Ejemplo 4.9: acción de un operador lineal por su matriz

Sea el operador lineal $\mathbb{B} : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^2$ cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{V}^3$ y $\mathbb{V}^2$ es

$$B^i{}_j = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para un vector de entrada $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{V}^3$, el vector de salida $|y\rangle = (y_1, y_2) \in \mathbb{V}^2$ se obtiene por

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} B^i{}_j \, x_j, \qquad i = 1, 2.$$

En particular,

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 1x_2 + (-2)x_3 = 3x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 &= 1x_1 + 0x_2 + 4x_3 = x_1 + 4x_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\mathbb{B}(x_1, x_2, x_3) = \big(3x_1 + x_2 - 2x_3,\ x_1 + 4x_3\big).}$$

Verificación mediante columnas (imagen de la base)

Las columnas de B son las imágenes de los vectores base de $\mathbb{V}^3$:

$$\mathbb{B}|i_1\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}|i_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}|i_3\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Como $|x\rangle = x_1|i_1\rangle + x_2|i_2\rangle + x_3|i_3\rangle$, se tiene

$$\mathbb{B}|x\rangle = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo numérico

Para $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 3)$,

$$\mathbb{B}(2, -1, 3) = (-1, 14).$$

Nota. La matriz que representa a $\mathbb{B}$ depende de las bases elegidas; el operador como aplicación es el mismo aunque cambien las coordenadas.