De A_{ijk} y B^{lmnp} a un tensor mixto de orden 3

Enunciado. Sean A_{ijk} las componentes de un tensor *covariante de orden* 3 (tipo $(0,3)$) y B^{lmnp} las componentes de un tensor *contravariante de orden* 4 (tipo $(4,0)$). Probar que

$$T_i^{\ np} := A_{ijk}\, B^{jknp}$$

son las componentes de un **tensor mixto de orden** 3 (tipo $(2,1)$).

Definiciones y fórmulas usadas (*Volumen UNO*)

(VU–1) **Ley de transformación (covariante** $(0,s)$**):**

$$A'_{i'_1\cdots i'_s} = \frac{\partial x^{r_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{r_s}}{\partial x^{i'_s}}\, A_{r_1\cdots r_s}.$$

(VU–2) **Ley de transformación (contravariante** $(r,0)$**):**

$$B^{j'_1\cdots j'_r\prime} = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{u_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_r}}{\partial x^{u_r}}\, B^{u_1\cdots u_r}.$$

(VU–3) **Identidad jacobiana (delta de Kronecker)** (regla de la cadena):

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^c} = \delta^a_{\ c}, \qquad \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial x^{c'}} = \delta^{a'}_{\ \ c'}.$$

(VU–4) **Contracción de tensores**: contraer un índice arriba con uno abajo de un tensor de tipo (r,s) produce un tensor de tipo $(r-1,s-1)$. En componentes es la suma sobre un índice repetido (convención de Einstein).

(VU–5) **Tensor mixto** (r,s): sus componentes transforman como

$$T_{i'_1\cdots i'_s}^{\quad\ \ j'_1\cdots j'_r\prime} = \Big(\prod_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x^{p_\alpha}}{\partial x^{i'_\alpha}}\Big)\Big(\prod_{\beta=1}^{r} \frac{\partial x^{j'_\beta}}{\partial x^{q_\beta}}\Big) T_{p_1\cdots p_s}^{\quad\ \ q_1\cdots q_r}.$$

Demostración paso a paso

Definición del objeto. Definimos

$$T_i^{\ np} := A_{ijk}\, B^{jknp}, \tag{1}$$

donde se ha *contraído* j y k (índices abajo en A y arriba en B). Por (VU–4) esto ya sugiere tipo $(2,1)$; lo verificamos con su ley de transformación.

Paso 1: transformar A y B. Por (VU–1) para A (tipo $(0,3)$):

$$A'_{i'j'k'} = \frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}}\, A_{rst}. \tag{2}$$

Por (VU–2) para B (tipo $(4,0)$):

$$B^{j'k'n'p'\prime} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^u}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^v}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^w}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^x}\, B^{uvwx}. \tag{3}$$

Paso 2: transformar T. Usando (1), (2) y (3):

$$
\begin{aligned}
T_{i'}{}^{n'p'}{}' &= A'_{i'j'k'}\, B^{j'k'n'p'}{}' \\
&= \Big(\frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}} A_{rst}\Big)\Big(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^u}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^v}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^w}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^x} B^{uvwx}\Big).
\end{aligned}
$$

Paso 3: aplicar la identidad jacobiana (VU–3). Reagrupando los factores:

$$
\underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^u}}_{\delta^s{}_u}, \qquad \underbrace{\frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^v}}_{\delta^t{}_v}.
$$

Sustituyendo,

$$
T_{i'}{}^{n'p'}{}' = \frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^w}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^x}\, A_{rst}\, B^{stwx}.
$$

Paso 4: reconocer la ley mixta (VU–5). Si definimos en el sistema no primado

$$
T_r{}^{wx} := A_{rst}\, B^{stwx},
$$

entonces la expresión anterior se escribe

$$
\boxed{T_{i'}{}^{n'p'}{}' = \frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^w}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^x}\, T_r{}^{wx}}.
$$

Esto coincide exactamente con la ley de transformación de un tensor *mixto* con un índice abajo y dos arriba, es decir, de tipo $(2,1)$ y orden 3. Por lo tanto,

$$
\boxed{T_i{}^{np} = A_{ijk}B^{jknp} \text{ son componentes de un tensor mixto de orden 3 (tipo } (2,1)).}
$$

Comentario intrínseco (opcional)

En notación abstracta, $A \in \mathcal{T}^0{}_3(V)$ y $B \in \mathcal{T}^4{}_0(V)$. Entonces

$$
T = \mathrm{Contr}_{(j,k)}(A \otimes B) \in \mathcal{T}^2{}_1(V),
$$

lo que reproduce la expresión en componentes $T_i{}^{np} = A_{ijk}B^{jknp}$.

Resumen de fórmulas usadas (VU)

- Transformación covariante $(0,s)$: (VU–1).
- Transformación contravariante $(r,0)$: (VU–2).
- Identidades jacobianas (delta de Kronecker): (VU–3).
- Regla de contracción: (VU–4).
- Ley de transformación de tensores mixtos: (VU–5).