Bases recíprocas en $\mathbb{R}^3$ e Identidad de Pauli

Incisos (b)–(d) en $\mathbb{R}^3$ y Punto 7 (Base dual de Pauli)

Preliminares

Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base (no necesariamente ortonormal) de $\mathbb{R}^3$ y $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ su base recíproca, definida por

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i{}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Definimos los volúmenes orientados

$$V := \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \qquad \tilde{V} := \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3).$$

En 3D (inciso a):

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V}, \qquad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V}, \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V}, \qquad V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0.$$

Inciso (b): demostrar que $V\,\tilde{V} = 1$

Paso 1: calcular $\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3$

Por bilinealidad del producto cruz,

$$\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3 = \left(\frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V}\right) \times \left(\frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V}\right) = \frac{1}{V^2}\big[(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)\big].$$

Usamos la identidad $x \times (y \times z) = y(x \cdot z) - z(x \cdot y)$ con $x = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$, $y = \mathbf{e}_1$, $z = \mathbf{e}_2$:

$$(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\big((\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2\big) - \mathbf{e}_2\big((\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1\big).$$

El segundo término es 0 porque $(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \perp \mathbf{e}_1$. En el primero, por ciclicidad del triple escalar,

$$(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = V.$$

Por tanto,

$$(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = V\,\mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1}{V}}.$$

Paso 2: calcular $\tilde{V}$ y concluir

Entonces

$$\tilde{V} = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) = \mathbf{e}^1 \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_1}{V}\right) = \frac{1}{V}\,(\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1) = \frac{1}{V},$$

ya que $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ por definición de base recíproca. Finalmente,

$$\boxed{V\,\tilde{V} = V \cdot \frac{1}{V} = 1}.$$

Observación. Si la base $\{\mathbf{e}_i\}$ es dextrógira, entonces $V > 0$ y también $\tilde{V} > 0$.

Inciso (c): hallar a tal que $a\cdot\mathbf{e}^i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ y demostrar unicidad

Paso 1: expandir a en la base $\{\mathbf{e}_j\}$

Escribimos

$$a = a^j\,\mathbf{e}_j \quad \text{(convención de suma sobre } j\text{)}.$$

Por bilinealidad del producto punto,

$$a \cdot \mathbf{e}^i = (a^j\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{e}^i = a^j\,(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^i) = a^j\,\delta^i{}_j = a^i.$$

Conclusión: para todo i, se cumple

$$a \cdot \mathbf{e}^i = a^i.$$

Paso 2: imponer la condición $a \cdot \mathbf{e}^i = 1$

Del paso anterior,

$$a^i = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{a = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}.$$

Verificación

Usando $\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j = \delta^i{}_j$,

$$a\cdot\mathbf{e}^1 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}^1 = 1 + 0 + 0 = 1,$$

y análogamente $a\cdot\mathbf{e}^2 = 1$ y $a\cdot\mathbf{e}^3 = 1$.

Unicidad

Si a y b satisfacen $a\cdot\mathbf{e}^i = b\cdot\mathbf{e}^i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, entonces

$$(a - b)\cdot\mathbf{e}^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pero $(a - b)\cdot\mathbf{e}^i = (a - b)^i$, de modo que

$$(a - b)^1 = (a - b)^2 = (a - b)^3 = 0 \;\Rightarrow\; a - b = 0 \;\Rightarrow\; a = b.$$

$$\boxed{\text{El vector } a \text{ es único.}}$$

Inciso (d). Base recíproca y componentes de a en un sistema oblicuo

Sean

$$\mathbf{e}_1 = (4, 2, 1), \qquad \mathbf{e}_2 = (3, 3, 0), \qquad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 2),$$

una base *dextrógira* (no necesariamente ortogonal). Sea además $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$.

I) Cálculo de la base recíproca $\{\mathbf{e}^i\}$

La base recíproca $\{\mathbf{e}^i\}$ se define por

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i{}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Para una base dextrógira, una construcción práctica es

$$\boxed{\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{V}, \qquad V := \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad (i, j, k) \text{ cíclico.}}$$

Volumen escalar.

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6, -6, 0), \qquad V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = (4, 2, 1) \cdot (6, -6, 0) = 12.$$

Vectores recíprocos. Con permutaciones cíclicas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^1 &= \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V} = \frac{(6, -6, 0)}{12} = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0\right), \\
\mathbf{e}^2 &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V} = \frac{(-4, 8, 0)}{12} = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right), \\
\mathbf{e}^3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V} = \frac{(-3, 3, 6)}{12} = \left(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Se verifica que $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i{}_j$.

II) Componentes covariantes y contravariantes de $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

En una base oblicua,

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \, \mathbf{e}^i, \qquad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i, \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Componentes contravariantes $a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i$.

$$\begin{aligned}
a^1 &= (1, 2, 3) \cdot \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0\right) = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2}, \\
a^2 &= (1, 2, 3) \cdot \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right) = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3} = 1, \\
a^3 &= (1, 2, 3) \cdot \left(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{7}{4}.
\end{aligned}$$

Componentes covariantes $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1, 2, 3) \cdot (4, 2, 1) = 4 + 4 + 3 = 11, \\
a_2 &= (1, 2, 3) \cdot (3, 3, 0) = 3 + 6 + 0 = 9, \\
a_3 &= (1, 2, 3) \cdot (0, 0, 2) = 0 + 0 + 6 = 6.
\end{aligned}$$

Comprobación. Ambas descomposiciones recuperan el mismo vector:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = (-\tfrac{1}{2})\mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + \tfrac{7}{4} \, \mathbf{e}_3 = a_i \, \mathbf{e}^i = 11 \, \mathbf{e}^1 + 9 \, \mathbf{e}^2 + 6 \, \mathbf{e}^3 = (1, 2, 3).$$

Observación (útil para el producto vectorial en base oblicua)

De la identidad $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = V\,\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}^k$ se deduce, para $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{b} = b^j\mathbf{e}_j$,

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = V\,\varepsilon_{ijk}\,a^i b^j\,\mathbf{e}^k, \qquad V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 12.}$$

Punto 7: Base dual asociada a la base de Pauli y 1-forma asociada

Sea H_2 el espacio *real* de matrices hermíticas 2×2, con el producto interno

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B).$$

Como A, B son hermíticas ($A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$), aquí $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB)$. Tomamos la base de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Matriz de Gram de la base de Pauli

Definimos la matriz de Gram $G_{\mu\nu} = \langle \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu)$. Mostremos las identidades clave:

$$\mathrm{Tr}(\sigma_0\sigma_0) = 2, \qquad \mathrm{Tr}(\sigma_0\sigma_k) = 0 \ (k = 1, 2, 3), \qquad \mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\,\delta_{ij} \ (i, j = 1, 2, 3).$$

Esbozo de verificación. (i) $\mathrm{Tr}(\sigma_0\sigma_0) = \mathrm{Tr}(I_2) = 2$. (ii) $\mathrm{Tr}(\sigma_0\sigma_k) = \mathrm{Tr}(\sigma_k) = 0$ porque cada σ_k (con $k = 1, 2, 3$) es *traceless*. (iii) Para $i = j$, $\sigma_i^2 = I_2 \Rightarrow \mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_i) = 2$; para $i \neq j$, $\sigma_i\sigma_j = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ cuya traza es 0. En conjunto, $G_{\mu\nu} = 2\,\delta_{\mu\nu}$, esto es

$$G = 2\,I_4, \qquad G^{-1} = \tfrac{1}{2}\,I_4.$$

La base de Pauli es ortogonal (no ortonormal): $\|\sigma_\mu\|^2 = \mathrm{Tr}(\sigma_\mu^2) = 2$.

2. Base dual

Por definición, la base dual $\{\sigma^\mu\}$ satisface $\langle \sigma^\mu, \sigma_\nu \rangle = \delta^\mu{}_\nu$. Si escribimos $\sigma^\mu = \sum_{\rho=0}^{3} c^\mu{}_\rho\,\sigma_\rho$ e imponemos la condición dual, en notación matricial se obtiene $C\,G = I_4$, de modo que $C = G^{-1}$ y finalmente

$$\boxed{\sigma^\mu = \tfrac{1}{2}\,\sigma_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)}.$$

Verificación directa: $\langle \frac{1}{2}\sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(\sigma_\mu\sigma_\nu) = \frac{1}{2} \cdot 2\,\delta_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu$.

3. 1-forma asociada y componentes

Todo $A \in H_2$ se expande de forma única como

$$A = a^\mu\,\sigma_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Los *coeficientes contravariantes* se recuperan aplicando la base dual:

$$\boxed{a^\mu = \langle \sigma^\mu, A\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu A)}\,.$$

La 1-forma asociada a A (también llamada "bemol" de A) es

$$A^\flat(\cdot) = \langle A, \cdot\rangle = \mathrm{Tr}(A\,\cdot),$$

y sus *componentes covariantes* respecto a la co-base $\varepsilon^\mu(\,\cdot\,) := \langle \sigma^\mu,\,\cdot\,\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu\,\cdot\,)$ son

$$a_\mu := \langle A, \sigma_\mu\rangle = \mathrm{Tr}(A\sigma_\mu) = G_{\mu\nu}\,a^\nu = 2\,a^\mu.$$

En resumen,

$$\boxed{a_\mu = 2\,a^\mu, \qquad A^\flat = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu\,\varepsilon^\mu = \sum_{\mu=0}^{3}(2a^\mu)\,\varepsilon^\mu}\,.$$

4. Parámetros reales explícitos (opcional)

Si

$$A = \alpha\,\sigma_0 + \gamma\,\sigma_1 + \delta\,\sigma_2 + \beta\,\sigma_3 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \gamma - \mathrm{i}\delta \\ \gamma + \mathrm{i}\delta & \alpha - \beta \end{pmatrix},$$

entonces

$$a^0 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_0 A) = \alpha, \quad a^1 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_1 A) = \gamma, \quad a^2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_2 A) = \delta, \quad a^3 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_3 A) = \beta,$$

y $a_\mu = 2a^\mu$. En particular, $A^\flat(X) = \mathrm{Tr}(AX)$ para todo $X \in H_2$.

Anexo: comprobaciones matriciales básicas

Para completar, verificamos dos productos cruzados (las demás son análogas):

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\,\sigma_1,$$
$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\,\sigma_2.$$

En ambos casos, la traza es 0 porque $\mathrm{Tr}(\sigma_k) = 0$ para $k = 1, 2, 3$.