Problema 10(a): Curvas integrales y trayectorias ortogonales

Campo en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \Big(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\Big) = -\frac{1}{2}\,(x,y).$$

Objetivos

- Hallar las **curvas integrales** (trayectorias del campo): resolver las EDOs inducidas por $\dot\gamma(t) = \mathbf{f}(\gamma(t))$.
- Describir la **evolución radial** $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.
- Encontrar las **trayectorias ortogonales** a la familia de curvas integrales.
- Dar una **interpretación potencial**: $\mathbf{f} = -\nabla\phi$ y su relación con curvas de nivel.

1. Curvas integrales (dos vías equivalentes)

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva integral. Por definición:

$$\dot x(t) = P\big(x(t), y(t)\big) = -\frac{1}{2}\,x(t), \qquad \dot y(t) = Q\big(x(t), y(t)\big) = -\frac{1}{2}\,y(t).$$

Vía A: Resolver cada EDO separable

(i) Ecuación para $x(t)$.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\,dt \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \int -\frac{1}{2}\,dt$$

$$\ln|x| = -\frac{t}{2} + C_x \quad\Longrightarrow\quad x(t) = C_1\,e^{-t/2},$$

absorbiendo el signo en $C_1 \in \mathbb{R}$ (si hubiera condición inicial $x(0) = x_0$, entonces $C_1 = x_0$).

(ii) Ecuación para $y(t)$. Análogamente,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y \;\Longrightarrow\; \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{2}\,dt \;\Longrightarrow\; \ln|y| = -\frac{t}{2} + C_y \;\Longrightarrow\; y(t) = C_2\,e^{-t/2}.$$

(iii) Eliminación del parámetro t. Con $x(t) = C_1 e^{-t/2}$ y $y(t) = C_2 e^{-t/2}$,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C_2}{C_1} =: m \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y = mx, \quad m \in \mathbb{R}}.$$

Conclusión: las curvas integrales son rectas que pasan por el origen (rayos).

Vía B: Ecuación de la familia directamente con dy/dxdy/dx

Como $\dot x \neq 0$ salvo en el origen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{-y/2}{-x/2} = \frac{y}{x} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad\Longrightarrow\quad \ln|y| = \ln|x| + C \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y = Cx}.$$

Comentario geométrico: $\mathbf{f}(x,y)$ es colineal con (x,y), apunta al origen; la tangente de la trayectoria siempre es paralela al radio vector, así que la curva debe ser una recta radial.

2. Evolución radial: decaimiento exponencial

Defina $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Entonces $r^2(t) = x^2 + y^2$ y

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x\Big(-\frac{x}{2}\Big) + 2y\Big(-\frac{y}{2}\Big) = -(x^2 + y^2) = -r^2.$$

Sea $u(t) := r^2(t)$; obtenemos la EDO separable $u' = -u$, cuyo resultado es

$$u(t) = u(0)\, e^{-t} = r_0^2 e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{r(t) = r_0\, e^{-t/2}}.$$

Interpretación: a lo largo de cada recta $y = mx$, la distancia al origen decrece exponencialmente; el origen es un sumidero lineal.

Observación alternativa (rápida). Usando $\dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = -\dfrac{1}{2}r$, sale directamente $r(t) = r_0 e^{-t/2}$.

3. Trayectorias ortogonales

Una familia ortogonal debe cortar a $y = Cx$ a $90°$. En términos de pendientes:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}.$$

Método 1: Separación de variables (forma elemental)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies y\,dy = -x\,dx \implies \int y\,dy + \int x\,dx = 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C \implies \boxed{x^2 + y^2 = \widetilde{C} \geq 0}.$$

Para $\widetilde{C} = R^2 > 0$ son circunferencias de radio R centradas en el origen; para $\widetilde{C} = 0$ es el punto $(0, 0)$.

Método 2: Diferencial exacta (lectura inmediata)

Use $d(u^2) = 2u\,du$:

$$y\,dy + x\,dx = \frac{1}{2}\,d(y^2) + \frac{1}{2}\,d(x^2) = d\bigg(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\bigg).$$

La ecuación $y\,dy + x\,dx = 0$ equivale a $d\big(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\big) = 0$, es decir,

$$\boxed{x^2 + y^2 = \widetilde{C}}.$$

Comprobación de ortogonalidad

Para $x^2 + y^2 = R^2$, derivando implícitamente:

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = m_2.$$

Como en $y = Cx$ se tiene $m_1 = \dfrac{y}{x}$, entonces $m_1 m_2 = -1$ (cuando $x, y \neq 0$). En puntos con $y = 0$ (tangente vertical al círculo) y con pendiente 0 en la recta $y = 0$, el caso límite sigue siendo ortogonal.

4. Interpretación potencial y conexión geométrica

Observe que

$$\phi(x,y) := \frac{1}{4}\,(x^2+y^2) \quad\Longrightarrow\quad \nabla\phi = \Big(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\Big), \qquad \boxed{\mathbf{f} = -\nabla\phi}.$$

- Las **curvas integrales** siguen la dirección de $-\nabla\phi$ (descenso más pronunciado del potencial): son rayos $y = Cx$ hacia el origen.
- Las **curvas de nivel** $\phi = \text{cte}$ son $x^2+y^2 = \text{cte}$ (circunferencias), y por construcción son *ortogonales* a $-\nabla\phi$; de aquí que sean las trayectorias ortogonales encontradas.

Resumen final:

$$\boxed{\text{Curvas integrales: } y = Cx \quad \text{y} \quad r(t) = r_0 e^{-t/2}} \qquad \boxed{\text{Ortogonales: } x^2+y^2 = R^2}.$$

Problema 10(b): Curvas integrales y trayectorias ortogonales

Campo en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}(x,y) = (P,Q) = \big(xy,\ 2x\big).$$

1. Curvas integrales (líneas de flujo)

Sea $\gamma(t) = (x(t),y(t))$ una curva integral. Por definición:

$$\dot x = xy, \qquad \dot y = 2x.$$

Usamos el método de pendiente (VolumenUNO):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{Q}{P} = \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y} \qquad (y \neq 0).$$

Separando e integrando:

$$y\,dy = 2\,dx \implies \int y\,dy = \int 2\,dx \implies \frac{y^2}{2} = 2x + C \implies \boxed{y^2 - 4x = C}.$$

Interpretación: familia de parábolas que abren hacia $+x$.

Chequeo con un primer integral. Defina $F(x,y) = y^2 - 4x$. Entonces, a lo largo del flujo:

$$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = 2y\,\dot y - 4\,\dot x = 2y(2x) - 4(xy) = 0,$$

por lo tanto F es constante y describe las curvas integrales.

Casos especiales (que la pendiente no muestra).

- **Eje y ($x=0$):** $\dot x = \dot y = 0$; *todo punto con $x=0$ es un equilibrio* (solución constante).
- **Eje x ($y=0$):** la pendiente $2/y$ es infinita; el campo allí es vertical $(0,2x)$. En la familia $y^2-4x = C$, imponer $y=0$ da $x = -C/4$ (rectas verticales coherentes).

2. Trayectorias ortogonales

Regla de ortogonalidad en el plano (VolumenUNO): si una familia tiene pendiente m_1, la ortogonal tiene $m_2 = -1/m_1$. Aquí $m_1 = 2/y$, por tanto

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{y}{2}.$$

Equivalente usando el campo (fórmula directa):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} = -\frac{xy}{2x} = -\frac{y}{2} \qquad (x \neq 0).$$

Separando e integrando:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\,dx \implies \ln|y| = -\frac{x}{2} + C \implies \boxed{y = K\,e^{-x/2}}.$$

Interpretación: familia de curvas exponenciales decrecientes en x. Incluye la solución $y \equiv 0$ (caso $K = 0$) como límite cuando la familia original tiene tangente vertical.

3. Verificación de ortogonalidad

Para $x \neq 0$ y $y \neq 0$:

$$m_1 = \frac{2}{y}, \qquad m_2 = -\frac{y}{2} \;\Rightarrow\; m_1 m_2 = -1,$$

como debe ser. En $x = 0$ el campo se anula (equilibrios), por lo que la noción de pendiente del flujo no aplica.

4. Nota conceptual (no conservativo)

El campo $\mathbf{f}$ no es gradiente global (no conservativo) porque

$$\partial_y P = x \neq 2 = \partial_x Q.$$

A diferencia del inciso (a), las ortogonales no son curvas de nivel de un potencial; se obtienen por la regla de pendientes perpendiculares.

Resumen:

$\boxed{\text{Curvas integrales (flujo): } y^2 - 4x = C \ \ \text{(y los equilibrios } x = 0\text{)}}$ $\boxed{\text{Ortogonales: } y = K\,e^{-x/2} \text{ (incluye } y \equiv}$

Problema 10(c): Curvas integrales y trayectorias ortogonales

Campo en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}(x,y) = (P,Q) = \big(x^2,\, -y\big).$$

1. Curvas integrales (líneas de flujo)

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva integral. Por definición:

$$\dot{x} = x^2, \qquad \dot{y} = -\,y.$$

Método de la pendiente (VolumenUNO). Si $\dot{x} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{Q}{P} = \frac{-y}{x^2}.$$

Separando e integrando:

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx \implies \ln|y| = \int -x^{-2}\,dx = \frac{1}{x} + C \implies \boxed{y = C\,e^{1/x}} \quad (x \neq 0).$$

Forma equivalente útil: $y\,e^{-1/x} = C$.

Chequeo directo resolviendo en t. De $\dot{y} = -y$ se obtiene $y(t) = A\,e^{-t}$. De $\dot{x} = x^2$ se obtiene $dx/x^2 = dt \;\Rightarrow\; -1/x = t + B \;\Rightarrow\; x(t) = -1/(t+B)$. Eliminando t se recupera $\ln|y| = 1/x + \text{cte}$, es decir $y = Ce^{1/x}$.

Casos especiales y estructura del flujo.

- **Eje x ($y \equiv 0$):** satisface $dy/dx = 0$ y $\dot{y} = -y = 0$; por tanto *todo el eje x es una curva integral* (tangente horizontal).
- **Eje y ($x \equiv 0$):** si $x(0) = 0$ entonces $\dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$ (invariante). Sobre él, $\dot{y} = -y \Rightarrow y(t) = Ae^{-t}$: flujo *vertical hacia el origen.*
- **Equilibrio:** $(0,0)$ es punto crítico (el campo se anula).
- **Intuición geométrica:** $x^2 \geq 0$ implica componente x no negativa; el flujo "empuja" hacia la derecha. Para $x \to 0^+$, $e^{1/x} \to \infty$; para $x \to -\infty$, $e^{1/x} \to 0$.

2. Trayectorias ortogonales

Regla de ortogonalidad en el plano: si una familia tiene pendiente m_1, la familia ortogonal tiene $m_2 = -1/m_1$. Aquí $m_1 = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x^2}$, luego

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{x^2}{y}.$$

(Equivalente con el campo: para ortogonales $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P}{Q} = -\dfrac{x^2}{-y} = \dfrac{x^2}{y}$.)

Separación e integración.

$$y\,dy = x^2\,dx \implies \int y\,dy = \int x^2\,dx \implies \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C \implies \boxed{y^2 = \frac{2}{3}\,x^3 + C'}.$$

Chequeo de ortogonalidad. Para $x \neq 0$ y $y \neq 0$:

$$m_1 = -\frac{y}{x^2}, \qquad m_2 = \frac{x^2}{y} \quad\Rightarrow\quad m_1 m_2 = -1.$$

En el eje x las integrales son horizontales (pendiente 0), mientras que las ortogonales allí son verticales (pendiente infinita), confirmando la intersección a 90°.

3. Nota conceptual (campo conservativo)

Como $\partial_y P = 0$ y $\partial_x Q = 0$, se cumple $\partial_y P = \partial_x Q$; el campo es *conservativo.* Un potencial es

$$\phi(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2}, \qquad \nabla\phi = (x^2, -y) = \mathbf{f}.$$

Las ortogonales son exactamente las *curvas de nivel* $\phi = \text{cte}$:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C \implies y^2 = \frac{2}{3}x^3 + C',$$

en concordancia con lo obtenido por la regla de pendientes perpendiculares.

Resumen:

$$\boxed{\text{Curvas integrales (flujo): } y = C\,e^{1/x} \;\; (x \neq 0),\; \text{más } y \equiv 0,\; x \equiv 0,\; \text{y el equilibrio } (0,0)}$$

$$\boxed{\text{Ortogonales: } y^2 = \tfrac{2}{3}\,x^3 + C'}$$