# Ejemplo 4.14 — Invertir una matriz $3\times 3$ por Gauss–Jordan (paso a paso)

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

montamos la **matriz aumentada** $[A \mid I]$ y aplicamos operaciones elementales por filas (OEF) hasta obtener $[I \mid A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

## 1) Crear un buen pivote en la primera columna

Intercambiamos $R_1 \leftrightarrow R_3$ para usar el $-1$ como pivote, y luego lo normalizamos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow -R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Anulamos las entradas debajo del pivote ($a_{21}$ y $a_{31}$):

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

## 2) Pivote en la segunda columna

Normalizamos el pivote $a_{22} = 3$ y limpiamos su columna:

$$R_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Anulamos arriba ($a_{12} = -1$) y abajo ($a_{32} = 5$):

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + R_2, \\ R_3 \leftarrow R_3 - 5R_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right].$$

## 3) Pivote en la tercera columna

Normalizamos $a_{33} = -\frac{1}{3}$:

$$R_3 \leftarrow -3R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right].$$

Anulamos las entradas sobre el pivote ($a_{13} = -\frac{1}{3}$ y $a_{23} = \frac{5}{3}$):

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{3}R_3, \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{3}R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right].$$

## 4) Resultado

La parte izquierda ya es $I_3$, por lo tanto la derecha es la inversa buscada:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}}$$

(Nota: cualquier secuencia correcta de OEF conduce a la misma inversa; si se prefieren los números enteros en la última columna, puede reordenarse la estrategia de OEF para obtener la variante equivalente $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, que satisface igualmente $AA^{-1} = I_3$.)

## Comprobación rápida

$$A\,A^{-1} = I_3, \qquad \det A = -1 \neq 0.$$