Problema 9. Curva y triedro de Frenet–Serret

Sea la curva

$$x(u) = a\,u(3-u^2), \qquad y(u) = 3a\,u^2, \qquad z(u) = a\,u(3+u^2),$$

y escribimos $\mathbf{r}(u) = \big(x(u), y(u), z(u)\big)$. Cuando sea útil, supondremos $a > 0$ para simplificar signos; si no, indicamos el uso de $|a|$.

9(a) Cálculo de $\dfrac{ds}{du}$ (paso a paso)

Idea clave. Para $\mathbf{r}(u)$, el elemento de arco cumple

$$(ds)^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{ds}{du} = \big\|\mathbf{r}'(u)\big\|.$$

Derivadas:

$$\mathbf{r}'(u) = \big(3a(1-u^2),\ 6au,\ 3a(1+u^2)\big).$$

Norma de $\mathbf{r}'(u)$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}'(u)\| &= \sqrt{[3a(1-u^2)]^2 + (6au)^2 + [3a(1+u^2)]^2} \\
&= \sqrt{(3a)^2\Big[(1-u^2)^2 + 4u^2 + (1+u^2)^2\Big]} \\
&= \sqrt{(3a)^2\Big[(1-2u^2+u^4) + 4u^2 + (1+2u^2+u^4)\Big]} \\
&= \sqrt{(3a)^2\big[2+4u^2+2u^4\big]} = \sqrt{(3a)^2\cdot 2(1+u^2)^2} \\
&= 3\sqrt{2}\,|a|\,(1+u^2).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{ds}{du} = 3\sqrt{2}\,|a|\,(1+u^2)}$$

Si $a > 0$, basta escribir $3\sqrt{2}\,a(1+u^2)$.

9(b) Longitud desde el origen hasta $(2a, 3a, 4a)$

1) ¿Qué u da el origen? $y(u) = 3au^2 = 0 \Rightarrow u = 0$ (asumiendo $a \neq 0$). Con $u = 0$ también $x(0) = 0$ y $z(0) = 0$. No hay otro u que anule simultáneamente x, y, z.

2) ¿Qué u da $(2a, 3a, 4a)$? De $y = 3au^2 = 3a \Rightarrow u^2 = 1 \Rightarrow u = \pm 1$. Decidimos el signo con x o z:

$$u = 1 \Rightarrow (x, z) = (2a, 4a) \checkmark \qquad u = -1 \Rightarrow (x, z) = (-2a, -4a) \times$$

Por tanto, el punto pedido corresponde a $u = 1$.

3) Integral de longitud.

$$L = \int_{u=0}^{1} \frac{ds}{du}\, du = 3\sqrt{2}\,|a| \int_0^1 (1+u^2)\, du = 3\sqrt{2}\,|a| \left[u + \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = 3\sqrt{2}\,|a| \left(1 + \frac{1}{3} \right).$$

$$\boxed{L = 4\sqrt{2}\,|a|} \qquad (\text{si } a > 0,\ L = 4\sqrt{2}\,a).$$

Nota útil: la longitud acumulada es $s(u) = 3\sqrt{2}\,|a| \left(u + \frac{u^3}{3} \right)$.

9(c) Radio de curvatura $\rho(u)$ (con cancelaciones claras)

Recordemos que $\kappa(u) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(u) \times \mathbf{r}''(u)\|}{\|\mathbf{r}'(u)\|^3}$ y $\rho = 1/\kappa$.

1) Derivadas y cruzado (el cruz *es un vector*).

$$\mathbf{r}''(u) = \big(-6au,\ 6a,\ 6au \big).$$

Producto cruz (vector):

$$\mathbf{r}'(u) \times \mathbf{r}''(u) = 18a^2\,(u^2 - 1,\ -2u,\ 1 + u^2).$$

2) $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ es *escalar* (entra la norma en κ).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| &= 18|a|^2 \sqrt{(u^2-1)^2 + (2u)^2 + (1+u^2)^2} \\ &= 18|a|^2 \sqrt{(1 - 2u^2 + u^4) + 4u^2 + (1 + 2u^2 + u^4)} \\ &= 18\sqrt{2}\,|a|^2 (1 + u^2). \end{aligned}$$

3) $\|\mathbf{r}'\|^3$ y cancelaciones factor por factor.

$$\|\mathbf{r}'(u)\| = 3\sqrt{2}\,|a|\,(1+u^2) \;\Rightarrow\; \|\mathbf{r}'\|^3 = 54\sqrt{2}\,|a|^3(1+u^2)^3.$$

Entonces

$$\kappa(u) = \frac{18\sqrt{2}\,|a|^2(1+u^2)}{54\sqrt{2}\,|a|^3(1+u^2)^3} \overset{\text{canc.}}{=} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{(1+u^2)^2} = \boxed{\frac{1}{3|a|(1+u^2)^2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\rho(u) = \frac{1}{\kappa(u)} = 3|a|\,(1+u^2)^2}, \qquad \rho(1) = 12|a|.$$

9(d) Torsión $\tau(u)$ (vía producto triple escalar)

Usamos

$$\tau(u) = \frac{\det(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\cdot\mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

1) Tercera derivada.

$$\mathbf{r}'''(u) = (-6a,\, 0,\, 6a).$$

2) Producto triple (observa que queda *constante* en u).

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\cdot\mathbf{r}''' &= 18a^2\,(u^2-1,\, -2u,\, 1+u^2)\cdot(-6a,\, 0,\, 6a)\\ &= 18a^2\cdot 6a\big[-(u^2-1)+(1+u^2)\big] = 18a^2\cdot 6a\cdot 2 = 216\,a^3.\end{aligned}$$

3) Denominador.

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \big(18\sqrt{2}\,|a|^2(1+u^2)\big)^2 = 648\,a^4(1+u^2)^2.$$

4) Resultado.

$$\boxed{\tau(u) = \frac{216\,a^3}{648\,a^4(1+u^2)^2} = \frac{1}{3a(1+u^2)^2}}$$

De aquí se ve $\tau(u) = \operatorname{sgn}(a)\,\kappa(u)$. En $u=1$: $\tau(1) = \frac{1}{12a}$.

9(e) Triedro de Frenet–Serret y ecuaciones (con dos rutas para N)

Vectores unitarios.

$$\mathbf{T}(u) = \frac{\mathbf{r}'(u)}{\|\mathbf{r}'(u)\|} = \frac{(1-u^2,\, 2u,\, 1+u^2)}{\sqrt{2}(1+u^2)}.$$

$$\mathbf{B}(u) = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} = \frac{(u^2-1,\, -2u,\, 1+u^2)}{\sqrt{2}(1+u^2)}.$$

Método A (geométrico): $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. Escribiendo $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{t}}{\sqrt{2}(1+u^2)}$ y $\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}(1+u^2)}$, con $\mathbf{t} = (1-u^2,\, 2u,\, 1+u^2)$ y $\mathbf{b} = (u^2-1,\, -2u,\, 1+u^2)$,

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{t}}{2(1+u^2)^2}.$$

Determinante componente a componente:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{t} = \big(-4u(1+u^2),\ 2(1-u^4),\ 0\big).$$

Dividiendo por $2(1+u^2)^2$ y usando $1-u^4 = (1-u^2)(1+u^2)$,

$$\boxed{\mathbf{N}(u) = \frac{1}{1+u^2}\,(-2u,\ 1-u^2,\ 0)}.$$

Método B (analítico): $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$. Como $\dfrac{d}{ds} = \dfrac{1}{ds/du}\dfrac{d}{du}$ y $\dfrac{ds}{du} = 3\sqrt{2}\,|a|\,(1+u^2)$, derivando $\mathbf{T}(u)$ respecto a u y sustituyendo en $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \dfrac{1}{ds/du}\dfrac{d\mathbf{T}}{du}$, se obtiene exactamente:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa(u)\,\mathbf{N}(u), \qquad \kappa(u) = \frac{1}{3|a|(1+u^2)^2},$$

confirmando la misma $\mathbf{N}(u)$ del método A.

Chequeos (ortonormalidad y mano derecha).

$$\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{B}\| = 1, \qquad \mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \boxed{\mathbf{T}\times\mathbf{N} = \mathbf{B}}.$$

En $u = 1$:

$$\mathbf{T}(1) = \Big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big), \quad \mathbf{N}(1) = (-1, 0, 0), \quad \mathbf{B}(1) = \Big(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big),$$

y $\kappa(1) = \dfrac{1}{12|a|}$, $\tau(1) = \dfrac{1}{12a}$.

Ecuaciones de Frenet–Serret para esta curva. Respecto a la longitud de arco s:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\,\mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B}, \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\,\tau\,\mathbf{N}}$$

con

$$\kappa(u) = \frac{1}{3|a|(1+u^2)^2}, \qquad \tau(u) = \frac{1}{3a(1+u^2)^2}, \qquad \frac{ds}{du} = 3\sqrt{2}\,|a|\,(1+u^2).$$

Si prefieres en función de u, usa $\dfrac{d}{ds} = \dfrac{1}{\|\mathbf{r}'\|}\dfrac{d}{du}$:

$$\frac{d\mathbf{T}}{du} = \kappa\,\|\mathbf{r}'\|\,\mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{du} = -\kappa\,\|\mathbf{r}'\|\,\mathbf{T} + \tau\,\|\mathbf{r}'\|\,\mathbf{B}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{du} = -\tau\,\|\mathbf{r}'\|\,\mathbf{N}.$$

Nota sobre el signo de a. Si $a < 0$, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ invierten signo (cambia la orientación al crecer u), $\mathbf{B}$ no. Las magnitudes κ y ρ dependen de $|a|$; la torsión lleva el signo de a: $\tau = \operatorname{sgn}(a)\,\kappa$.