Soluciones de los Ejemplos 4.5 y 4.7

Ejemplo 4.5: El espacio nulo en tres contextos

1. Transformación identidad

Sea $I : V \to V$ la identidad. El núcleo (espacio nulo) es

$$\mathcal{N}(I) = \{\, v \in V : \ Iv = 0 \,\}.$$

Como $Iv = v$ para todo v, la ecuación $Iv = 0$ implica $v = 0$. Por tanto,

$$\boxed{\mathcal{N}(I) = \{0\}}.$$

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y consideremos el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por definición,

$$\boxed{\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n : \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}},$$

o sea, el conjunto de *todas* las soluciones del sistema homogéneo. Si la única solución es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ e A es inyectiva; si hay soluciones no triviales, $\dim \mathcal{N}(A) \geq 1$.

3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea el operador lineal $A = D^2 - 1$ actuando sobre funciones $y : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ suaves, donde $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ y $D^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. El núcleo de A son las funciones que satisfacen

$$Ay = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (D^2 - 1)y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'' - y = 0.$$

La ecuación característica es $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$, luego la solución general es

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}},$$

y por tanto

$$\boxed{\mathcal{N}(A) = \{\, C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{F} \,\}}.$$

Ejemplo 4.7: Operador momento angular y sus conmutadores

Definiciones cuánticas

En la representación de coordenadas, los operadores posición y momento actúan sobre $\psi(\mathbf{r})$ como

$$\hat{X}\psi = x\psi, \quad \hat{Y}\psi = y\psi, \quad \hat{Z}\psi = z\psi, \qquad \hat{P}_x\psi = -i\hbar\,\partial_x\psi, \quad \hat{P}_y\psi = -i\hbar\,\partial_y\psi, \quad \hat{P}_z\psi = -i\hbar\,\partial_z\psi.$$

El operador momento angular es

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\,(\mathbf{r} \times \nabla).$$

Sus componentes cartesianas:

$$\boxed{\hat{L}_x = -i\hbar\,(y\,\partial_z - z\,\partial_y)}, \qquad \boxed{\hat{L}_y = -i\hbar\,(z\,\partial_x - x\,\partial_z)}, \qquad \boxed{\hat{L}_z = -i\hbar\,(x\,\partial_y - y\,\partial_x)}.$$

Cálculo explícito de $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]\psi = i\hbar\,\hat{L}_z\psi$

Escribimos $A = -i\hbar$ para abreviar. Entonces

$$\hat{L}_x = A\,(y\partial_z - z\partial_y), \qquad \hat{L}_y = A\,(z\partial_x - x\partial_z).$$

Primero,

$$\hat{L}_y\psi = A\,(z\psi_x - x\psi_z).$$

Aplicando $\hat{L}_x$ y usando regla del producto,

$$\begin{aligned} \hat{L}_x(\hat{L}_y\psi) &= A(y\partial_z - z\partial_y)\big[A(z\psi_x - x\psi_z)\big] \\ &= A^2\Big\{y(\psi_x + z\psi_{xz} - x\psi_{zz}) - z(z\psi_{xy} - x\psi_{yz})\Big\}. \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} \hat{L}_y(\hat{L}_x\psi) &= A(z\partial_x - x\partial_z)\big[A(y\psi_z - z\psi_y)\big] \\ &= A^2\Big\{z(y\psi_{zx} - z\psi_{yx}) - x(y\psi_{zz} - (\psi_y + z\psi_{yz}))\Big\}. \end{aligned}$$

Restando y usando la conmutatividad de derivadas mixtas ($\psi_{xz} = \psi_{zx}$, $\psi_{xy} = \psi_{yx}$, $\psi_{yz} = \psi_{zy}$), se cancelan todos los términos dobles y queda

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y]\psi = A^2\,(y\psi_x - x\psi_y) = (-\hbar^2)\,(y\partial_x - x\partial_y)\psi = i\hbar\,\big[-i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)\psi\big] = i\hbar\,\hat{L}_z\psi.$$

Por tanto,

$$\boxed{[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\,\hat{L}_z}.$$

Relación general

En notación de Levi-Civita,

$$\boxed{[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{L}_k},$$

que es el álgebra de Lie de $so(3)$ (generadores de rotaciones).