Ejercicio 2. Integral de línea (VolumenUNO)

Campo vectorial:

$$\mathbf{a}(x,y,z) = x\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{y^2}{b}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{z^2}{c}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Curva C: parametrizada por $\lambda \in [0,1]$,

$$x(\lambda) = a\cos\Big(\frac{\pi\lambda}{2}\Big), \qquad y(\lambda) = b\sin\Big(\frac{\pi\lambda}{2}\Big), \qquad z(\lambda) = c\,\lambda,$$

que va desde $(a,0,0)$ hasta $(0,b,c)$.

Buscamos

$$\int_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}.$$

1) Comprobación de que el campo es conservativo

Escribimos $\mathbf{a} = (P,Q,R)$ con $P = x$, $Q = -\,y^2/b$ y $R = -\,z^2/c$. Calculamos el rotacional:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \Big(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\Big).$$

Como $P = x$, $Q = -(y^2/b)$ y $R = -(z^2/c)$ dependen de variables separadas,

$$R_y = Q_z = P_z = R_x = Q_x = P_y = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

En $\mathbb{R}^3$, dominio simplemente conexo, esto implica que $\mathbf{a}$ es *conservativo* y existe un potencial escalar ϕ tal que $\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{a}$.

2) Cálculo del potencial ϕ

De $\phi_x = P = x$ se integra en x:

$$\phi(x,y,z) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + f(y,z).$$

Imponiendo $\phi_y = Q = -(y^2/b)$ se obtiene

$$f_y(y,z) = -\frac{y^2}{b} \quad\Rightarrow\quad f(y,z) = -\frac{y^3}{3b} + g(z).$$

Finalmente, de $\phi_z = R = -(z^2/c)$:

$$g'(z) = -\frac{z^2}{c} \quad\Rightarrow\quad g(z) = -\frac{z^3}{3c} + C.$$

Por tanto, un potencial es

$$\boxed{\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3b} - \frac{z^3}{3c} + C}$$

(la constante C es irrelevante para diferencias de potencial).

3) Teorema fundamental de las integrales de línea

Para campos conservativos,

$$\int_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_{\text{final}}) - \phi(P_{\text{inicial}}).$$

Como $P_{\text{inicial}} = (a,0,0)$ y $P_{\text{final}} = (0,b,c)$,

$$\phi(0,b,c) = 0 - \frac{b^3}{3b} - \frac{c^3}{3c} = -\frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{3}, \qquad \phi(a,0,0) = \frac{a^2}{2}.$$

Luego

$$\boxed{\int_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \Big(-\frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{3}\Big) - \frac{a^2}{2} = -\Big(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3}\Big).}$$

4) Verificación por parametrización directa (opcional)

Tomamos

$$\mathbf{r}(\lambda) = \big(a\cos\big(\tfrac{\pi\lambda}{2}\big),\ b\sin\big(\tfrac{\pi\lambda}{2}\big),\ c\lambda\big), \qquad 0\le\lambda\le 1,$$
$$\mathbf{r}'(\lambda) = \Big(-a\frac{\pi}{2}\sin\big(\tfrac{\pi\lambda}{2}\big),\ b\frac{\pi}{2}\cos\big(\tfrac{\pi\lambda}{2}\big),\ c\Big).$$

Además,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(\lambda)) = \Big(a\cos\big(\tfrac{\pi\lambda}{2}\big),\ -\frac{b^2}{b}\sin^2\big(\tfrac{\pi\lambda}{2}\big),\ -\frac{c^2}{c}\lambda^2\Big) = \Big(a\cos\theta,\ -b\sin^2\theta,\ -c\lambda^2\Big),$$

donde hemos abreviado $\theta = \frac{\pi\lambda}{2}$. Por lo tanto

$$\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}' = -\frac{\pi a^2}{2}\cos\theta\,\sin\theta - \frac{\pi b^2}{2}\sin^2\theta\,\cos\theta - c^2\lambda^2.$$

Integramos en $[0,1]$; para los dos primeros términos usamos $d\lambda = \frac{2}{\pi}d\theta$ y $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$:

$$I_1 = -\frac{\pi a^2}{2}\int_0^1 \cos\theta\sin\theta\,d\lambda = -a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{a^2}{2}\Big[\sin^2\theta\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{a^2}{2},$$
$$I_2 = -\frac{\pi b^2}{2}\int_0^1 \sin^2\theta\cos\theta\,d\lambda = -b^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = -b^2\Big[\frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{b^2}{3},$$
$$I_3 = -\int_0^1 c^2\lambda^2\,d\lambda = -\frac{c^2}{3}.$$

Sumando: $I_1 + I_2 + I_3 = -\big(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3}\big)$, en acuerdo con el método del potencial.

Respuesta final:

$$\boxed{\int_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = -\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3}\right).}$$