363 | -1.378 | -1.322 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | -1.531 | -1.532 | -1.536 | -1.549 | -1.528 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | -1.587 | -1.588 | -1.592 | -1.611 | -1.6 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | 0.349 | 0.349 | 0.350 | 0.331 | 0.350 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | 0.418 | 0.418 | 0.418 | 0.401 | 0.414 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | 0.574 | 0.573 | 0.573 | 0.557 | 0.566 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | 0.646 | 0.646 | 0.646 | 0.629 | 0.638 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | 0.643 | 0.643 | 0.643 | 0.626 | 0.638 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | 0.789 | 0.789 | 0.789 | 0.772 | 0.782 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | 0.807 | 0.807 | 0.807 | 0.791 | 0.800 |

Figure 28: Resultados de torsión de elipse para diferentes funciones f

Para los elementos lineales empleados en la discretización, los resultados que utilizan las tres funciones f diferentes son muy similares, por lo que se recomienda el uso de $f = 1 + r$, ya que es el más sencillo de usar y no requiere consideraciones especiales. Tenga en cuenta que los resultados de integración celular son mucho menos precisos. En la figura 29 se presentan los resultados de DRM para el mismo problema con $f = 1 + r$ considerando diferentes números de nodos internos.

| Variable | Node | X | Y | $L = 17$ | $L = 13$ | $L = 9$ | $L = 5$ | $L = 1$ | Exact |
|----------|------|-------|--------|----------|----------|---------|---------|---------|--------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | -0.680 | -0.678 | -0.677 | -0.676 | -0.666 | -0.8 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | -1.020 | -1.017 | -1.016 | -1.013 | -0.995 | -1.018 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | -1.357 | -1.359 | -1.354 | -1.349 | -1.325 | -1.322 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | -1.532 | -1.530 | -1.525 | -1.517 | -1.499 | -1.528 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | -1.588 | -1.585 | -1.580 | -1.573 | -1.557 | -1.6 |
| u | 31 | 0.0 | 0.0 | 0.807 | 0.806 | 0.803 | 0.798 | 0.788 | 0.800 |

Figure 29: Resultados del problema de torsión para diferentes valores de L

Se puede ver que, en este caso, la sensibilidad de los resultados al número de nodos internos es pequeña. La variación total de los resultados de $L = 1$ a $L = 17$ es aproximadamente del 2%.

5.4.6 Datos y resultados para el programa 2

El archivo de datos para el problema de torsión se proporciona a continuación. Estos datos son menores que los necesarios para el mismo problema usando el Programa 1, sección 2.4, porque no se usan celdas.

La entrada total de datos consiste en:

- i) 1 línea de datos globales, Número de nodos frontera, Número de elementos frontera, Número de nodos internos.

Nombres internos NN; NE; L
FORMATO (3I4)

- ii) NN+L líneas para definir coordenadas de cada nodo. Los nodos frontera se dan en el sentido de las agujas del reloj.

Nombres internos X; Y
FORMAT (2F13.6)

- iii) NN líneas para definir condiciones de contorno. Un tipo de condición de frontera y un valor por línea.

Nombres internos KODE; VAL
FORMAT (I3,F11.5)

Un problema de referencia

Para evaluar el rendimiento de los métodos numéricos, se han adoptado una serie de problemas estándar de referencia con soluciones analíticas conocidas. Lo siguiente es de NAFEMS Thermal Analysis Benchmarks #9(ii) ref 2D/PO/CNSR [16]. Los detalles del problema se muestran en la figura 30.

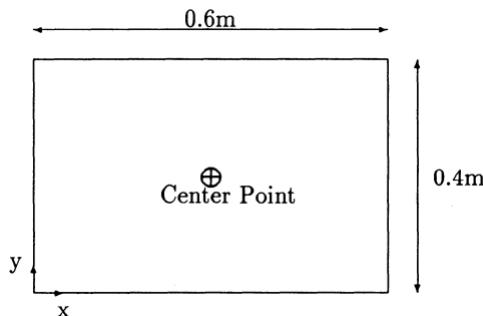


Figure 30: El problema de referencia NAFEMS

La temperatura u en el frontera se mantiene a 0°C . Hay una fuente de calor distribuida de 1000000W/m^3 (asumiendo el grosor de la unidad). La temperatura en el punto central debe ser 310.1°C para $K_x = K_y = 52$. Este problema se rige por la ecuación de Poisson.

$$\nabla^2 u = -\frac{1000000}{52} \quad (176)$$

Usando las técnicas ya explicadas, el DRM da un valor de 314.6° en este punto, un error de 1.5%.

Se probaron dos discretizaciones, una con un elemento lineal por 0.1 m del frontera y un nodo en cada punto de esquina, y otra con los mismos elementos pero con dos nodos en cada esquina para modelar la discontinuidad en q en estos puntos.

En este caso, los nodos de las esquinas estaban ligeramente distanciados del punto de la esquina a lo largo de los bordes del problema. Esto es necesario para evitar producir una matriz F singular como se explicó en la sección 5.2.1. Ambas discretizaciones produjeron el mismo resultado en el nodo central.

5.5 Resultados para diferentes funciones $b = b(x, y)$

Ahora se presentarán ejemplos del uso del programa dado en la sección 5.4 para diferentes funciones conocidas $b(x, y)$. En todas las aplicaciones se utilizará el mismo problema de geometría, el que ya figura en la figura 27 con la condición de frontera homogénea $u = 0$.

En lo que respecta a la ecuación de gabinete, es necesario modificar una línea de la rutina ALFAF2 para tener en cuenta cada nueva función b . Este cambio se explicará en cada caso.

5.5.1 El caso $\nabla^2 u = -x$

Este caso y todos los demás en esta sección se modelarán utilizando la geometría del elemento que se muestra en la figura 27. La ecuación que rige es

$$\nabla^2 u = -x \quad (177)$$

| Variable | Node | X | Y | Exact | $f = 1 + r$ | Cell Solution |
|----------|------|-------|--------|--------|-------------|---------------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | -0.571 | -0.497 | -0.493 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | -0.620 | -0.635 | -0.623 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | -0.556 | -0.586 | -0.578 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | -0.326 | -0.334 | -0.330 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | 0.187 | 0.188 | 0.176 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | 0.177 | 0.181 | 0.171 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | 0.121 | 0.124 | 0.118 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | 0.205 | 0.208 | 0.200 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | 0.083 | 0.088 | 0.082 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Figure 31: Soluciones DRM y Celulares de $\nabla^2 u = -x$

La solución exacta viene dada por

$$u = -\frac{2x}{7} \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right) \quad (178)$$

que satisface la condición frontera $u = 0$ en Γ y produce

$$q = -\frac{x}{14} \left(\frac{3x^2}{2} + 2y^2 - 2 \right) - \frac{4xy^2}{7} \quad (179)$$

Los resultados tanto para el DRM con $f = 1 + r$ como para las celdas internas (Programa 1) se dan en la figura 31. Los malos resultados en el nodo 1 se atribuyen a la discreta discreción cerca de este punto.

Observe que para usar el Programa 2 para obtener estos resultados, línea $B(I) = -2$. debe cambiarse a $B(I) = -X(I)$ en ALFAF2.

5.5.2 El caso $\nabla^2 u = -x^2$

El problema que rige la ecuación es

$$\nabla^2 u = -x^2 \quad (180)$$

con geometría y condiciones de contorno como antes. La solución exacta en este caso viene dada por

$$u = -\frac{1}{246} (50x^2 - 8y^2 + 33.6) \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right) \quad (181)$$

que nuevamente satisface $u = 0$ en Γ . La expresión para el flujo normal a lo largo del frontera es

$$q = \frac{1}{246} (-50x^3 - 96xy^2 + 83.2x) \frac{x}{2} + \frac{1}{246} (-96x^2y + 32y^3 - 83.2y) y \quad (182)$$

La figura 32 proporciona los resultados del análisis DRM utilizando tanto $f = 1 + r$ y $f = r$. Para usar el Programa 2 para obtener los resultados en la columna $f = 1 + r$, línea B(I)==-2. En la subrutina ALFAF2 debe cambiarse a B(I)==X(I)**2.

| Variable | Node | X | Y | Exact | $f = r$ | $f = 1 + r$ |
|----------|------|-------|--------|--------|---------|-------------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | -0.949 | -0.825 | -0.827 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | -0.915 | -0.948 | -0.952 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | -0.657 | -0.698 | -0.702 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | -0.343 | -0.339 | -0.343 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | -0.208 | -0.194 | -0.197 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | 0.259 | 0.262 | 0.263 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | 0.220 | 0.220 | 0.220 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | 0.143 | 0.136 | 0.135 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | 0.103 | 0.092 | 0.092 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | 0.240 | 0.236 | 0.236 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | 0.151 | 0.142 | 0.142 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | 0.136 | 0.127 | 0.127 |

Figure 32: Soluciones DRM de $\nabla^2 u = -x^2$

5.5.3 El caso $\nabla^2 u = a^2 - x^2$

Los datos geométricos y las condiciones de frontera son como antes. Dado que el eje semi mayor A de la elipse es de longitud 2, la ecuación de gobierno se convierte en

$$\nabla^2 u = 4 - x^2 \quad (183)$$

Este problema puede verse como una combinación de una fuente constante $b = 4$ y una fuente $b = -x^2$. Por lo tanto, su solución analítica se obtiene mediante la suma de expresiones de los tipos (173) y (181), *i.e.*

$$u = \left[1.6 - \frac{1}{246} (50x^2 - 8y^2 + 33.6) \right] \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right) \quad (184)$$

con

$$q = 0.4(x^2 + 8y^2) + \frac{1}{246}(-50x^3 - 96xy^2 + 83.2x)\frac{x}{2} + \frac{1}{246}(-96x^2y + 32y^3 - 83.2y)y \quad (185)$$

Para la implementación de DRM, los dos términos fuente pueden aproximarse por separado, y en teoría cada uno puede usar una expansión f diferente. Sin embargo, en la práctica, es más eficiente tomar los términos juntos y usar la misma expansión f que antes. En el Programa 2, esto significa que la línea $B(I)=-2$. en la subrutina ALFAF2 debe cambiarse a $B(I)=4.-X(I)**2$.

| Variable | Node | X | Y | $f = 1 + r$ | Exact |
|----------|------|-------|--------|-------------|--------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | 0.533 | 0.650 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | 1.088 | 1.121 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | 2.016 | 1.986 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | 2.721 | 2.713 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | 2.979 | 2.991 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | -0.434 | -0.440 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | -0.616 | -0.607 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | -1.011 | -0.988 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | -1.199 | -1.172 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | -1.049 | -1.035 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | -1.436 | -1.412 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | -1.488 | -1.463 |

Figure 33: Solución DRM de $\nabla^2 u = 4 - x^2$

5.5.4 Resultados usando elementos cuadráticos

En las secciones anteriores, los resultados se presentaron para el problema que se muestra en la figura 27 para una serie de representaciones f diferentes utilizando una discretización lineal de elementos de frontera. En esta sección, los resultados se darán usando elementos cuadráticos, pero usando solo $f = 1 + r$. En la discretización que se muestra en la figura 27, se utilizaron 16 elementos de frontera lineales. Aquí, los resultados se obtendrán utilizando 16 elementos cuadráticos curvos, de modo que el problema ahora tiene 32 nodos de frontera. Se usaron los mismos nodos internos. Aunque los nodos se volvieron a numerar para la programación, los números originales se mantendrán en las tablas que se muestran a continuación para comparar.

La figura 34 muestra los resultados obtenidos para $\nabla^2 u = -x$, con elementos de límite lineales y cuadráticos.

La figura 35 proporciona resultados para las mismas discretizaciones para la ecuación $\nabla^2 u = -x^2$ y la figura 36 para la ecuación $\nabla^2 u = 4 - x^2$.

La implementación de elementos cuadráticos en el programa dado en la sección 5.4 se puede hacer en forma estándar [15], y no afecta las partes del programa relacionadas con el DRM. También se debe hacer referencia al Apéndice 2 donde se discuten las fórmulas especiales de integración numérica para elementos curvos.

5.6 Problemas con diferentes integrales de dominio en Diferentes regiones

5.6.1 La técnica de subregión

Si el problema en consideración presenta regiones con funciones b distintas, se puede aplicar la técnica de subregiones. Esta técnica se explica en el frontera estándar

| Variable | Node | X | Y | Linear BE | Quadratic BE | Exact |
|----------|------|-------|--------|-----------|--------------|--------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | -0.497 | -0.543 | -0.571 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | -0.635 | -0.677 | -0.620 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | -0.586 | -0.583 | -0.556 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | -0.334 | -0.331 | -0.326 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | 0.188 | 0.188 | 0.187 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | 0.181 | 0.178 | 0.177 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | 0.124 | 0.121 | 0.121 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | 0.208 | 0.206 | 0.205 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | 0.088 | 0.084 | 0.083 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Figure 34: Resultados para elementos de frontera lineales y cuadráticos para $\nabla^2 u = -x$

| Variable | Node | X | Y | Linear BE | Quadratic BE | Exact |
|----------|------|-------|--------|-----------|--------------|--------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | -0.827 | -0.957 | -0.949 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | -0.952 | -0.986 | -0.915 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | -0.702 | -0.684 | -0.657 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | -0.343 | -0.336 | -0.343 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | -0.197 | -0.193 | -0.208 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | 0.263 | 0.263 | 0.259 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | 0.220 | 0.221 | 0.220 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | 0.135 | 0.142 | 0.143 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | 0.092 | 0.101 | 0.103 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | 0.236 | 0.240 | 0.240 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | 0.142 | 0.149 | 0.151 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | 0.127 | 0.134 | 0.136 |

Figure 35: Resultados para elementos de frontera lineales y cuadráticos para $\nabla^2 u = -x^2$

| Variable | Node | X | Y | Linear BE | Quadratic BE | Exact |
|----------|------|-------|--------|-----------|--------------|--------|
| q | 1 | 2.0 | 0.0 | 0.533 | 0.591 | 0.650 |
| | 2 | 1.706 | -0.522 | 1.088 | 1.181 | 1.121 |
| | 3 | 1.179 | -0.808 | 2.016 | 2.063 | 1.986 |
| | 4 | 0.598 | -0.954 | 2.721 | 2.748 | 2.713 |
| | 5 | 0.0 | -1.0 | 2.979 | 3.000 | 2.991 |
| u | 17 | 1.5 | 0.0 | -0.434 | -0.433 | -0.440 |
| | 18 | 1.2 | -0.35 | -0.616 | -0.603 | -0.607 |
| | 19 | 0.6 | -0.45 | -1.011 | -0.986 | -0.988 |
| | 20 | 0.0 | -0.45 | -1.199 | -1.172 | -1.172 |
| | 29 | 0.9 | 0.0 | -1.049 | -1.032 | -1.035 |
| | 30 | 0.3 | 0.0 | -1.436 | -1.411 | -1.412 |
| | 31 | 0.0 | 0.0 | -1.488 | -1.462 | -1.463 |

Figure 36: Resultados para elementos de frontera lineales y cuadráticos para $\nabla^2 u = 4 - x^2$

Los libros de texto de elementos como [1], [2] y [15], y pueden combinarse fácilmente con el análisis DRM.

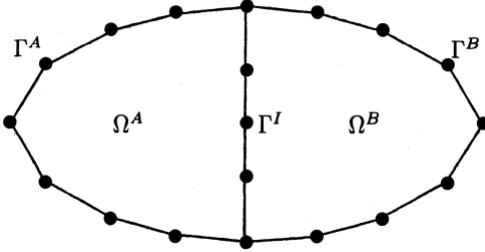


Figure 37: Problema con dos subregiones

En la figura 37, se muestra un dominio compuesto por dos subregiones. Consideré que hay N^A , N^I y L^A nodos en el frontera externo Γ^A , interfaz Γ^I y dominio Ω^A , respectivamente, con definiciones similares para N^B y L^B . Además, considere que en la región A

$$\nabla^2 u = b^A \quad (186)$$

y en la región B

$$\nabla^2 u = b^B \quad (187)$$

donde $b^A \neq b^B$ y ambos son funciones conocidas de (x, y) . Luego, considerando los nodos de frontera en Γ^A y Γ^I y los nodos internos en Ω^A , se puede escribir la aproximación DRM habitual para la subregión A

$$\mathbf{b}^A = \mathbf{F}^A \boldsymbol{\alpha}^A \quad (188)$$

de donde se puede obtener una $\boldsymbol{\alpha}^A$, de tamaño $(N^A + N^I + L^A)$. Se puede escribir una ecuación similar para la región B para obtener una $\boldsymbol{\alpha}^B$, de tamaño $(N^B + N^I + L^B)$. Después de evaluar una $\boldsymbol{\alpha}^A$ y una $\boldsymbol{\alpha}^B$, se puede escribir la ecuación (149) para cada subregión

$$\mathbf{H}^A \mathbf{u}^A - \mathbf{G}^A \mathbf{q}^A = (\mathbf{H}^A \hat{\mathbf{U}}^A - \mathbf{G}^A \hat{\mathbf{Q}}^A) \boldsymbol{\alpha}^A \quad (189)$$

$$\mathbf{H}^B \mathbf{u}^B - \mathbf{G}^B \mathbf{q}^B = (\mathbf{H}^B \hat{\mathbf{U}}^B - \mathbf{G}^B \hat{\mathbf{Q}}^B) \boldsymbol{\alpha}^B \quad (190)$$

Dado que los lados derechos son vectores conocidos en ambos casos, (187) y (188) se simplifican a

$$\mathbf{H}^A \mathbf{u}^A - \mathbf{G}^A \mathbf{q}^A = \mathbf{d}^A \quad (191)$$

y

$$\mathbf{H}^B \mathbf{u}^B - \mathbf{G}^B \mathbf{q}^B = \mathbf{d}^B \quad (192)$$

Las matrices en las ecuaciones anteriores pueden dividirse en una submatriz que se refiere al frontera, Γ^A o Γ^B , respectivamente, y una parte que se refiere a la interfaz Γ^I de la siguiente manera

$$[\mathbf{H}_\Gamma^A \quad \mathbf{H}_I^A] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^A \\ \mathbf{u}_I^A \end{bmatrix} - [\mathbf{G}_\Gamma^A \quad \mathbf{G}_I^A] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\Gamma^A \\ \mathbf{q}_I^A \end{bmatrix} = [\mathbf{d}^A] \quad (193)$$

$$[\mathbf{H}_\Gamma^B \quad \mathbf{H}_I^B] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^B \\ \mathbf{u}_I^B \end{bmatrix} - [\mathbf{G}_\Gamma^B \quad \mathbf{G}_I^B] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\Gamma^B \\ \mathbf{q}_I^B \end{bmatrix} = [\mathbf{d}^B] \quad (194)$$

A lo largo de la interfaz, donde tanto u como q son desconocidas, se cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad y equilibrio [15]

$$\begin{aligned} u^A &= u^B = u_I \\ q^A &= -q^B = q_I \end{aligned} \quad (195)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (191) y (192) se pueden combinar para formar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_\Gamma^A & \mathbf{H}_I^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_I^B & \mathbf{H}_\Gamma^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^A \\ \mathbf{u}_I^A \\ \mathbf{u}_\Gamma^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\Gamma^A & \mathbf{G}_I^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_I^B & \mathbf{G}_\Gamma^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\Gamma^A \\ \mathbf{q}_I^A \\ \mathbf{q}_\Gamma^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^A \\ \mathbf{d}^B \end{bmatrix} \quad (196)$$

El sistema (194) se puede reorganizar para leer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_\Gamma^A & \mathbf{H}_I^A & -\mathbf{G}_I^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_I^B & \mathbf{G}_I^B & \mathbf{H}_\Gamma^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^A \\ \mathbf{u}_I \\ \mathbf{q}_I \\ \mathbf{u}_\Gamma^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\Gamma^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_\Gamma^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\Gamma^A \\ \mathbf{q}_\Gamma^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}^A \\ \mathbf{d}^B \end{bmatrix} \quad (197)$$

tal que la matriz de la izquierda es cuadrada pero la de la derecha no lo es. Aplicando las condiciones de frontera de la manera habitual, el sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (198)$$

se produce, donde A es de tamaño $(N^A + 2N^I + N^B) \times (N^A + 2N^I + N^B)$. Los resultados en los nodos internos se pueden obtener en forma estándar una vez que se conocen todos los valores para las fronteras y la interfaz. Esto implica usar la ecuación (156), pero considerar cada subregión por separado.

5.6.2 Integración sobre Regiones Internas

Si solo una pequeña porción del dominio tiene una fuente distribuida distinta, esto se puede manejar mediante la integración alrededor de frontera de esta región interna. Esta técnica fue desarrollada por Niku y Brebbia [10].

Considere el dominio Ω que se muestra en la figura 38, donde se encuentra la ecuación de Laplace, que contiene un subdominio Ω^B donde existe una fuente distribuida b .

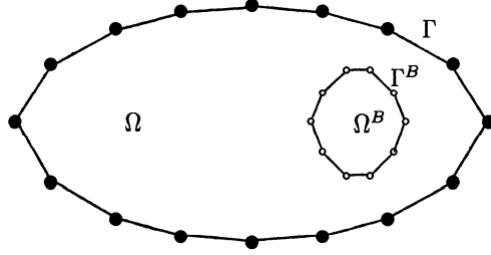


Figure 38: Fuente distribuida en pequeña región interna Ω^B

La ecuación (147) da la relación DRM para el caso de b que actúa sobre el conjunto de Ω . La expresión correspondiente para este caso se puede obtener observando lo siguiente:

- (a) Los puntos fuente solo se definen en Γ , es decir, no habrá incógnitas asociadas con Γ^B .
- (b) Habrá una serie de puntos en Γ^B asociados con los elementos utilizados para discretizar esta frontera interna, sin embargo, estos no serán puntos de nodo sino puntos de colocación para el cálculo de H^B, G^B, \hat{U} y \hat{U} en el lado derecho de la ecuación. Deje que estos puntos sean N^B en número.
- (c) Como consecuencia, H^B y G^B en el lado derecho de la ecuación (149) no tienen relación con H y G en el lado izquierdo.
- (d) Dado que los puntos en Γ^B no son puntos fuente y no tienen incógnitas asociadas a ellos, los términos $c_i \hat{u}_{ij}$ de (147) son cero. Los puntos de origen en Γ son exteriores a Γ^B .

Dado lo anterior, la ecuación (147) se convierte para este caso

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N^B} \alpha_j \left(\sum_{\ell=1}^{N^B} H_{i\ell}^B \hat{u}_{\ell j} - \sum_{\ell=1}^{N^B} G_{i\ell}^B \hat{q}_{\ell j} \right) \quad (199)$$

Tenga en cuenta que las sumas en j y ℓ se refieren solo a puntos en Γ^B y no incluyen los nodos en Γ . Los valores de α_j se calculan a partir de

$$\mathbf{F}^B \boldsymbol{\alpha}^B = \mathbf{b}^B \quad (200)$$

donde \mathbf{F}^B es de tamaño ($N^B \times N^B$) y \mathbf{b}^B contiene los valores de la fuente distribuida en los puntos de Γ^B . El conjunto de ecuaciones obtenidas mediante la aplicación de (197) a los puntos de colocación se puede escribir en la forma habitual

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{d} \quad (201)$$

a las cuales se pueden aplicar las condiciones de contorno para producir $Ax = y$.

6 El método de reciprocidad dual para ecuaciones del tipo $\nabla^2 u = b(x, y, u)$

6.1 Introducción

En el capítulo anterior, el método de reciprocidad dual del elemento frontera se desarrolló y aplicó a problemas gobernados por una ecuación de tipo Poisson en la que el lado derecho es una función conocida de posición, *i.e.*

$$\nabla^2 u = b(x, y) \quad (202)$$

para el cual se estableció la expresión de matriz DRM básica en la forma

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{q} = (H\hat{\mathbf{U}} - G\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d} \quad (203)$$

En tales análisis, como es habitual en BEM, la solución se divide en dos partes:

- (a) Una solución frontera, y
- (b) Una solución interna.

Como b en la ecuación (202) es una función conocida, el vector $\boldsymbol{\alpha}$ puede calcularse a partir de la relación

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (204)$$

En este capítulo, el rango de aplicación del DRM se extenderá a los problemas regidos por ecuaciones del tipo

$$\nabla^2 u = b(x, y, u) \quad (205)$$

donde el término no homogéneo también puede ser una combinación, suma o producto de funciones. Esta clasificación de ecuaciones se debe a la forma en que se aplica el DRM. Las ecuaciones del tipo (205) involucran el laplaciano más uno o más términos adicionales, cada uno de los cuales es una función de la variable problema, u . Esto incluye ecuaciones lineales y no lineales. En el análisis DRM, solo los problemas verdaderamente no lineales se resuelven utilizando técnicas iterativas, mientras que si se emplea la integración celular, cualquier ecuación del tipo (205), lineal o no lineal, requeriría iteraciones.

Por lo tanto, se puede estudiar una gran cantidad de problemas de ingeniería con las técnicas explicadas en este capítulo. En la sección 6.5 se presentará un programa de computadora para resolver ecuaciones del tipo (205). En la sección 6.6, se considerará el análisis tridimensional y en el capítulo 7 el método se aplica a problemas dependientes del tiempo.

Como introducción y para generar las relaciones básicas necesarias, el caso

$$\nabla^2 u + u = 0 \quad (206)$$

se considera. Esta es la ecuación más simple del tipo (205) que puede postularse. La función b ahora se define como $-u$. Así, de (204)

$$\alpha = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (207)$$

y la ecuación (203) se convierte

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (208)$$

Esto puede representarse en forma esquemática como

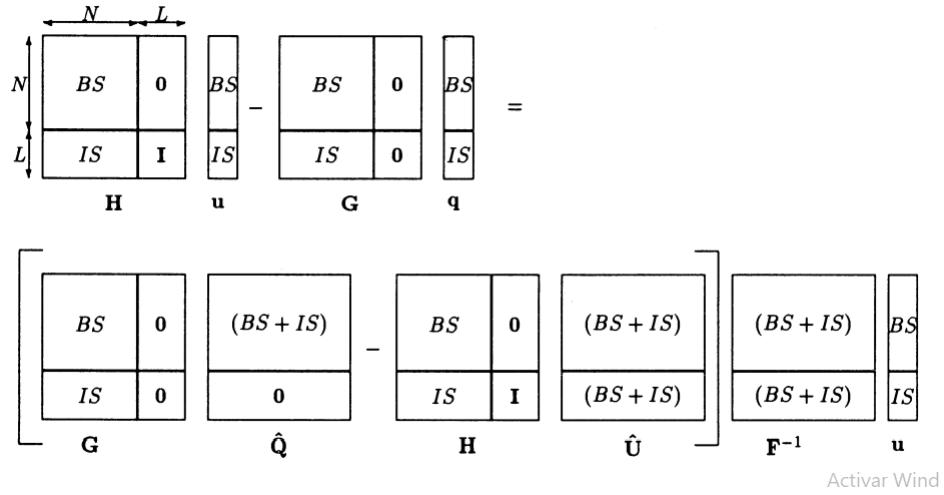


Figure 39: 4.8

En la figura 39 las submatrices cero están marcadas con $\mathbf{0}$, las matrices de identidad están marcadas con \mathbf{I} y otras submatrices distintas de cero están marcadas BS , IS o $(BS + IS)$, como se define en la figura 24. Para esta clase de problemas, ya no es estrictamente posible separar las soluciones de fronteras e interiores ya que la presencia de la matriz F^{-1} completamente poblada da como resultado un problema acoplado en el que ambos conjuntos de valores se calculan simultáneamente.

Por el momento, puede observarse que los resultados tienen la misma precisión que cuando se obtienen soluciones separadas de fronteras e interiores y su

acoplamiento se ha realizado con éxito para aprovechar la simplificación resultante en la programación esfuerzo. En el capítulo 7, se presentará un método para el desacoplamiento parcial de este tipo de problema, que requiere menos memoria de la computadora.

Las matrices G , H , \hat{Q} y \hat{U} de la figura 39 se definieron y utilizaron en el capítulo anterior. La matriz F se definió pero solo se usó en relación con el cálculo del vector α . Cuando se trata de problemas regidos por ecuaciones del tipo (205) o los casos dependientes del tiempo que se cubrirán en el capítulo 7, α no se puede obtener explícitamente y se siempre se expresará en la ecuación matricial como $F^{-1}b$ (en el ejemplo actual, $b = -u$). El lado derecho de (208) se convierte así en una expresión matricial que multiplica la b desconocida que será diferente en cada caso. El cálculo de F^{-1} no plantea problemas si la constante se incluye en la expansión f (159) y si no coinciden dos nodos. La matriz F depende solo de datos geométricos y no tiene relación con la ecuación de gobierno o las condiciones de frontera. Puede calcularse una vez y almacenarse en un archivo de datos para su uso con todos los análisis posteriores que impliquen la misma discretización.

Para los ejemplos que se considerarán en este capítulo, el lado derecho de (205) es una función desconocida. El vector conocido d , ecuación (203), debe ser reemplazado por una expresión matricial, ecuación (208). Definiendo

$$\mathbf{S} = (\hat{H}\hat{U} - \hat{G}\hat{Q})F^{-1} \quad (209)$$

entonces la ecuación (208) se convierte en

$$Hu - Gq = -Su \quad (210)$$

El cálculo de \mathbf{S} se realiza multiplicando las matrices conocidas. Recolectar los términos en u en el lado izquierdo produce

$$(\mathbf{H} + \mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (211)$$

En la frontera, los valores de N de u y q son desconocidos, mientras que los valores de L de u en los nodos interiores son todos desconocidos. Tenga en cuenta que la parte del vector \mathbf{q} desde la posición $N + 1$ hasta la posición $N + L$, donde q no está definida, se multiplica por cero particiones de \mathbf{G} . Después de aplicar las condiciones de contorno, la ecuación habitual

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (212)$$

se obtiene donde \mathbf{A} es de tamaño $(N + L) \times (N + L)$ y x contiene N valores frontera de u o q más L valores interiores de u .

Las ecuaciones (208) a (212) forman la base de la aplicación del Método de Reciprocidad Dual a las ecuaciones del tipo (205). La única diferencia en cada nuevo caso será un nuevo vector b para reemplazar $-u$ en la ecuación (208) y la figura 39. El tratamiento de estos vectores se explicará para cada caso que se estudiará de manera sistemática y el lector no tendrá dificultades para pasar de un caso a otro o extender el Análisis a otros problemas.

El programa de computadora presentado en la sección 6.5 se puede utilizar para analizar una ecuación del tipo (206) si los parámetros IDDX y IDDY se leen como cero. Algunos resultados para la ecuación (206) ahora se presentan para la geometría que se muestra en la figura 40.

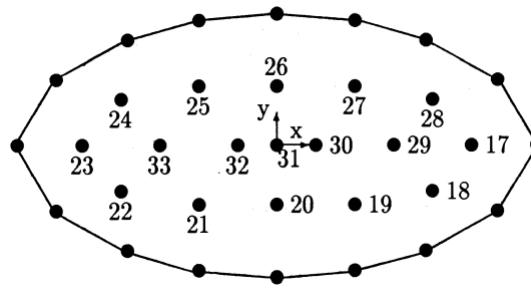


Figure 40: Discretización del problema de elipse

Como las condiciones de contorno homogéneas darán como resultado una solución trivial $u = q = 0$ en todos los nodos, se debe usar una condición no homogénea, por ejemplo

$$u = \sin x \quad (213)$$

La ecuación (213) puede mostrarse fácilmente como una solución particular de (206) de modo que, si se impone como una condición frontera, también constituirá la solución del problema y se puede utilizar para verificar los resultados.

El dominio del problema se muestra en la figura 40 y consiste en una elipse que tiene un eje semi-mayor de longitud 2 y un eje semi-menor de longitud 1. La frontera se discretiza en 16 elementos de frontera lineal y la solución se calcula en 17 nodos internos. Los resultados se dan en la figura 41 para las expansiones $f = 1 + r$ y $f = 1 + r + r^2 + r^3$.

Se puede ver de inmediato que la expansión f más simple, $f = 1 + r$ produce excelentes resultados. A modo de comparación, se incluyen los resultados para $f = 1 + r + r^2 + r^3$ pero evidentemente no es necesario aumentar el orden

de la expansión f en este caso. Los elementos lineales también se consideran precisos.

6.2 El caso convectivo

Las ecuaciones diferenciales que incluyen derivadas espaciales de primer orden de la variable problema son muy comunes en el modelado matemático de problemas de ingeniería. Mientras que

| | x | y | $f = 1 + r$ | $f = 1 + r + r^2 + r^3$ | Eqn. (4.13) |
|----------|-----|-------|-------------|-------------------------|-------------|
| u_{17} | 1.5 | 0.0 | 0.994 | 0.995 | 0.997 |
| u_{18} | 1.2 | -0.35 | 0.928 | 0.932 | 0.932 |
| u_{19} | 0.6 | -0.45 | 0.562 | 0.566 | 0.565 |
| u_{20} | 0.0 | -0.45 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| u_{29} | 0.9 | 0.0 | 0.780 | 0.784 | 0.783 |
| u_{30} | 0.3 | 0.0 | 0.294 | 0.296 | 0.295 |
| u_{31} | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Figure 41: Resultados para $\nabla^2 u = -u$

no hay dificultad práctica en modelar ecuaciones que contengan estos términos con elementos finitos o diferencias finitas, los resultados han demostrado en muchos casos que son técnicas inexactas y especiales, e.g. Se ha introducido "upwinding" para hacer frente a las oscilaciones de onda corta resultantes en la solución. Esta pregunta se discute en, por ejemplo, las referencias [1,2]. Tales problemas no ocurren en el análisis de elementos frontera, pero el tratamiento de estos derivados es difícil usando celdas internas, e.g. referencia [3].

Por el contrario, los términos convectivos se pueden acomodar fácilmente en el tratamiento DRM dado en la sección 6.1. Considere, por ejemplo, una ecuación del tipo

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (214)$$

Comparando esto con (205) se ve que en este caso $b = \partial u / \partial x$, de modo que $b = \partial u / \partial x$, i.e. los valores nodales de la derivada de u con respecto a x . Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (204), se obtiene

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (215)$$

y la ecuación (208) se convierte para este caso

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{q} = (H\hat{\mathbf{U}} - G\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (216)$$

o, usando (209),

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (217)$$

Ahora se debe establecer un mecanismo para relacionar los valores nodales de u con los valores nodales de su derivada $\partial u / \partial x$. En este punto, debe recordarse que la aproximación básica de la técnica DRM es la ecuación (151), *i.e.*

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \quad (218)$$

Se puede escribir una ecuación similar para u

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad (219)$$

donde, $\beta \neq \alpha$. La diferenciación (219) produce

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \boldsymbol{\beta} \quad (220)$$

Reescribiendo la ecuación (219) como, $\beta = F^{-1}u$, entonces (220) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (221)$$

Sustituyendo en (217) se obtiene

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (222)$$

Llamando

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \quad (223)$$

produce el sistema de ecuaciones

$$(\mathbf{H} - \mathbf{R})\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (224)$$

que se puede manejar exactamente de la misma manera que (211). Tanto $\partial F / \partial x$ como F^{-1} son matrices completamente pobladas $(N + L) \times (N + L)$. Los términos en la matriz $\partial F / \partial x$ se obtienen diferenciando la expansión f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{r_x}{r} = \\ &= \frac{r_x}{r} + 2r_x + 3rr_x + \dots + mr_x r^{m-2} \end{aligned} \quad (225)$$

Es importante tener en cuenta que $\partial F/\partial x$ es una matriz geométrica simétrica oblicua, cuya evaluación no involucra los puntos fuente; por lo tanto, los componentes r_x en (225) son de signo opuesto a los utilizados en la definición de la matriz \mathbf{H} (ver sección 5.3.2). Se puede realizar un tratamiento similar en el caso de la ecuación

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (226)$$

para lo cual se obtendrá la misma ecuación (224) con

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \mathbf{F}^{-1} \quad (227)$$

donde los términos de $\partial F/\partial y$ están definidos por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{r_y}{r} + 2r_y + 3rr_y + \dots + mr_y r^{m-2} \quad (228)$$

con r_y que tiene el mismo signo que r_x como se discutió anteriormente.

6.2.1 Resultados para el caso $\nabla^2 u = -\partial u/\partial x$

Se presentarán algunos resultados para la ecuación $\nabla^2 u = -\partial u/\partial x$. La geometría del problema analizado es la misma que en la última sección. Una solución particular para este caso es

$$u = e^{-x} \quad (229)$$

que, cuando se impone como una condición frontera esencial, también constituye la solución del problema como se discutió en la sección 6.1 para la expresión (213).

En el capítulo anterior, las expansiones $f|f = r, f = 1 + r$ y $f = 1$ en un nodo, $f = r$ en los nodos restantes se consideraron para el caso $b = b(x, y)$, ecuación (135).

En las aplicaciones discutidas en este capítulo, la "complejidad" de las funciones b es mayor y, por lo tanto, debe investigarse la necesidad de expansiones f de orden superior.

Para las ecuaciones que contienen derivados en este capítulo, se consideran las siguientes f expansiones:

Caso (i) $f = 1 + r$

Caso (ii) $f = 1 + r + r^2$

Caso (iii) $f = 1 + r + r^2 + r^3$

Los resultados para $\nabla^2 u = -\partial u / \partial x$ se muestran en la figura 42. Los resultados en los 12 puntos dados en la tabla describen la solución completa del problema debido a la simetría.

| | x | y | f Case(i) | f Case(ii) | f Case(iii) | Eqn. (4.29) |
|----------|------|-------|-------------|--------------|---------------|-------------|
| u_{17} | 1.5 | 0.0 | 0.229 | 0.229 | 0.214 | 0.223 |
| u_{18} | 1.2 | -0.35 | 0.307 | 0.309 | 0.274 | 0.301 |
| u_{19} | 0.6 | -0.45 | 0.555 | 0.560 | 0.523 | 0.549 |
| u_{20} | 0.0 | -0.45 | 1.003 | 1.011 | 1.006 | 1.000 |
| u_{21} | -0.6 | -0.45 | 1.819 | 1.828 | 1.833 | 1.822 |
| u_{22} | -1.2 | -0.35 | 3.323 | 3.324 | 3.318 | 3.320 |
| u_{23} | -1.5 | 0.0 | 4.489 | 4.479 | 4.465 | 4.482 |
| u_{29} | 0.9 | 0.0 | 0.411 | 0.415 | 0.363 | 0.406 |
| u_{30} | 0.3 | 0.0 | 0.745 | 0.751 | 0.725 | 0.741 |
| u_{31} | 0.0 | 0.0 | 1.002 | 1.010 | 1.002 | 1.000 |
| u_{32} | -0.3 | 0.0 | 1.348 | 1.358 | 1.361 | 1.350 |
| u_{33} | -0.9 | 0.0 | 2.448 | 2.457 | 2.462 | 2.460 |

Figure 42: Resultados para $\nabla^2 u = -\partial u / \partial x$

De la figura 42 se puede ver que los mejores resultados se obtienen para el caso (i), que utilizó la expansión más simple $f = 1 + r$. Estos resultados indican que las expansiones f de orden superior son innecesarias, al menos en este caso. Los errores más grandes en la figura 42, que son inferiores al 1%, se encuentran en el caso (iii) que utilizó la expansión $f = 1 + r + r^2 + r^3$. Esto sugiere que las expansiones f de orden superior pueden ser, usando la terminología estándar, "demasiado rígidas". Esta conclusión también se verifica por los resultados obtenidos para otros ejemplos en este capítulo.

6.2.2 Resultados para el caso $\nabla^2 u = -(\partial u / \partial x + \partial u / \partial y)$

Considera la ecuación

$$\nabla^2 u = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (230)$$

Usar el método dado anteriormente produce el sistema DRM de ecuaciones

$$Hu - Gq = -S \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) F^{-1} u \quad (231)$$

donde la matriz S se define en (209). Definiendo la matriz R ahora como

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \quad (232)$$

el sistema (231) puede reescribirse en el formulario

$$(\mathbf{H} + \mathbf{R})\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (233)$$

Las condiciones de frontera se pueden aplicar a la ecuación anterior y el sistema resultante se puede resolver de la manera habitual.

Los resultados se presentan para un ejemplo utilizando la geometría que se muestra en la figura 40. Una solución particular a la ecuación (230) viene dada por la expresión

$$u = e^{-x} + e^{-y} \quad (234)$$

que también se impone como una condición frontera esencial. La solución es completamente no simétrica y, por lo tanto, los resultados se dan en la figura 43 para todos los nodos internos. Aquí se usan nuevamente las mismas expansiones f consideradas en la sección anterior.

Se pueden hacer las mismas observaciones que antes con respecto a esta figura, *i.e.* que los resultados son precisos y no se observa ninguna ventaja al usar las expansiones f de orden superior.

6.2.3 Derivadas internas de las variables problemáticas.

En el capítulo 2, las expresiones (40) se presentaron como las ecuaciones estándar para obtener las derivadas de la variable del problema en puntos internos después de que se conoce la solución de frontera completa. A veces es difícil evaluar estas expresiones debido a la presencia de integrales de dominio. Esto puede entenderse fácilmente si se agrega una integral de dominio a las expresiones (40) para producir

| | <i>x</i> | <i>y</i> | <i>f</i> Case(i) | <i>f</i> Case(ii) | <i>f</i> Case(iii) | Eqn. (4.34) |
|------------------------|----------|----------|------------------|-------------------|--------------------|-------------|
| <i>u</i> ₁₇ | 1.5 | 0.0 | 1.231 | 1.230 | 1.214 | 1.223 |
| <i>u</i> ₁₈ | 1.2 | -0.35 | 1.714 | 1.714 | 1.669 | 1.720 |
| <i>u</i> ₁₉ | 0.6 | -0.45 | 2.107 | 2.107 | 2.057 | 2.117 |
| <i>u</i> ₂₀ | 0.0 | -0.45 | 2.557 | 2.558 | 2.547 | 2.568 |
| <i>u</i> ₂₁ | -0.6 | -0.45 | 3.378 | 3.378 | 3.385 | 3.390 |
| <i>u</i> ₂₂ | -1.2 | -0.35 | 4.745 | 4.735 | 4.718 | 4.739 |
| <i>u</i> ₂₃ | -1.5 | 0.0 | 5.485 | 5.474 | 5.451 | 5.482 |
| <i>u</i> ₂₄ | -1.2 | -0.35 | 4.017 | 4.021 | 4.004 | 4.025 |
| <i>u</i> ₂₅ | -0.6 | -0.45 | 2.456 | 2.460 | 2.437 | 2.460 |
| <i>u</i> ₂₆ | 0.0 | 0.45 | 1.641 | 1.639 | 1.615 | 1.637 |
| <i>u</i> ₂₇ | 0.6 | 0.45 | 1.192 | 1.188 | 1.153 | 1.186 |
| <i>u</i> ₂₈ | 1.2 | 0.35 | 1.014 | 1.010 | 0.982 | 1.006 |
| <i>u</i> ₂₉ | 0.9 | 0.0 | 1.400 | 1.400 | 1.345 | 1.406 |
| <i>u</i> ₃₀ | 0.3 | 0.0 | 1.731 | 1.733 | 1.691 | 1.741 |
| <i>u</i> ₃₁ | 0.0 | 0.0 | 1.989 | 1.992 | 1.963 | 2.000 |
| <i>u</i> ₃₂ | -0.3 | 0.0 | 2.335 | 2.340 | 2.351 | 2.350 |
| <i>u</i> ₃₃ | -0.9 | 0.0 | 3.438 | 3.444 | 3.428 | 3.460 |

Figure 43: Resultados para $\nabla^2 u = -(\partial u / \partial x + \partial u / \partial y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma + \int_{\Omega} b \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma + \int_{\Omega} b \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \quad (235)$$

El uso del DRM proporciona una alternativa simple a (235) que se puede usar sin modificación en cualquier caso, independientemente de la ecuación de gobierno, el tipo de fuente de dominio, etc. En los programas DRM, las matrices que se utilizarán estarán disponibles en la memoria de la computadora, por lo tanto, el cálculo involucrado consiste solo en la multiplicación de matrices conocidas y se puede hacer en unas pocas líneas del programa a un costo de computadora muy bajo.

Considere la expresión DRM básica

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \quad (236)$$

En el tratamiento de derivados se ha visto que se puede usar la misma expresión para la variable problema de manera que

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad (237)$$

Diferenciar lo anterior produce

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \boldsymbol{\beta} \quad (238)$$

Invertir (237) y sustituir en (238) produce

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (239)$$

Por lo tanto, los valores nodales de la derivada se expresan como el producto de dos matrices conocidas y los valores nodales conocidos de la variable problema. Se puede deducir una ecuación similar para las derivadas con respecto a y . Matrix F^{-1} ya se ha calculado y almacenado en la memoria de la computadora.

En la figura 44 se dan algunos resultados para derivados calculados en nodos internos utilizando este proceso para el problema analizado en la sección 6.1. Se han obtenido resultados exactos diferenciando la ecuación (213).

| Node | Eqn. (4.39) | Exact |
|------|-------------|-------|
| 18 | 0.343 | 0.362 |
| 19 | 0.817 | 0.825 |
| 20 | 0.992 | 1.000 |
| 29 | 0.617 | 0.621 |
| 30 | 0.943 | 0.955 |
| 31 | 0.992 | 1.000 |

Figure 44: Valores de $\partial u / \partial x$ en los nodos mostrados en la figura 40

Se puede ver que los resultados son precisos incluso para el número muy pequeño de elementos de frontera utilizados. Este método puede aplicarse en cualquier situación y representa una extensión muy simple y poderosa de la técnica DRM.

6.3 La ecuación de Helmholtz

En esta sección se considerará un problema de valor propio/vector propio estándar. La solución a la ecuación de Helmholtz proporciona las frecuencias naturales o fundamentales y los modos de vibración de un sistema. La ecuación en su forma habitual viene dada por

$$\nabla^2 u + \mu^2 u = 0 \quad (240)$$

donde el coeficiente μ está relacionado con las frecuencias naturales del sistema.

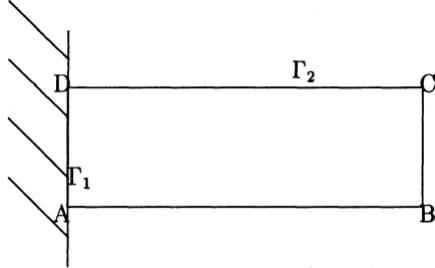


Figure 45: Haz vibrante

Considere la viga vibratoria que se muestra en la figura 45. En este caso, u representa desplazamientos y $\mu^2 = \rho\omega^2/E$ donde ρ y E son propiedades materiales y ω son las frecuencias naturales [4]. En el caso de problemas de resonancia de puerto, la ecuación se convierte en [5]

$$\nabla^2 H + \frac{\omega^2}{hg} H = 0 \quad (241)$$

donde h es la profundidad media del agua medida desde un dato de referencia, g es la aceleración de la gravedad, ρ es la frecuencia natural como antes y $H = h + \eta$, i.e. la profundidad media del agua más la elevación de la superficie libre. La ecuación de Helmholtz también tiene importantes aplicaciones en acústica [6] y otras áreas.

6.3.1 Formulaciones DRM

La ecuación de Helmholtz se puede modelar con el DRM notando que el término fuente en (205) es ahora

$$b = -\mu^2 u \quad (242)$$

tal que (207) se convierte

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mu^2 \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (243)$$

Esto da la ecuación matricial

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -\mu^2 (\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (244)$$

o, usando la matriz \mathbf{S} definida por (209),

$$Hu - Gq = -\mu^2 Su \quad (245)$$

Esta ecuación ha sido estudiada por Nardini y Brebbia [7] quienes dividieron las matrices como se muestra a continuación para eliminar los términos en q que son desconocidos en parte de la frontera:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = -\mu^2 \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (246)$$

Teniendo en cuenta el problema del haz vibratorio que se muestra en la figura 45, el haz se fija en la parte AD de la frontera, por lo que $u = 0$. En la frontera libre $ABCD$ en la figura, la condición prescrita es $q = 0$, tal que la ecuación (246) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} = -\mu^2 \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (247)$$

o

$$\begin{aligned} H_{12}u - G_{11}q &= -\mu^2 S_{12}u \\ H_{22}u - G_{21}q &= -\mu^2 S_{22}u \end{aligned} \quad (248)$$

Eliminar q entre ecuaciones (248) da

$$(H_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}H_{12})u = -\mu^2(S_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}S_{12})u \quad (249)$$

o

$$Ku = \mu^2 Mu \quad (250)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{M} representan rigidez y matrices de masa, respectivamente, y se definen a partir de la ecuación (249). La ecuación (250) representa un problema de valor propio / vector propio algebraico generalizado, cuya solución puede obtenerse directamente por una variante del esquema de iteración del subespacio.

Un método propuesto por Nardini y Brebbia [7-9], en el contexto de problemas de elasticidad, era reducir el problema de valor propio generalizado (250) a uno estándar por inversión de la matriz \mathbf{K} , obteniendo $Au = \lambda \mathbf{u}$ con $A = K^{-1}M$ y $\lambda = 1/\mu^2$. La matriz A se transformó luego en forma de tres diagonales por el algoritmo Householder, y los valores propios y los vectores propios de la matriz transformada fueron encontrados por el algoritmo $Q - R$ [10].

Más recientemente, Ali et al. Presentaron otro enfoque alternativo. [11] lo que evita la inversión de la matriz \mathbf{F} . La idea es plantear el problema del valor propio en términos de $\Phi = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}$ en lugar de u , lo que deja los valores propios sin cambios. Se empleó un nuevo procedimiento de extracción de valores propios de Lanczos, basado en el algoritmo de Lanczos [12]. en esta formulación que se discutirá con más detalle en una sección posterior.

Todos los procedimientos de solución anteriores pueden presentar dificultades ya que la matriz \mathbf{A} no es simétrica y, como consecuencia, algunos de los valores propios serán complejos. Nardini y Brebbia [7-9] encontraron que los valores propios complejos, si están presentes, aparecen en los modos superiores, que normalmente son de menor importancia. En cualquier caso, los problemas con los modos de vibración de orden superior son inevitables cuando se representa un problema continuo por un número finito de grados de libertad, como se verá en los resultados presentados en la siguiente sección.

6.3.2 Resultados de DRM para haz vibratorio

Para permitir que el lector resuelva problemas de valor propio utilizando el Método del Elemento Frontera con los programas dados en este libro, sin recurrir a algoritmos especiales, se le dará una alternativa simple. Este método de solución es muy similar al descrito en la sección 6.1.

En este procedimiento, en lugar de obtener los primeros n valores propios y los vectores propios asociados simultáneamente, como generalmente se hace al resolver la ecuación de valor propio estándar (250), cada uno se obtiene por separado incrementando μ en pequeños pasos desde un valor inicial. En cada paso, la ecuación (240) se resuelve utilizando el procedimiento dado en la sección 6.1, multiplicando el lado derecho de (245) por un valor diferente de μ^2 . Si μ no está cerca de una frecuencia natural, los desplazamientos obtenidos en los nodos son pequeños. A medida que aumenta μ , los valores máximos de los desplazamientos se producen a medida que se acercan las frecuencias naturales. Esta situación puede entenderse mejor considerando la figura 46.

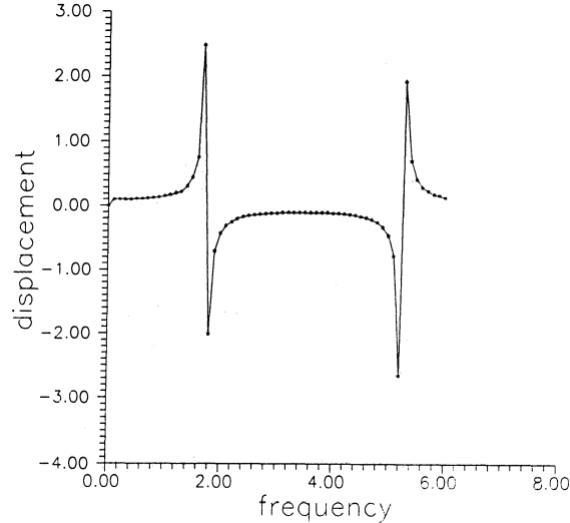


Figure 46: Curva $u \times \mu$ para punta de viga vibrante

Por lo tanto, considerando la ecuación (245) (que es lo mismo que (210) con el lado derecho multiplicado por la constante μ^2), los resultados de la computadora pueden obtenerse alterando el Programa 3, con IDDX, IDDY e IFUNC todos puestos a cero, tal que la ecuación se resuelve paso a paso, incrementando el valor de μ en cada paso. El uso de los parámetros IDDX, IDDY e IFUNC en el Programa 3 se explicará con un ejemplo en la sección 6.5.5. Las matrices \mathbf{H} , \mathbf{G} y \mathbf{S} no están alteradas por los incrementos de μ y pueden calcularse una vez y almacenarse. Si se desea, se pueden usar incrementos variables de μ .

Si se imponen las condiciones frontera homogéneas $u = 0$ en Γ_1 , $q = 0$ en Γ_2 , solo se obtendrá la solución trivial $u = q = 0$ en todas partes. Para evitar esto, se debe imponer un pequeño desplazamiento u_0 a lo largo de la frontera Γ_1 . El valor exacto de u_0 no tiene importancia y no afecta los resultados. Esto se debe a que la magnitud de los desplazamientos en cualquier problema de resonancia siempre se multiplica por una constante arbitraria. Es la forma deformada lo que es importante; las magnitudes exactas solo se obtienen mediante un análisis dinámico completo y no dependen del tipo y tamaño de la excitación.

Para el haz sin pinzas representado en la figura 45, la solución exacta para las frecuencias naturales viene dada por [4]

$$\mu_m = \frac{\pi}{L} \left(m - \frac{1}{2} \right) \quad (251)$$

considerando el problema como unidimensional. La forma deformada viene dada por

$$u_m = C \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right] \quad (252)$$

donde m es un número entero que lleva los valores al orden deseado. Cuando se utilizan métodos numéricos discretos, el número máximo de valores propios que se pueden obtener es igual al número de grados de libertad del problema. No se pueden esperar resultados precisos para modos de vibración más altos; en particular, si se usa (250) donde \mathbf{K} y \mathbf{M} no son simétricos, los modos más altos tendrán valores propios complejos. En las expresiones anteriores, \mathbf{L} es la longitud del haz y \mathbf{C} una constante arbitraria. A partir de (251) las frecuencias naturales del haz pueden calcularse mediante la expresión

$$\omega^2 = \frac{E\mu^2}{\rho} \quad (253)$$

donde ρ y E son constantes materiales. La ecuación (252) da la forma deformada para un μ_m dado una vez que se define C . En lo que sigue, $C = 1$.

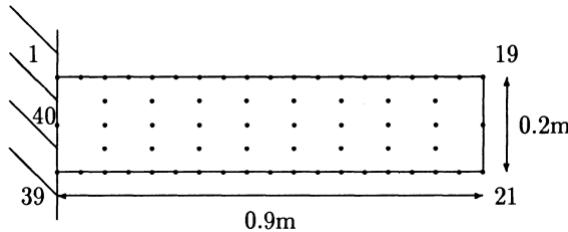


Figure 47: BEM Discretización de haz

Los resultados numéricos se presentan ahora para la discretización que se muestra en la figura 47.

El haz tiene una longitud de 0,9m y se discretizó utilizando 40 elementos de límite lineales y 24 nodos internos. Se impuso un pequeño desplazamiento arbitrario u_o en el nodo de frontera en el medio del lado sujeto (nodo 40) por las razones dadas anteriormente, mientras que en todos los nodos restantes se prescribió la condición $q = 0$.

La discontinuidad en q en los nodos 1 y 39 puede tenerse en cuenta imponiendo condiciones de frontera para q antes del nodo 39 y q después del nodo 1 como se describe en [13].

La ecuación (245) se resolvió a partir de $\mu = 0$ y utilizando un paso variable en μ . El programa comienza con $\Delta\mu = 0.1$; si para dos iteraciones sucesivas el aumento promedio en el valor de u en todos los nodos es más del 40%, entonces $\Delta\mu$ se reduce a 0.01. Cuando los valores medios de u comenzaron a caer, la

$\Delta\mu$ se incrementó a 0.5. Este valor se usó hasta los valores de u comenzaron a aumentar nuevamente, cuando $\Delta\mu$ se convirtió en 0.1, etc.

Los resultados para las primeras cuatro frecuencias naturales del haz sujeto se comparan en la figura 48 con las soluciones exactas calculadas a partir de la ecuación (251). Se obtuvieron los mismos resultados usando u_o . valores de 0.1, 0.5 y 5.0.

| μ_i | exact | DRM |
|---------|-------|-------|
| 1 | 1.74 | 1.74 |
| 2 | 5.24 | 5.24 |
| 3 | 8.73 | 8.75 |
| 4 | 12.22 | 12.36 |

Figure 48: Resultados para μ para el haz de la figura 47

La forma deformada del haz se representa en la figura 49 para cada una de las primeras cuatro frecuencias naturales. Para los resultados de la computadora, todos los valores se han dividido por el valor máximo obtenido en el nodo 19. Los resultados exactos se obtuvieron de la ecuación (252) con $C = 1$.

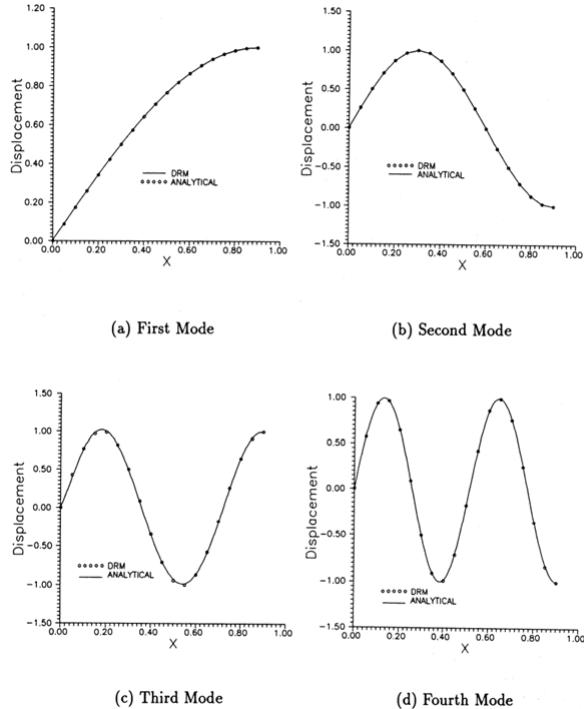


Figure 49: Forma de viga deformada para las primeras cuatro frecuencias naturales

Los resultados se trazan para los nodos frontera 1-19; los de los nodos restantes se pueden obtener por simetría. Tenga en cuenta que el acuerdo entre los resultados de DRM y la solución exacta es excelente. Se pueden obtener otras frecuencias naturales, pero esto requiere el uso de una discretización más fina. Se puede observar en la figura 49 (d) que el cuarto modo de vibración contiene 7 cuartos de longitud de onda. Empleando 19 nodos por lado, hay $19/7$ nodos por cuarto de longitud de onda para este modo. La discretización ha alcanzado así su frontera. Si se va a obtener μ_5 , se debe utilizar una discretización más fina. Para una buena representación de la forma deformada, es evidente que debe haber al menos 3 nodos por cuarto de longitud de onda.

Para probar la sensibilidad del método al número de elementos límite y también al número de nodos internos, se probaron otras cinco discretizaciones, que se muestran en las figuras 50, 51, 52, 53 y 54.

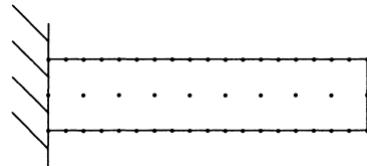


Figure 50: (a) 19 nodos/lado; 8 nodos internos

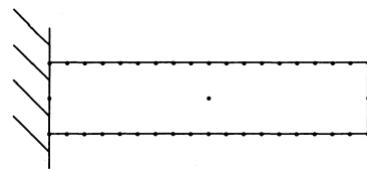


Figure 51: (b) 19 nodos/lado; 1 nodo interno

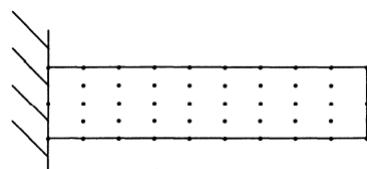


Figure 52: (c) 10 nodos/lado; 24 nodos internos

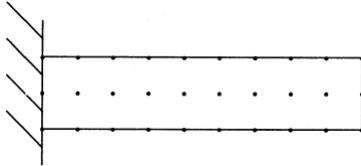


Figure 53: (d) 10 nodos/lado; 8 nodos internos

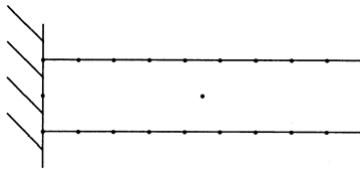


Figure 54: (e) 10 nodos/lado; 1 nodo interno

Los resultados para μ se muestran en la figura 55. Al analizar la tabla, se puede ver que para este tipo de problema es aconsejable el uso de varios nodos internos, particularmente para modos de vibración más altos. Como se esperaba, la discretización con 10 nodos/lado es menos precisa para el modo 4, ya que ahora solo hay 10/7 nodos para cada cuarto de longitud de onda.

| μ | N=22 | | | N=40 | | |
|-------|--------------------|-------|--------------------|-------|-------|--------|
| | 10 nodes/long side | | 19 nodes/long side | L = 1 | L = 8 | L = 24 |
| Exact | L = 1 | L = 8 | L = 24 | L = 1 | L = 8 | L = 24 |
| 1.74 | 1.75 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.74 |
| 5.24 | 5.26 | 5.26 | 5.26 | 5.22 | 5.23 | 5.24 |
| 8.73 | 9.03 | 8.88 | 8.86 | 8.84 | 8.76 | 8.75 |
| 12.22 | 13.30 | 12.76 | 12.61 | 12.77 | 12.44 | 12.36 |

Figure 55: Resultados para μ para haz sin pinzas utilizando diferentes discretizaciones

Resultados similares han sido obtenidos por Kontoni *et al.* [14] para el haz de la figura 47 cuando está sujeto a diferentes condiciones finales. En lo que sigue, se muestran los resultados para los casos de vigas con abrazaderas libres y libres para las cuales las soluciones analíticas unidimensionales respectivas tienen la forma [15]:

- Sujetado-sujetado:

$$\mu_m = \frac{m\pi}{L} \quad (254)$$

$$u_m = C \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \quad (255)$$

- Gratis gratis:

$$\mu_m = \frac{m\pi}{L} \quad (256)$$

$$u_m = C \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \quad (257)$$

| μ | N=22 | | | N=40 | | |
|-------|--------------------|-------|--------|--------------------|-------|--------|
| | 10 nodes/long side | | | 19 nodes/long side | | |
| Exact | L = 1 | L = 8 | L = 24 | L = 1 | L = 8 | L = 24 |
| 3.49 | 3.49 | 3.50 | 3.50 | 3.48 | 3.49 | 3.49 |
| 6.98 | 7.12 | 7.05 | 7.05 | 6.98 | 6.99 | 6.99 |
| 10.47 | 11.13 | 10.79 | 10.70 | 10.80 | 10.58 | 10.54 |
| 13.96 | 16.09 | 14.86 | 14.54 | 15.14 | 14.37 | 14.20 |

Figure 56: Resultados para μ para viga sujeta-sujetada usando diferentes discretizaciones

| μ | N=22 | | | N=40 | | |
|-------|--------------------|-------|--------|--------------------|-------|--------|
| | 10 nodes/long side | | | 19 nodes/long side | | |
| Exact | L = 1 | L = 8 | L = 24 | L = 1 | L = 8 | L = 24 |
| 3.49 | 3.49 | 3.50 | 3.50 | 3.48 | 3.48 | 3.49 |
| 6.98 | 7.08 | 7.05 | 7.05 | 6.99 | 6.98 | 6.98 |
| 10.47 | 11.03 | 10.77 | 10.71 | 10.71 | 10.56 | 10.54 |
| 13.96 | 15.40 | 14.84 | 14.61 | 14.67 | 14.35 | 14.23 |

Figure 57: Resultados para μ para haz libre libre usando diferentes discretizaciones

En el problema del haz libre libre, se impuso un pequeño valor arbitrario q_0 en el nodo 40 para evitar movimientos rígidos del cuerpo.

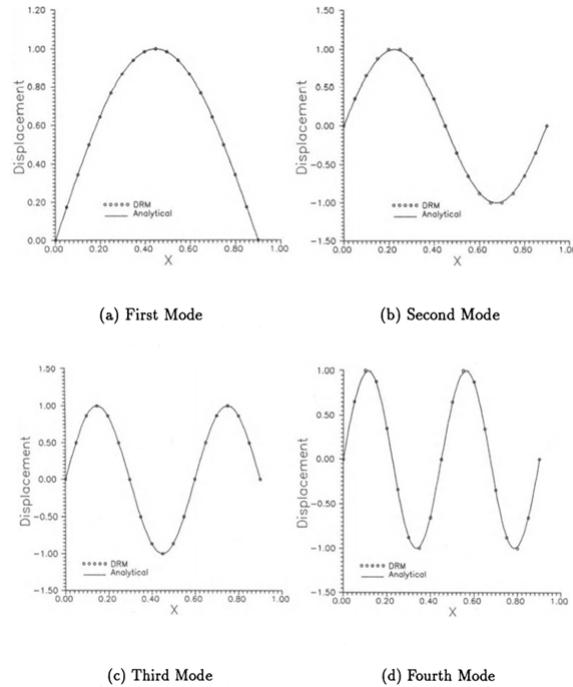


Figure 58: Primeros cuatro modos naturales para la viga sujeta-sujetada

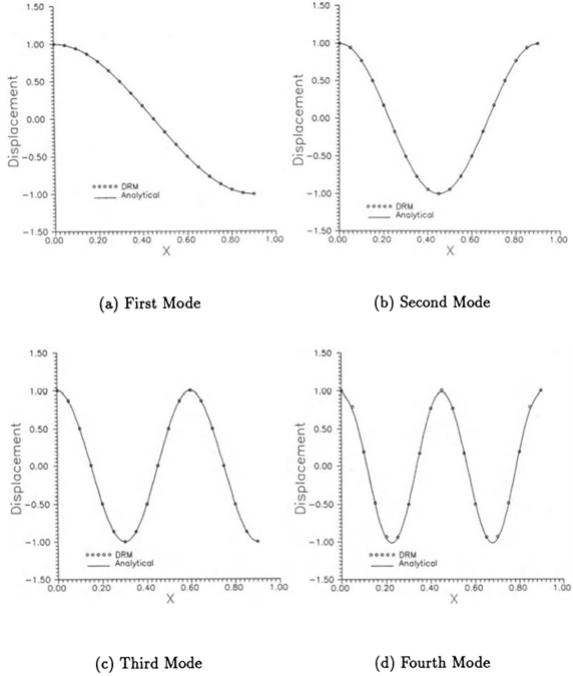


Figure 59: Primeros cuatro modos naturales para haz libre-libre

Debe notarse que al usar la formulación previa se evita el problema de tratar con valores propios complejos. Se puede obtener cualquier modo de vibración si se utiliza una discretización adecuada. Deben emplearse discretizaciones extremadamente finas si se desean resultados para modos de vibración de alto orden, siguiendo la regla de aproximadamente tres nodos por lado para cada cuarto de longitud de onda para obtener el modo más alto. Esto también es cierto para el análisis de elementos finitos o cualquier otro método numérico discreto. En muchos casos en la práctica de la ingeniería, los modos de vibración de alto orden son de menor importancia.

6.3.3 Resultados para DRM sin inversión

La formulación DRM sin inversión desarrollada por Ali *et al.* [11] se ha aplicado a una serie de problemas con las condiciones de contorno de Neumann ($q = 0$). En este caso, la ecuación (244) se reduce a

$$Hu = -\mu^2(\hat{H}U - \hat{G}\hat{Q})\Phi \quad (258)$$

Sustituyendo los valores de u en términos de Φ , esto se convierte en

$$\mathbf{H}\mathbf{F}\Phi = -\mu^2(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\Phi \quad (259)$$

Los valores propios de la ecuación anterior son los mismos que los de la ecuación (244), la única diferencia en esa ecuación (259) no requiere ninguna inversión de matriz. Los vectores propios en términos de \mathbf{u} pueden obtenerse mediante la relación $\mathbf{u} = F\Phi$.

En el caso de condiciones de frontera mixtas, la ecuación (244) debe dividirse como en (247). Este proceso de condensación implica la inversión de una pequeña submatriz (G_{11}) aunque la inversión de la matriz \mathbf{F} aún se puede evitar.

Ali *et al.* [11] analizaron varios problemas con la formulación anterior, dos de los cuales se reproducen a continuación. El primero se refiere al problema del tubo de impedancia, una configuración utilizada comúnmente en laboratorios acústicos con fines de experimentación. La longitud y el ancho del tubo se eligieron para ser de 40m y 2m, respectivamente; La discretización empleó 16 elementos lineales a lo largo del largo y 2 a lo largo del ancho, sin puntos internos. Los resultados del análisis se muestran en la figura 60, y parecen estar en buen acuerdo con la solución teórica.

| μ_i | theory | DRM |
|---------|--------|-------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 4.26 | 4.25 |
| 3 | 8.53 | 8.50 |
| 4 | 12.91 | 12.75 |
| 5 | 17.30 | 17.00 |

Figure 60: Resultados para el tubo de impedancia

El segundo problema reproducido de Ali *et al.* [11] es un modelo trapezoidal (figura 61) para el cual se informaron soluciones de elementos finitos y resultados experimentales en [16].

Los resultados de la figura 62 pretenden mostrar la mejora en la precisión de la solución DRM con la inclusión de puntos internos, como se discutió en la sección anterior.

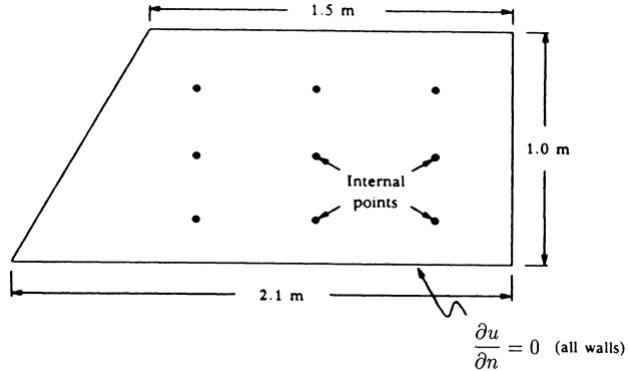


Figure 61: Modelo trapezoidal

| μ_i | DRM (no internal points) | DRM (9 internal points) | Experiment | FEM |
|---------|--------------------------|-------------------------|------------|-------|
| 1 | 93.7 | 92.9 | 93 | 92.5 |
| 2 | 169.3 | 165 | 164 | 162.5 |
| 3 | 187.6 | 182.3 | 182 | 179.1 |

Figure 62: Resultados para el modelo trapezoidal

6.4 Casos no lineales

Existen muchas fuentes diferentes de no linealidad en los problemas de la mecánica del continuo, como los de material, condiciones de frontera, geometría y ecuaciones de gobierno. Las no linealidades del material ocurren cuando las propiedades del material son una función de la variable problemática. Este tipo de no linealidad a veces puede tratarse eliminando el dominio integrales a través de una transformación como la de Kirchhoff [17]. Las condiciones frontera no lineales ocurren cuando un flujo frontera es una función no lineal de la solución del problema.

Este tipo de condición de frontera implica la inclusión de una integral de frontera especial en la ecuación básica (23) [18], pero no genera integrales de dominio, por lo que no es necesario manejar DRM. En el caso, se producen problemas geométricos no lineales. de grandes desplazamientos en el análisis estructural o problemas de fronteras móviles como la transferencia de calor con cambio de fase. Las no linealidades en las ecuaciones de gobierno normalmente se manejan usando la solución fundamental para una ecuación lineal simplificada. Los términos no lineales dan lugar a integrales de dominio en el lado derecho de la ecuación que tienen que ser tratados usando un esquema iterativo. Este tipo

de problema también es difícil de tratar con otros métodos de transformación de integrales de dominio a la frontera, pero al usar el DRM, los términos no lineales se pueden incorporar fácilmente en el análisis.

Al manejar la ecuación de Helmholtz en la sección anterior, tanto μ como u eran desconocidos. Este problema se resolvió paso a paso asumiendo un valor inicial de μ , calculando la u correspondiente y examinándola para ver si la μ supuesta era el valor requerido. Este procedimiento iterativo también se puede utilizar en algunos tipos de análisis no lineal, como se verá en la sección 6.4.2.

6.4.1 Ecuación de Burger

Esta ecuación, que tiene la estructura de una ecuación de convección-difusión pero contiene la no linealidad completa de la ecuación de flujo unidimensional, se puede derivar haciendo ciertos supuestos simplificadores de las ecuaciones de Navier-Stokes. Su forma habitual, para situaciones de estado estacionario, es

$$\nabla^2 u + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (260)$$

en el que la variable u es una velocidad. Para tratar este caso con el DRM, uno nota que b en la ecuación (205) es ahora

$$b = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (261)$$

tal que (204) se convierte

$$\alpha = -F^{-1}b_1 \quad (262)$$

en el que el vector b_1 contiene los valores de $u\partial u/\partial x$ en los puntos nodales. El tratamiento del derivado como se indica en la sección 6.2 produce la siguiente expansión

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} u \quad (263)$$

La ecuación (263) expresa así la derivada como un producto de dos matrices y un vector, cuyo resultado es un vector.

Ahora es necesario incluir la función u que multiplica previamente el término derivado. Se propone una representación matricial simple en la forma

$$\mathbf{U} = \boxed{\begin{array}{cccccc} u_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & u_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdot & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{array}}$$

Figure 63: 4.64

Según la definición anterior, la matriz \mathbf{U} es diagonal y contiene los valores de u en los nodos. Así,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (264)$$

Este término es un producto de tres matrices y un vector. Sustituyendo (264) en (262), y el resultado en (203), se obtiene

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (265)$$

Definiendo la matriz \mathbf{R} tal que

$$\mathbf{R} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \quad (266)$$

la ecuación (265) se convierte

$$(\mathbf{H} + \mathbf{R})\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (267)$$

que es similar a la ecuación (211).

El procedimiento de solución ahora es iterativo ya que los coeficientes de la matriz \mathbf{R} son función de u . Primero se supone $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y se resuelve una ecuación de Laplace en la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (268)$$

para obtener una primera estimación de u y q . Luego se construye una matriz U_1 usando (figura 63), el sufijo que indica el número de iteración. El siguiente paso es calcular la matriz R_1 a través de (266) y resolver la ecuación (267) para obtener U_2 . Este proceso continúa hasta que se obtenga la convergencia.

Tenga en cuenta que solo la matriz U se altera en cada iteración; los otros pueden calcularse una vez, almacenarse y usarse en cada iteración para construir primero la matriz R y luego la ecuación (267). El programa de computadora 3 puede usarse con algunas modificaciones simples para llevar a cabo procesos iterativos como el anterior.

Aplicación

En los resultados que figuran a continuación, los valores de u en los nodos internos se consideraron convergentes si su diferencia entre dos iteraciones sucesivas era inferior al 1%. La ecuación (260) se resolvió utilizando la discretización que se muestra en la figura 40. Una solución particular para esto el problema es

$$u = 2/x \quad (269)$$

que cuando se impone como una condición frontera también es la solución exacta como se explica en la sección 6.1, expresión (213). La expresión (269) tiene una singularidad en $x = 0$; para evitarla, el origen del sistema cartesiano en la figura 40 fue desplazado al punto (-3,0).

Se emplearon las expansiones $f = 1 + r$ y $f = 1 + r + r^2$, con los resultados mostrados en la figura 64.

| | x | y | $f = 1 + r$ | $f = 1 + r + r^2$ | Eqn. (4.70) |
|----------|-----|-------|-------------|-------------------|-------------|
| u_{17} | 4.5 | 0.0 | 0.445 | 0.446 | 0.444 |
| u_{18} | 4.2 | -0.35 | 0.477 | 0.481 | 0.476 |
| u_{19} | 3.6 | -0.45 | 0.558 | 0.563 | 0.555 |
| u_{20} | 3.0 | -0.45 | 0.669 | 0.676 | 0.666 |
| u_{21} | 2.4 | -0.45 | 0.834 | 0.841 | 0.833 |
| u_{22} | 1.8 | -0.35 | 1.110 | 1.113 | 1.111 |
| u_{23} | 1.5 | 0.0 | 1.333 | 1.331 | 1.333 |
| u_{29} | 3.9 | 0.0 | 0.514 | 0.519 | 0.512 |
| u_{30} | 3.3 | 0.0 | 0.608 | 0.614 | 0.606 |
| u_{31} | 3.0 | 0.0 | 0.669 | 0.675 | 0.666 |
| u_{32} | 2.7 | 0.0 | 0.742 | 0.749 | 0.740 |
| u_{33} | 2.1 | 0.0 | 0.949 | 0.956 | 0.952 |

Figure 64: Resultados de DRM para la ecuación de Burger

Se obtuvo la convergencia para ambas expansiones f en cuatro iteraciones sin utilizar técnicas de relajación. Se puede ver que ambas soluciones son excelentes.

6.4.2 Encendido espontáneo: el caso de estado estacionario

Ya hemos visto un ejemplo en el que aparece un parámetro desconocido en la ecuación, y otro en el que un término no homogéneo depende de la variable del problema. Ambas situaciones ocurren en el problema de la ignición espontánea, que se examinará a continuación como un ejemplo de la simplicidad de tratar ecuaciones no lineales relativamente complejas con el DRM.

Las ecuaciones de gobierno

El problema de la ignición espontánea es un problema de conducción de calor que involucra un sólido reactivo. La ecuación diferencial parcial que describe el problema es una ecuación de difusión transitoria con un término de calentamiento de reacción no lineal [19-21].

La ecuación diferencial para la difusión de calor generalmente se escribe como

$$K\nabla^2T + F = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (270)$$

para materiales isotrópicos, en los cuales T es temperatura, F es un término fuente y ρ, c, K son densidad, calor específico y conductividad térmica, respectivamente. En el caso de un sólido reactivo, el término fuente F se convierte en [20]

$$F = \rho Q z e^{-E/RT} \quad (271)$$

donde Q es el calor de descomposición del sólido, z el número de colisión, E es la energía de activación de Arrhenius y R la constante de gas universal. La ecuación (270) puede simplificarse mediante un cambio de variables. Definición [20]

$$u = E \frac{(T - T_a)}{RT_a^2} \quad (272)$$

donde T_a es la temperatura ambiente, la ecuación en términos de la nueva variable se convierte,

$$\nabla^2 u + \gamma e^u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (273)$$

donde $k = K/\rho c$ es la difusividad térmica y

$$\gamma = \frac{\rho Q E z}{K R T_a^2} e^{-E/RT_a} \quad (274)$$

Para obtener (273) se empleó la aproximación de Frank-Kamenetskii [20], *i.e.*

$$e^{-E/RT} = e^{-E/RT_a} e^u \quad (275)$$

Es habitual definir el parámetro no dimensional de Frank-Kamenetskii como $\delta = \ell^2\gamma$ donde ℓ es una dimensión problemática característica. La importancia física de δ se discute a continuación. Para esto, se supone que un material reactivo dado tiene una ignición temperatura T_m , la temperatura ambiente se considera T_a y la temperatura inicial es T_0 en el tiempo $t = 0$. De la ecuación (272) se pueden obtener los valores correspondientes de u_m , u_a y u_0 .

Para $\delta < \delta_c$ donde δ_c es un valor crítico, se puede colocar un sólido reactivo a temperatura T_0 en un ambiente a temperatura T_a ($T_a < T_m$), y el campo de temperatura dentro del sólido cambiará de acuerdo con la ecuación (273) hasta todos los puntos están a una temperatura $T_a \leq T < T_m$ (no uniforme), logrando así una situación de estado estacionario donde no se produce la ignición. Para $\delta > \delta_c$, la temperatura dentro del sólido continuará aumentando hasta que algún punto alcance la temperatura de ignición T_m .

Por lo tanto, para modelar el proceso de ignición espontánea, un conocimiento de δ_c es esencial.

Este valor se puede obtener para una forma geométrica dada considerando $\partial u / \partial t = 0$ en la ecuación (273) [21]. El resultado es

$$\nabla^2 u = -\gamma e^u \quad (276)$$

La ecuación (276) ahora se resolverá utilizando elementos de frontera para una serie de formas geométricas bidimensionales comunes para obtener γ_c para cada caso. La ecuación dependiente del tiempo (273) se aplicará en el capítulo 7 para simular el proceso completo de ignición espontánea. Ambos tipos de no linealidad mencionados al comienzo de la sección están presentes en la ecuación (276) ya que tanto γ como u son desconocidos.

Formulación DRM para encendido espontáneo

La solución DRM puede obtenerse usando los procedimientos descritos en el capítulo 5 y el Programa de computadora 2 puede usarse con algunas modificaciones. La ecuación matricial es

$$Hu - Gq = (HU - G\hat{Q})\alpha \quad (277)$$

donde, en este caso,

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{F}^{-1}\gamma \mathbf{b}_2 \quad (278)$$

en el que el vector \mathbf{b}_2 contiene los valores nodales de e^u . La ecuación (277) se resolverá iterando tanto en γ como en u .

Se sabe [20] que el comportamiento de las soluciones a la ecuación (276) es tal que por encima del valor crítico de γ_c no debe esperarse ninguna solución, y por debajo de γ_c puede ocurrir una multiplicidad de soluciones. Esta situación se muestra en la figura 65.

Para $\gamma < \gamma_c$ la solución tiene dos ramas que se denominan soluciones superior e inferior. Considere primero la solución inferior. El problema se inicia con $u = 0$ en todas partes y $\gamma = \Delta\gamma$. Por lo tanto, se puede calcular un nuevo conjunto de valores de u iterando sobre el término γe^u , como se explica en la sección 6.4.1. La primera solución se llamará u_1 , donde el sufijo es el número de iteración en γ . Entonces γ se incrementa a $2\Delta\gamma$ y se calcula un nuevo conjunto de valores u_2 . Siguiendo la curva inferior, $u_2 > u_1$ en todos los puntos. Las iteraciones continúan hasta que, para una γ dada, el proceso ya no converge. La no convergencia se caracteriza por $u_m^n > u_m^{n-1}$ para dos iteraciones sucesivas en u en γ fijo. Aquí, m es el ciclo de iteración en γ y n el ciclo de iteración en u . El proceso iterativo en u es como se describe para el término no lineal en la ecuación de Burger en la sección 6.4.1, mientras que en γ es como se describe para μ en la ecuación de Helmholtz en la sección 6.3.2.

La no convergencia implica que $\gamma > \gamma_c$ (ver figura 65). Por lo tanto, $\Delta\gamma$ se reduce a $\Delta\gamma/10$ y el proceso se reinicia desde el último valor de γ para el que se obtuvo la convergencia. El proceso de solución continúa de manera similar para valores de $\Delta\gamma$ cada vez más pequeños hasta que se obtenga el grado de precisión requerido. El último valor en el que γ converge es el γ_c requerido para la geometría considerada.

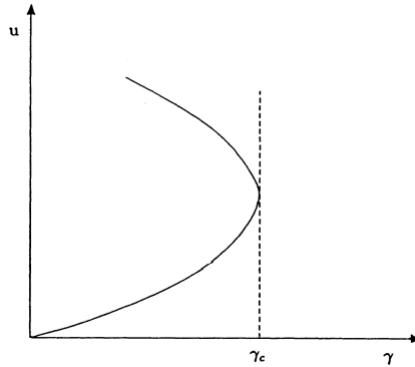


Figure 65: Parcela de γ x u

Si se sigue la curva superior, el proceso de solución comienza con $\gamma = \Delta\gamma$ y $u = C$ en todos los nodos, donde γ es un valor arbitrariamente grande. A medida que aumenta, en cualquier nodo $u_2 < u_1$. El valor resultante de γ_c será el mismo que el obtenido siguiendo la curva inferior.

En el proceso iterativo DRM, el vector α en la ecuación (277) es una función conocida calculada, en cada iteración, como

$$\alpha = -\mathbf{F}^{-1}\gamma_m \mathbf{b}_2 \quad (279)$$

donde b_2 es un vector evaluado utilizando los valores de u obtenidos en la iteración $n - 1$ para γ_m .

Aplicaciones

Los resultados ahora se presentan para las formas geométricas que se muestran en la figura 66 con sus respectivas discretizaciones.

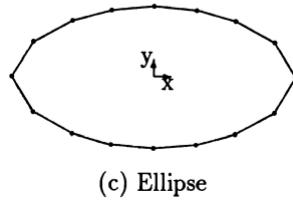
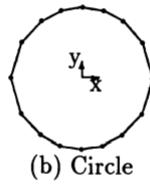
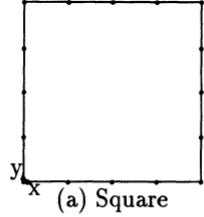


Figure 66: Discretizaciones de geometría 2D para encendido espontáneo

El cuadrado (figura 66 (a)) es del lado de la unidad, el círculo (figura 66 (b)) es de radio de la unidad y la elipse (figura 66 (c)) tiene un eje semi-mayor axis = 2 y un semi-menor axis = 1. Por lo tanto, en todos los casos, la dimensión característica del problema $\ell = 1$, de modo que $\gamma = \delta$. Se consideró que un conjunto de resultados convergía si dos iteraciones sucesivas producían $(u^{n-1} - u^n)/(u^{n-1} + u^n) < 0.001$ en todos los nodos internos.

Los resultados numéricos se presentan en la figura 67 para diferentes discretizaciones de fronteras con números fijos de nodos internos regularmente espaciados (9 para el cuadrado, 17 para el círculo y la elipse). Se puede ver que, en este caso, el uso de la curva cuadrática. Los elementos producen poca diferencia en los resultados si se usa el mismo número de nodos de frontera e internos. La razón de este comportamiento tiene que ver con las condiciones frontera del problema, que imponen un valor constante de u en todas partes. Para el círculo, esto produce un flujo frontera constante q . Para la elipse y el cuadrado, el flujo es variable pero su influencia en la solución en los puntos internos es de menor importancia.

También se incluye una solución de elementos finitos (FEM) [21] para com-

paración. La malla FEM para cada problema consistió respectivamente en 8, 20 y 34 elementos isoparamétricos cuadráticos con 37, 75 y 125 puntos de nodo para la mitad de la región.

| shape | 32 linear BE | 16 quadratic BE | FEM [21] | Exact |
|---------|--------------|-----------------|----------|----------|
| square | 1.763 | 1.770 | 1.703 | 1.7 [20] |
| circle | 2.032 | 2.031 | 2.001 | 2.0 [19] |
| ellipse | 1.251 | 1.252 | 1.234 | - |

Figure 67: Resultados de DRM para γ_c para diferentes discretizaciones

Los resultados dados en la figura 68 son para las mismas formas geométricas con una discretización de frontera fija y diferentes números de nodos internos regularmente espaciados. Se puede ver que, al aumentar el número de nodos internos, la solución converge hacia el valor exacto; sin embargo, se pueden obtener soluciones dentro de la precisión de ingeniería habitual con un número reducido de nodos internos, con poco tiempo de computadora y esfuerzo de preparación de datos.

| shape | 5 nodes | 9 nodes | 17 nodes | 80 nodes |
|---------|---------|---------|----------|----------|
| square | - | 1.770 | - | 1.707 |
| circle | 2.080 | - | 2.031 | 2.004 |
| ellipse | 1.276 | - | 1.252 | 1.235 |

Figure 68: Resultados para 16 BE cuadrática para diferentes números de nodos internos

El número relativamente grande de nodos internos necesarios para obtener soluciones muy precisas se debe a las características especiales del problema de ignición espontánea, como se puede ver en los resultados presentados en otras secciones, donde generalmente solo unos pocos nodos son suficientes para proporcionar la precisión requerida .

En todos los casos se empleó $f = 1 + r$. Los resultados para la simulación del proceso de encendido espontáneo completo utilizando la ecuación dependiente del tiempo (273) se dan en el capítulo 7.

6.4.3 Problemas de materiales no lineales

En problemas prácticos de transferencia de calor, los materiales no lineales para los cuales la conductividad es una función de la temperatura son bastante comunes.

Es habitual emplear la transformación de Kirchhoff, introducida en el contexto

BEM por Bialecki y Nowak [22], Khader y Hanna [23], para este tipo de problema. Esta transformación elimina las integrales de dominio que de otro modo surgirían debido a los términos no lineales, y linealiza el problema si solo están presentes las condiciones de frontera de tipo Neumann y Dirichlet. Sin embargo, en el caso de una condición de frontera convectiva o de tercer tipo, la ecuación integral de frontera resultante no es lineal, lo que requiere un procedimiento de solución iterativa [18].

Aplicado a un problema de material no lineal, el DRM siempre conducirá a una solución iterativa, sin embargo, una condición frontera del tercer tipo puede tenerse en cuenta de una manera simple. Se puede usar un programa de computadora estándar. Se pueden considerar casos en los que la conductividad es función de la temperatura o la ubicación espacial, por lo que la formulación es más general que la solución de transformación de Kirchhoff.

La ecuación de transferencia de calor en estado estacionario, descuidando las fuentes de calor, se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (280)$$

La conductividad K se considera una función conocida de la temperatura, $K = K(u)$.

Se considerarán tres tipos de condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \text{ on } \Gamma_1 \\ q &= k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ on } \Gamma_2 \\ q &= h(u_f - u) \text{ on } \Gamma_3 \end{aligned} \quad (281)$$

donde q representa el flujo de calor, h es un coeficiente de transferencia de calor y u_f es la temperatura de un medio circundante.

La transformación de Kirchhoff

La idea básica de la transformación de Kirchhoff es construir una nueva variable dependiente $U = U(u)$ tal que (280) se vuelva lineal en la nueva variable. Las derivadas de U con respecto a x y y son entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{dU}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{dU}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (282)$$

Al comparar el lado derecho de las expresiones anteriores con (280), se concluye que la elección correcta de U es tal que

$$\frac{dU}{du} = K(u) \quad (283)$$

o, en forma integral,

$$U = T[u] = \int_{u_a}^u K(u) du \quad (284)$$

donde u_a es un valor de referencia arbitrario. De (280) se desprende que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (285)$$

Las condiciones de frontera del primer y segundo tipo se convierten en:

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= \bar{q} \end{aligned} \quad (286)$$

La transformación de \bar{u} en \bar{U} en frontera antes de la solución y la transformación de los resultados para U de nuevo en u después de la solución depende de la naturaleza de la función $K = K(u)$ [18,22]. El primero se conoce como transformación de Kirchhoff y el segundo como transformación inversa de Kirchhoff.

La ecuación (285) puede manejarse como se describe en el capítulo 2. No son necesarias iteraciones y el Programa 1 para la ecuación de Laplace puede usarse en su solución.

Incorporación de condiciones de frontera del tercer tipo

La incorporación de las condiciones de frontera del tercer tipo en el análisis requiere una modificación del procedimiento general descrito en el capítulo 2. La integral de frontera que involucra el flujo en la ecuación (46) ahora se divide en una parte que se refiere a la frontera Γ_{1+2} y una parte que se refiere a Γ_3 , como sigue:

$$c_i U_i + \int_{\Gamma} U q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{1+2}} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_3} hu_f u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_3} hT^{-1}[U]u^* d\Gamma \quad (287)$$

Esta ecuación puede ser discretizada de la manera habitual, sin embargo, el término final deberá ser iterado. El programa 1 no se puede utilizar para resolver (287) debido a la adición de la nueva condición frontera.

La formulación de doble reciprocidad

La aplicación del DRM a la ecuación (280) requiere reescribir la ecuación en una forma similar a (205). El término no homogéneo b en este caso dependerá de la naturaleza de la función $K = K(u)$. Inicialmente el caso

$$K = K_0(1 - \beta u) \quad (288)$$

será considerado, en el cual K_0 y β son constantes materiales.

Sustituyendo (288) en (280) y simplificando, se encuentra que hay varias expresiones posibles diferentes para el término resultante del lado derecho, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -\frac{\beta}{(1+\beta u)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = b \\ \nabla^2 u &= -\frac{1}{\beta u} \nabla^2 u - \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = b \end{aligned} \quad (289)$$

El DRM se puede usar para llevar cualquier lado derecho a la frontera, y se mostrará que los resultados son muy similares en ambos casos. La primera ecuación (289) necesita la aproximación solo de las primeras derivadas, mientras que la segunda necesita la aproximación de las segundas derivadas.

El vector b usando primeros derivados

La aproximación DRM a las primeras derivadas se da en la sección 6.2 como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (290)$$

con una expresión similar para la derivada con respecto a y . Los valores $(N+L)$ de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ pueden evaluarse utilizando los valores de u de la iteración anterior. Definir una matriz diagonal T_x tal que

$$T_x(i, i) = \frac{\beta}{(1 + \beta u_i)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_i \quad (291)$$

con una definición similar para T_y , entonces

$$\mathbf{b} = - \left(\mathbf{T}_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{T}_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (292)$$

Cabe destacar que las matrices T_x y T_y deben actualizarse en cada iteración. Definiendo

$$\mathbf{S} = -(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}) \left(\mathbf{T}_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{T}_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \quad (293)$$

entonces la primera ecuación (289) se convierte en

$$(\mathbf{H} - \mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{G} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) \quad (294)$$

La ecuación (294) se reordena de acuerdo con los valores límite conocidos y se resuelve iterativamente.

El vector b usando segundas derivadas

La aproximación DRM al vector b ahora se derivará para la segunda ecuación (289), que involucra segundas derivadas:

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{\beta u} \nabla^2 u - \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (295)$$

Cabe señalar que (295) solo es válido para $\beta \neq 0$.

Se obtiene una aproximación DRM a las segundas derivadas diferenciando (220):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} \boldsymbol{\gamma} \quad (296)$$

con

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (297)$$

tal que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (298)$$

Se puede escribir una expresión similar para la segunda derivada con respecto a y .

Cabe señalar que en este caso $f = 1 + r$ demuestra ser una función aproximada inadecuada, ya que las derivadas espaciales de segundo orden de r son singulares cuando $r = 0$.

Para superar esto, la expansión

$$f = 1 + r^2 + r^3 \quad (299)$$

fue adoptado.

Ahora se puede escribir

$$\mathbf{b} = - \left[\mathbf{U} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y^2} \right) \mathbf{F}^{-1} + \left(\mathbf{U}_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{U}_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \right] \mathbf{u} \quad (300)$$

donde \mathbf{U} es una matriz diagonal que contiene valores nodales de $1/(\beta u)$, \mathbf{U}_x es una matriz diagonal que contiene valores nodales de $\frac{1}{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ y de manera similar para \mathbf{U}_y . Todos estos se obtienen utilizando los valores de \mathbf{U} en los nodos de la iteración anterior.

Con una definición apropiada de la matriz \mathbf{S} , la ecuación final es la misma que (294).

Inclusión de condiciones frontera convectivas

La ecuación (294) se reordena antes de resolver, dado que en cada nodo frontera se conoce u o $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\mathbf{q}}{K}$. En el caso de una condición frontera del tercer tipo

$$q = h(u_f - u) \quad (301)$$

tal que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{h}{K} (u_f - u) \quad (302)$$

la ecuación (294) se convierte

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{e} + \mathbf{GEu} = \mathbf{Su} \quad (303)$$

En la ecuación anterior, \mathbf{e} es un vector que contiene valores nodales de hu_f/K y \mathbf{E} es una matriz diagonal que contiene valores nodales de h/K . El valor de $K = (1 + \beta u)$ se evalúa utilizando valores de u de la iteración anterior. La ecuación (303) solo se usa en Γ_3 mientras que la ecuación (294) se usa en otras partes de la frontera.

Para la primera iteración, los términos en β se ignoran y se obtiene la solución lineal. Después de eso, los valores de q se obtienen en Γ_3 usando la expresión (301).

Como la aplicación del DRM es similar en diferentes casos, lo anterior puede implementarse a partir del Programa 3, que se proporciona en este capítulo.

Problema que incluye las condiciones de frontera del primer y segundo tipo

La geometría del problema considerado se muestra en la figura 69, que consiste en una placa cuadrada del lado de la unidad. Se utilizaron nueve elementos de frontera constantes iguales para discretizar cada lado. Las condiciones de contorno empleadas fueron $u = 300$ en $x = 0$, $u = 400$ en $x = 1$ y $q = 0$ en $y = 0$ y $y = 1$.

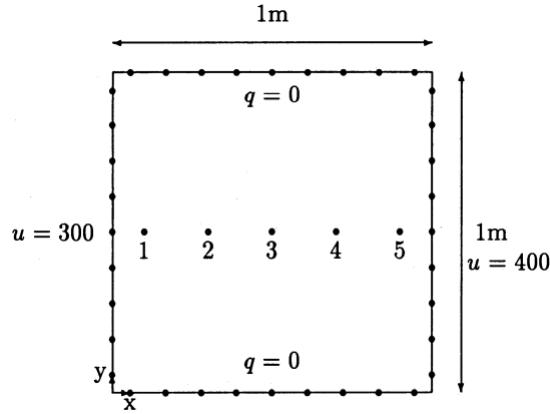


Figure 69: Problema 1: placa cuadrada

La ecuación (280) se resolvió con

$$K = K_0 \left[1 + \beta \left(\frac{u - u_0}{u_0} \right) \right] \quad (304)$$

con $K_o = 1$, $\beta = 3$ y $u_0 = 300$. Las expresiones para la transformación de Kirchhoff y la transformación inversa se tomaron de [18] para esta situación,

$$U = \frac{K_0 u_0}{2\beta} \left[1 + \beta \left(\frac{u - u_0}{u_0} \right) \right]^2 - \frac{K_0 u_0}{2\beta} \quad (305)$$

tal que $\bar{U} = 0$ para $\bar{u} = 300$ y $\bar{U} = 150$ para $\bar{u} = 400$, y

$$u = u_0 + \frac{u_0}{\beta} \left(1 + \frac{2\beta U}{K_0 u_0} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{u_0}{\beta} \quad (306)$$

En el caso de la solución DRM

$$b = -\frac{\beta}{u_0 + \beta(u - u_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (307)$$

Los resultados se dan en la figura 70 en los 5 nodos numerados en la figura 69. La solución DRM convergió en 4 iteraciones. Para este tipo de no linealidad, la diferencia entre los resultados obtenidos y la solución de Laplace ($\beta = 0$) es pequeña.

Se ve que la solución DRM está razonablemente de acuerdo con la obtenida usando la transformación de Kirchhoff.

| Node | x | y | DRM $\beta = 3$ | Kirchhoff Transform | Laplace ($\beta = 0$) |
|------|-----|-----|--------------------|------------------------|----------------------------|
| 1 | .1 | .5 | 314.15 | 314.00 | 310 |
| 2 | .3 | .5 | 338.34 | 337.82 | 330 |
| 3 | .5 | .5 | 358.49 | 358.11 | 350 |
| 4 | .7 | .5 | 376.27 | 376.08 | 370 |
| 5 | .9 | .5 | 392.43 | 392.36 | 390 |

Figure 70: Resultados para u para el problema 1

Resultados de un problema con una condición frontera del tercer tipo

El problema que se muestra en la figura 71 se publicó en [22], donde se presentó originalmente la solución de transformación de Kirchhoff. La geometría y la discretización de fronteras son las mismas que para el ejemplo anterior, sin embargo, en este caso las condiciones de frontera son $q = 0$ en $x = 0$ y $y = 0$, $u = 300$ en $x = 1$, y la condición de frontera convectiva en $y = 1$, i.e. $q = h(u_f - u)$ con $h = 10$ y $u_f = 500$.

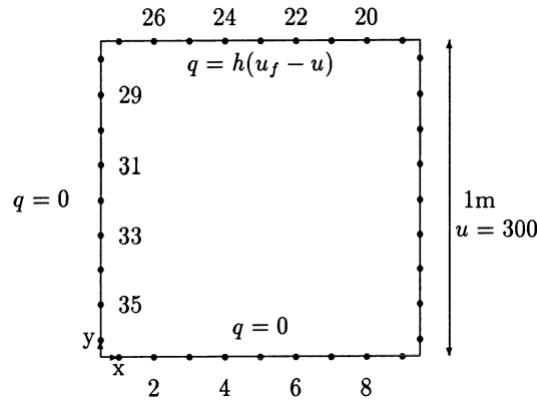


Figure 71: Problema 2

También se adoptó una variación lineal para la relación conductividad-temperatura para este problema, $K = K_0(1 + \beta u)$, con $k_0 = 1$ y $\beta = 0.3$.

Las soluciones DRM utilizaron 25 nodos internos espaciados uniformemente, y se llevaron a cabo para cada una de las dos ecuaciones (289). La solución que usa los primeros derivados se denominó DRM1 y la que usa los segundos derivados, DRM2. Los resultados para u para los 12 nodos que se muestran en la figura 71 se dan en la figura 72.

Los resultados DRM convergieron en 5 iteraciones para una tolerancia de 0.00001. Se puede ver que el acuerdo entre los resultados de DRM y la transformación de Kirchhoff

| Node | DRM1 $\beta = 0.3$ | DRM2 $\beta = 0.3$ | Kirchhoff Transform | Laplace ($\beta = 0$) |
|------|-----------------------|-----------------------|------------------------|----------------------------|
| 2 | 307.13 | 306.66 | 306.79 | 385.12 |
| 4 | 306.04 | 305.70 | 305.79 | 372.98 |
| 6 | 304.26 | 304.03 | 304.08 | 351.83 |
| 8 | 301.94 | 301.86 | 301.84 | 323.48 |
| 20 | 307.05 | 306.95 | 306.93 | 442.50 |
| 22 | 311.84 | 311.61 | 311.61 | 469.57 |
| 24 | 314.64 | 314.34 | 314.33 | 478.68 |
| 26 | 316.11 | 315.78 | 315.71 | 482.30 |
| 29 | 313.53 | 313.15 | 313.14 | 455.84 |
| 31 | 310.55 | 310.17 | 310.22 | 424.88 |
| 33 | 308.60 | 308.19 | 308.28 | 402.82 |
| 35 | 307.59 | 307.07 | 307.25 | 390.57 |

Figure 72: Resultados para u para el problema 2

La solución es excelente, particularmente en el caso de DRM2 que utiliza segundas derivadas.

6.5 Programa de computadora 3

Este programa resuelve problemas del tipo $\nabla^2 u = b(x, y, u)$ para una serie de diferentes funciones b . Para problemas que dependen del tiempo, se debe utilizar el programa informático 4.

Se pueden usar diferentes expansiones f , siempre que se incluyan el término constante y otro término. Tanto la ecuación como la expansión f se definen como entrada de datos como se verá en la sección 6.5.1. Los elementos lineales se utilizan nuevamente por simplicidad. Se aplica la misma limitación de 200 nodos que para los Programas 1 y 2. El lector puede modificar el programa para tratar otras ecuaciones, expansiones de f o elementos sin dificultad. La entrada y salida para un problema de prueba se presentan al final de la sección. El pro-

grama está escrito en forma modular, utilizando algunas de las rutinas descritas para los Programas 1 y 2, siendo su estructura similar a ambas. El programa 3 se dimensiona nuevamente para un máximo de 200 nodos, y su diagrama de flujo se muestra en la figura 73.

Los módulos del programa:

- ASSEM2
- SOLVER
- INPUT2
- OUTPUT

se han descrito y enumerado en los capítulos 2 y 3 y se utilizarán en el formulario ya proporcionado. En esta sección se presentan las siguientes nuevas rutinas:

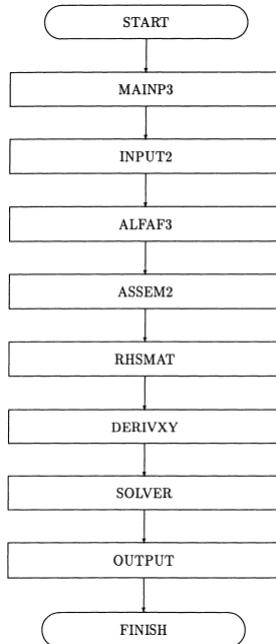


Figure 73: Estructura modular para el programa 3

- MAINP3
- ALFAF3
- RHSMAT
- DERIVXY

Para construir el Programa 3, comience desde el Programa 2 y realice las siguientes operaciones:

- i. Sustituir MAINP3 por MAINP2
- ii. Sustituir ALFAF3 por ALFAF2
- iii. Sustituir RHSMAT por RHSVEC
- iv. Eliminar INTERMEDIO
- v. Incluir DERIVXY

Los nombres de las variables utilizadas en el programa son los mismos que los utilizados en los Programas 1 y 2. Cuando se introducen nuevas variables, estos tendrán símbolos lo más cercanos posible a los utilizados en el texto. Al final de la sección, se proporcionan resultados y datos para un problema de prueba.

6.5.1 MAINP3

El primer paso en el programa es la definición de la ecuación a modelar. Las opciones disponibles se muestran en la figura 74.

| IDDX | IDDY | IFUNC | Equation |
|------|------|-------|--|
| 0 | 0 | 0 | $\nabla^2 u = -u$ |
| 1 | 0 | 0 | $\nabla^2 u = -\partial u / \partial x$ |
| 0 | 1 | 0 | $\nabla^2 u = -\partial u / \partial y$ |
| 1 | 1 | 0 | $\nabla^2 u = -(\partial u / \partial x + \partial u / \partial y)$ |
| 0 | 0 | 1 | not used |
| 1 | 0 | 1 | $\nabla^2 u = -\psi(x, y) \partial u / \partial x$ |
| 0 | 1 | 1 | $\nabla^2 u = -\psi(x, y) \partial u / \partial y$ |
| 1 | 1 | 1 | $\nabla^2 u = -\psi(x, y) (\partial u / \partial x + \partial u / \partial y)$ |

Figure 74: Opciones disponibles en el programa 3

Se accede a cada opción definiendo los tres parámetros indicados en la figura 74 en la primera línea del archivo de datos. Los parámetros se definen en el orden IDDX, IDDY, IFUNC. Si se va a utilizar una opción que implique $\psi(x, y) \neq 1$, la función relevante debe especificarse en la rutina DERIVXY que se enumera en la sección 6.5.4.

El siguiente paso es la definición de la expansión f que se empleará. La expansión utilizada es

$$f = C_1 + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^3 \quad (308)$$

La constante C_1 es necesariamente diferente de 0; además, una de las otras también debe ser diferente de cero. En el ejemplo dado, $C_1 = C_2 = 1, C_3 = C_4 = 0$. El uso de C_i diferente de 1 o cero producirá un efecto de escala, que puede ser importante para geometrías muy grandes o muy pequeñas. De este modo, el lector puede probar una gran cantidad de expansiones f sin alterar el programa. Los C_i se especifican en la segunda línea del archivo de datos.

Los datos restantes son como para el Programa 2, y INPUT2 se usa para leerlos. La opción de ecuación y la expansión f se imprimen como la primera salida del programa.

El siguiente paso es llamar a la rutina ALFAF3 para calcular F^{-1} . Para las ecuaciones consideradas en este capítulo, b es una función desconocida y, por lo tanto, α no se conoce explícitamente. En este caso, el vector α se sustituye por el producto $F^{-1}b$.

La subrutina ASSEM2 se llama como antes para evaluar y almacenar las matrices H y G , aplicar las condiciones de contorno y configurar el sistema $Ax = y$.

La rutina RHSMAT, que reemplaza a RHSVEC para funciones b desconocidas, produce ahora una matriz S en lugar del vector D . A continuación, las condiciones de contorno se aplican a S . En el caso de una u conocida, los coeficientes correspondientes de S se multiplican por su valor y el resultado agregado a XY . Si u es desconocido, los coeficientes de S se restan de los coeficientes correspondientes de A , por lo tanto $Ax = y$ incluirá la contribución del término fuente. XY comienza como y y se convierte en x después de llamar a SOLVER. Los resultados se distribuyen entre U y Q de acuerdo con el tipo de condición de frontera.

En este programa, no es necesario llamar a INTERM ya que la frontera y las soluciones internas se acoplan como se explica en la sección 6.1. Ambas soluciones se obtendrán simultáneamente en SOLVER. Esto representa una simplificación de la estructura del programa.

El paso final es una llamada a la rutina OUTPUT que imprime los resultados.

6.5.2 Subrutina ALFAF3

En el capítulo 5, se describió la rutina ALFAF2 para calcular $\alpha = F^{-1}b$. Para el tipo de ecuaciones ahora en consideración, b no es una función conocida y, por lo tanto, el vector α no puede calcularse explícitamente. La presente rutina calcula la matriz F^{-1} .

La matriz F se calcula inicialmente y luego se invierte utilizando la eliminación

de Gauss. El vector XY utilizado para el proceso de inversión es cada columna de una matriz de identidad a su vez. Este mismo vector devuelto por SOLVER será la columna correspondiente de la matriz F^{-1} que luego se almacena en FINV.

6.5.3 Subrutina RHSMAT

La estructura de RHSMAT es muy similar a la de RHSVEC del Programa 2. Los cambios se deben al hecho de que el lado derecho de la ecuación ahora es una matriz, llamada S en el programa y definida como

$$\mathbf{S} = (\mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{U}})\mathbf{F}^{-1} \quad (309)$$

multiplicado por un vector desconocido U . La matriz S puede multiplicarse por otras matrices si hay derivados presentes en la ecuación de gobierno. La rutina se divide en cinco secciones:

1. Calcular $\hat{\mathbf{Q}}$.

Esta matriz no está ensamblada y se almacena en HAT.

2. Evaluar $\mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}$.

El resultado se almacena en la matriz S .

3. Calcular $\hat{\mathbf{U}}$.

Esta matriz se ensambla y almacena en HAT. Tenga en cuenta que $HAT = \hat{\mathbf{U}}$ y $HH = H$ son matrices $(N + L) \times (N + L)$, como se muestra en la figura 24.

4. Evaluar $\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}}$.

El resultado se resta de S . Tenga en cuenta que los términos $c_i\hat{\mathbf{u}}_{ij}$ de la ecuación (147) se incluyen en esta operación.

5. Transfiera S a HH como almacenamiento temporal.

$S = (G\hat{\mathbf{Q}} - H\hat{\mathbf{U}})F^{-1}$ finalmente se calcula multiplicando S por FINV.

La subrutina DERIVXY se llama si hay derivados presentes en el término fuente. En DERIVXY, S se multiplicará por las matrices adicionales necesarias para cada caso.

6.5.4 Subrutina DERIVXY

Esta subrutina se llama si los derivados están presentes en el término fuente. La primera etapa es definir las matrices derivadas en F

$$F = IDDX \times \frac{\partial F}{\partial x} + IDD Y \times \frac{\partial F}{\partial y} \quad (310)$$

Esta matriz es asimétrica asimétrica. El resultado se multiplica por FINV y se almacena en CC

$$CC = \left(IDDX \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + IDDY \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \times FINV \quad (311)$$

El siguiente paso es multiplicar por $\psi(x, y)$ si $IFUNC \neq 0$

$$CC = \psi(x, y) \times CC \quad (312)$$

Tenga en cuenta que $\psi(x, y) = -2/x$ se define en el programa, y su uso se explicará en la siguiente sección. Si se va a utilizar cualquier otra función $\psi(x, y)$, debe definirse en la línea indicada por la declaración de comentario. Si la operación $IFUNC = 0$ (312) no se lleva a cabo, y CC continúa definiéndose por (311). A continuación, S se multiplica por CC y el resultado se almacena en F , de tal manera que ahora tenemos

$$F = (G\hat{Q} - H\hat{U})F^{-1}\Psi \left(IDDX \frac{\partial F}{\partial x} + IDDY \frac{\partial F}{\partial y} \right) F^{-1} \quad (313)$$

La matriz F se devuelve a S , de modo que S se define por la expresión (309) al regresar a RHSMAT.

6.5.5 Resultados de problemas de prueba

Ahora se considerarán dos problemas de prueba: el problema convectivo descrito en la sección 6.2.1 y otro en el que se usa una función $\psi(x, y)$ para multiplicar la derivada de u en el lado derecho de la ecuación de gobierno.

Problema convectivo

El archivo de datos y la salida de la computadora para el problema analizado en la sección 6.2.1 se imprimen a continuación. La ecuación es $\nabla^2 u = -\partial u / \partial x$. Se emplea la aproximación $f = 1 + r$. Los resultados se pueden comparar con la columna $f = 1 + r$ de la figura 42. Los datos son como se describen para el Programa 2, con dos líneas adicionales al comienzo del archivo como se describe en la sección 6.5.1.

La entrada de datos y la salida de la computadora se enumeran a continuación.

Producto de términos

La ecuación que se considerará en este caso es

$$\nabla^2 u = -\psi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (314)$$

Como ejemplo, $\psi(x, y)$ se considera $2/x$, de modo que se obtienen los mismos resultados del análisis de la ecuación de Burger de la sección 6.4.1. La diferencia en este caso es que, como la función se da explícitamente, no se necesitan iteraciones. La discretización, las condiciones de contorno y la solución exacta son como en la sección 6.4.1. Para utilizar el Programa 3 en este caso, IDDX se establece en 1, IDDY en 0 e IFUNC en 1.

La entrada de datos y la salida de la computadora para este caso ahora se enumeran:

6.6 Análisis tridimensional

El Método de Reciprocidad Dual puede extenderse fácilmente a aplicaciones tridimensionales. La solución fundamental de la ecuación tridimensional de Laplace es

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (315)$$

dónde

$$r = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{1/2} \quad (316)$$

los componentes r_x, r_y y r_z son las proyecciones del vector \vec{r} en los ejes x, y y z , por ejemplo $r_x = x_k - x_i$. Los comentarios hechos en la sección 5.3.2 sobre los signos de los componentes de r también son válidos en este caso.

Los elementos de frontera bidimensionales se utilizan para discretizar las superficies de la región. Estos elementos y sus funciones de interpolación se describen en los libros de texto básicos de elementos de frontera, como [13] y [18]. También se debe hacer referencia al Apéndice 2, que presenta fórmulas de integración numérica que pueden aplicarse a problemas de dos y tres dimensiones.

Las matrices H y G se calculan utilizando estos elementos. La relación DRM es como antes, *i.e.*

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b} \quad (317)$$

donde b es el término fuente de la ecuación en consideración. Se pueden usar las mismas expansiones para f , *i.e.*

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad (318)$$

Sin embargo, $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{q}}$ se modifican a

$$\hat{u} = \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{12} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2+m} \quad (319)$$

y

$$\hat{q} = \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} + r_z \frac{\partial z}{\partial n} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{r}{4} + \dots + \frac{r^m}{m+3} \right) \quad (320)$$

Esto es una consecuencia del hecho de que ahora

$$f = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \quad (321)$$

y

$$\hat{q} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \quad (322)$$

Las ecuaciones (319) y (320) ahora se utilizan para calcular las matrices $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{Q}}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, se pueden encontrar fácilmente las ecuaciones matriciales para los casos discutidos anteriormente.

6.6.1 Ecuaciones del tipo $\nabla^2 u = b(x, y, z)$

Las ecuaciones (149) y (156) también son válidas para problemas tridimensionales. Se puede escribir un programa de computadora para resolver este tipo de ecuación modificando el Programa de computadora 2, sección 5.4. Los principales cambios son:

- INPUT2

Se necesita una tercera coordenada, z , para todos los nodos. Se necesita una tabla de conectividad, *i.e.* una lista de nodos asociados con cada elemento, para los elementos de frontera. Los puntos de integración numérica y los factores de peso deben ser adecuados para el elemento bidimensional en uso (ver Apéndices 1 y 2).

- ASSEM2

Reemplace con una nueva rutina para el elemento límite bidimensional.

- RHSVEC

Cambie el cálculo de $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{Q}}$ usando las ecuaciones (319) y (320).

- INTERM

Se cambiará de acuerdo con las modificaciones realizadas en ASSEM2.

El programa puede ser preparado fácilmente por el lector y no se dará aquí por limitaciones de espacio.

Aplicación

Como ejemplo, el caso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2 \quad (323)$$

se considera. Una solución particular a esta ecuación es

$$u = -\frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (324)$$

que puede ser fácilmente verificado por el lector. Cuando se impone como una condición frontera esencial (324) también es la solución del problema. La ecuación (323) se resolvió para la geometría que se muestra en la figura 75.

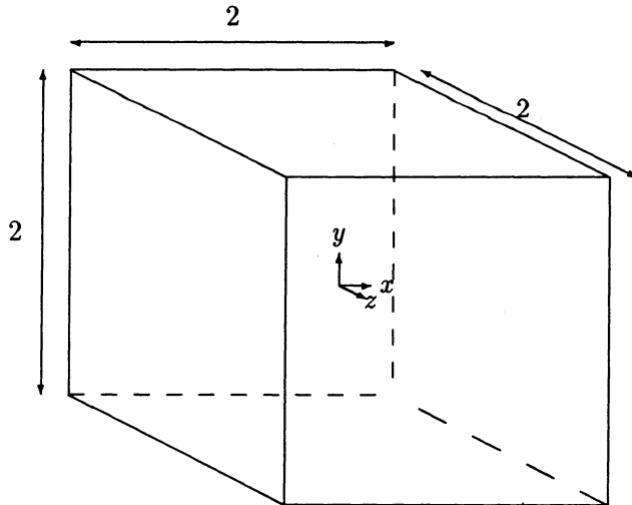


Figure 75: Geometría para problemas tridimensionales

El problema consiste en un cubo del lado 2 con el origen del sistema cartesiano de coordenadas definido en el centroide. Cada cara se discretizó con ocho elementos triangulares constantes, como se muestra en la figura 76.

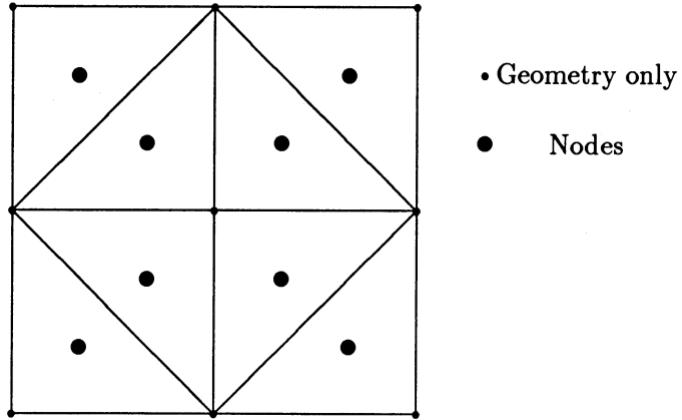


Figure 76: Discretización de una cara del cubo

Cada cara tiene 8 nodos que hacen un total de 48 nodos. Se utilizó un total de 26 puntos para definir la geometría de los elementos. Cada nodo está en el centroide de su elemento. El cálculo de los coeficientes de las matrices H y G para este tipo de elemento se discute en [18]. Se definieron 27 nodos internos en las posiciones $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, $(0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, $(\pm \frac{1}{2}, 0, \pm \frac{1}{2})$, $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, \pm \frac{1}{2})$, $(\pm \frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, \pm \frac{1}{2}, 0)$ y $(0, 0, 0)$.

Para evitar confusiones, sus coordenadas harán referencia a un nodo dado. Las condiciones de frontera en u se definieron usando la ecuación (324). Se empleó la expansión $f = 1 + r$. Los resultados se presentan en la figura 77.

| x | y | z | u | Eqn. (4.97) |
|------|------|------|--------|-------------|
| -0.5 | -0.5 | -0.5 | 0.2470 | 0.2500 |
| 0 | -0.5 | -0.5 | 0.1669 | 0.1667 |
| 0 | 0 | -0.5 | 0.0834 | 0.0833 |
| 0 | 0 | 0 | 0.0000 | 0.0000 |

Figure 77: Resultados para $\nabla^2 u = -2$

Los resultados dados en la tabla describen la solución completa debido a la simetría. Los resultados de DRM se consideran excelentes para este caso, incluso utilizando elementos constantes. Cabe señalar que este tipo de elemento tiene las ventajas de que: (i) los términos c_i son todos iguales a 0.5 en el frontera y no necesitan calcularse, y (ii) no hay ambigüedad en la definición de las normales, y por lo tanto, no hay discontinuidad en q o \hat{q} , lo que permite ensamblar todas las matrices.

6.6.2 Ecuaciones del tipo $\nabla^2 u = b(x, y, z, u)$

El caso convectivo en tres dimensiones

En este caso la ecuación a modelar es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (325)$$

que puede manejarse utilizando los procedimientos descritos en las secciones 6.2 y 6.2.2. Como antes

$$b = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (326)$$

así

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \quad (327)$$

Ajustando

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\beta \quad (328)$$

luego

$$\beta = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (329)$$

La ecuación (328) puede diferenciarse con respecto a cada una de las direcciones de coordenadas para producir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \beta \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \beta \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \beta \end{aligned} \quad (330)$$

El vector β en las ecuaciones (330) puede eliminarse usando (329). Luego, sustituyendo en (327), se obtiene

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (331)$$

La ecuación matricial es como antes, *i.e.*

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\alpha \quad (332)$$

o, sustituyendo por α ,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (333)$$

Los vectores $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial Y$ son los mismos que los utilizados en la sección 6.2. Una expresión similar se cumple para $\partial F/\partial z$.

Aplicación

La ecuación

$$\nabla^2 u = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (334)$$

se resolvió para la geometría que se muestra en la figura 75, con la discretización que se muestra en la figura 76. Se utilizaron los mismos nodos internos que en el ejemplo anterior. El programa de computadora se puede obtener realizando modificaciones similares al Programa 3 como se describe en la sección 6.5.1.

Una solución particular para este caso es

$$u = e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} \quad (335)$$

que se impuso como condición frontera y se usó como la solución del problema. Se empleó la expansión $f = 1 + r$. Los resultados se muestran en la figura 78. La solución completa se describe mediante los 10 valores dados en la tabla debido a la simetría. Se puede verificar un excelente acuerdo con la solución exacta.

| x | y | z | u | Eqn. (4.107) |
|------|------|------|-------|--------------|
| -0.5 | -0.5 | -0.5 | 4.948 | 4.946 |
| -0.5 | -0.5 | 0.5 | 3.903 | 3.903 |
| -0.5 | 0.5 | 0.5 | 2.866 | 2.861 |
| 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1.833 | 1.819 |
| 0.0 | -0.5 | -0.5 | 4.294 | 4.292 |
| 0.0 | -0.5 | 0.5 | 3.238 | 3.255 |
| 0.0 | 0.5 | 0.5 | 2.217 | 2.213 |
| 0.0 | 0.0 | -0.5 | 3.629 | 3.648 |
| 0.0 | 0.0 | 0.5 | 2.599 | 2.606 |
| 0 | 0 | 0 | 2.982 | 3.000 |

Figure 78: Resultados para $\nabla^2 u = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

El caso $\nabla^2 u = -u \partial u / \partial x$

Cualquiera de las aplicaciones consideradas en este capítulo puede ampliarse a tres dimensiones utilizando los métodos desarrollados aquí, incluidos los términos del producto y los términos no lineales.

La ecuación que se considerará a continuación es un ejemplo de ambos. La ecuación de matriz DRM para este caso es exactamente la misma que para el caso bidimensional, *i.e.*

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (336)$$

excepto que las matrices H, G, \hat{U} y \hat{Q} son ahora equivalentes tridimensionales. La solución es $u = 2/x$ como en el caso bidimensional. Este problema se analizó para la geometría que se muestra en la figura 71 con los mismos nodos y elementos que en los dos ejemplos anteriores, excepto que el origen se transfirió al punto (-2,0,0) para evitar la singularidad en la solución en $x = O$. El proceso de solución es exactamente el mismo que el dado en la sección 6.4.1 para el caso bidimensional. La expansión $f = 1 + r$ se empleó como antes. Los resultados se dan en la figura 79. Los tres valores presentados describen la solución completa debido a la simetría.

| x | y | z | u | Exact |
|-----|------|------|-------|-------|
| 1.5 | -0.5 | -0.5 | 1.335 | 1.333 |
| 2.0 | -0.5 | -0.5 | 1.005 | 1.000 |
| 2.5 | -0.5 | -0.5 | 0.802 | 0.800 |

Figure 79: Resultados para $\nabla^2 u = -u \frac{\partial u}{\partial x}$

La solución convergió en cuatro iteraciones sin usar técnicas de relajación, y se puede ver que está muy cerca de los valores exactos.

No se recomienda el uso de expansiones f de orden superior para el análisis tridimensional ya que las pruebas mostraron que producen resultados inexactos.

7 El método de reciprocidad dual para ecuaciones del tipo $\nabla^2 u = b(x, y, u, t)$

7.1 Introducción

Este capítulo presenta aplicaciones del método de Reciprocidad Dual del elemento frontera para problemas transitorios. Inicialmente, se presenta el tratamiento de ecuaciones lineales dependientes del tiempo. Esto incluye problemas de difusión, propagación de ondas y convección-difusión, para los cuales las ecuaciones gobernantes son, respectivamente,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (337)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (338)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{D} \left(v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} - Ku + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (339)$$

Para la formulación DRM, se utiliza la solución fundamental de la ecuación de Laplace y las ecuaciones anteriores se consideran en forma general

$$\nabla^2 u = b(x, y, u, t) \quad (340)$$

La segunda parte del capítulo trata de problemas transitorios no lineales. Las aplicaciones para este caso estarán restringidas, por simplicidad, a problemas de difusión, aunque pueden aplicarse algoritmos similares a otras ecuaciones. Se consideran tres tipos de no linealidades: las materiales, *i.e.* problemas en los que el parámetro físico k depende de la función u misma; condiciones de frontera en las que el flujo es una función no lineal de u ; y fuentes internas no lineales, como en el caso de ignición espontánea.

7.2 La ecuación de difusión

Comenzaremos considerando un problema de difusión gobernado por una ecuación de la forma (337), escrita ahora con la notación

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \dot{u} \quad (341)$$

en el que el punto representa la derivada del tiempo y k es una constante material. La definición del problema se completa con la especificación de las condiciones de frontera apropiadas y las condiciones iniciales del tipo $u(x, y, t_0) = u_0(x, y)$.

Comparando lo anterior con la ecuación (135), se observa que la función b en esa ecuación ahora se define como un término constante $1/k$ multiplicado por el término derivado del tiempo \dot{u} . La aplicación del DRM sigue el mismo patrón que en los capítulos 5 y 6, y produce una ecuación matricial de la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \frac{1}{k}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad (342)$$

En el presente caso, la aproximación (137) implica una separación de variables en las que f_j son funciones conocidas de geometría y α_j funciones desconocidas de tiempo, *i.e.*

$$\dot{u}(x, y, t) \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f_j(x, y) \alpha_j(t) \quad (343)$$

Por lo tanto, las matrices $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{Q}}$ anteriores son las mismas que en los capítulos anteriores. El siguiente paso en la formulación es similar a la ecuación (207) del capítulo anterior, *i.e.* la inversión de la ecuación (151), escrita en este caso como

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \quad (344)$$

para sustituir el vector $\boldsymbol{\alpha}$ en la ecuación (342). Esto produce

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{u}} \quad (345)$$

Sustituyendo lo anterior en (342), se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \frac{1}{k}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{u}} \quad (346)$$

El término multiplicando $\dot{\mathbf{u}}$ puede verse como una matriz de "capacidad calorífica",

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{k}\mathbf{S} = -\frac{1}{k}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \quad (347)$$

y la ecuación (346) reescrita en la forma

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (348)$$

El sistema (348) es similar en forma al que se obtiene usando el método de elementos finitos. Por lo tanto, cualquier esquema estándar de integración directa de tiempo se puede utilizar para encontrar una solución al sistema anterior. Cabe señalar, sin embargo, que el vector q de los flujos está presente en (348), lo que lo convierte en un sistema de ecuaciones de tipo "mixto", en oposición a las formulaciones de elementos finitos de "desplazamiento".

Para simplificar, aquí se empleará un esquema de integración de tiempo de dos niveles [1]. Se puede proponer una aproximación lineal para la variación de u y q dentro de cada paso de tiempo, en la forma

$$u = (1 - \theta_u) u^m + \theta_u u^{m+1} \quad (349)$$

$$q = (1 - \theta_q) q^m + \theta_q q^{m+1} \quad (350)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\Delta t} (u^{m+1} - u^m) \quad (351)$$

donde θ_u y θ_q son parámetros que posicionan los valores de u y q , respectivamente, entre los niveles de tiempo m y $m+1$. Sustituyendo estas aproximaciones en (348) se obtiene:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \theta_u \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^{m+1} - \theta_q \mathbf{G} \mathbf{q}^{m+1} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - (1 - \theta_u) \mathbf{H} \right] \mathbf{u}^m + (1 - \theta_q) \mathbf{G} \mathbf{q}^m \quad (352)$$

El lado derecho de (352) se conoce en el momento $(m+1)\Delta t$, ya que involucra valores que se han especificado como condiciones iniciales o se han calculado previamente. Al introducir las condiciones de frontera en el tiempo $(m+1)\Delta t$, se puede reorganizar el lado izquierdo de (352) y resolver el sistema de ecuaciones resultante para cada nivel de tiempo.

Tenga en cuenta que los elementos de las matrices H , G y S dependen solo de datos geométricos. Por lo tanto, todos pueden calcularse una vez y almacenarse. Si el valor de Δt se mantiene constante, la matriz del sistema también se puede reducir una vez, y el procedimiento de avance de tiempo consistirá en un esquema recursivo simple con solo operaciones algebraicas involucradas.

7.3 Programa de computadora 4

Este programa resuelve problemas del tipo $\nabla^2 u = b(x, y, u, t)$ para una función b igual a $1/k\partial u/\partial t$ (ecuación 341). Una serie de pruebas realizadas por los autores indicaron que, en general, se puede obtener una buena precisión para valores de θ_u y θ_q iguales a 0.5 y 1.0, respectivamente [2]. Por lo tanto, el programa considera estos valores particulares, en cuyo caso la ecuación (352) se convierte en

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^{m+1} - 2 \mathbf{G} \mathbf{q}^{m+1} = \left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} - \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^m \quad (353)$$

Están disponibles las mismas opciones de expansión f que en el Programa 3, siempre que se incluyan el término constante y otro término. La expansión f y algunos datos específicos para el análisis transitorio se configuran mediante la entrada de datos como se verá en la sección 7.3.1. Los elementos lineales se utilizan nuevamente por simplicidad. La entrada y salida para un problema de

prueba también se imprimen. El programa está en forma modular, utilizando algunas de las rutinas descritas en capítulos anteriores.

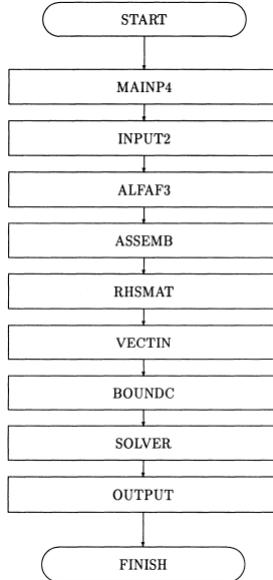


Figure 80: Estructura modular para el programa 4

Los módulos del programa:

- INPUT2
- ALFAF3
- RHSMAT
- SOLVER
- OUTPUT

fueron descritos y enumerados anteriormente y se utilizarán en el formulario ya proporcionado. En esta sección, se describirán y enumerarán las siguientes nuevas rutinas:

- MAINP4
- ASSEMB
- VECTIN
- BOUND C

Para construir el Programa 4, uno puede comenzar desde el Programa 3 y llevar a cabo las siguientes operaciones:

- i. Sustituir MAINP4 por MAINP3

- ii. Sustituir ASSEMB por ASSEM2
- iii. Eliminar DERIVXY
- iv. Incluye VECTIN y BOUND

Los nombres de las variables utilizadas en el programa son los mismos que los utilizados en los Programas 1, 2 y 3. Cuando se introducen nuevas variables, estos tendrán símbolos lo más cercanos posible a los utilizados en el texto. Al final de la sección, se proporcionan el conjunto de datos y los resultados de un problema de prueba.

7.3.1 MAINP4

El primer paso es definir la expansión f que se utilizará, que en este caso es la misma que se describe en el capítulo 6. A continuación, se leen algunos datos específicos necesarios para el análisis de difusión. Éstos incluyen:

- i. NUMTS - número de pasos de tiempo
- ii. DT - valor de paso de tiempo
- iii. TI: valor potencial en el momento inicial (se supone constante por simplicidad)
- iv. CK - valor del parámetro material k

Los datos restantes corresponden al Programa 2, y como INPUT2 se usará para leer los datos, este punto no se comentará más. La expansión f y los datos para el análisis de difusión se imprimen como la primera salida del programa. El siguiente paso es llamar a la rutina ALFAF3 para calcular F^{-1} . Luego, se llama a ASSEMB para evaluar y almacenar H y G , y RHSMAT de rutina para calcular $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ y $S = (H\hat{\mathbf{U}} - G\hat{\mathbf{Q}})F^{-1}$.

Luego, el programa ingresa en un ciclo de DO en los pasos de tiempo, en los cuales el vector de condiciones iniciales (lado derecho de la ecuación 353) se calcula primero en VECTIN de rutina y las condiciones de contorno se aplican posteriormente al lado izquierdo de (353) en rutina BOUND. El vector XY comienza como y y después de que se llama SOLVER, regresa como x . Los resultados se distribuyen entre u y q de acuerdo con el tipo de condición de contorno. Estos resultados se imprimen en OUTPUT; el programa luego pasa a un nuevo paso de tiempo hasta que se alcance NUMTS.

7.3.2 Subrutina ASSEMB

Esta es una versión modificada de la subrutina ASSEM2 utilizada en los programas anteriores que solo calcula y almacena las matrices G y H . Las condiciones límite ahora se aplican en la subrutina BOUND que se describirá en la subsección 7.3.4.

7.3.3 Subrutina VECTIN

Esta subrutina calcula el vector de condiciones iniciales, dado por el lado derecho de la ecuación (353):

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} - \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^m \quad (354)$$

El vector resultante de la expresión anterior se almacena en XY.

7.3.4 Subrutina BOUNDC

Esta subrutina aplica las condiciones de frontera al lado izquierdo de la ecuación (353), *i.e.*

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^{m+1} - 2\mathbf{G}\mathbf{q}^{m+1} \quad (355)$$

La matriz del sistema se almacena en A y el término independiente se agrega a XY.

7.3.5 Resultados de un problema de prueba

El problema de la difusión del calor en una placa cuadrada inicialmente a 30° y enfriado mediante la aplicación de un choque térmico ($u = 0^\circ$ en todo la frontera) se ha estudiado utilizando el método de elementos finitos de Bruch y Zivoloski [3], y utilizando BEM con soluciones fundamentales dependientes del tiempo de Brebbia, Telles y Wrobel [4]. La malla FEM consistió en 25 elementos cuadráticos y 96 nodos como se muestra en la figura 81. Los análisis BEM de [4] utilizaron 8 elementos de límite lineales y 9 nodos para discretizar una cuarta parte de la región, aprovechando la simetría. Se investigaron dos enfoques diferentes en [4]: en el primero (denominado BEM1), se emplearon celdas internas para dar cuenta de las condiciones iniciales al comienzo de cada paso de tiempo; en el segundo (BEM2), el proceso de solución siempre se reiniciaba en el momento inicial y se evitaba la discretización del dominio.

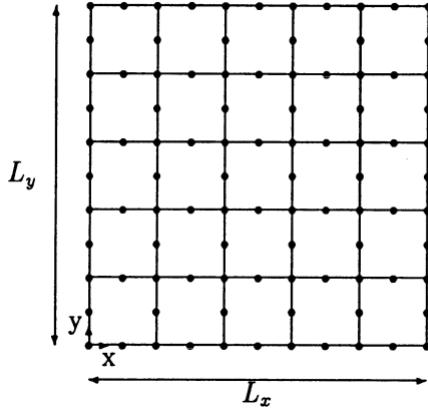


Figure 81: FEM Malla de Bruch y Zyvoloski [3]

La solución exacta para este problema se da en la referencia [3] como

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \sin \frac{n\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} \exp \left[- \left(\frac{K_x n^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{K_y j^2 \pi^2}{L_y^2} \right) t \right] \quad (356)$$

dónde

$$A_{nj} = \frac{4u_0}{nj\pi^2} [(-1)^n - 1] [(-1)^j - 1] \quad (357)$$

En todos los análisis, los valores numéricos adoptados fueron $L_x = L_y = 3$, $K_x = K_y = 1.25$ y $u_0 = 30$.

Este problema presenta una peculiaridad para la aplicación del DRM. Dado que toda la información de la solución avanza en el tiempo a través del término en u (consulte la ecuación 353), y u se prescribe aquí en todas partes en la frontera, se deben introducir grados internos de libertad en este caso particular.

La figura 82 muestra una comparación de resultados para una discretización de fronteras con 40 elementos y diferentes números de nodos internos, obtenidos con un paso de tiempo $\Delta t = 0.05$. Se puede ver que los resultados parecen converger a valores que son ligeramente más altos que los exactos.

| 9 int. nodes | 25 int. nodes | 33 int. nodes | 49 int. nodes | Exact[3] |
|--------------|---------------|---------------|---------------|----------|
| 1.321 | 1.787 | 1.877 | 1.891 | 1.812 |

Figure 82: Resultados de DRM para u en el punto central, para $t = 1.2$

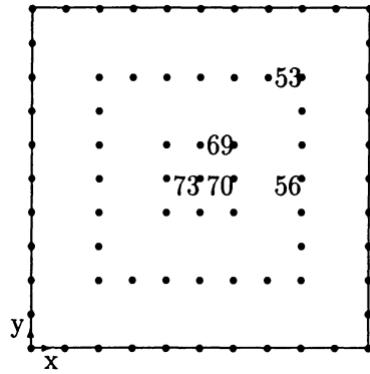


Figure 83: Discretización DRM

La figura 84 presenta una comparación de los resultados DRM con 33 nodos internos (figura 83) y las otras soluciones BEM y FEM, obtenidas con el mismo valor de paso de tiempo ($\Delta t = 0.05$).

| | x | y | BEM1[4] | BEM2[4] | FEM[3] | DRM | Exact[3] |
|----------|-----|-----|---------|---------|--------|-------|----------|
| u_{56} | 2.4 | 1.5 | 1.114 | 1.122 | 1.139 | 1.099 | 1.065 |
| u_{53} | 2.4 | 2.4 | 0.657 | 0.663 | 0.670 | 0.645 | 0.626 |
| u_{70} | 1.8 | 1.5 | 1.798 | 1.809 | 1.843 | 1.784 | 1.723 |
| u_{69} | 1.8 | 1.8 | 1.713 | 1.721 | 1.753 | 1.695 | 1.639 |
| u_{73} | 1.5 | 1.5 | 1.887 | 1.902 | 1.938 | 1.877 | 1.812 |

Figure 84: Comparación de resultados en $t = 1.2$

La figura 85 muestra una comparación de la variación de tiempo de u en el punto central. Como se esperaba en un problema de choque térmico, los errores más grandes aparecen en los tiempos iniciales ya que el choque se aplica linealmente durante el primer paso en el modelo computacional y no de repente como en el problema matemático. Se puede observar que las oscilaciones iniciales se amortiguan rápidamente.

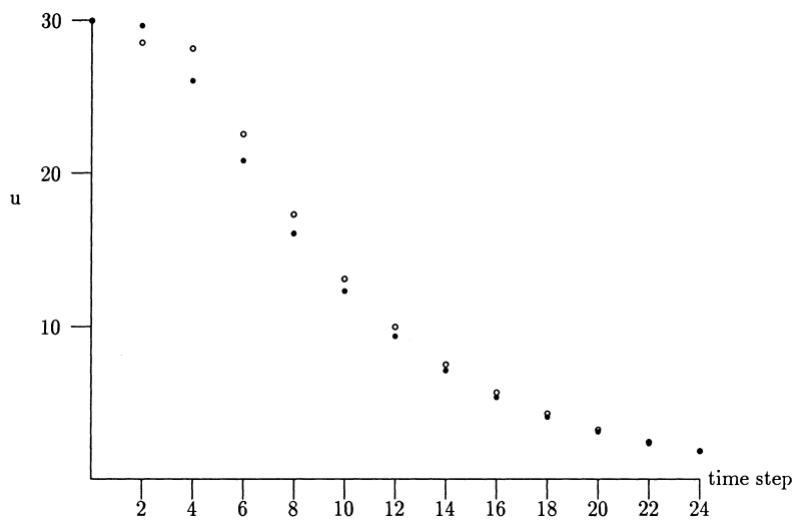


Figure 85: Variación de tiempo de u en el punto central: • Exacto, \circ DRM

7.3.6 Computadora Output

Debido a su longitud, la computadora output para este problema se truncó para mostrar solo los resultados en el paso final de tiempo, *i.e.* $t = 1.2$.

7.3.7 Aplicaciones adicionales

A continuación se estudió el problema unidimensional de una losa infinita sometida a un choque térmico. El problema se ha modelado como bidimensional con condiciones de contorno mixtas, *i.e.* $u = 1$ prescrito a lo largo de las caras $x = \pm L$ y $q = 0$ a lo largo de las caras $y = \pm l$ de una región rectangular con temperatura inicial cero. Los valores numéricos adoptados para las dimensiones geométricas y los parámetros del material fueron $L = 5$, $l = 4$, $k = 1$ y $\Delta t = 1$.

La figura 86 presenta los resultados para u en el punto central ($x = y = O$) para varios niveles de tiempo, en comparación con la solución analítica de [5]. La discretización empleada en este documento consistió en 56 elementos de frontera y 1 punto interno ubicado en $x = y = O$. También se incluyen en la tabla los resultados de [6], también obtenidos con el DRM y una discretización similar (14 elementos de frontera lineales sobre uno -cuatro de la región, teniendo en cuenta la simetría), un punto interno central y $\theta_u = \theta_q = 1$.

| Time | Present Analysis | Wrobel and Brebbia[6] | Analytical[5] |
|------|------------------|-----------------------|---------------|
| 2 | -0.051 | 0.016 | 0.025 |
| 4 | 0.114 | 0.166 | 0.154 |
| 6 | 0.278 | 0.302 | 0.298 |
| 8 | 0.416 | 0.418 | 0.422 |
| 10 | 0.527 | 0.515 | 0.526 |
| 15 | 0.710 | 0.694 | 0.710 |
| 20 | 0.838 | 0.807 | 0.823 |

Figure 86: Comparación de resultados para el problema 2

Algunos puntos importantes deben tenerse en cuenta en el presente análisis. El primero se refiere al número de puntos internos, que pueden ser pequeños en este caso debido al número suficiente de grados de libertad a lo largo de la frontera. De hecho, aumentar el número de puntos internos no necesariamente mejora la solución en problemas de difusión, como se señala en [6]. Se utilizaron diferentes expansiones f aquí y en [6], a saber, $f = 1 + r$ en todos los nodos versus $f = 1$ en un nodo y $f = r$ en los restantes, como se explica en el capítulo 5 (sección 5.2). Los resultados no se ven muy afectados por esto, y tampoco parecen ser sensibles a los diferentes valores de θ_q empleados en los dos análisis.

Un segundo punto a tener en cuenta es la forma especial en que se tratan los puntos de discontinuidad geométrica (esquinas) en los análisis. En [6], se utilizaron elementos discontinuos

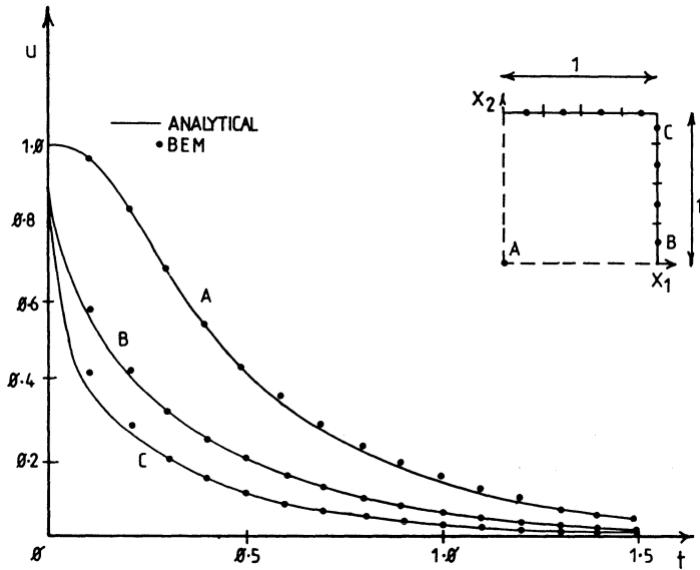


Figure 87: Variación de temperatura en algunos puntos

cerca de las esquinas, mientras que el presente análisis introdujo pequeños recortes que solo influyen localmente en la solución. Se puede implementar un mejor tratamiento de las esquinas permitiendo que los flujos sean discontinuos (*i.e.* $q_{\text{before}} \neq q_{\text{after}}$ para cada nodo), como se hizo en [7] y se describe en el capítulo 2.

Otra aplicación del DRM a un problema de difusión, reproducido desde [1], es el caso de una región cuadrada con unidad de temperatura inicial que se convence en un medio circundante a temperatura cero. El coeficiente de transferencia de calor es constante en todo la frontera e igual a 2, mientras que se supone que la difusividad térmica es la unidad.

La discretización del elemento frontera empleó solo 8 elementos constantes en un cuarto de la región, debido a la doble simetría del problema. Los resultados se muestran en la figura 87 para la variación de temperatura en algunas fronteras y puntos internos, para $\theta_u = \theta_q = 1$ y $\Delta f = 0.05$, junto con la solución analítica dada en [5].

7.3.8 Otros esquemas temporales

Si bien la formulación DRM básica para la ecuación de difusión presentada en la sección 7.2 empleó un esquema simple de integración de tiempo de dos niveles, Singh y Kalra [8] y Lahrmann y Haberland [9] han utilizado proced-

imientos más refinados.

Singh y Kalra [8] adoptaron una formulación de mínimos cuadrados que comienza con la construcción de un II funcional dado por la integral del cuadrado del error en un paso de tiempo, en la forma

$$\Pi = \int_0^1 [\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q}]^T [\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q}] d\zeta \quad (358)$$

$$\text{donde } \zeta = (t - t^m) / \Delta t, t^m \leq t \leq t^{m+1}, t^m = m\Delta t \text{ y } t^{m+1} = (m+1)\Delta t \quad (359)$$

Introduciendo las condiciones de frontera y minimizando la II funcional con respecto al vector de las incógnitas nodales X , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

- Para $X_i = u_i^{m+1}$, i.e. una condición frontera de Neumann prescrita en el nodo i , la i -ésima ecuación tiene la forma:

$$\begin{aligned} & \sum_j \left\{ \left[\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{C}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{C}) + \frac{1}{3} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right]_{ij} u_j^{m+1} \right. \\ & - \left[\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}^T \mathbf{G} + \frac{1}{3} \mathbf{H}^T \mathbf{G} \right]_{ij} q_j^{m+1} - \left[\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}^T \mathbf{G} + \frac{1}{6} \mathbf{H}^T \mathbf{G} \right]_{ij} q_j^m \\ & \left. - \left[\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{C}^T \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \mathbf{C}) - \frac{1}{6} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right]_{ij} u_j^m \right\} = 0 \end{aligned} \quad (360)$$

- Para $X_i = q_i^{m+1}$, i.e. una condición de frontera de Dirichlet prescrita en el nodo i , la i -ésima ecuación tiene la forma:

$$\begin{aligned} & \sum_j \left\{ - \left[\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{G}^T \mathbf{C} + \frac{1}{3} \mathbf{G}^T \mathbf{H} \right]_{ij} u_j^{m+1} + \left[\frac{1}{3} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \right]_{ij} q_j^{m+1} \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{6} \mathbf{G}^T \mathbf{H} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{G}^T \mathbf{C} \right]_{ij} u_j^m + \left[\frac{1}{6} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \right]_{ij} q_j^m \right\} = 0 \end{aligned} \quad (361)$$

El esquema de mínimos cuadrados fue aplicado por Singh y Kalra [8] a una serie de problemas de conducción de calor transitorios, y su rendimiento en comparación con los de dos esquemas de nivel como Crank-Nicolson, Galerkin y totalmente implícito. Se observó una tasa de convergencia cuadrática para el esquema de mínimos cuadrados en comparación, por ejemplo, con la tasa de convergencia de primer orden del esquema totalmente implícito. Sin embargo, esto se ve compensado por mayores costos computacionales.

Lahrman y Haberland [9] derivaron un procedimiento de solución de paso de tiempo ponderado que optimiza los factores de ponderación θ_u y θ_q en las ecuaciones (349) y (350). La idea básica del esquema es utilizar un coeficiente variable $\theta (= \theta_u = \theta_q)$ dependiente del tamaño del elemento, el paso del tiempo y la difusividad térmica, en la forma

$$\theta_i = \frac{Fo_i - 1 + e^{-Fo_i}}{Fo_i (1 - e^{-Fo_i})} \quad (362)$$

donde Fo_i es el número de Fourier en el elemento i , i.e. $Fo_i = k\Delta t/\Delta x_i^2$.

El esquema de pasos de tiempo ponderado de Lahrmann y Haberland [9] se ha implementado en los programas FEM y DRBEM, y se ha aplicado a varios problemas. Llegaron a la conclusión de que el método es incondicionalmente estable y preciso, proporcionando soluciones muy similares para el FEM y el DRBEM.

7.4 Especial f Expansiones

Hasta este punto, todas las formulaciones de DRM discutidas en este libro han empleado f expansiones del tipo que se muestra en el capítulo 5, i.e.

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad (363)$$

La elección anterior está en línea con el comportamiento de la solución fundamental de la ecuación de Laplace, que es en sí misma una función de r solamente, para problemas de dos y tres dimensiones.

Algunos casos para los cuales la expansión (363) no es la más apropiada han sido reportados en la literatura. A continuación se discutirán dos de estos casos relacionados con problemas de difusión: difusión en regiones axisimétricas [10] y en regiones infinitas [11].

7.4.1 Difusión Axisimétrica

La solución fundamental a la ecuación de Laplace en una región axisimétrica es de la forma [4]

$$u^* = \frac{4K(m)}{(a+b)^{1/2}} \quad (364)$$

en el que K es la integral elíptica completa del primer tipo, y

$$\begin{aligned} a &= R_i^2 + R_k^2 + (Z_i - Z_k)^2 \\ b &= 2R_i R_k \\ m &= \frac{2b}{a+b} \end{aligned} \quad (365)$$

donde R y Z son coordenadas cartesianas en el plano generador.

De las definiciones anteriores, se puede ver que en este caso u^* depende no solo de r sino también de la distancia desde los puntos fuente y de campo (i y k , respectivamente) hasta el eje de revolución. Con este comportamiento en mente, Wrobel et al. [10] adoptaron la siguiente expansión f para problemas de difusión axisimétrica

$$f = r \left(1 - \frac{R_j}{4R_k} \right) \quad (366)$$

donde R_j y R_k representan la distancia desde el nodo j o el nodo k hasta el eje de revolución, y r es la distancia entre j y k .

Dado que el conjunto de funciones anterior es claramente axisimétrico, el conjunto correspondiente de funciones $\hat{\mathbf{u}}$ también se definió como axisymmetric, y tal que

$$\nabla^2 \hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{u}}{\partial R} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial Z^2} = f \quad (367)$$

Las expresiones de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{q}}$ son entonces de la forma:

$$\hat{u} = \frac{r^3}{12} \quad (368)$$

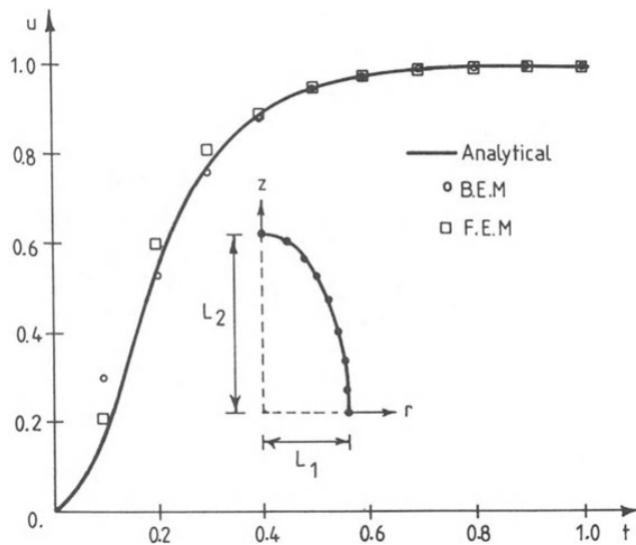


Figure 88: Temperatura en el Centro del Esferoide Prolado

$$\hat{q} = \frac{r^2}{4} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (369)$$

Wrobel et al. [10] aplicó esta formulación para estudiar la distribución de temperatura dentro de un esferoide prolado inicialmente a temperatura cero, sujeto a una unidad de choque térmico en $t = 0$. La discretización con 8 elementos de frontera constante para la mitad del cuerpo, teniendo en cuenta la simetría, se muestra en la figura 88; Los valores numéricos adoptados para los parámetros geométricos fueron $L_1 = 1, L_2 = 2$.

Los resultados de la temperatura en el punto central ($r = z = 0$) se comparan en la figura 88 con una solución analítica [12] y una solución de elementos finitos obtenida con elementos isoparamétricos cuadráticos tridimensionales [13]. Los análisis DRBEM y FEM se realizaron con un valor de paso de tiempo $\Delta t = 0.025s$.

De manera similar al problema descrito en la sección 7.3.5, el presente también tiene condiciones de frontera de Dirichlet, de modo que se requieren puntos internos para proporcionar grados de libertad para la función u . Los resultados trazados en la figura 88 se obtuvieron con solo 5 puntos internos, y muestran muy buen acuerdo con la solución analítica a pesar del reducido número de grados de libertad del análisis.

7.4.2 Regiones infinitas

Loeffler y Mansur [11] presentaron una aplicación interesante del DRM a problemas de difusión en regiones infinitas. La principal distinción en este caso es que, para cumplir las condiciones de regularidad en el infinito [4], es posible tratar el problema

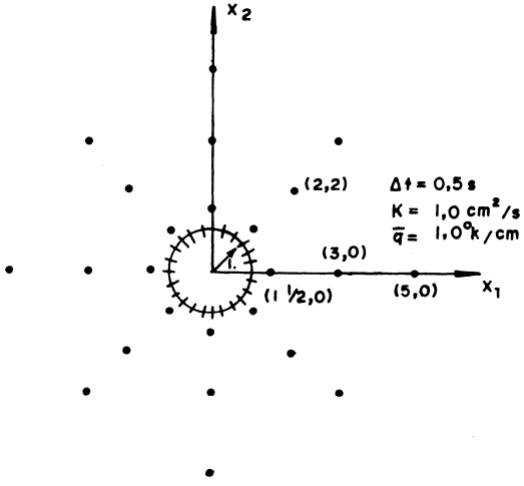


Figure 89: Definición del problema

Al discretizar solo las fronteras internas, la expansión f debe poseer una desintegración que hace que las integrales de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{q}}$ tiendan a cero a lo largo de la frontera en el infinito, *i.e.*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} (q^* \hat{u} - u^* \hat{q}) d\Gamma_\infty = 0 \quad (370)$$

Las expresiones utilizadas por Loeffler y Mansur [11] tienen la forma

$$\begin{aligned} f &= \frac{2C - r}{(r + C)^4} \\ \hat{u} &= -\frac{2r + C}{2(r + C)^2} \\ \hat{q} &= \frac{r}{(r + C)^3} \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned} \quad (371)$$

en el que C es una constante dependiente del problema determinada por la desigualdad

$$C \geq 50 (k \Delta L t_t)^{1/3} \quad (372)$$

donde k es el coeficiente de difusividad, ΔL es la longitud del elemento más pequeño de la discretización y t_t es el lapso de tiempo total del análisis.

Loeffler y Mansur [11] emplearon esta formulación para estudiar la variación de temperatura dentro de un medio ilimitado con un orificio circular donde se aplica repentinamente un flujo de calor uniforme. La figura 89 muestra las

características geométricas y físicas del problema, y la discretización con 24 elementos de frontera y 24 puntos internos. Los resultados se trazan en la figura 90 para la variación de temperatura en un punto de la superficie del hoyo, en comparación con una solución analítica dada en [5].

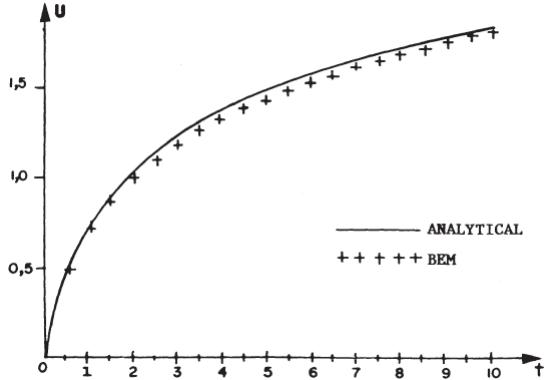


Figure 90: Variación de temperatura en un punto en la superficie del hoyo

7.5 La ecuación de onda

Considere el problema de una onda que se propaga en un medio elástico, descrita por la ecuación (338), ahora escrita en la forma

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \ddot{u} \quad (373)$$

en el que c es la celeridad de la onda. Además de las condiciones de contorno, el carácter dinámico de este problema requiere la especificación de los desplazamientos iniciales y las velocidades iniciales, *i.e.*

$$u(x, y, t_0) = u_0(x, y) \quad (374)$$

$$\dot{u}(x, y, t_0) = \dot{u}_0(x, y) \quad (375)$$

La aplicación del DRM a los problemas de propagación de ondas sigue básicamente el mismo procedimiento que para los problemas de difusión, y produce una ecuación matricial de la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad (376)$$

El vector α puede estar relacionado con el vector de aceleraciones por

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1}\ddot{\mathbf{u}} \quad (377)$$

Sustituir lo anterior en (376) lleva a la ecuación

$$\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (378)$$

en el que la matriz M , definida como

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{c^2}\mathbf{S} = -\frac{1}{c^2}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \quad (379)$$

ahora se interpreta como una matriz de masa.

Puede parecer extraño, al principio, que la matriz de masa para los problemas de propagación de las olas es igual a la matriz de "capacidad de calor" para los problemas de difusión (véase la expresión 347), aparte de una constante. Sin embargo, esto es consistente con las teorías correspondientes, y la misma situación también surge en el análisis de elementos finitos donde ambas matrices resultan de la integración de productos cruzados de funciones de interpolación.

La forma estándar de obtener la respuesta de tiempo usando ecuaciones como (378) es usar esquemas de integración de tiempo lineal. Nardini y Brebbia [14] y Loeffler y Mansur [15] discuten una serie de algoritmos empleados tradicionalmente en el análisis de elementos finitos como aproximaciones de diferencias centrales, esquemas de Newmark y Houbolt. Llegaron a la conclusión de que es ventajoso en DRM emplear el esquema Houbolt debido a su introducción de amortiguación artificial, que trunca la influencia de los modos superiores en la respuesta.

El esquema de integración de Houbolt es un algoritmo implícito, incondicionalmente estable en el que la aceleración se aproxima en la forma

$$\ddot{\mathbf{u}}^{m+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{u}^{m+1} - 5\mathbf{u}^m + 4\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^{m-2}) \quad (380)$$

que es una fórmula de diferencia finita de tipo hacia atrás con error de orden $O(\Delta t^2)$. Escribiendo la ecuación (378) a nivel de tiempo $(m+1)\Delta t$ y sustituyendo los resultados anteriores en la expresión:

$$(2\mathbf{M} + \Delta t^2\mathbf{H})\mathbf{u}^{m+1} - \Delta t^2\mathbf{G}\mathbf{q}^{m+1} = 5\mathbf{M}\mathbf{u}^m - 4\mathbf{M}\mathbf{u}^{m-1} + \mathbf{M}\mathbf{u}^{m-2} \quad (381)$$

La ecuación anterior permite el cálculo de la distribución de u en el nivel de tiempo $(m + 1)\Delta t$ mediante el uso de las condiciones de contorno en ese momento y la información de tres pasos de tiempo anteriores. Esto normalmente se obtiene a través de un procedimiento de inicio especial de orden inferior, en el que se emplean las condiciones iniciales (374) y (375) (*i.e.* u^0 y \dot{u}^0) para calcular u^1 y u^2 [16].

Loeffler y Mansur [15] aplicaron la formulación DRM anterior para estudiar la propagación de ondas longitudinales en una barra elástica fijada en una de sus extremidades y sometida a una carga de tipo Heaviside en la otra. Las características geométricas, la carga y las condiciones de contorno del problema se representan en la figura 91.

Los resultados se presentan en las figuras 92 y 93 para los desplazamientos en el punto A y las tracciones en el punto B , respectivamente (ver figura 91), en comparación con una solución analítica del problema [17]. La discretización empleada consistió en 36 elementos de frontera constante y 4 puntos internos, con un paso de tiempo $\Delta t = 0.5s$. Loeffler y Mansur [15] dividieron el cuerpo en dos subregiones, y concluyeron que esto tenía un efecto beneficioso en términos de precisión. Sin embargo, el factor más importante parecía ser el control de los modos superiores, una propiedad intrínseca del esquema de Houbolt [16].

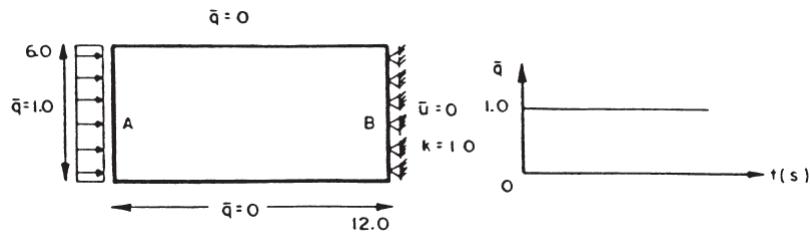


Figure 91: Varilla unidimensional bajo carga de forzamiento tipo Heaviside

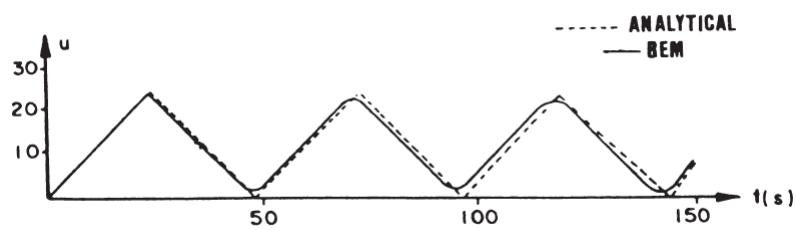


Figure 92: Historia temporal de los desplazamientos en el punto A

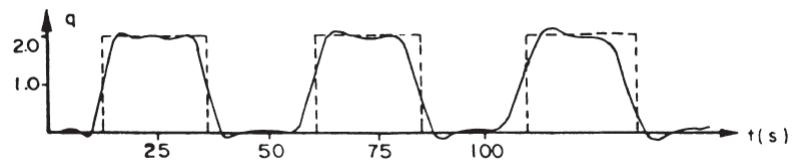


Figure 93: Historia del tiempo de las tracciones en el punto B

7.5.1 Regiones Infinitas y Semi-Infinitas

La formulación DRM para la ecuación de onda ha sido extendida recientemente por Dai [18J para resolver problemas de ondas que se propagan en una región infinita o semi-infinita. Con este fin, se introduce una frontera artificial Γ_∞ para truncar el dominio infinito. Para evitar el reflejo de las ondas en la frontera artificial, se aplica la condición de radiación de Sommerfeld, *i.e.*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{c} \dot{u} = 0 \quad (382)$$

que puede interpretarse como una condición de amortiguación de la radiación que absorbe la onda que se propaga a Γ_∞ .

Por otro lado, si existe una superficie libre, la condición frontera correspondiente a una aproximación de primer orden es:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{g} \ddot{u} = 0 \quad (383)$$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores, la ecuación (378) puede dividirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{g}\ddot{u}_1 \\ -\frac{1}{g}\ddot{u}_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (384)$$

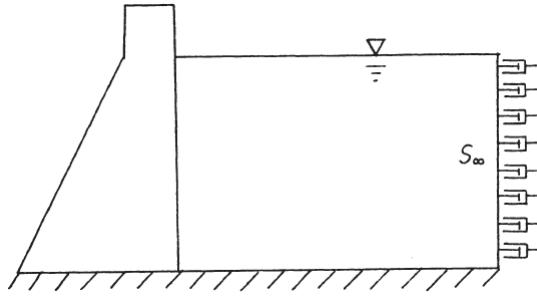


Figure 94: Geometría del sistema de embalse-embalse

donde u_1, u_2 y u_3 representan valores de u en la superficie libre, la frontera artificial y otras fronteras, respectivamente. Para el propósito de la aplicación que se discutirá a continuación, se supone que la condición de frontera en las fronteras sólidas es $q_3 = \bar{q}_3$. Por lo tanto, la ecuación (384) puede reescribirse en la forma:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (385)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} M_{11} + \frac{1}{g}G_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} + \frac{1}{g}G_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} + \frac{1}{g}G_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}G_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c}G_{22} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c}G_{32} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= \{G_{13}\bar{q}_3 \ G_{23}\bar{q}_3 \ G_{33}\bar{q}_3\}^T \end{aligned} \quad (386)$$

donde la matriz C puede llamarse matriz de amortiguación de radiación.

Dai [18] aplicó la formulación anterior a varios problemas, uno de los cuales se reproduce a continuación. Esto se refiere al estudio de la presión dinámica en una presa de gravedad rígida debido a la aceleración horizontal del suelo. La geometría de la presa se da en la figura 94. Las propiedades materiales del agua son la velocidad de las olas $c = 1430m/s$ y la densidad de masa $\rho = 999.6kg/m^3$.

La profundidad del embalse es $h = 160m$.

La frecuencia de excitación se toma como $f = 1Hz$ y el depósito infinito se trunca a una distancia de 240m de la presa. Los resultados numéricos y analíticos se comparan en la figura 95, donde se puede ver que las soluciones BEM ofrecen una muy buena estimación de la presión dinámica. Además, es obvio que la solución transitoria se aproxima a la solución estable a medida que pasa el tiempo, mostrando el efecto de la amortiguación de la radiación.

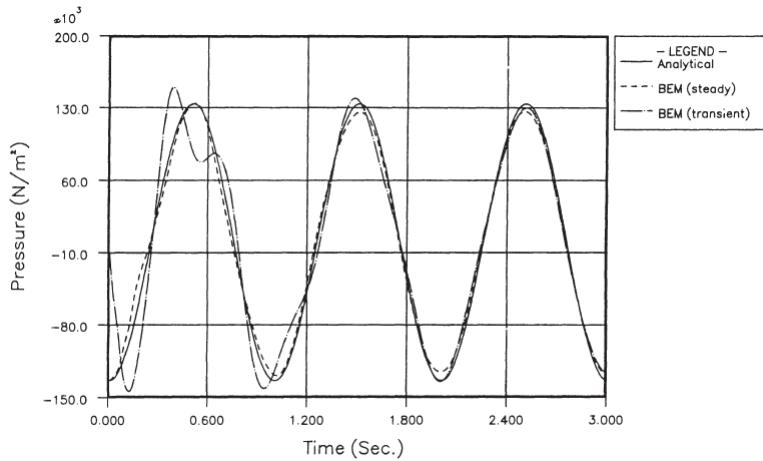


Figure 95: Historia del tiempo de presión en el fondo de la presa

7.6 La ecuación transitoria de convección-difusión

Esta sección trata los problemas transitorios de convección-difusión regidos por la ecuación (339), reescrita aquí en el formulario

$$\nabla^2 u = \frac{v_x}{D} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v_y}{D} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K}{D} u + \frac{1}{D} \dot{u} \quad (387)$$

La función u generalmente se asocia con la concentración de una sustancia disuelta en un soluto. La ecuación anterior describe su transporte y dispersión, que dependen del campo de velocidad (con los componentes v_x, v_y) y el coeficiente de dispersión D (suponiendo que el medio es homogéneo e isotrópico). El coeficiente K se relaciona con una reacción química de primer orden. Ecuación (387) también se puede usar para describir el campo de temperatura dentro de un sólido en movimiento.

Es bien sabido que la diferencia finita y las soluciones de elementos finitos de la ecuación de difusión por convección presentan problemas numéricos de oscilación y amortiguación. Por otro lado, las soluciones de elementos frontera parecen

estar relativamente libres de estos problemas, como lo demuestran Brebbia y Skerget [19] y otros. Estas formulaciones empleadas La solución fundamental de la ecuación de difusión e incluyó los efectos convectivos por discretización de dominio e iteración.

Aquí, el problema se tratará inicialmente utilizando la solución fundamental de la ecuación de Laplace. Esto se hace combinando las ideas derivadas previamente en las secciones 6.2 y 7.2 para problemas convectivos y difusivos, respectivamente. Por lo tanto, la formulación DRM para la ecuación (387) produce una ecuación matricial de la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S} \left[\left(\frac{v_x}{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{v_y}{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} - \frac{K}{D} \mathbf{u} + \frac{1}{D} \dot{\mathbf{u}} \right] \quad (388)$$

en el cual

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \quad (389)$$

Llamando, como antes,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -\frac{1}{D} \mathbf{S} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{S} \left(\frac{v_x}{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{v_y}{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \end{aligned} \quad (390)$$

y sustituyendo en (388), se obtiene

$$C\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{H} - \mathbf{R} - K\mathbf{C})\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (391)$$

La ecuación anterior es similar en forma a (348), y el mismo tipo estándar de procedimiento discreto de marcha en el tiempo puede emplearse en su solución.

La presente formulación se aplicó a un problema transitorio de convección-difusión en una región rectangular de dimensiones de sección transversal 6 x 1.4, discretizada con 38 elementos de frontera lineales (figura 96). La distribución inicial de u es constante e igual a cero, y las condiciones de frontera son $u = 300$ en la cara izquierda, $q = 0$ en la cara derecha y en las caras restantes paralelas al eje x . La variación de las condiciones de frontera en las esquinas se tuvo en cuenta al permitir que los flujos fueran discontinuos como se hizo en [7J]. Los valores de D, K, v_x y v_y son 1.0, 1.0, 1.6 y 0, respectivamente.

Los resultados se presentan en la figura 97 para la variación de u a lo largo de x , obtenida usando $\theta_u = \theta_q = 0.5$ y $\Delta t = 0.025$. Este pequeño valor de paso de tiempo fue necesario para obtener una mejor imagen del comportamiento transitorio de u y no debido a consideraciones de estabilidad. Los resultados concuerdan bien con la solución analítica de [20]. Un tratamiento alternativo DRM del problema que produce una mayor precisión utiliza la solución fundamental de la ecuación de convección-difusión en estado estacionario, como se mostrará en el capítulo 8. Sin embargo, la formulación presentada en esta sección es de naturaleza general y puede usarse para problemas con campos de velocidad variable y/o coeficiente de dispersión.

7.7 Problemas no lineales

Esta sección presenta aplicaciones del DRM a algunos problemas no lineales. Para simplificar, solo se considerarán las características no lineales que surgen en relación con la ecuación de difusión, pero la formulación es lo suficientemente general como para extenderse a otros tipos de problemas.

Restringiendo la formulación a problemas de conducción de calor, los tipos más importantes de no linealidades que aparecen en situaciones prácticas de ingeniería se pueden clasificar de la siguiente manera:

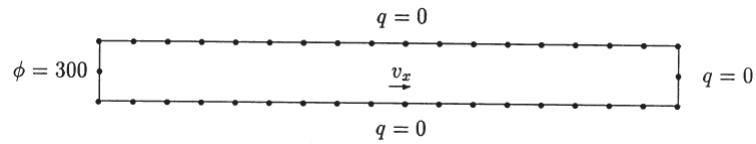


Figure 96: Problema transitorio de convección-difusión: geometría y discreción

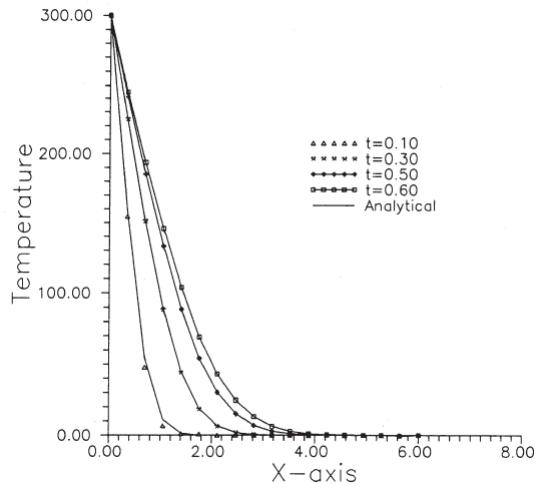


Figure 97: Variación transitoria de u a lo largo del eje x

- Materiales no lineales, *i.e.* coeficiente de difusividad dependiente de la temperatura;
- Condiciones de frontera no lineales, *e.g.* debido a la radiación de calor;
- Fuentes distribuidas no lineales, como en el caso de ignición espontánea;
- Problemas de interfaz móvil, *e.g.* debido al cambio de fase.

Las primeras tres situaciones serán consideradas en esta sección. La aplicación de elementos de frontera a problemas de cambio de fase se ha tratado antes de usar soluciones fundamentales dependientes del tiempo (por ejemplo, en [21]) y es un área de investigación muy interesante con el DRM.

7.7.1 Materiales no lineales

La forma general de la ecuación de difusión aplicada a la conducción de calor bidimensional en un medio isotrópico sin generación interna de calor es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (392)$$

en donde u es la temperatura, K la conductividad térmica, ρ es la densidad y c el calor específico del material. Suponiendo que K , ρ y c son todos dependientes de la temperatura, la ecuación anterior se puede ampliar en la forma

$$K \nabla^2 u - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{dK}{du} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (393)$$

donde los términos no lineales aparecen explícitamente en el lado derecho de la ecuación.

Onishi y Kuroki [22] han tratado los problemas no lineales de estado estable con conductividad dependiente de la temperatura en la forma anterior al considerar el lado derecho de (393) como un término fuente no lineal que se explica por la integración del dominio, de forma iterativa.

Se puede obtener una formulación más elegante y eficiente utilizando la transformación de Kirchhoff [5], [23], como se describe en la sección 6.4.3. Definir una nueva variable dependiente $U = U(u)$, de modo que

$$\frac{dU}{du} = K(u) \quad (394)$$

o, en forma integral,

$$U = \int_{u_a}^u K(u) du \quad (395)$$

la ecuación (392) en la nueva variable se convierte en

$$\nabla^2 U = \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (396)$$

en donde $k = k(u) = K/\rho c$ es la difusividad térmica.

Se puede notar que la ecuación (396) todavía contiene un coeficiente de difusividad dependiente de la temperatura. Por lo tanto, se necesita una transformación adicional. Siguiendo [6] y [24], se puede escribir $k = k(x, y, t)$ ya que u es una función continua de las coordenadas, así como el tiempo. Una nueva variable τ puede ser definida por la relación

$$\tau = \int_0^t k(x, y, t) dt \quad (397)$$

La diferenciación parcial de τ con respecto a t da

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = k \quad (398)$$

Sustituyendo lo anterior en (396), finalmente se obtiene

$$\nabla^2 U = \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad (399)$$

La ecuación (399) puede resolverse mediante la BEM de reciprocidad dual como se describe en la sección 7.2. Sin embargo, dado que la variable de tiempo modificada τ ahora es una función de posición (*i.e.* el problema aún no es lineal), debe emplearse un proceso de solución iterativa. Wrobel desarrolló un algoritmo de Newton-Raphson apropiado para el problema y Brebbia y se aplica junto con el DRM. El algoritmo se describe en detalle en [6], y aquí solo se revisarán las ideas principales.

La aplicación del DRM a la ecuación (399) produce un sistema de ecuaciones similar a (353), que puede escribirse como

$$(2\bar{\mathbf{C}} + \mathbf{H})\mathbf{U}^{m+1} - 2\mathbf{G}\mathbf{Q}^{m+1} = (2\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{H})\mathbf{U}^m \quad (400)$$

En la ecuación anterior, U y Q representan valores en el espacio de transformación y la matriz $\bar{\mathbf{C}}$ ($\bar{C}_{ij} = C_{ij}/\Delta\tau_j$) contiene valores escalonados de la variable de tiempo modificada en cada nodo, *i.e.*

$$\Delta\tau_j = k_j \Delta t \quad (401)$$

en el nodo j .

El algoritmo empleado en la solución del sistema no lineal (400) es del tipo Newton-Raphson, siguiendo la idea de Wrobel y Azevedo [25] para problemas de estado estacionario.

Considere $\psi(X^{m+1})$ como una función residual que debería ser cero cuando X^{m+1} es la solución exacta en el momento $(m + 1)\Delta t$:

$$\psi(\mathbf{X}^{m+1}) = (2\bar{\mathbf{C}} + \mathbf{H})\mathbf{U}^{m+1} - 2\mathbf{G}\mathbf{Q}^{m+1} - (2\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{H})\mathbf{U}^m \quad (402)$$

El esquema de Newton-Raphson puede formularse expandiendo la función residual como una serie de Taylor sobre una solución aproximada:

$$\psi(\mathbf{X}) = \psi(\mathbf{X}_n) + \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{X}} \right]_n (\mathbf{X} - \mathbf{X}_n) \quad (403)$$

donde se han descuidado los términos de segundo orden y de orden superior. El subíndice n significa la solución aproximada en la enésima iteración, y el superíndice $m + 1$ se eliminó por simplicidad.

Teniendo en cuenta que X es la solución exacta, *i.e.* $\psi(X) = 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{J}_n \Delta \mathbf{X}_{n+1} = -\psi(\mathbf{X}_n) \quad (404)$$

en el que $J = \partial\psi/\partial X$ es la matriz tangente o jacobiana y ΔX es el vector de incrementos.

A partir de la solución lineal, es posible determinar, para cada iteración, la solución actualizada a través de la expresión incremental

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \Delta\mathbf{X}_{n+1} \quad (405)$$

y el proceso de iteración continúa hasta que el vector residual es suficientemente pequeño.

Los coeficientes de la matriz tangente se calculan utilizando la expresión

$$J_{ij}^{m+1} = \frac{\partial\psi_i^{m+1}}{\partial X_j^{m+1}} \quad (406)$$

De acuerdo con las condiciones frontera del problema, tenemos:

- i. When $X_{ij}^{m+1} = Q_{ij}^{m+1}$:

$$J_{ij}^{m+1} = -2G_{ij}$$

- ii. When $X_{ij}^{m+1} = U_{ij}^{m+1}$:

$$\begin{aligned} J_{ij}^{m+1} = & \frac{2}{\Delta\tau_j} C_{ij} + H_{ij} - 2G_{ij} \frac{\partial Q_j^{m+1}}{\partial U_j^{m+1}} \\ & + 2C_{ij} (U_j^{m+1} - U_j^m) \frac{\partial}{\partial U_j^{m+1}} (\Delta\tau_j)^{-1} \end{aligned} \quad (407)$$

La expresión para la derivada de $(\Delta\tau_j)^{-1}$ con respecto a U_j^{m+1} se da en [6]. La derivada de Q_j con respecto a U_j depende del tipo de condición frontera en el nodo j , y su expresión se discute en la siguiente subsección.

El ciclo de iteración consistirá en los siguientes pasos:

- i. Resuelva (399) para una constante $\Delta\tau = \Delta t$, encontrando la solución lineal;
- ii. Con el valor de U en todos los puntos, se realiza una transformación inversa para encontrar valores de u ;
- iii) La conductividad, la densidad y las curvas de calor específicas proporcionan, para cada valor de u , valores actualizados de K, ρ y c ;
- iv. Los valores de $\Delta\tau$ ahora se pueden calcular en cada punto a través de la expresión (401);
- v. La matriz tangente y el vector residual se actualizan y se lleva a cabo una nueva solución.

El algoritmo de iteración continúa hasta que se alcanza una cierta tolerancia especificada para la norma relativa de incrementos ΔX . Con la solución convergente para U y Q , el proceso puede avanzar al siguiente paso de tiempo.

La formulación anterior se ha empleado para estudiar varios problemas de conducción de calor [6]. A continuación, se presentan los resultados para la distribución de temperatura a lo largo del grosor de una pared con propiedades de material no lineal. La pared tiene 20 cm de largo, 1 cm de alto y está inicialmente a $100^{\circ}C$. La temperatura de la superficie del extremo izquierdo se eleva repentinamente a $200^{\circ}C$ y se mantiene a este valor durante 10 s, después de lo cual se reduce nuevamente a $100^{\circ}C$; La temperatura de la superficie del extremo derecho se mantiene a $100^{\circ}C$, mientras que las otras superficies están aisladas. La conductividad térmica es $K = 2 + 0.01uW/(cm^{\circ}C)$ y capacidad calorífica $\rho c = 8J/(cm^3 \cdot ^{\circ}C)$

Los resultados de DRM utilizando discretizaciones de 22 elementos cuadráticos iguales (etiquetados DRM-Q) o 44 elementos de frontera constante iguales (DRM-C), teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje x , se comparan en las figuras 98 y 99 con una solución de elementos finitos obtenido con 20 elementos lineales iguales [26]. El acuerdo de resultados es muy bueno. El número promedio de iteraciones de la solución del elemento frontera fue 4, en comparación con 3 usando elementos finitos. El paso de tiempo fue de 1 segundo en ambos casos.

| x | FEM | DRM-Q | DRM-C |
|----|--------|--------|--------|
| 0 | 200.00 | 200.00 | 200.00 |
| 1 | 176.16 | 174.86 | 175.29 |
| 2 | 153.21 | 151.03 | 151.48 |
| 3 | 133.47 | 131.33 | 131.74 |
| 4 | 118.60 | 117.32 | 117.63 |
| 5 | 108.98 | 108.74 | 108.94 |
| 6 | 103.72 | 104.14 | 104.27 |
| 7 | 101.29 | 101.91 | 102.01 |
| 8 | 100.37 | 100.87 | 100.97 |
| 9 | 100.08 | 100.39 | 100.50 |
| 10 | 100.01 | 100.14 | 100.27 |

Figure 98: Variación de temperatura ($^{\circ}C$) a lo largo del espesor de la pared en el tiempo $t = 10s$

7.7.2 Condiciones de frontera no lineales

Otro caso interesante de no linealidad que puede tratarse con la presente formulación es el de las condiciones frontera no lineales. Los tipos más comunes de condiciones frontera asociadas con el problema actual son:

- i. Temperatura prescrita: $u = \bar{u}$
- ii. Flujo prescrito: $q = \bar{q}$
- iii. Convección: $q = h(u - u_c)$

| x | FEM | DRM-Q | DRM-C |
|----|--------|--------|--------|
| 0 | 100.00 | 100.00 | 100.00 |
| 1 | 128.53 | 130.46 | 130.15 |
| 2 | 139.97 | 138.70 | 138.95 |
| 3 | 136.95 | 132.01 | 132.47 |
| 4 | 124.72 | 121.29 | 121.71 |
| 5 | 114.40 | 112.37 | 112.64 |
| 6 | 107.18 | 106.56 | 106.71 |
| 7 | 103.24 | 103.27 | 103.36 |
| 8 | 101.29 | 101.56 | 101.62 |
| 9 | 100.45 | 100.72 | 100.77 |
| 10 | 100.13 | 100.33 | 100.36 |

Figure 99: Variación de temperatura ($^{\circ}C$) a lo largo del espesor de la pared en el tiempo $t = 13s$

$$\text{iv. Radiación: } q = \sigma\epsilon(u^4 - u_r^4)$$

en el que el flujo de calor ahora se define como $q = -K\partial u/\partial n$, n es el vector normal de la unidad externa, h es el coeficiente de transferencia de calor, u_c es la temperatura del medio que rodea las fronteras convectivas, σ es el Stefan -La constante de Boltzmann y ϵ es el factor de intercambio radiactivo entre la superficie y el ambiente exterior a temperatura u_r . Después de aplicar la transformación de Kirchhoff, se obtienen las siguientes expresiones correspondientes:

- i. Prescribed temperature: $U = \bar{U} = T[\bar{u}]$
- ii. Prescribed flux: $Q = \frac{\partial U}{\partial n} = \bar{Q} = K\frac{\partial u}{\partial n} = -\bar{q}$
- iii. Convection: $Q = -h(u - u_c)$
- iv. Radiation: $Q = -\sigma\epsilon(u^4 - u_r^4)$

Se puede notar que las condiciones de convección y radiación no son lineales en el espacio de transformación, ya que $u = T^{-1}[U]$ ya no es el desconocido primario.

La expresión de la derivada de Q_j con respecto a U_j en la ecuación (407) depende del tipo de condición frontera en el nodo j . Para el flujo de calor prescrito, la derivada es obviamente cero ya que Q no depende de U . Sin embargo, las

condiciones de frontera de los tipos convectivo y radiactivo producen las siguientes expresiones:

- Convección:

$$\frac{\partial Q_j^{m+1}}{\partial U_j^{m+1}} = -h \frac{\partial u}{\partial U} = -\frac{h}{K_j} \quad (408)$$

- Radiación:

$$\frac{\partial Q_j^{m+1}}{\partial U_j^{m+1}} = -\frac{4\sigma\epsilon u_j^3}{K_j} \quad (409)$$

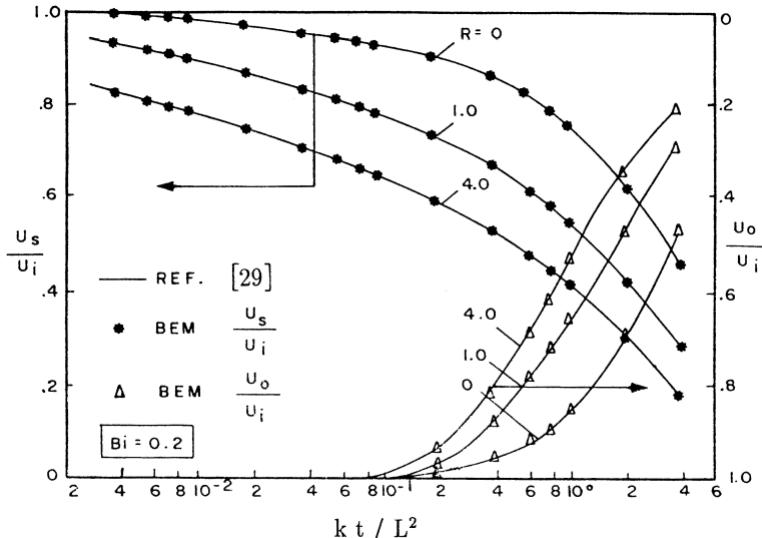


Figure 100: Resultados de temperatura transitoria para una losa con convección y radiación en las superficies

Puede aparecer otro tipo de no linealidad si la región considerada está compuesta de subregiones homogéneas por partes de diferentes materiales. La aplicación de la condición de continuidad para la temperatura a lo largo de la interfaz entre subregiones produce una discontinuidad en la variable transformada U , cuyos valores deben ajustarse para que el requisito físico de continuidad de temperatura se satisfaga en la etapa final. Esta característica también puede ser tratada por el mismo esquema Newton-Raphson, como se discutió en [27].

Wrobel y Brebbia [28] emplearon el DRM para analizar una losa de ancho $2L$, inicialmente a una temperatura uniforme u_i , cuyas superficies se exponen repentinamente a convección y radiación simultáneas en un medio a $0^{\circ}F$. La losa tiene propiedades termofísicas lineales, por lo que la solución se lleva a cabo directamente en el espacio real.

Los resultados para la temperatura de la superficie u_s y la temperatura u_0 en el centro de la losa se presentan en la figura 100, en términos de valores adimensionales. Los parámetros empleados en el análisis son $k = 1.0 \text{ in}^2/\text{h}$, número Biot $Bi = hL/K = 0.2$, y $R = \sigma\epsilon u_i^3 L/K = 0, 1$ y 4 ; $R = 0$ corresponde a convección pura), que representa una condición de contorno lineal.

Los resultados obtenidos usando DRM con 22 elementos de frontera constantes iguales se comparan bien con los de Haji-Sheik y Sparrow [29], que utilizaron un método de Monte Carlo.

7.7.3 Encendido espontáneo: caso transitorio

El problema del encendido espontáneo ya se ha discutido en la sección 6.4.2 para el caso de estado estacionario. Su descripción matemática viene dada por una ecuación de difusión con un término no lineal de reacción-calentamiento (fuente) que puede escribirse, después de algunas aproximaciones, en la forma

$$\nabla^2 u + \gamma e^u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (410)$$

El llamado problema de criticidad 50, que consiste en encontrar el valor de γ por encima del cual ocurrirá la ignición espontánea para un cuerpo dado, se trató en la sección 6.4.2. Esto requiere la solución de una versión de estado estable de la ecuación (410) en el que $\partial u / \partial t$ se establece en cero y el valor de γ iterado hasta que ya no se logra la convergencia. Aquí, la formulación se extenderá para analizar el problema completo y transitorio, una vez que se haya determinado el valor crítico de γ .

Por lo tanto, en la ecuación (410), se conoce el valor de γ y la solución proporciona la distribución de u (la temperatura) en todo el cuerpo.

La ecuación (410) puede interpretarse como una ecuación de Poisson con el siguiente término no homogéneo

$$\nabla^2 u = b(x, y, u, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma e^u \quad (411)$$

Comparando lo anterior con la ecuación (341), se puede ver que el vector α en (345) ahora estará dado por

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{1}{k} \dot{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{b}_1 \right) \quad (412)$$

en el que b_1 es el vector de valores nodales de e^u .

El sistema de ecuaciones resultante de la aplicación del DRM, equivalente a (346), se convierte en el presente caso

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \left(\frac{1}{k} \dot{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{b}_1 \right) \quad (413)$$

Denotando, como antes,

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \quad (414)$$

la ecuación (413) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S} \left(\frac{1}{k} \dot{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{b}_1 \right) \quad (415)$$

Empleando el mismo esquema de integración de tiempo de dos niveles que en la sección 7.2 con $\theta_u = 0.5$ y $\theta_q = 1.0$, se obtiene una ecuación similar a (353), *i.e.*

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^{m+1} - 2\mathbf{G}\mathbf{q}^{m+1} = \left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} - \mathbf{H} \right) \mathbf{u}^m - 2\gamma \mathbf{S}\mathbf{b}_1 \quad (416)$$

en el que C es la matriz de capacidad, $C = -1/kS$. Este sistema transitorio no lineal puede resolverse para un valor dado de γ marchando en el tiempo, con iteración en cada paso de tiempo.

Para el problema analizado, todos los valores frontera de u están prescritos, de modo que el sistema (416) se resuelve para los valores frontera de q y los valores internos de u .

Dentro de un paso de tiempo $(m+1)\Delta t$, en la iteración n , se calcula el vector u_n^{m+1} y se compara con u_{n-1}^{m+1} . Si coinciden con una precisión dada, u_n^{m+1} es la solución para este nivel de tiempo y el proceso se repite sucesivamente para todos los niveles de tiempo. En la iteración n , los valores nodales de b_1 están dados por $\exp[(u_n^{m+1} + u^m)/2]$ en el que u^m es el vector de valores convergentes de u en el momento $m\Delta t$.

Dado lo anterior, el lado derecho de (416) es conocido por cualquier iteración. Al presentar las condiciones de frontera y la reordenación, el sistema se puede resolver mediante la eliminación estándar de Gauss.

La técnica anterior se aplicó en [30] para estudiar el problema de la ignición espontánea de un cilindro largo de radio unitario, inicialmente a temperatura T_0 en todos los puntos, expuesto en el tiempo $t = 0$ a un ambiente a temperatura T_a . El cilindro es de un material reactivo isotrópico uniforme, cuya temperatura de ignición es T_m . La condición frontera de Dirichlet $T = T_a$ se impone en todos los nodos fronteras. El valor crítico de γ es $\gamma_c = 2.0$ en este caso [31].

El cilindro se discretizó con 16 elementos de frontera lineales y 19 nodos internos se espaciaron a intervalos de 0.1m a lo largo de una diagonal, como se muestra en la figura 101. Los valores numéricos de los parámetros físicos para RDX tomados de [32] son

- $k = 7.778 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$

- $T_m = 425\text{K}$

- $T_0 = 25^\circ\text{C} = 298\text{K}$

- $T_a = 400\text{K}$

- $E = 47500\text{kcal/M}$

- $R = 1.987\text{cal/(MK)}$

tal que $T = (u + 59.76)/0.1494$ [30]. Se usó un paso de tiempo variable porque este proceso tiene características de estabilidad variables. Inicialmente se puede usar una gran cantidad, pero esto debe reducirse rápidamente a medida que se acerca el encendido. El valor de Δt se modificó en cada paso de tiempo para mantener el cambio de temperatura promedio en todos los nodos interiores entre 5° y 20° .

Los resultados se muestran en la figura 102 para el caso $\gamma = 1$. Dado que este valor de γ es menor que γ_c , el paso de tiempo aumenta continuamente y el proceso converge a una solución de estado estacionario con $T_a < T < T_m$, en absolutos puntos internos.

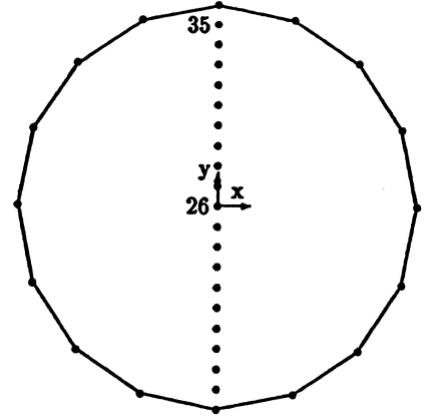


Figure 101: Discretización del cilindro de radio de la unidad

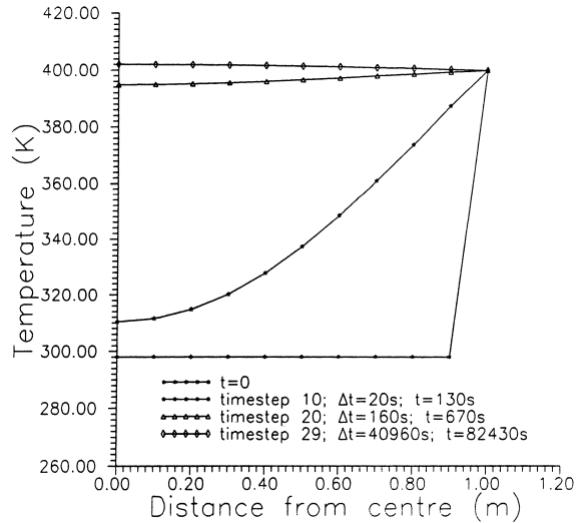


Figure 102: Distribución de temperatura para $\gamma = 1$

Los resultados en la figura 103 son para $\gamma = 4$. En este caso se puede ver que la ignición se alcanza primero en el centro del cilindro.

Para los casos con valores más altos de γ , el punto de ignición se mueve desde el centro hacia la superficie externa y se reduce el tiempo transcurrido antes de la ignición. Esta situación se representa en la figura 105 para $\gamma = 50$ y se resume en la figura 104. Los resultados presentados son muy similares a los obtenidos utilizando consideraciones teóricas en [32].

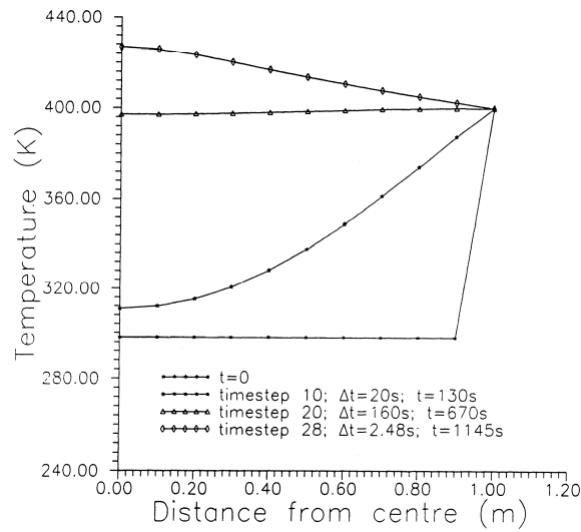


Figure 103: Distribución de temperatura para $\gamma = 4$

| γ | ignition time (s) | ignition node | coordinate |
|----------|-------------------|---------------|------------------|
| 1.0 | – | – | max. temp. 402 K |
| 1.9 | – | – | max. temp. 405 K |
| 2.1 | 5884 | 26 | $y = 0$ |
| 4.0 | 1145 | 26 | $y = 0$ |
| 10.0 | 723 | 26 | $y = 0$ |
| 20.0 | 555 | 31 | $y = 0.5$ |
| 50.0 | 351 | 34 | $y = 0.8$ |
| 200.0 | 129 | 35 | $y = 0.9$ |

Figure 104: Tiempo de encendido y nodo para aumentar γ

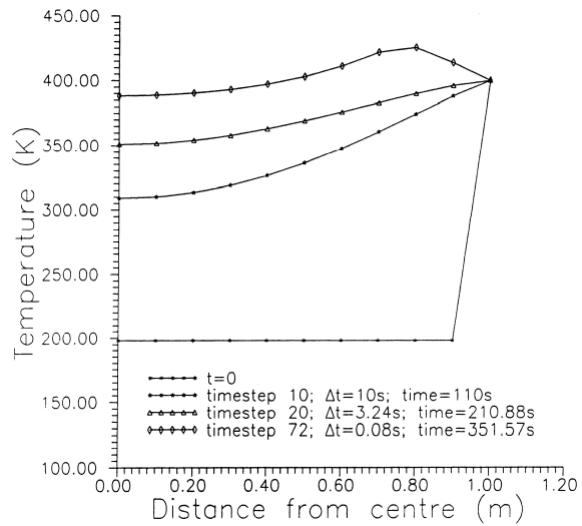


Figure 105: Distribución de temperatura para $\gamma = 50$

8 Otras soluciones fundamentales

8.1 Introducción

Hasta ahora, todas las aplicaciones del Método de Reciprocidad Dual consideradas son, este libro estaba relacionado con el operador de Laplace. Esto significa que las ecuaciones diferenciales parciales gobernantes se reformularon inicialmente como algún tipo de ecuación de Poisson y la solución fundamental de la ecuación de Laplace empleada para obtener una formulación integral equivalente. La integral del dominio resultante se approximó luego de manera DRM, y una ecuación integral de frontera obtenida y resuelta sin recurrir a la discretización o integración interna.

Obviamente, el DRM no está restringido a los operadores laplacianos. El método se ha utilizado previamente para diferentes problemas y, de hecho, las aplicaciones anteriores de DRM se ocuparon de la elastodinámica utilizando la solución fundamental de elastostática de Kelvin.

Este capítulo discute la aplicación del DRM a algunos problemas para los cuales se emplea una solución fundamental distinta de la ecuación de Laplace. El capítulo se abre considerando los problemas de elasticidad. Se incluye una breve revisión de la notación indicial generalmente utilizada para formular el modelo matemático para aquellos lectores que no estén familiarizados con él. Inicialmente, los conceptos básicos de BEM aplicados a problemas de elasticidad bidimensionales se describen para completar. Se discute cómo se puede aplicar el DRM para transformar las integrales de dominio resultantes de las fuerzas del cuerpo en integrales de límites equivalentes para problemas elastáticos. También se explica cómo tratar los efectos de inercia en la elastodinámica, tanto para casos armónicos como transitorios, y se proporcionan resultados numéricos para estos problemas.

A continuación, se consideran los problemas de flexión de la placa. La formulación se discute en el marco de la teoría de la placa delgada de Kirchhoff, y se emplea la solución fundamental correspondiente. Se incluyen dos casos en los que el DRM puede emplearse eficientemente: placas sobre bases elásticas y flexión no lineal utilizando la ecuación de Berger. En ambas situaciones, los términos de dominio adicionales que aparecen en la formulación se tratan utilizando aproximaciones DRM, lo que conduce a ecuaciones integrales de solo frontera.

Al finalizar la sección sobre elasticidad, se consideran problemas tridimensionales con las fuerzas del cuerpo con la aplicación a cargas gravitacionales, centrífugas y térmicas.

Finalmente, se trata la convección transitoria-difusión. Este problema ya se consideró en el capítulo 7, utilizando la solución fundamental de la ecuación de

Laplace. Para el caso de los campos de velocidad constante, está disponible una solución fundamental de la ecuación de difusión por convección en estado estacionario. Aquí, esta solución fundamental se emplea para resolver problemas transitorios, en cuyo caso una aproximación de Reciprocidad Dual es necesaria solo para el término derivado del tiempo.

Los conceptos descritos en este capítulo son bastante generales y permiten la extensión del Método de Reciprocidad Dual para tratar no solo los problemas mencionados anteriormente, sino también otros que involucran cualquier tipo de solución fundamental.

8.2 Elasticidad bidimensional

En esta sección, algunos conceptos básicos de la teoría lineal de la elasticidad se revisan de acuerdo con los textos estándar sobre el tema [1-3]. Para conveniencia de la presentación, se adopta la notación tensorial cartesiana. Dicha notación utiliza índices de subíndice (1,2) para representar x y y también hace innecesarios los símbolos de suma cuando el mismo subíndice de letra aparece dos veces en una ecuación. Por lo tanto, en dos dimensiones,

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 \quad (417)$$

y

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} \quad (418)$$

Además, el delta δ_{ij} de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (419)$$

será utilizado de manera consistente.

El equilibrio estático de fuerzas y momentos en un cuerpo requiere la satisfacción de la ecuación.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (420)$$

donde σ_{ij} son los componentes del tensor de estrés y b_i los de las fuerzas del cuerpo. La coma en la ecuación anterior indica una derivada espacial, *i.e.* $\sigma_{ij,j} = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$. Además, si no se aplican momentos corporales, el tensor de tensión es simétrico, *i.e.*

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (421)$$

La relación entre el tensor de tensión y las fuerzas superficiales (tracciones) viene dada por

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (422)$$

donde n_j representa la dirección de los cosenos del exterior normal a la superficie.

Bajo la acción de las fuerzas, un cuerpo se desplaza de su configuración original. Si los desplazamientos u_i son lo suficientemente pequeños como para que el cuadrado y el producto de sus derivadas parciales sean insignificantes, entonces las deformaciones pueden representarse mediante el tensor de deformación infinitesimal de Cauchy:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (423)$$

Para un material elástico isotrópico que no experimenta cambios de temperatura, la ley de Hooke que relaciona tensiones y deformaciones se puede establecer en la forma

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (424)$$

o, inversamente,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (425)$$

donde ν es la relación de Poisson y G el módulo de corte, que puede relacionarse con el módulo de Young de la siguiente manera:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (426)$$

Las ecuaciones (420), (423) y (424) representan un conjunto de 8 ecuaciones para 3 tensiones, 3 deformaciones y 2 desplazamientos que pueden manipularse más. Un procedimiento sencillo es sustituir (423) en (424) para obtener tensiones en términos de gradientes de desplazamiento, y luego sustituir el resultado en (420) para obtener dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para los componentes de desplazamiento. El resultado de estas operaciones es la conocida ecuación de Navier que se puede escribir en la forma

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (427)$$

Esta ecuación es particularmente conveniente cuando se especifican condiciones de frontera de desplazamiento. Al usar (423) y (424) como antes, pero ahora sustituyendo en (422) puntos de frontera, se obtienen las condiciones de frontera de tracción, *i.e.*

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = p_i \quad (428)$$

Es interesante notar que dado que la condición de equilibrio ahora se expresa en términos de desplazamientos en la ecuación (427), las ecuaciones de compatibilidad ya no son necesarias. Los desplazamientos u_i se resuelven a partir de las ecuaciones de Navier para satisfacer las condiciones de frontera. Después de que u_i se conoce en todo el cuerpo, las deformaciones se obtienen mediante la ecuación (423), y las tensiones se calculan utilizando la ley de Hooke.

8.2.1 Análisis estático

A continuación, la ecuación de equilibrio (420) se resolverá sujeta a las condiciones de frontera.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (429)$$

$$p_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (430)$$

La declaración residual inicial ponderada se puede escribir como

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_k - \bar{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (431)$$

donde u_k^* y p_k^* son los desplazamientos y las tracciones correspondientes al campo de ponderación, *i.e.*

$$p_k^* = \sigma_{kj}^* n_j \quad (432)$$

Se supone que la relación deformación-desplazamiento (423) y la ecuación constitutiva (424) se aplican tanto a los campos de aproximación como a los de ponderación.

El primer término en la ecuación (431) puede integrarse por partes, dando

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj}\epsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_k - \bar{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (433)$$

Integrando nuevamente por partes el primer término en la ecuación anterior, teniendo en cuenta el principio de reciprocidad, *i.e.*

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \epsilon_{kj}^* d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon_{kj} \sigma_{kj}^* d\Omega \quad (434)$$

Se obtiene

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \quad (435)$$

Se supone que el campo de tensión u_{kj}^* satisface la ecuación de equilibrio

$$\sigma_{kj,j}^* + b_k^* = 0 \quad (436)$$

La ecuación (435) puede modificarse aún más suponiendo que los componentes de fuerza del cuerpo b_k^* corresponden a cargas puntuales unitarias positivas en cada una de las tres direcciones ortogonales dadas por los vectores unitarios e_k , aplicados en un punto fijo i . Esto se puede representar como

$$b_k^* = \Delta^i e_k \quad (437)$$

donde Δ^i representa la función delta de Dirac en i .

Por lo tanto, la primera integral en la ecuación (435) estará dada por

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega = - \int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i u_k e_k d\Omega = - u_k^i e_k \quad (438)$$

donde u_k^i representa el componente k del desplazamiento en el punto i de la aplicación de la carga. Además, si cada carga puntual se toma como independiente, los desplazamientos y las tracciones destacados se pueden escribir en la forma

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l \quad (439)$$

$$p_k^* = p_{lk}^* e_l \quad (440)$$

donde u_{lk}^* y p_{lk}^* representan los desplazamientos y las tracciones en la dirección k en un punto de campo correspondiente a una fuerza de punto unitario que actúa en la dirección l , aplicada en un punto de carga.

De lo anterior, se ve que la ecuación (435) puede reescribirse. representa los tres componentes de desplazamiento separados en el punto de carga i , en la forma

$$u_l^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (441)$$

La ecuación (441) se conoce como la identidad de Somigliana para los desplazamientos [4] y aquí se obtuvo por reciprocidad con una solución singular de la ecuación de Navier (427) satisfactoria

$$Gu_{l,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kl}^* + \Delta^i e_l = 0 \quad (442)$$

cual es la llamada solución fundamental.

La solución fundamental para el problema de deformación plana en un medio elástico infinito, conocida como la solución de Kelvin, es de la forma [5]

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (443)$$

con el campo de tracción correspondiente

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (444)$$

en el que $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$. Estas expresiones también son válidas para la tensión plana si ν se reemplaza por $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$.

Para obtener una ecuación integral de frontera, el punto fuente en la ecuación (441) se lleva al frontera y se realiza un análisis de frontera similar al del capítulo 2. El resultado se puede escribir de la siguiente manera

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (445)$$

En cuanto a problemas potenciales, si la frontera Γ es suave en el punto de origen, se obtiene $c_{lk}^i = \delta_{lk}/2$, de lo contrario, se han presentado expresiones de forma cerrada para casos de dos y tres dimensiones en [6].

La solución numérica de la ecuación anterior sigue los mismos pasos que para problemas potenciales, descritos en el capítulo 2. Por el momento, se supone que las fuerzas corporales están ausentes en el análisis. Inicialmente, la frontera Γ se discretiza en una serie de elementos; luego, la variación de $u_k y p_k$ dentro de cada elemento se aproxima usando funciones de interpolación y valores nodales; finalmente, la ecuación discretizada se satisface en un número finito de puntos a lo largo del frontera (los puntos de colocación o los nodos de frontera). El

resultado final es un sistema de ecuaciones algebraicas que, después de la imposición de las condiciones de contorno, puede resolverse para proporcionar las incógnitas de frontera restantes.

Para mostrar los pasos anteriores con más detalle, ahora es más conveniente trabajar con matrices que con la notación indicial. Para este efecto, la ecuación (445) se reescribe en la forma siguiente en la cual las fuerzas del cuerpo se han omitido por simplicidad,

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma \quad (446)$$

donde los vectores de desplazamiento y tracción tienen los componentes

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (447)$$

y también se han definido las siguientes dos matrices de soluciones fundamentales:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (448)$$

Es importante notar que el término libre c^i ahora también es una matriz de 2 x 2

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (449)$$

Después de que la ecuación (446) se haya discretizado en varios elementos de frontera, los valores de u y p dentro de cada elemento se pueden aproximar usando funciones de interpolación, *i.e.*

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u}^n \quad (450)$$

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{p}^n \quad (451)$$

en el que u^n y p^n se refieren a los desplazamientos nodales y las tracciones, respectivamente, y $\boldsymbol{\phi}$ es el vector de las funciones de interpolación, *i.e.*

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (452)$$

Sustituyendo las aproximaciones anteriores en la versión discretizada de la ecuación (446), se obtiene la siguiente ecuación

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \phi^T d\Gamma \right) \mathbf{p}^n - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \phi^T d\Gamma \right) \mathbf{u}^n \quad (453)$$

donde la suma de 1 a N indica la suma sobre los N elementos en la frontera y Γ_j es la superficie del elemento j . Llamando, como en el capítulo 2,

$$\mathbf{h}_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 \mathbf{p}^* d\Gamma \quad (454)$$

$$\mathbf{h}_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 \mathbf{p}^* d\Gamma \quad (455)$$

$$\mathbf{g}_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (456)$$

y

$$\mathbf{g}_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (457)$$

en el que h_{ij}^k y g_{ij}^k son ahora matrices de 2×2 , y sustituyendo en la ecuación (453), se obtiene la siguiente ecuación para el nodo i

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \left[\begin{array}{cccc} \bar{\mathbf{H}}_{i1} & \bar{\mathbf{H}}_{i2} & \cdots & \bar{\mathbf{H}}_{iN} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G}_{i1} & \mathbf{G}_{i2} & \cdots & \mathbf{G}_{iN} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (458)$$

donde $\bar{\mathbf{H}}_{ij}$ es la suma de la submatriz h_{ij}^1 del elemento j con la submatriz $h_{i,j-1}^2$ del elemento $j-1$, lo mismo aplica para G_{ij} . Por lo tanto, la fórmula (458) representa la ecuación ensamblada para el nodo i . La ecuación matricial anterior se puede escribir en la forma más concisa

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j \quad (459)$$

Al incorporar el término c^i en la matriz H , la ecuación (459) se convierte en

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j \quad (460)$$

El paso final es aplicar la ecuación (460) a cada nodo frontera sucesivamente, generando un sistema de ecuaciones $2N$ que se puede expresar como

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (461)$$

Después de incorporar las condiciones frontera del problema, este sistema puede resolverse mediante la eliminación de Gauss.

8.2.2 Tratamiento de fuerzas corporales

El Método de Reciprocidad Dual se puede usar en elastostatics para transformar la integral de dominio que surge de la aplicación de fuerzas corporales en integrales de frontera equivalentes.

La formulación sigue de cerca que para la ecuación de Poisson, descrita en el Capítulo 5. Suponiendo que las fuerzas del cuerpo ahora están presentes en la definición del problema, la ecuación integral de fronteras a resolver toma la forma de la ecuación (445). Se puede proponer la siguiente aproximación para el término b_k ($k = 1, 2$):

$$b_k \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j \quad (462)$$

donde, como antes, α_k^j son un conjunto de coeficientes inicialmente desconocidos y f^j son funciones aproximadas. Si soluciones particulares \hat{u}_{mk}^j se puede encontrar la ecuación satisfactoria (427), *i.e.*

$$G\hat{u}_{mk,ll}^j + \frac{G}{1-2\nu}\hat{u}_{lk,lm}^j = \delta_{mk}f^j \quad (463)$$

luego, al sustituir (462) y (46) en la ecuación (445), se obtiene de la aplicación del principio de reciprocidad a la integral de dominio resultante

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left(c_{lk}^i \hat{u}_{mk}^{ij} + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \hat{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* \hat{p}_{mk}^j d\Gamma \right) \alpha_m^j \quad (464)$$

donde \hat{p}_{mk}^j son las tracciones correspondientes a las soluciones particulares \hat{u}_{mk}^j . Se puede observar que la ecuación (464) es equivalente a (144) para la ecuación de Poisson.

El procedimiento para la solución numérica de la ecuación anterior sigue el descrito en la sección 5.1.2. La ecuación (464) se puede escribir usando notación matricial en lugar de indicial como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left(\mathbf{c}^i \hat{\mathbf{u}}^{ij} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \hat{\mathbf{u}}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \hat{\mathbf{p}}^j d\Gamma \right) \alpha^j \quad (465)$$

Después de la discretización y aproximación de la variación de $u, p, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{p}}$ sobre cada elemento utilizando sus valores nodales y el mismo conjunto de funciones de interpolación, la ecuación (465) se convierte en

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{H}}_{ik} \mathbf{u}_k - \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_{ik} \mathbf{p}_k = \sum_{j=1}^{N+L} \left(\mathbf{c}^i \hat{\mathbf{u}}^{ij} + \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{H}}_{ik} \hat{\mathbf{u}}_k^j - \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_{ik} \hat{\mathbf{p}}_k^j \right) \alpha^j \quad (466)$$

Finalmente, aplicando la ecuación anterior a todos los nodos frontera, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}})\alpha \quad (467)$$

o, sustituyendo $\alpha = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}$,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (468)$$

Si la expresión para la función aproximada f es de la misma forma que la utilizada en los capítulos anteriores, *i.e.*

$$f = 1 + r \quad (469)$$

la solución particular que satisface la ecuación (463) viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{u}_{mk} &= \frac{1-2\nu}{(5-4\nu)G} r_{,m} r_{,k} r^2 + \\ &\frac{1}{30(1-\nu)G} \left[\left(3 - \frac{10\nu}{3} \right) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] r^3 \end{aligned} \quad (470)$$

La expresión correspondiente para la tracción \hat{p} es

$$\begin{aligned} \hat{p}_{mk} &= \frac{2(1-2\nu)}{5-4\nu} \left[\frac{1+\nu}{1-2\nu} r_{,m} n_k + \frac{1}{2} r_{,k} n_m + \frac{1}{2} \delta_{mk} \frac{\partial r}{\partial n} \right] r + \\ &\frac{1}{15(1-\nu)} \left[(4-5\nu) r_{,k} n_m - (1-5\nu) r_{,m} n_k + [(4-5\nu) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} \right] r^2 \end{aligned} \quad (471)$$

Las expresiones anteriores pueden ser verificadas por el lector. Para verificar el primero, uno inicialmente diferencia (470) dos veces y sustituye el resultado en la expresión (463) por f definido en (469). Para el segundo, se deben usar las siguientes expresiones:

$$\hat{\epsilon}_{mkl} = \frac{1}{2} (\hat{u}_{mk,l} + \hat{u}_{ml,k}) \quad (472)$$

$$\hat{\sigma}_{mkl} = 2G\hat{\epsilon}_{mkl} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\hat{\epsilon}_{mjj}\delta_{kl} \quad (473)$$

para los componentes de deformación y tensión kl en cualquier punto, debido a una carga puntual unitaria en la dirección m aplicada en un punto fijo. Los tensores anteriores son de la forma

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{mkl} = & \frac{1-2\nu}{(5-4\nu)G} [\delta_{kl}r_{,m} + \frac{1}{2}(\delta_{mk}r_{,l} + \delta_{ml}r_{,k})] r + \\ & \frac{1}{30(1-\nu)G} [(4-5\nu)(\delta_{mk}r_{,l} + \delta_{ml}r_{,k}) - \delta_{kl}r_{,m} - r_{,m}r_{,k}r_{,l}] r^2 \end{aligned} \quad (474)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{mkl} = & \frac{2(1-2\nu)}{5-4\nu} \left[\frac{1+\nu}{1-2\nu} \delta_{kl}r_{,m} + \frac{1}{2}(\delta_{mk}r_{,l} + \delta_{ml}r_{,k}) \right] r + \\ & \frac{1}{15(1-\nu)} [(4-5\nu)(\delta_{mk}r_{,l} + \delta_{ml}r_{,k}) - (1-5\nu)\delta_{kl}r_{,m} - r_{,m}r_{,k}r_{,l}] r^2 \end{aligned} \quad (475)$$

La expresión (471) para \hat{p}_{mk} se obtiene escribiendo

$$\hat{p}_{mk} = \hat{\sigma}_{mkl}n_l \quad (476)$$

Los tipos más comunes de fuerzas corporales que aparecen en los problemas de elasticidad son aquellos debidos al peso propio (gravitacional), cargas centrífugas y térmicas. Aunque pueden abordarse utilizando la formulación de Galerkin-tensor descrita en el capítulo 2 (ver [5] para más detalles), esta técnica se limita solo a estos casos. La formulación DRM presentada aquí puede aplicarse igualmente a estas situaciones pero, debido a su carácter aproximado, no presenta ninguna restricción con respecto a los tipos más generales de fuerzas corporales.

Algunos resultados de DRM para problemas de elasticidad con las fuerzas corporales se presentan para el caso tridimensional en la sección 8.4.

8.2.3 Análisis dinámico

Las condiciones de equilibrio dinámico de un cuerpo se expresan mediante la ecuación:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = \rho\ddot{u}_k \quad (477)$$

donde ρ es la densidad de masa y los puntos denotan diferenciación con respecto al tiempo. Esta ecuación también se puede expresar en términos del campo de desplazamiento como

$$Gu_{k,jj} + \frac{G}{1-2\nu}u_{j,jk} + b_k = \rho\ddot{u}_k \quad (478)$$

La forma anterior es compatible con la ecuación de elasticidad de Navier (427). Para formular de forma única el problema dinámico, uno tiene que imponer condiciones de contorno de los tipos (429) y (430) y condiciones iniciales que especifiquen el estado de los desplazamientos y las velocidades en el momento, *i.e.*

$$u_k = u_k^0 \quad (479)$$

$$\dot{u}_k = \dot{u}_k^0 \quad (480)$$

La aplicación del Método de Reciprocidad Dual al problema dinámico inicialmente requiere una ecuación integral de frontera que se obtiene utilizando las soluciones fundamentales estáticas (443) y (444) para desplazamientos y tracciones. Esta ecuación integral es similar en forma a (445) y, en ausencia de fuerzas corporales, se lee

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \rho \int_{\Omega} u_{lk}^* \ddot{u}_k d\Omega \quad (481)$$

El siguiente paso en la formulación es la introducción de la aproximación para las aceleraciones \ddot{u}_k , de manera similar a lo que se hizo para la ecuación de onda escalar en la sección 7.5. Escritura (véase la expresión 343),

$$\ddot{u}_k(x, y, t) \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f^j(x, y) \alpha_k^j(t) \quad (482)$$

y usando la solución particular \hat{u}^j relacionado con f^j a través de la expresión (463), como en el caso de las fuerzas corporales, se obtiene una ecuación similar en forma a (464), señalando que los parámetros α^j ahora dependen del tiempo. La discretización y aplicación de esta ecuación integral de fronteras a todos los nodos de fronteras genera el sistema

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = -\rho(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}})\boldsymbol{\alpha} \quad (483)$$

o, sustituyendo $\boldsymbol{\alpha} = f^{-1}\ddot{\mathbf{u}}$,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = -\rho(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}})\mathbf{F}^{-1}\ddot{\mathbf{u}} \quad (484)$$

Esta ecuación puede reescribirse en la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (485)$$

donde la matriz de masa generalizada M está dada por

$$\mathbf{M} = \rho(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}})\mathbf{F}^{-1} \quad (486)$$

La formulación DRM previa para el análisis dinámico fue originalmente derivada por Brebbia y Nardini [7], [8] y se aplicó a una serie de problemas armónicos y transitorios. A continuación, algunos de sus resultados numéricos se reproducen y discuten.

El sistema (485) se dividió inicialmente de acuerdo con el tipo de condición frontera aplicada, y luego se condensó estáticamente de tal manera que el sistema final pudiera resolverse solo para los desplazamientos desconocidos. Este procedimiento es similar al explicado para la ecuación de Helmholtz en el capítulo 6, y es posible en este caso debido a la ausencia de derivadas temporales de las tracciones en la presente formulación. Denotando las variables en las partes Γ_1 y Γ_2 de la frontera por los subíndices 1 y 2, *i.e.*

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} \quad (487)$$

el sistema global (485) se puede dividir de la siguiente manera,

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{H}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_{12}\mathbf{u}_2 = \mathbf{G}_{11}\mathbf{p}_1 + \mathbf{G}_{12}\mathbf{p}_2 \quad (488)$$

$$\mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{H}_{21}\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_{22}\mathbf{u}_2 = \mathbf{G}_{21}\mathbf{p}_1 + \mathbf{G}_{22}\mathbf{p}_2 \quad (489)$$

Invertiendo G_{11} de la primera ecuación anterior, las tracciones p_1 se pueden expresar en términos de las otras variables en la forma

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{G}_{11}^{-1} (\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{H}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_{12}\mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_{12}\mathbf{p}_2) \quad (490)$$

Sustituyendo esta expresión por p_1 en la ecuación (489), finalmente se obtiene

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}_2 = \check{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_1 + \check{\mathbf{H}}\mathbf{u}_1 + \hat{\mathbf{G}}\mathbf{p}_2 \quad (491)$$

con las matrices modificadas definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_{22} - \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12} \\ \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_{22} - \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} \\ \hat{\mathbf{G}} &= \mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{12} \\ \check{\mathbf{M}} &= \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{21} \\ \check{\mathbf{H}} &= \mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{21} \end{aligned} \quad (492)$$

El lado derecho de la ecuación (491) contiene solo los desplazamientos aplicados

externamente u_1 y las tracciones P_2 , por lo que el sistema puede resolverse para u_2 utilizando un procedimiento de integración de tiempo directo.

Los tipos más comunes de problemas dinámicos se pueden resumir de la siguiente manera:

Vibraciones libres

El análisis de modos y frecuencias naturales se puede deducir del sistema transitorio general (491) al establecer las cargas externas en cero, obteniendo

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \hat{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{u}}_2 = 0 \quad (493)$$

Suponiendo que los desplazamientos son funciones armónicas del tiempo, pueden expandirse en la forma

$$\ddot{\mathbf{u}}_2 = -\omega^2 \mathbf{u}_2 \quad (494)$$

siendo ω la frecuencia circular natural. La ecuación 491 se reduce a

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}_2 = \omega^2 \hat{\mathbf{M}}\mathbf{u}_2 \quad (495)$$

que representa el problema de valor propio algebraico generalizado. Cabe señalar que ni $\hat{\mathbf{H}}$ ni $\hat{\mathbf{M}}$ son simétricas o positivas definidas, por lo que se debe tener cuidado en la elección del algoritmo de solución de valor propio apropiado.

El método empleado por Nardini y Brebbia [8] redujo el problema del valor propio generalizado a uno estándar mediante la inversión de la matriz $\hat{\mathbf{H}}$, obteniendo el sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_2 \quad (496)$$

con

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{H}}^{-1} \hat{\mathbf{M}} \quad (497)$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (498)$$

La matriz A se transforma luego en forma tridiagonal mediante el algoritmo Householder, y los valores propios y los vectores propios de la matriz transformada se calculan mediante el algoritmo $Q - R$ [9]. Para sistemas muy grandes, Nardini y Brebbia [10] recomendaron el uso de una variante del método de iteración del subespacio adaptado por Dong [11] para matrices no simétricas.

Vibraciones Forzadas

En las aplicaciones prácticas, rara vez sucede que se apliquen simultáneamente al sistema tanto tracción externa como movimientos de apoyo. Por lo tanto, los dos casos pueden considerarse por separado, aunque los dos efectos podrían tenerse en cuenta simultáneamente si fuera necesario.

En ausencia de excitaciones de soporte, la ecuación (491) se simplifica en la forma

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{G}}\mathbf{p}_2 \quad (499)$$

donde \mathbf{p}_2 es un vector de tracción externa dependiente del tiempo.

Cuando las excitaciones de soporte se dan como una generación de tiempo, la ecuación (491) se reduce a

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}_1 \quad (500)$$

Esta expresión emplea los desplazamientos forzados \mathbf{u}_1 y las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}_1$ en la parte Γ_1 de la frontera, y es válida para cualquier variación compatible de \mathbf{u}_1 con el tiempo.

La solución de la ecuación (499) o (500) puede obtenerse mediante un procedimiento de integración de tiempo directo. Como se mencionó en la sección 7.5, el esquema de Houbolt [12] ha demostrado que proporciona una buena resolución para las formulaciones de DRM debido a su capacidad de introducir amortiguamiento numérico para las altas frecuencias del problema.

Alternativamente, Nardini y Brebbia [10] desacoplaron la respuesta del sistema en modos independientes y resolvieron el problema transitorio utilizando la superposición modal. Como la matriz A en (495) no es simétrica, uno tiene que trabajar con dos bases, una correspondiente al problema de valor propio original (496) y la otra correspondiente a su problema adjunto, *i.e.*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_2 \quad (501)$$

con A^T siendo la transposición de A y v_2 la base alternativa. El conjunto de valores propios λ es el mismo en ambos casos.

Usando la notación $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{H}}^{-1}\hat{\mathbf{M}}$, $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{b}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{t})$, con $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ representando el lado derecho de la ecuación (499) o (500) ($\mathbf{f}(\mathbf{t})$ es una función conocida del tiempo), es posible reescribir el problema transitorio (499) o (500) en la forma

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{b}(t) \quad (502)$$

En cuanto a un sistema simétrico, x puede representarse en la base original u_2 como

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n X_j \mathbf{u}_{2j} \quad (503)$$

donde $X_j(t)$ son las contribuciones modales, \mathbf{u}_{2j} son las formas modales y n es el número de modos considerados. Se observa que $X_j(t)$ son funciones desconocidas. Sustituyendo lo anterior en la ecuación (502); Se obtiene

$$\mathbf{A} \sum_{j=1}^n \ddot{X}_j \mathbf{u}_{2j} + \sum_{j=1}^n X_j \mathbf{u}_{2j} = \mathbf{b} \quad (504)$$

Multiplicando previamente esta expresión por el vector \mathbf{v}_{2i}^T de la base dual, el sistema de ecuaciones se puede desacoplar, debido a la ortogonalidad de \mathbf{v}_2 y \mathbf{u}_2 con respecto a la matriz \mathbf{A} y la matriz de identidad, en la forma

$$(\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{A} \mathbf{u}_{2i}) \ddot{X}_i + (\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{u}_{2i}) X_i = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{b} \quad (505)$$

o

$$\ddot{X}_i + \omega_i^2 X_i = \frac{\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{b}}{\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{A} \mathbf{u}_{2i}} \quad (506)$$

que representa n sistemas independientes de un grado de libertad que pueden resolverse mediante una técnica de paso de tiempo o utilizando la formulación integral de Duhamel.

La formulación previa para el análisis dinámico se aplicó con éxito a una serie de problemas [7], [8], [10]. La Figura 107 muestra el elemento frontera y los modelos de elementos finitos empleados en el estudio de las propiedades dinámicas de un muro de corte con cuatro aberturas. El modelo BEM consta de 29 elementos cuadráticos con 58 nodos, mientras que el modelo FEM comprende 559 nodos y se utilizó con fines comparativos. Los resultados para el período de vibraciones libres para los primeros ocho modos naturales se dan en la figura 106. A pesar de la geometría complicada y el número relativamente pequeño de elementos de límite utilizados, el acuerdo es excelente.

| Mode | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| BEM | 3.02 | 0.875 | 0.822 | 0.531 | 0.394 | 0.337 | 0.310 | 0.276 |
| FEM | 3.03 | 0.885 | 0.824 | 0.526 | 0.409 | 0.342 | 0.316 | 0.283 |

Figure 106: Períodos de vibración libre para pared cortante

Otro conjunto de resultados para problemas de vibración libre se muestra en la figura 109, para el arco representado en la figura 108. Las dimensiones geométricas y las constantes físicas del arco son $r_0 = 2.5$, $r_1 = 5.0$, $E/\rho = 10^4$ y $\nu = 0.25$. Nuevamente, se puede observar un buen acuerdo entre las frecuencias naturales obtenidas por los modelos BEM y FEM, con un pequeño número de nodos en el modelo BEM.

La figura 110 muestra el historial de desplazamientos horizontal y vertical en los puntos A y B de un voladizo rectangular simple sujeto a un impulso de corte uniforme. Las constantes materiales para el problema se tomaron como $E = 10^5$, $\rho = 1$ y $\nu = 0.25$. El acuerdo con una solución FEM es excelente, aunque solo se utilizaron doce elementos frontera en la discretización BEM.

Finalmente, la figura 111 muestra la variación en el tiempo del desplazamiento horizontal en la cresta de una estructura tipo presa sujeta a una excitación sinusoidal en su base. La frecuencia de forzamiento se eligió para ser 16 Hz, que es aproximadamente un promedio entre el primero y

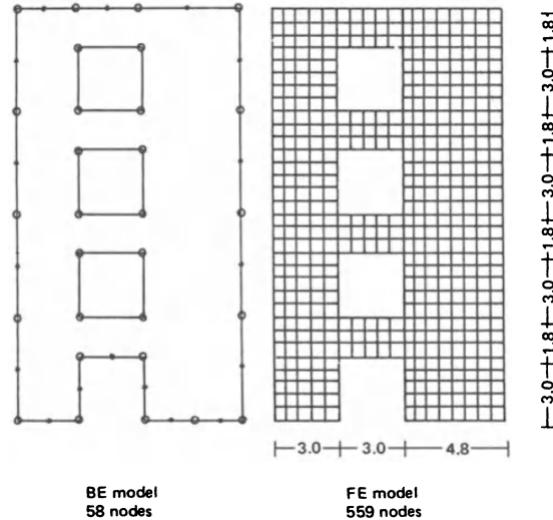


Figure 107: Modelos BEM y FEM para muro cortante

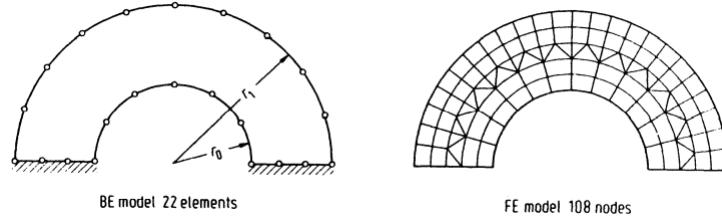


Figure 108: Modelos BEM y FEM para Arch

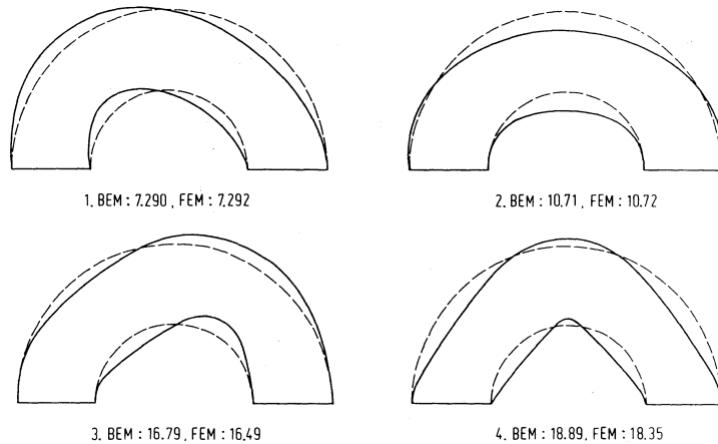


Figure 109: Resultados para modos de vibración libre y frecuencias naturales (en Hz)

segundas frecuencias naturales de la estructura, respectivamente 11.04 y 20.72 Hz. Nuevamente, se obtiene una precisión excelente con una discreta discreción BEM.

8.3 Doblado de placas

El método de doble reciprocidad también se ha aplicado para estudiar la desviación de placas elásticas delgadas que descansan sobre cimientos elásticos soportados por resortes tipo Winkler [13], [14]. La ecuación diferencial que rige para una placa de espesor constante h que descansa sobre una base con rigidez k y está sujeta a una carga lateral arbitraria $q(x, y)$ es de la forma

$$D\nabla^4 w + kw = q \quad (507)$$

donde w es la deflexión, ∇^4 es el operador bi-armónico y D la rigidez de flexión

de la placa, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$. Se supone que el plano medio de la placa ocupa un dominio bidimensional Ω delimitado por una curva Γ .

Aunque existe una solución fundamental para la contraparte homogénea de la ecuación (507) [15], su forma es bastante complicada; por lo tanto, algunos autores prefieren formular el problema empleando la solución fundamental de la ecuación bi-armónica, *i.e.* la solución de

$$D\nabla^4 w^* = \Delta^i \quad (508)$$

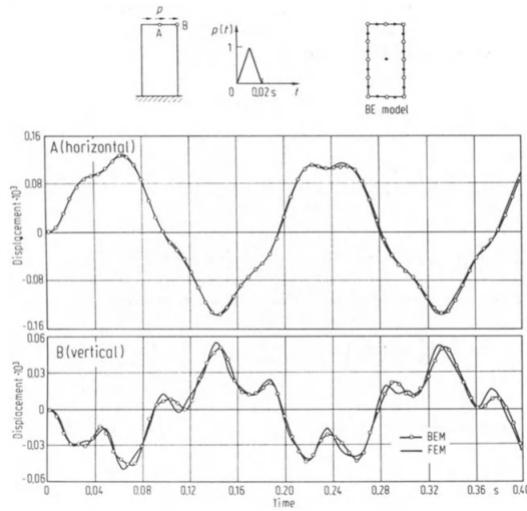


Figure 110: Historial de desplazamiento del tiempo en dos puntos de voladizo rectangular

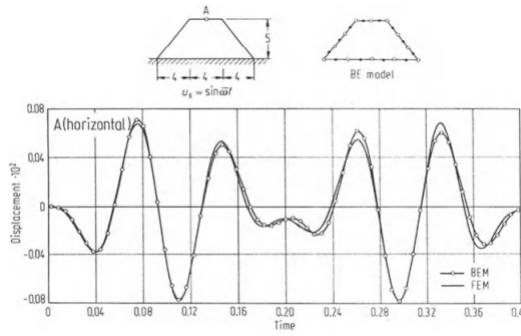


Figure 111: Historia del desplazamiento temporal en Dam Crest

con Δ^i que representa la función delta de Dirac en un punto i , y trata el término de reacción de base kw , así como la carga lateral q , mediante el uso de la integración celular o una aproximación de doble reciprocidad. La solución fundamental w^* de la ecuación (508) es

$$w^* = -\frac{r^2}{8\pi D} \ln r \quad (509)$$

Para una curva de límite suave Γ , el teorema de reciprocidad para operadores bi-armónicos se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} & D \int_{\Omega} (w \nabla^4 w^* - w^* \nabla^4 w) d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} \left[w^* K(w) - \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) + \frac{\partial w}{\partial n} M(w^*) - w K(w^*) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (510)$$

donde los operadores diferenciales K y M se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K &= D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[n_x n_y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - (n_x^2 - n_y^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 \\ M &= -D \left[\nu \nabla^2 + (1-\nu) \left(n_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2n_x n_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (511)$$

En lo anterior, n_x y n_y son los cosenos de dirección de la normal exterior n , ∂/∂_s y ∂/∂_n denotan derivadas direccionales a lo largo de la tangente y normal a la frontera Γ , respectivamente.

Sustituyendo $D\nabla^4 w$ como se da por (507) y $D\nabla^4 w^*$ como se da por (508) en la ecuación (510), se obtiene la siguiente ecuación integral

$$\begin{aligned} c^i w^i &= \int_{\Gamma} \left[w^* K(w) - \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) + \frac{\partial w}{\partial n} M(w^*) - w K(w^*) \right] d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} q w^* d\Omega - \int_{\Omega} k w w^* d\Omega \end{aligned} \quad (512)$$

donde $c^i = 1$ para puntos internos y $c^i = 1/2$ para puntos frontera.

Diferenciando la ecuación (512) con respecto al exterior normal n_0 en los puntos de frontera de fuente i , y reemplazando w en los puntos de frontera de campo por $w - w^i$, se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial w^i}{\partial n_0} &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n_0} K(w) - \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n} M(w) + \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial M(w^*)}{\partial n_0} - (w - w^i) \frac{\partial K(w^*)}{\partial n_0} \right] d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} q \frac{\partial w^*}{\partial n_0} d\Omega - \int_{\Omega} k w \frac{\partial w^*}{\partial n_0} d\Omega \end{aligned} \quad (513)$$

Las ecuaciones (512) y (513) constituyen un conjunto de ecuaciones integrales

en términos de los cuatro valores frontera básicos, *i.e.* deflexión w , pendiente normal $\partial w / \partial n$, momento de flexión normal $M(w)$ y fuerza de corte equivalente $K(w)$. Las integrales de dominio incluyen los efectos de las cargas laterales y la reacción de los cimientos. Para distribuciones de carga lateral relativamente simples, es posible transformar su integral de dominio en integrales de frontera equivalentes sin recurrir a ninguna aproximación [16]. En lo que sigue, se muestra que una aproximación DRM se puede utilizar para encontrar integrales de fronteras equivalentes también para el término de reacción de la base, dando lugar a una formulación del problema solo de fronteras.

Expandir el valor de la desviación w en un punto general en la forma DRM habitual, *i.e.*

$$w \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha^j \quad (514)$$

donde f^j representa un conjunto de funciones aproximadas y α^j es un conjunto de coeficientes desconocidos, y suponiendo que para cada f^j se pueda encontrar una función correspondiente \hat{w}^j de manera que

$$\nabla^4 \hat{w}^j = f^j \quad (515)$$

entonces el segundo dominio integral en la ecuación (512) se puede escribir como

$$\int_{\Omega} k w w^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} k \alpha^j \int_{\Omega} \nabla^4 \hat{w}^j w^* d\Omega \quad (516)$$

Con la ayuda del teorema de reciprocidad (510), la integral de dominio anterior se puede transformar en la siguiente integral de frontera:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k w w^* d\Omega &= \sum_{j=1}^{N+L} k \alpha^j [c^i \cdot \hat{w}^{ij} + \\ &\int_{\Gamma} \left(w^* \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 \hat{w}^j - \frac{\partial w^*}{\partial n} \nabla^2 \hat{w}^j + \frac{\partial \hat{w}^j}{\partial n} \nabla^2 w^* - (\hat{w}^j - \hat{w}^{ij}) \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma] \end{aligned} \quad (517)$$

Del mismo modo, el segundo dominio integral en la ecuación (513) se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k w \frac{\partial w^*}{\partial n_0} d\Omega &= \sum_{j=1}^{N+L} k \alpha^j \left[c^i \frac{\partial \hat{w}^{ij}}{\partial n_0} + \right. \\ &\left. \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 \hat{w}^j - \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n} \nabla^2 \hat{w}^j + \frac{\partial \hat{w}^j}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n_0} \nabla^2 w^* - (\hat{w}^j - \hat{w}^{ij}) \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (518)$$

Cabe señalar que los términos entre paréntesis en las expresiones (517) y (518) involucran solo valores conocidos.

La función aproximada f^j empleada por Kamiya y Sawaki [13] es de la forma

$$f = 1 - r - r^2 \quad (519)$$

con el conjunto \hat{w}^j correspondiente dado por

$$\hat{w} = \frac{1}{64}r^4 - \frac{1}{225}r^5 - \frac{1}{576}r^6 \quad (520)$$

mientras que Silva y Venturini [14] usaron la forma más común $f = 1 + r$.

Para la solución numérica del sistema de ecuaciones obtenidas a través de la satisfacción de las ecuaciones (512) y (513) en todos los nodos frontera, la contribución de los términos de reacción de la base puede escribirse como un producto de matrices conocidas \mathbf{S} y $\bar{\mathbf{S}}$ por un vector α de coeficientes desconocidos Sin embargo, aplicando la expresión (514) a los nodos frontera e invirtiendo, se obtiene

$$\alpha = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{W} \quad (521)$$

en el que \mathbf{W} es el vector de desviaciones nodales. Los términos $\mathbf{SF}^{-1}\mathbf{W}$ y $\bar{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{W}$ se pueden agregar a los que resultan de las integrales de frontera en (512) y (513), respectivamente, y el sistema final de ecuaciones resuelto por un método directo después de la incorporación de las condiciones de frontera.

Kamiya y Sawaki [13] emplearon esta formulación para analizar una placa circular fija de radio a que descansa sobre una base elástica, sometida a una carga concentrada P en su centro. La figura 112 muestra los resultados para la desviación central para varias magnitudes del parámetro adimensional $\lambda (= ka^4/D)$, obtenida con diferentes números de elementos de frontera constante y 25 puntos internos. Se puede ver que la precisión de la solución BEM mejora a medida que se refina la discretización. La figura 113 también muestra resultados para la desviación central, para una discretización fija con 48 elementos de frontera constantes, variando el número de puntos internos de acuerdo con la distribución representada en la figura 114. En este caso, la solución parece converger a valores que son ligeramente más bajos que los exactos (alrededor del 1.5% de error).

| λ | Exact Solution | Number of Boundary Elements | | |
|-----------|----------------|-----------------------------|--------|--------|
| | | 48 | 36 | 24 |
| 0 | 0.1989 | 0.1982 | 0.1977 | 0.1961 |
| 1 | 0.1973 | 0.1963 | 0.1957 | 0.1940 |
| 2 | 0.1958 | 0.1945 | 0.1938 | 0.1920 |
| 3 | 0.1942 | 0.1927 | 0.1919 | 0.1900 |
| 4 | 0.1927 | 0.1909 | 0.1901 | 0.1881 |
| 5 | 0.1912 | 0.1891 | 0.1883 | 0.1862 |
| 6 | 0.1897 | 0.1874 | 0.1865 | 0.1843 |
| 7 | 0.1882 | 0.1858 | 0.1848 | 0.1825 |
| 8 | 0.1868 | 0.1841 | 0.1831 | 0.1808 |
| 9 | 0.1854 | 0.1825 | 0.1814 | 0.1780 |
| 10 | 0.1839 | 0.1810 | 0.1798 | 0.1773 |

Figure 112: Desviación central $Dw_c/Pa^2(x10)$

| λ | Exact Solution | Number of Internal Points | | | |
|-----------|----------------|---------------------------|--------|--------|--------|
| | | 49 | 25 | 13 | 7 |
| 0 | 0.1989 | 0.1982 | 0.1982 | 0.1982 | 0.1982 |
| 1 | 0.1973 | 0.1963 | 0.1963 | 0.1964 | 0.1966 |
| 2 | 0.1958 | 0.1944 | 0.1945 | 0.1946 | 0.1950 |
| 3 | 0.1942 | 0.1925 | 0.1927 | 0.1929 | 0.1934 |
| 4 | 0.1927 | 0.1906 | 0.1909 | 0.1912 | 0.1918 |
| 5 | 0.1912 | 0.1889 | 0.1891 | 0.1895 | 0.1903 |
| 6 | 0.1897 | 0.1871 | 0.1874 | 0.1878 | 0.1888 |
| 7 | 0.1882 | 0.1854 | 0.1858 | 0.1862 | 0.1874 |
| 8 | 0.1868 | 0.1837 | 0.1841 | 0.1846 | 0.1859 |
| 9 | 0.1854 | | 0.1825 | 0.1831 | 0.1845 |
| 10 | 0.1839 | | 0.1810 | 0.1816 | 0.1831 |

Figure 113: Desviación central $Dw_c/Pa^2(x10)$

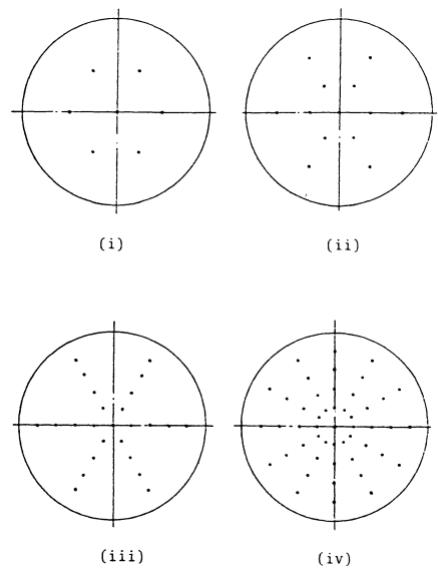


Figure 114: Distribución de puntos internos para placa circular: (i)49, (ii)25, (iii)13, (iv)7

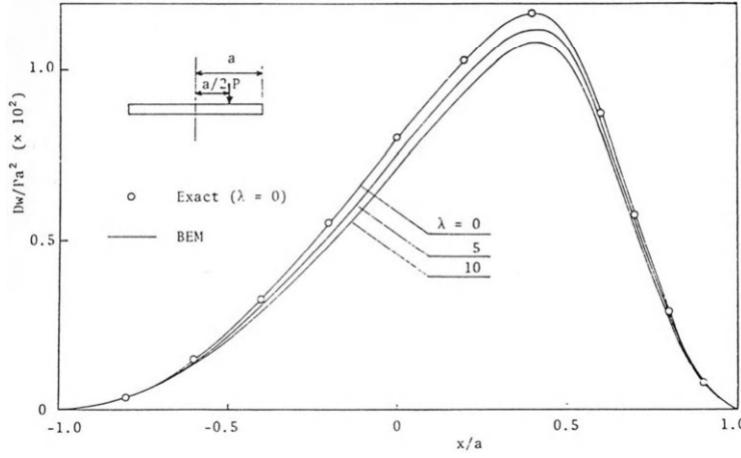


Figure 115: Variación de deflexión para placa circular con carga excéntrica

Otro problema estudiado en (13) fue el de una placa circular sujetada a una carga concentrada excéntrica. La variación de la desviación a lo largo del diámetro de la placa, incluido el punto de carga, se muestra en la figura 115 para tres valores diferentes del parámetro λ . La discretización DRM empleó 48 elementos frontera constantes y 25 puntos internos.

La formulación previa para el análisis de doblado de placas fue extendida por Sawaki *et al.* [17] para tratar problemas geométricamente no lineales. La ecuación diferencial que rige en este caso es la ecuación de Berger para la flexión no lineal [18]

$$D(\nabla^4 w - k^2 \nabla^2 w) = q \quad (522)$$

con la identidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{k^2 h^2}{12} = \text{constant} \quad (523)$$

donde u, v, w corresponden a los desplazamientos en las direcciones de coordenadas cartesianas. El parámetro k^2 , a veces llamado parámetro de Berger, puede estimarse utilizando el hecho reconocido de que la ecuación de Berger puede producir una aproximación bastante buena del problema solo cuando los desplazamientos en el plano están restringidos a lo largo de los bordes de la placa. Por lo tanto, uno puede escribir desde (523)

$$k^2 = \frac{6}{Ah^2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \quad (524)$$

en el que A es el área de la placa.

En cuanto al caso de la flexión lineal, hay una solución fundamental disponible para la ecuación de Berger, que permite una formulación directa del elemento frontera del problema en términos de integrales frontera únicamente [19]. Sin embargo, debido a la complejidad de esta solución fundamental, se ha propuesto una formulación alternativa que utiliza la solución fundamental de la ecuación bi-armónica y trata el término laplaciano por el DRM [17]. Sigue la misma línea que para el problema lineal anterior, y produce un conjunto de ecuaciones integrales similares a (512) y (513), con la última integral de dominio reemplazada por

$$+ \int_{\Omega} Dk^2 \nabla^2 w w^* d\Omega \quad (525)$$

y

$$+ \int_{\Omega} Dk^2 \nabla^2 w \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Omega \quad (526)$$

respectivamente.

Para transformar lo anterior en integrales de fronteras equivalentes, la expresión (525) se integra inicialmente por partes dos veces para producir

$$\begin{aligned} & Dk^2 \int_{\Omega} \nabla^2 w w^* d\Omega = \\ & Dk^2 \left[\int_{\Omega} w \nabla^2 w^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left(w^* \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (527)$$

A continuación, la desviación w en un punto general se expresa en la forma DRM habitual (514). Al sustituir esta expresión en el dominio integral de (527), haciendo uso de soluciones particulares \hat{w}^j de la ecuación

$$\nabla^2 \hat{w}^j = f^j \quad (528)$$

y empleando el teorema de reciprocidad para el operador laplaciano, la integral de dominio (525) se convierte en

$$\begin{aligned} & Dk^2 \int_{\Omega} \nabla^2 w w^* d\Omega = Dk^2 \left\{ \sum_{j=1}^{N+L} \alpha^j \left[-c^i \hat{w}^{ij} \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\Gamma} \left(\nabla^2 w^* \frac{\partial \hat{w}^j}{\partial n} - \hat{w}^j \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma \right] \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \left(w^* \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (529)$$

Mediante un procedimiento similar, la integral (526) se convierte en

$$Dk^2 \int_{\Omega} \nabla^2 w \frac{\partial w^*}{\partial n_0} d\Omega = Dk^2 \left\{ \sum_{j=1}^{N+L} \alpha^j \left[-c^i \frac{\partial \hat{w}^{ij}}{\partial n_0} \right. \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \nabla^2 w^*}{\partial n_0} \frac{\partial \hat{w}^j}{\partial n} - \hat{w}^j \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma \right] \\ \left. + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n_0} \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_0 \partial n} \right) d\Gamma \right\} \quad (530)$$

La función aproximada que f^j adoptó en este caso fue

$$f = 1 - r - r^2 \quad (531)$$

con la solución particular correspondiente \hat{w}^j

$$\hat{w} = \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{9}r^3 - \frac{1}{16}r^4 \quad (532)$$

La solución numérica del problema no lineal se realiza de forma iterativa. A partir de la solución lineal ($k^2 = 0$), se calcula una variación inicial de w ; luego, se estima el valor del parámetro de Berger k^2 y se realiza una nueva iteración, que ahora incluye el término no lineal. Este procedimiento se repite hasta que se alcanza un criterio de convergencia especificado.

Sawaki *et al.* [17] empleó esta formulación DRM en el análisis de placas elásticas delgadas sometidas a una carga lateral uniforme. Sus resultados numéricos se obtuvieron utilizando 36 elementos de límite constante y 61 puntos internos, y se reproducen en las figuras 116 y 117. Estas figuras muestran la deflexión máxima de una placa sujeta y una placa de soporte simple, respectivamente. Se puede ver que las soluciones DRM concuerdan bien con las soluciones RKG (Runge-Kutta-Gill) correspondientes, que se sabe que son efectivas para problemas de eje asimétrico.

8.4 Elasticidad tridimensional

8.4.1 Formulación Computacional

Las ecuaciones dadas en la sección 8.2 para el análisis bidimensional de problemas de elasticidad también son válidas en tres dimensiones, excepto que los índices de subíndice ahora toman los valores 1,2,3.

La solución tridimensional fundamental para los problemas isotrópicos es [5]

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (533)$$

en el caso de desplazamientos, con el campo de tracción superficial correspondiente dado por

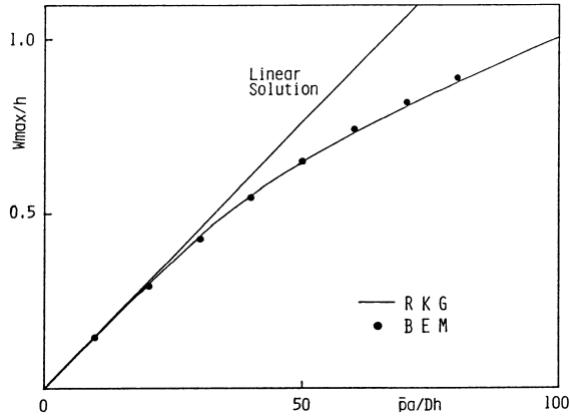


Figure 116: Máxima deflexión de la placa circular sujetada

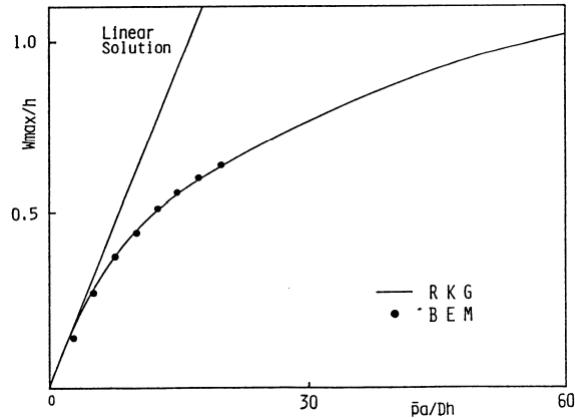


Figure 117: Máxima deflexión de la placa circular con soporte simple

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (534)$$

La solución particular DRM para desplazamientos en tres dimensiones viene dada por

$$\hat{u}_{mk} = \frac{1-2\nu}{(6-4\nu)G} r_{,m} r_{,k} r^2 + \frac{1}{48(1-\nu)G} \left[\left(\frac{11}{3} - 4\nu\right) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] r^3 \quad (535)$$

de donde se puede derivar la solución particular para las tracciones de superficie, como

$$\begin{aligned}\hat{p}_{mk} = & \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \left[\frac{1+2\nu}{1-2\nu} r_{,m} n_k + \frac{1}{2} r_{,k} n_m + \frac{1}{2} \delta_{mk} \frac{\partial r}{\partial n} \right] r + \\ & \frac{1}{24(1-\nu)} \left[(5-6\nu) r_{,k} n_m - (1-6\nu) r_{,m} n_k + [(5-6\nu) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} \right] r^2\end{aligned}\quad (536)$$

Ecuación (468), repetida a continuación por conveniencia,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (537)$$

también es válido para el análisis tridimensional siempre que las matrices \mathbf{H} , \mathbf{G} , $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{P}}$ se evalúen utilizando las cuatro expresiones anteriores (533) a (536).

Es conveniente decir algunas palabras sobre los índices para permitir un ensamblaje correcto de las ecuaciones matriciales. Cada término de las matrices de la \mathbf{H} y \mathbf{G} tiene cuatro índices: dos globales que se refieren a los nodos fuente y de campo, y dos locales. Por lo tanto, cada par de índices globales se refiere a una submatriz de 3×3 , cuyos índices son los utilizados en las ecuaciones (533) y (534), que varían de 1 a 3 y se refieren a los grados de libertad en cada punto. Consideraciones similares se aplican a las matrices $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\mathbf{P}}$. Los dos índices globales en este caso se refieren al nodo de campo y al punto de colocación DRM (figura 25).

Es importante tener en cuenta que las matrices DRM tienen sus índices transpuestos en relación con las matrices BEM, como se muestra en la figura 25. Esto se refiere tanto a los índices globales como a los de los grados locales de libertad en los puntos.

Las submatrices 3×3 de \mathbf{F} en la ecuación (537) contienen términos distintos de cero solo en la diagonal inicial. El vector $\alpha = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}$ es de tamaño $3 \times (N + L)$ donde N es el número de nodos frontera y L el número de nodos internos. El vector α se calcula utilizando la eliminación de Gauss, ya que se conoce \mathbf{b} y no son necesarias inversiones de matriz.

Otro punto importante a observar que se refiere a los análisis de elasticidad BEM en general, particularmente en tres dimensiones, y no específicamente a DRM, es que como las tracciones superficiales son discontinuas a lo largo de los bordes y en las esquinas donde se unen tres bordes, es necesario almacenarlos referidos elementos y no a nodos. Por lo tanto, cuando se calcula una tracción de superficie en un nodo dado en una dirección dada, debe asociarse solo con la cara que tiene una restricción en esa dirección [31].

Dadas estas consideraciones, se pueden obtener desplazamientos desconocidos y tracciones de superficie para un problema tridimensional con las fuerzas del cuerpo utilizando la ecuación (537).

Los términos libres c^i (véase la ecuación 466), ahora 3 x 3 submatrices, se han incorporado en la diagonal principal de \mathbf{H} . Elemento m, n de una c^i dada; submatriz es la suma del mismo término en cada una de las otras submatrices de esa fila con un cambio de signo. Esto puede deducirse de los movimientos rígidos del cuerpo de una manera similar a la descrita en el capítulo 2 para problemas potenciales.

Los desplazamientos en los nodos internos se obtienen escribiendo la ecuación (464) en estos puntos, señalando que los términos libres c_{lk} ahora generarán submatrices unitarias. La ecuación obtenida es la siguiente:

$$u_l^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left(c_{lk}^i \hat{u}_{mk}^{ij} + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \hat{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* \hat{p}_{mk}^j d\Gamma \right) \alpha_m^j \quad (538)$$

Para obtener las tensiones internas, la ecuación (538) se diferencia para producir el tensor de tensión, y el resultado se sustituye en la ley de Hooke (ecuación 473),

$$\sigma_{nl}^i = \int_{\Gamma} D_{nlk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{nlk}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left(\hat{D}_{nlm}^{ij} + \int_{\Gamma} S_{nlk}^* \hat{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{nlk}^* \hat{p}_{mk}^j d\Gamma \right) \alpha_m^j \quad (539)$$

en el que los tensores D^* y S^* están dados por

$$D_{ijk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (540)$$

$$S_{ijk}^* = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \{ 3[(1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} + 3\nu(r_{,j}r_{,k}n_i + r_{,i}r_{,k}n_j) + (1-2\nu)(3r_{,i}r_{,j}n_k + n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k\delta_{ij} \} \quad (541)$$

Los signos en las expresiones (540) y (541) se han cambiado debido al hecho de que en puntos internos las derivadas de r se toman con respecto al punto fuente [5,31]. El tensor $\hat{\mathbf{D}}$, calculado utilizando índices DRM, no presenta esta característica y está dado por

$$\begin{aligned} \hat{D}_{ijk} &= \frac{(1-2\nu)r}{3-2\nu} \left[\frac{1-2\nu}{1+2\nu} r_{,k}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ik}) \right] + \\ &\frac{r^2}{24(1-\nu)} [(5-6\nu)(r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ik}) - (1-6\nu)r_{,k}\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \end{aligned} \quad (542)$$

Se observa que el tensor $\hat{\mathbf{D}}$ se deriva del término libre en la ecuación (538) y, por lo tanto, no está integrado.

En las siguientes secciones, se presentarán los resultados que utilizan la formulación DRM anterior para problemas relacionados con cargas gravitacionales, centrífugas y térmicas. Con las modificaciones apropiadas, la formulación también puede extenderse a problemas anisotrópicos, análisis dinámico y otros casos.

8.4.2 Carga gravitacional

En el caso de un componente estructural cargado solo por su propio peso, la fuerza del cuerpo en la ecuación (420) viene dada por

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0 \\ b_3 &= -\gamma g \end{aligned} \quad (543)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y γ es el peso específico del material. En el caso de cuerpos homogéneos, esta fuerza corporal será una acción constante en la dirección z negativa.

Como ejemplo, se consideró el caso de una barra prismática homogénea. La barra tiene sección transversal de la unidad y mide 2 metros de largo. La discretización en 28 elementos de superficie cuadráticos de ocho nodos se muestra en la figura 119.

La superficie $z = 0$ estaba restringida a lo largo de su dirección normal. Además de los 86 nodos frontera que se muestran en la figura, los resultados se calcularon en siete nodos internos espaciados uniformemente a lo largo del eje z negativo. Los parámetros físicos para el problema son $E = 10000$, $\nu = 0.3$, $\gamma g = 1$.

Se utilizó un esquema de integración numérica gaussiana con 10×10 puntos de integración para la evaluación de las integrales regulares, junto con la transformación de Telles (Apéndice 2) para las integrales singulares.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 118 junto con los valores exactos. Los errores más grandes se obtienen, como se esperaba, cerca de las extremidades de la barra.

| z | Displacements | | Normal Stress σ_{zz} | |
|-------|---------------|----------|-----------------------------|-------|
| | DRM | Exact | DRM | Exact |
| -0.25 | .437 E-4 | .469 E-4 | 1.78 | 1.78 |
| -0.50 | .886 E-4 | .875 E-4 | 1.51 | 1.50 |
| -0.75 | .123 E-3 | .122 E-3 | 1.25 | 1.25 |
| -1.00 | .151 E-3 | .150 E-3 | 1.00 | 1.00 |
| -1.25 | .173 E-3 | .172 E-3 | 0.75 | 0.75 |
| -1.50 | .188 E-3 | .183 E-3 | 0.50 | 0.50 |
| -1.75 | .198 E-3 | .197 E-3 | 0.23 | 0.25 |

Figure 118: Desplazamientos y tensiones por carga gravitacional

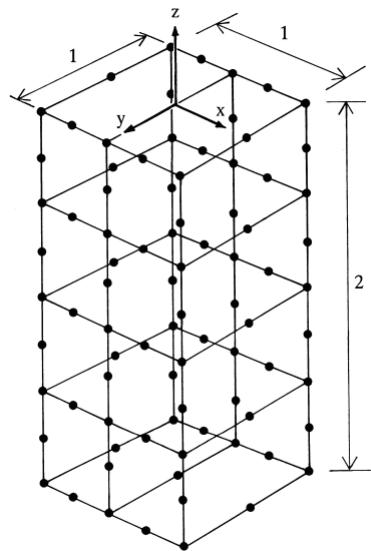


Figure 119: Barra prismática homogénea

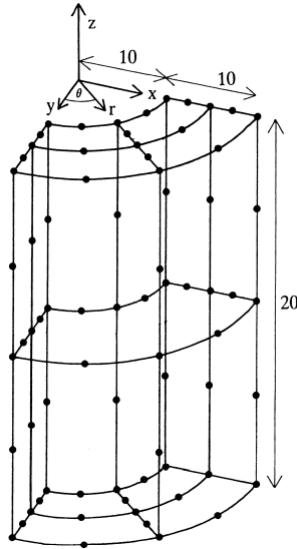


Figure 120: Un cuarto de cilindro grueso

8.4.3 Carga centrífuga

En este caso, se consideró un cilindro grueso con su eje de rotación coincidiendo con z , como se muestra en la figura 120.

Las caras $x = 0$ y $y = 0$ estaban restringidas en la dirección de sus normales. Se consideró que el cilindro giraba sobre su eje con una velocidad angular $\omega = 10$ rad/sec. Las fuerzas del cuerpo están así dadas por

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma\omega^2 x \\ b_2 &= \gamma\omega^2 y \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{544}$$

donde (x, y) son las coordenadas de un punto dado, como se muestra en la figura 120, y se asumió $\gamma = 1$.

El cilindro se discretizó en 24 elementos de superficie cuadráticos de ocho nodos, con un total de 74 nodos frontera; Se consideraron 3 nodos internos espaciados uniformemente a lo largo del radio del cilindro en $z = -10$, $\theta = 45^\circ$. Los valores de las constantes físicas se tomaron como $E = 210000$ y $\nu = 0.3$.

Los resultados para desplazamientos y tensiones en los tres nodos internos se muestran en la figura 121, en comparación con los valores exactos.

| r | u | | $\sigma_t \times 10^3$ | | $\sigma_r \times 10^3$ | |
|------|-------|------|------------------------|------|------------------------|-----|
| | Exact | DRM | Exact | DRM | Exact | DRM |
| 12.5 | 1.57 | 1.59 | 27.4 | 28.0 | 3.6 | 3.7 |
| 15.0 | 1.52 | 1.54 | 22.6 | 22.9 | 4.0 | 4.0 |
| 17.5 | 1.49 | 1.51 | 18.7 | 18.7 | 2.6 | 2.7 |

Figure 121: Desplazamientos y tensiones para la carga centrífuga

8.4.4 Carga térmica

El efecto de una variación de temperatura en un material elástico es equivalente a la introducción de una deformación inicial [31]

$$\epsilon_{jk}^0 = \alpha\theta\delta_{jk} \quad (545)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica y θ es el cambio de temperatura. El estrés inicial equivalente se puede obtener de la Ley de Hooke

$$\sigma_{jk}^0 = - \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ii}^0 \delta_{jk} + 2G\epsilon_{jk}^0 \right) \quad (546)$$

tal que, en tres dimensiones,

$$\sigma_{jk}^0 = -2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta\delta_{jk} = \chi\theta\delta_{jk} \quad (547)$$

dónde

$$\chi = -2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \quad (548)$$

Si no existen otras fuerzas corporales, la expresión integral de frontera que incluye las tensiones iniciales es [31]

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk}^0 \epsilon_{ljk}^* d\Omega \quad (549)$$

donde ϵ_{ljk}^* se puede encontrar usando el procedimiento dado en la sección 8.2.2.

Sustituyendo la tensión inicial en el dominio integral, se pueden encontrar varias expresiones diferentes pero equivalentes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk}^0 \epsilon_{ljk}^* d\Omega &= \int_{\Omega} \chi\theta\delta_{jk}\epsilon_{ljk}^* d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \chi\theta u_{lk,k}^* d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \chi\theta u_{,k}^* d\Omega - \int_{\Gamma} \chi\theta u_{lk}^* n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (550)$$

cualquiera de los cuales puede usarse en análisis BEM.

Para el DRM, la tercera expresión anterior es más conveniente ya que la integral del dominio tiene una forma similar a la de la ecuación (445), que se utilizó en la derivación de la ecuación (537).

Si se utilizan las primeras o segundas expresiones anteriores, todavía es posible una formulación DRM; sin embargo, las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} en el lado derecho de (537) deberán ser reemplazadas por matrices calculadas a partir de $u_{lk,k}^*$. Esto también conducirá a modificaciones en las expresiones (538) y (539).

Como se puede ver en la ecuación anterior, la formulación conduce a una integral de frontera adicional. Sin embargo, este término puede combinarse con el de la ecuación (549) en la forma

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* (p_k + \chi \theta n_k) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \int_{\Omega} \chi \theta_{,k} u_{lk}^* d\Omega \quad (551)$$

La formulación anterior se aplicó a la barra que se muestra en la figura 119, que se sometió a un campo de temperatura tal que la cara $x = -0.5$ se mantuvo en $\theta = 50^\circ$ y la cara $x = 0.5$ se mantuvo en $\theta = -50^\circ$. La temperatura en cualquier punto viene dada por

$$\theta = -100x \quad (552)$$

Si la barra se fija en sus extremos, las tensiones normales están dadas por [32]

$$\sigma_{zz} = -100E\alpha x \quad (553)$$

Para el caso considerado $E = 10000, \alpha = 0.00001, \nu = 0.3$ produciendo $X = 0.25$.

Los resultados se dan en la figura 122 para los nodos internos ubicados en un eje paralelo a x que pasa por el centro de la viga. Los resultados obtenidos para puntos internos ubicados cerca de la frontera mostraron cierta pérdida de precisión como se esperaba.

| x | σ_{zz} | Exact |
|-----|---------------|-------|
| 0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | -1.09 | -1.0 |
| 0.2 | -2.18 | -2.0 |
| 0.3 | -3.30 | -3.0 |

Figure 122: Tensiones por carga térmica

8.5 Difusión-convección transitoria

La solución de los problemas de convección-difusión es una tarea difícil para todos los métodos numéricos debido a la naturaleza de la ecuación de gobierno, que incluye derivadas parciales de primer orden y de segundo orden en el espacio. Según el valor del número de Peclet, la ecuación se vuelve parabólica (para procesos dominados por difusión) o hiperbólica (para procesos dominados por convección). Los algoritmos tradicionales de diferencias finitas y elementos finitos son generalmente precisos para resolver el primero, pero no el segundo, en cuyo caso se introducen las oscilaciones y el suavizado del frente de onda. Esto puede interpretarse como una "difusión artificial" intrínseca a estos métodos [20], [21].

Las aplicaciones del método del elemento frontera para la convección-difusión en estado estacionario utilizando la solución fundamental de la ecuación completa han demostrado que el BEM parece estar relativamente libre de estos problemas [22-24]. Este también fue el caso de algunas aplicaciones transitorias que utilizan formulaciones con soluciones fundamentales dependientes del tiempo [25-26]. Sin embargo, la principal restricción de estas formulaciones es el hecho de que las soluciones fundamentales solo están disponibles para ecuaciones con coeficientes constantes o coeficientes con variaciones muy simples en el espacio [27].

Se han propuesto formulaciones alternativas de BEM para la convección-difusión transitoria, utilizando la solución fundamental de la ecuación de difusión e iterando sobre los términos convectivos [28] o utilizando la solución fundamental a la ecuación de Laplace y un tratamiento de reciprocidad dual de todos los términos restantes (sección 7.6) En esta sección, Se formula un enfoque diferente de reciprocidad dual utilizando la solución fundamental de la ecuación de estado estacionario correspondiente. La integral de dominio resultante se transforma en integrales de frontera equivalentes mediante la introducción de soluciones particulares que satisfacen una ecuación de convección-difusión de estado estacionario no homogénea asociada. Aunque aquí solo se analizan problemas con velocidad constante, la formulación se puede ampliar para tratar con campos de velocidad variable utilizando un enfoque de reciprocidad dual similar (ver sección 7.6 y [29]).

La ecuación de convección-difusión transitoria bidimensional que incluye la reacción de primer orden se puede escribir en la forma

$$D\nabla^2\phi - v_x \frac{\partial\phi}{\partial x} - v_y \frac{\partial\phi}{\partial y} - k\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (554)$$

donde v_x y v_y son los componentes del vector de velocidad \mathbf{v} , D es el coeficiente de difusividad (suponiendo que el medio sea homogéneo e isotrópico) y k representa el coeficiente de reacción. La variable ϕ puede interpretarse como temper-

atura para problemas de transferencia de calor, concentración para problemas de dispersión, etc. La descripción matemática del problema se complementa con las condiciones de frontera de los tipos Dirichlet, Neumann o Robin (mixtos) y las condiciones iniciales en el momento t_0 .

La ecuación diferencial anterior se puede transformar en una ecuación integral equivalente aplicando una técnica residual ponderada. Comenzando con el estado residual ponderado

$$\int_{\Omega} \left(D \nabla^2 \phi - v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - k \phi \right) \phi^* d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* d\Omega \quad (555)$$

en el que ϕ^* es la solución fundamental de la ecuación de estado estacionario correspondiente, e integrando por partes dos veces la derivada laplaciana y una vez las derivadas espaciales de primer orden, se obtiene la siguiente ecuación

$$\phi^i - D \int_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + D \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi \phi^* v_n d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* d\Omega \quad (556)$$

donde $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} es la unidad del vector normal externo y el punto representa el producto escalar.

La función ϕ^* anterior es la solución de

$$D \nabla^2 \phi^* + v_x \frac{\partial \phi^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi^*}{\partial y} - k \phi^* = -\Delta^i \quad (557)$$

en el que Δ^i representa la función delta de Dirac en un punto fuente i . Se puede observar que el signo de los términos de la primera derivada se invierte en (554) y (557), ya que este operador no es autoadjunto. Para problemas bidimensionales ϕ^* tiene la forma

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi D} e^{-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{2D}} K_0(\mu r) \quad (558)$$

dónde

$$\mu = \left[\left(\frac{|\mathbf{v}|}{2D} \right)^2 + \frac{k}{D} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (559)$$

y r es el módulo de \mathbf{r} , el vector de distancia entre la fuente y los puntos de campo. La derivada de la solución fundamental con respecto a la dirección normal externa está dada por

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi D} e^{-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{2D}} \left[-\mu K_1(\mu r) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{v_n}{2D} K_0(\mu r) \right] \quad (560)$$

En lo anterior, K_0 y K_1 son funciones de Bessel de segundo tipo, de orden cero y uno, respectivamente.

La ecuación (556) es válida para los puntos de origen i en el dominio Ω . Para obtener una ecuación integral para los puntos de frontera, el punto de origen se lleva a la frontera y se realiza un análisis de frontera debido al salto de $\partial\phi^*/\partial n$. El resultado es la ecuación.

$$c^i \phi^i - D \int_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + D \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi \phi^* v_n d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^* d\Omega \quad (561)$$

en el que c^i es una función del ángulo interno que la frontera Γ establece en el punto i [5]. La expresión para c^i en el presente caso es la misma que para problemas potenciales gobernados por la ecuación de Laplace, ya que ambas soluciones fundamentales presentan el mismo tipo de singularidad.

Para obtener una integral de límite que sea equivalente a la integral de dominio en las ecuaciones (556) y (561), se introduce una aproximación de reciprocidad dual. La idea básica es expandir el $\partial\phi/\partial t$ derivado del tiempo en la forma,

$$\dot{\phi} = \sum_{j=1}^{N+L} f_j(x, y) \alpha_j(t) \quad (562)$$

donde el punto denota derivada temporal. La serie anterior implica un conjunto de funciones conocidas f_j que dependen solo de la geometría, y un conjunto de coeficientes desconocidos α_j que dependen solo del tiempo. Con esta aproximación, la integral del dominio se convierte en

$$\int_{\Omega} \dot{\phi} \phi^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} f_j \phi^* d\Omega \quad (563)$$

El siguiente paso es considerar que, para cada función f_j , existe una función relacionada $\hat{\phi}_j$ que es una solución particular de la ecuación

$$D \nabla^2 \hat{\phi} - v_x \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} - v_y \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} - k \hat{\phi} = f \quad (564)$$

Por lo tanto, la integral de dominio se puede refundir en la forma

$$\int_{\Omega} \dot{\phi} \phi^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} \left(D \nabla^2 \hat{\phi}_j - v_x \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial x} - v_y \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial y} - k \hat{\phi}_j \right) \phi^* d\Omega \quad (565)$$

Sustituyendo la expansión (565) en la ecuación (561), y aplicando la integración

por partes también al lado derecho de la ecuación resultante, finalmente se llega a una ecuación integral de frontera de la forma

$$c^i \phi^i - D \int_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + D \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi \phi^* v_n d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[c^i \hat{\phi}_j^i - D \int_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial n} d\Gamma + D \int_{\Gamma} \hat{\phi}_j \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \hat{\phi}_j \phi^* v_n d\Gamma \right] \quad (566)$$

Para la solución numérica del problema, la ecuación 566 se escribe en una forma discreta en la que las integrales sobre la frontera se aproximan mediante una suma de integrales sobre elementos de frontera individuales, *i.e.*

$$c^i \phi^i - D \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + D \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial n} + \frac{v_n}{D} \phi^* \right) \phi d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[c^i \hat{\phi}_j^i - D \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \phi^* \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial n} d\Gamma + D \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial n} + \frac{v_n}{D} \phi^* \right) \hat{\phi}_j d\Gamma \right] \quad (567)$$

En la ecuación anterior, se puede ver que

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial n} + \frac{v_n}{D} \phi^* = \frac{1}{2\pi D} e^{-\frac{v \cdot r}{2D}} \left[-\mu K_1(\mu r) \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{v_n}{2D} K_0(\mu r) \right] \quad (568)$$

La aplicación de la ecuación (567) a todos los nodos de frontera, introduciendo las aproximaciones para $\phi, q = \partial\phi/\partial n, \hat{\phi}$ y $\hat{q} = \partial\hat{\phi}/\partial n$ dentro de cada elemento de frontera, da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{H}\phi - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\phi} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad (569)$$

En el sistema anterior, \mathbf{G} y \mathbf{H} son matrices cuadradas cuyos coeficientes se calculan integrando, sobre cada elemento límite, productos de ϕ^* y $\partial\phi^*/\partial n$ por las funciones de interpolación. Los esquemas numéricos de cuadratura apropiados para la evaluación de estos coeficientes se analizan en [24].

Al evaluar la expresión (562) en todos los nodos frontera e invertir, se llega a

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \dot{\phi} \quad (570)$$

que, sustituido en la ecuación (569) da como resultado

$$\mathbf{C}\dot{\phi} + \mathbf{H}\phi = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (571)$$

con

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{H}\hat{\phi} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \quad (572)$$

El sistema (571) se puede integrar en el tiempo utilizando procedimientos estándar de paso de tiempo. Se observa que los coeficientes de las matrices \mathbf{H} , \mathbf{G} y \mathbf{C} dependen todos únicamente de la geometría, por lo que pueden calcularse una vez y almacenarse.

Empleando el esquema general de integración de tiempo de dos niveles discutido en la sección 7.2, se obtiene la siguiente forma discreta

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \theta \mathbf{H} \right) \phi^{m+1} - \theta \mathbf{G} \mathbf{q}^{m+1} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - (1 - \theta) \mathbf{H} \right] \phi^m + (1 - \theta) \mathbf{G} \mathbf{q}^m \quad (573)$$

Al introducir las condiciones de contorno en el tiempo $(m + 1)\Delta t$, el lado izquierdo de la ecuación se puede reorganizar y el sistema resultante puede resolverse utilizando un procedimiento directo estándar como la eliminación de Gauss.

En lugar de utilizar la misma forma simple de la función de aproximación f que se ha utilizado a lo largo de este libro, *i.e.* $f = 1 + r$, se decidió en el presente caso comenzar con una forma simple de solución particular $\hat{\phi}$ y encontrar la expresión correspondiente para f por sustitución directa en (564). Las expresiones resultantes son:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= r^3 \\ \hat{q} &= 3r(r_x n_x + r_y n_y) \\ f &= 9Dr - 3r(r_x v_x + r_y v_y) - kr^3 \end{aligned} \quad (574)$$

en el que r_x y r_y son los componentes de r en la dirección de los ejes x y y , respectivamente.

La elección anterior fue motivada por una experiencia previa exitosa con problemas de difusión axisimétrica en la que se utilizó un enfoque similar (ver sección 7.4), y produjo un conjunto de funciones f que dependen no solo de r sino también de los componentes de velocidad y la velocidad de reacción. Este es un conjunto más consistente de aproximación funcional para este tipo de problema, en línea con el comportamiento de la solución fundamental (558).

La formulación actual del elemento límite de doble reciprocidad se aplicó a un problema de convección-difusión unidimensional con la condición inicial $\phi = 0$ y las condiciones frontera $\phi = 300 \text{ kg/m}^3$ en $x = 0$ y $\partial\phi/\partial n = 0$ en $x = L$. Todos los parámetros físicos fueron supuestos constantes, con $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ y diferentes valores considerados para v_x y k , *i.e.* $v_x = 1$ o 6 m/s y $k = 0$, 0.278 o 1.389 s^{-1} . El problema se estudió en dos dimensiones con una sección transversal de $6.0 \times 0.7 \text{ m}$, con la condición de frontera $\partial\phi/\partial n = 0$ especificada en los bordes paralelos al eje x .

Para todos los casos, la discretización consistió en 38 elementos de frontera lineales y un polo interno en el centro de la región rectangular, totalizando 39 incógnitas. Se consideró la discontinuidad del flujo normal en las esquinas permitiendo que los nodos de las esquinas tuvieran 3 grados de libertad, *i.e.* $\phi, \partial\phi/\partial n$ antes de la esquina y $\partial\phi/\partial n$ después de la esquina, y prescribiendo 2 de estos valores. Se observa que el uso de nodos dobles no está permitido con el esquema de reciprocidad dual porque conduce a una matriz singular \mathbf{F} que no puede invertirse.

Los resultados para la variación de ϕ a lo largo de x , en varios niveles de tiempo, se presentan en las figuras 123 a 128 y se comparan con las soluciones analíticas proporcionadas por van Genuchten y Alves [30]. Los resultados de BEM se obtuvieron usando $\theta = 1$ y $\Delta t = 0.05s$. Se puede ver en los gráficos que la precisión de la formulación del elemento frontera de reciprocidad dual es muy buena en todos los casos, sin oscilaciones y solo una amortiguación menor del frente de onda.

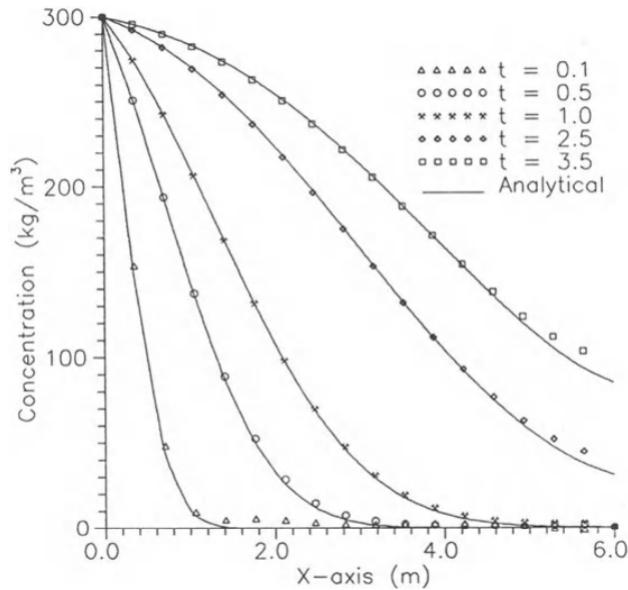


Figure 123: Resultados para $v_x = 1m/s, k = 0$.

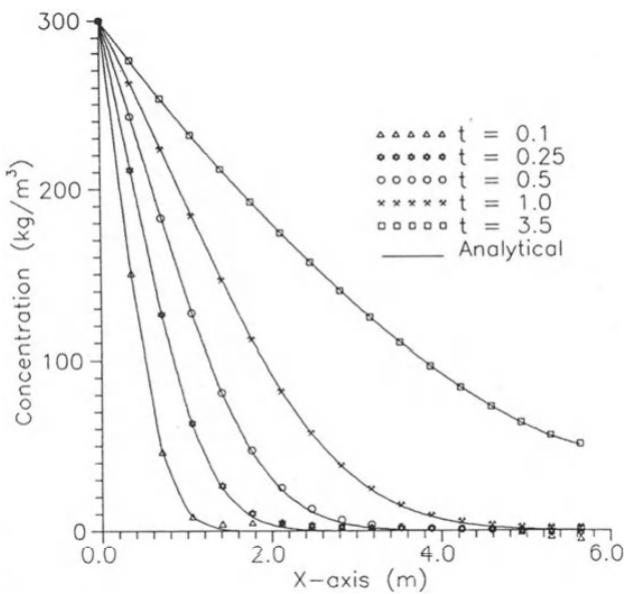


Figure 124: Resultados para $v_x = 1 \text{ m/s}$, $k = 0.278 \text{ s}^{-1}$

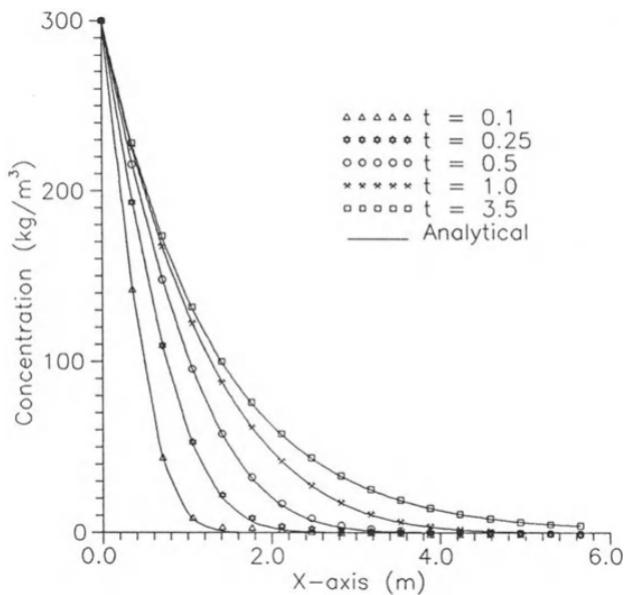


Figure 125: Resultados para $v_x = 1\text{m/s}$, $k = 1.389\text{s}^{-1}$

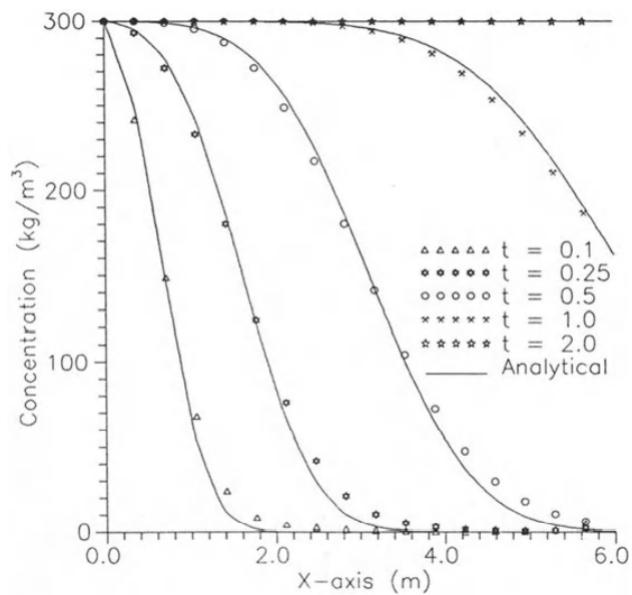


Figure 126: Resultados para $v_x = 6 \text{ m/s}$, $k = 0$

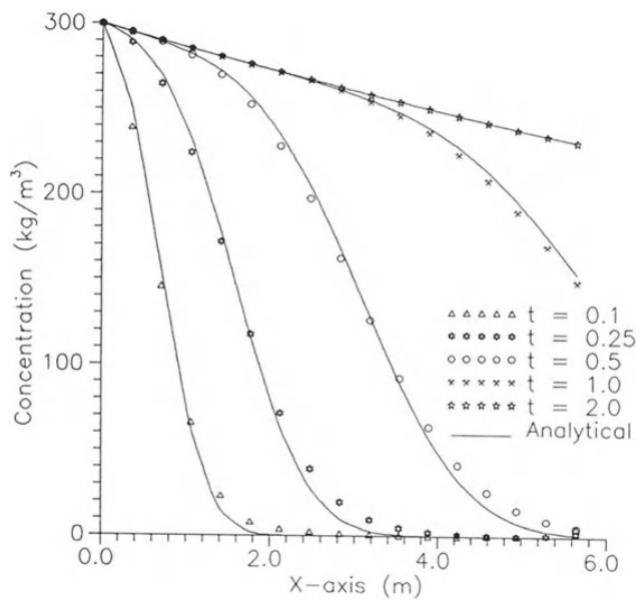


Figure 127: Resultados para $v_x = 6 \text{ m/s}$, $k = 0.278 \text{ s}^{-1}$

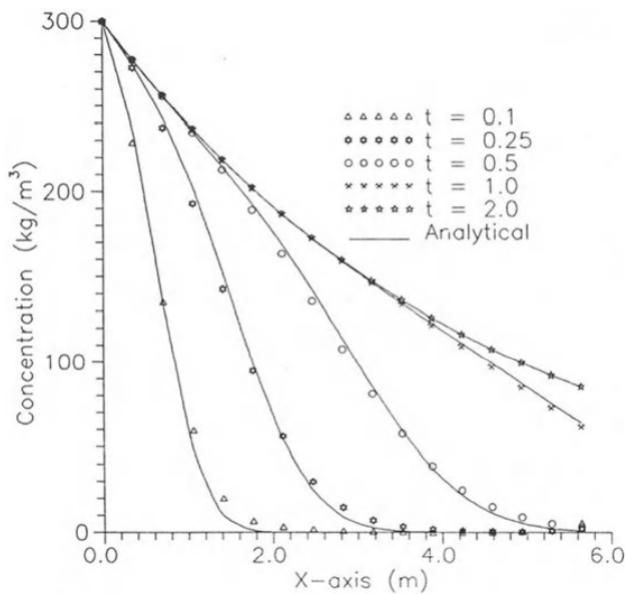


Figure 128: Resultados para $v_x = 6 \text{ m/s}$, $k = 1.389 \text{ s}^{-1}$

9 Conclusiones

Se ha demostrado a lo largo de este libro que el Método del Elemento Frontera de Reciprocidad Dual posee la capacidad de resolver una amplia gama de problemas de ingeniería que involucran diferentes tipos de ecuaciones de gabinete sin generar integrales de dominio. La aplicación del método a las ecuaciones de Poisson con términos no homogéneos que dependen únicamente de la posición se consideró en el capítulo 5. La formulación se amplió en el capítulo 6 para incluir integrales de dominio dependientes de la variable del problema, así como de la posición, y en el capítulo 7 a tiempo. Problemas dependientes El Capítulo 8 generalizó el uso del método a casos que involucran soluciones fundamentales distintas a la de la ecuación de Laplace. Por lo tanto, se ha visto que el método es general, ya que es la única forma práctica de manejar cualquier tipo de dominio integral en el análisis de elementos de frontera que no sea la integración celular, y con la ventaja de no requerir ninguna discretización interna.

Los nodos internos utilizados en el análisis DRM generalmente se definen en las posiciones donde se requiere la solución. Su definición no es normalmente una condición para obtener soluciones precisas, excepto en el caso de problemas con condiciones de contorno homogéneas; sin embargo, el uso de algunos nodos internos es importante en la mayoría de los casos para mejorar la precisión de la solución. Los resultados normalmente no son muy sensibles al número y la ubicación de los nodos internos y, en un caso específico, esto puede determinarse mediante una prueba de convergencia. En base a nuestra propia experiencia, una serie de nodos internos $L = N/2$, donde N es el número de nodos frontera, proporciona soluciones que son satisfactorias para problemas prácticos de ingeniería.

Si la posición exacta de estos nodos no es importante, la computadora puede distribuirlos automáticamente. En cualquier caso, el orden en que se definen no es importante ya que solo se necesitan las coordenadas como datos.

Las soluciones particulares localizadas \hat{u} se obtienen generalmente proponiendo una función aproximada f y resolviendo la ecuación modificada (*i.e.* Laplace para el caso de problemas de tipo Poisson) para encontrar \hat{u} . En principio, no hay restricción en el tipo de función que se utilizará para f , excepto que debe producir una matriz no singular \mathbf{F} . Hasta ahora, las expansiones basadas en la función de distancia r han demostrado ser las más precisas y convenientes, particularmente $f = 1 + r$ que se usó para la mayoría de los ejemplos en este libro. También se ha demostrado que la inclusión de términos de orden superior en la expansión f normalmente no es necesaria. Puede surgir una objeción de que al usar el DRM es necesario invertir la matriz \mathbf{F} . Los autores no consideran que esto sea una limitación seria del método dado el estado de la tecnología informática, tanto en términos de memoria como de velocidad. Cabe señalar que no es necesaria una inversión matricial si los términos del dominio dependen solo de la posición, y que dado que los coeficientes de \mathbf{F} dependen solo de la ge-

ometría, la matriz puede invertirse una vez y almacenarse en un archivo de datos para usar con todas las ejecuciones posteriores con La misma discretización.

En el tratamiento de las ecuaciones generales consideradas en el capítulo 8, se vio que para problemas de elasticidad es posible aplicar la expansión $f = 1+r$ de la misma manera que para problemas de tipo Poisson. En el caso de la ecuación de convección-difusión transitoria, se dio un tratamiento más general que puede emplearse al considerar casos que involucran otras soluciones fundamentales no incluidas en este texto.

Con el material incluido en este libro, el DRM puede extenderse fácilmente a muchos otros problemas, y los autores esperan una rápida expansión en el uso del método en el futuro cercano.

10 Apéndice 1

Integracion numerica: Integrales Regulares

10.1 Introducción

Las fórmulas de integración numérica que figuran en este Apéndice se utilizan para la integración sobre elementos de frontera que no contienen el punto fuente. Si el elemento en consideración contiene el punto fuente, las integrales se vuelven singulares, y luego se utiliza la integración analítica (para casos simples) o se deben emplear las fórmulas dadas en el Apéndice 2.

Las fórmulas dadas aquí se basan en la cuadratura gaussiana, que es simple de usar y precisa para integrales regulares. Estas fórmulas también pueden usarse para la integración sobre celdas internas.

10.2 Cuadratura Gaussiana Unidimensional

Este procedimiento se utiliza para integrar elementos frontera unidimensionales en problemas bidimensionales. Cada integral se escribe como

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (575)$$

donde n es el número de puntos de integración, ξ_i es la coordenada local del i -ésimo punto de integración y w_i es el factor de peso asociado.

Los valores de ξ_i y w_i se enumeran en la figura 129 para n que varía de 2 a 10. El procedimiento para el cálculo de estos valores se proporciona en [1] junto con las estimaciones de error. Observe que los valores de ξ_i son asimétricos con respecto a $\xi = 0$, mientras que los valores de w_i son simétricos.

10.3 Cuadratura de Gauss bidimensional y tridimensional para rectángulos y hexaedros rectangulares

Las fórmulas equivalentes de dos y tres dimensiones se obtienen mediante combinaciones simples de (1), *i.e.*

| n | $\pm \xi_i$ | w_i |
|-----|---|---|
| 2 | 0.57735 02691 89626 | 1.00000 00000 00000 |
| 3 | 0.00000 00000 00000 0.77459 66692 41483 | 0.88888 88888 88888 0.55555 55555 55555 |
| 4 | 0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053 | 0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454 |
| 5 | 0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683 0.90617 98459 38664 | 0.56888 88888 88888 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189 |
| 6 | 0.23861 91860 83197 0.66120 93864 66265 0.93246 95142 03152 | 0.46791 39345 72691 0.36076 15730 48139 0.17132 44923 79170 |
| 7 | 0.00000 00000 00000 0.40584 51513 77397 0.74153 11855 99394 0.94910 79123 42759 | 0.41795 91836 73469 0.38183 00505 05119 0.27970 53914 89277 0.12948 49661 68870 |
| 8 | 0.18343 46424 95650 0.52553 24099 16329 0.79666 64774 13627 0.96028 98564 97536 | 0.36268 37833 78362 0.31370 66458 77887 0.22238 10344 53374 0.10122 85362 90376 |
| 9 | 0.00000 00000 00000 0.32425 34234 03809 0.61337 14327 00590 0.83603 11073 26630 0.96816 02395 07626 | 0.33023 93550 01260 0.31234 70770 40003 0.26061 06964 02935 0.18064 81606 94857 0.08127 43883 61574 |
| 10 | 0.14887 43389 81631 0.43339 53941 29247 0.67940 95682 99024 0.86506 33666 88985 0.97390 65285 17172 | 0.29552 42247 14753 0.26926 67193 09996 0.21908 63625 15982 0.14945 13491 50581 0.06667 13443 08688 |

Figure 129: Puntos Gauss regulares y factores de peso

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (576)$$

y

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k \quad (577)$$

Los mismos puntos de integración y factores de peso que se dan en la figura 129 se utilizan en cada dirección de coordenadas.

La fórmula bidimensional se utiliza para el análisis de elementos de contorno tridimensional y para celdas internas en análisis bidimensional. La ecuación (577) puede emplearse para células internas en análisis tridimensional.

10.4 Cuadratura bidimensional para dominios triangulares

La integración numérica sobre un triángulo se puede llevar a cabo utilizando coordenadas triangulares como se muestra en la figura 130, a través de la ecuación

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \right] d\xi_2 = \sum_{i=1}^n f(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (578)$$

donde n es el número de puntos de integración, ξ_1^i, ξ_2^i y ξ_3^i son las coordenadas triangulares del punto de integración i y w_i es el factor de peso asociado. Los valores de $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i$ y w_i de la referencia [2] se dan en la figura 131.

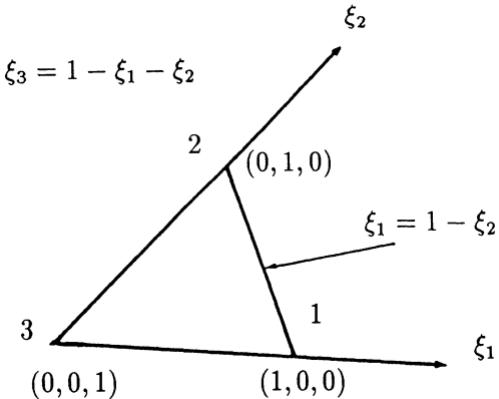


Figure 130: Coordenadas triangulares

La ecuación (578) se usa para elementos de frontera triangulares en análisis tridimensionales y para celdas internas triangulares en análisis bidimensionales. Se pueden construir fórmulas similares para tetraedros y pentaedros que se usan para celdas internas tridimensionales.

| n | i | ξ_1^i | ξ_2^i | ξ_3^i | w_i |
|---------------|-----|------------|------------|------------|------------|
| 1 (linear) | 1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1 |
| 2 (quadratic) | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 1/3 |
| | 2 | 0 | 1/2 | 1/2 | 1/3 |
| | 3 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1/3 |
| 4 (cubic) | 1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | -9/16 |
| | 2 | 3/5 | 1/5 | 1/5 | 25/48 |
| | 3 | 1/5 | 3/5 | 1/5 | 25/48 |
| | 4 | 1/5 | 1/5 | 3/5 | 25/48 |
| 7 (quintic) | 1 | 0.33333333 | 0.33333333 | 0.33333333 | 0.22500000 |
| | 2 | 0.79742699 | 0.10128651 | 0.10128651 | 0.12593918 |
| | 3 | 0.10128651 | 0.79742699 | 0.10128651 | 0.12593918 |
| | 4 | 0.10128651 | 0.10128651 | 0.79742699 | 0.12593918 |
| | 5 | 0.05971587 | 0.47014206 | 0.47014206 | 0.13239415 |
| | 6 | 0.47014206 | 0.05971587 | 0.47014206 | 0.13239415 |
| | 7 | 0.47014206 | 0.47014206 | 0.05971587 | 0.13239415 |

Figure 131: Puntos Gauss modificados y factores de peso para triángulos

11 Apéndice 2

Integracion numerica: Integrales Singulares

11.1 Introducción

Como las soluciones fundamentales utilizadas en el análisis BEM contienen una singularidad, las fórmulas de cuadratura de Gauss simples que figuran en el Apéndice 1 no pueden utilizarse cuando la integración se lleva a cabo sobre un elemento que contiene el punto fuente. En casos simples, por ejemplo, elementos unidimensionales constantes y lineales, los valores relevantes se pueden obtener por integración analítica, ver la ecuación (45) y la sección 2.4.3, respectivamente. La integración analítica también se puede usar para elementos de frontera triangulares constantes en el análisis tridimensional [1], y con cierta dificultad para elementos de orden superior siempre que no se emplee geometría curva.

Sin embargo, generalmente es más conveniente utilizar técnicas de integración numérica, y este Apéndice describe esquemas de cuadratura apropiados para integrales singulares.

11.2 Singularidades logarítmicas

Una cuadratura de Gauss modificada apropiada para integrales con singularidad logarítmica es de la forma

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (579)$$

Los puntos de integración y los factores de peso tomados de [2] se dan en la figura 132, para n que varía de 2 a 7.

El uso de este procedimiento se limita al análisis bidimensional e implica llevar a cabo una transformación de coordenadas específica para cada término a integrar para reducirlo a la forma dada en la ecuación (579).

11.3 La transformación de los Telles

Como alternativa simple, válida tanto para análisis bidimensionales como tridimensionales, y que utiliza puntos Gauss estándar y factores de peso, Telles [3] ha propuesto una transformación, cuyo objetivo es cancelar la singularidad obligando a su jacobiano a ser cero en el punto singular. Suponga que la integral a

evaluar es

| n | ξ_i | w_i |
|----|------------|------------|
| 2 | 0.11200880 | 0.71853931 |
| | 0.60227691 | 0.28146068 |
| 3 | 0.06389079 | 0.51340455 |
| | 0.36899706 | 0.39198004 |
| | 0.76688030 | 0.09461540 |
| 4 | 0.04144848 | 0.38346406 |
| | 0.24527491 | 0.38687532 |
| | 0.55616545 | 0.19043513 |
| 5 | 0.84898239 | 0.03922548 |
| | 0.02913447 | 0.29789346 |
| | 0.17397721 | 0.34977622 |
| 6 | 0.41170251 | 0.23448829 |
| | 0.67731417 | 0.09893046 |
| | 0.89477136 | 0.01891155 |
| 7 | 0.02163400 | 0.23876366 |
| | 0.12958339 | 0.30828657 |
| | 0.31402045 | 0.24531742 |
| 8 | 0.53865721 | 0.14200875 |
| | 0.75691533 | 0.05545462 |
| | 0.92266884 | 0.01016895 |
| 9 | 0.01671935 | 0.19616938 |
| | 0.10018568 | 0.27030264 |
| | 0.24629424 | 0.23968187 |
| 10 | 0.43346349 | 0.16577577 |
| | 0.63235098 | 0.08894322 |
| | 0.81111862 | 0.03319430 |
| 11 | 0.94084816 | 0.00593278 |

Figure 132: Tabla de integración para singularidad logarítmica

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad (580)$$

en el que $f(\xi)$ es singular en el punto $\bar{\xi}$, $-1 \leq \bar{\xi} \leq 1$. Si es una transformación de segundo orden

$$\xi(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c \quad (581)$$

se emplea de tal manera

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\xi}{d\gamma} \right|_{\tilde{\xi}} &= 0 \\ \xi(+1) &= +1 \\ \xi(-1) &= -1 \end{aligned} \quad (582)$$

entonces las constantes en (581) se pueden calcular en la forma

$$\begin{aligned} a &= -c \\ b &= 1 \\ c &= \frac{\bar{\xi} \pm \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1}}{2} \end{aligned} \quad (583)$$

Las últimas dos condiciones en (582) se imponen para mantener las mismas fronteras de integración que en la cuadratura estándar de Gauss. La primera condición impone un cero jacobiano en $\bar{\xi}$. En este caso, sin embargo, es necesario que $|\bar{\xi}| \geq 1$ para evitar raíces complejas en la evaluación de c . Por lo tanto, el uso de la expansión cuadrática (581) se limita a los casos en que la singularidad está en los puntos extremos, como en el caso de los elementos lineales.

Se puede obtener una transformación general, válida para cualquier posición de la singularidad, suponiendo una expansión de tercer orden para ξ , *i.e.*

$$\xi = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (584)$$

En este caso, además de las condiciones (582) es necesario un requisito adicional:

$$\left. \frac{d^2\xi}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\xi}} = 0 \quad (585)$$

lo que implica que el jacobiano de la transformación tiene un mínimo en $\bar{\xi}$.

Las constantes ahora están dadas por

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{Q} \\ b &= -\frac{3\bar{\gamma}}{Q} \\ c &= \frac{3\bar{\gamma}^2}{Q} \\ d &= -b \end{aligned} \quad (586)$$

donde $Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2$ y $\bar{\gamma}$ es simplemente el valor de γ que satisface $\xi(\bar{\gamma}) = \bar{\xi}$, *i.e.*

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\bar{\xi}\xi^* + |\xi^*|} + \sqrt[3]{\bar{\xi}\xi^* - |\xi^*|} + \bar{\xi} \quad (587)$$

donde $\xi^* = \bar{\xi}^2 - 1$.

Después de la transformación, se utilizan puntos de integración estándar de Gauss y factores de peso (Apéndice 1). Una característica interesante de las transformaciones anteriores es que se obtiene automáticamente una gran concentración de puntos cerca de la singularidad.