Demostración detallada de la fórmula de la base recíproca en $\mathbb{R}^3$

Planteamiento

Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base (no necesariamente ortogonal) de $\mathbb{R}^3$ con orientación derecha (dextrógira). Se define la *base recíproca* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ como el conjunto de vectores que satisface

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j \;=\; \delta^i_j, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Queremos demostrar que, para permutaciones cíclicas (i, j, k) de $(1, 2, 3)$,

$$\boxed{\mathbf{e}^i \;=\; \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}}. \tag{1}$$

Preliminares (identidades básicas)

- **Producto cruz:** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$, y $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \sin\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
- **Triple producto escalar (cíclico):**

  $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \;=\; \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \;=\; \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

  Geométricamente es el volumen orientado del paralelepípedo formado por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
- **No degeneración:** Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es base,

  $$V \;\coloneqq\; \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \;\neq\; 0.$$

  Si la base es dextrógira, entonces $V > 0$.

Demostración geométrica paso a paso

Paso 1: existencia (caso $i = 1$)

Queremos $\mathbf{e}^1$ tal que

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \qquad \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \qquad \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Las dos últimas igualdades dicen que $\mathbf{e}^1$ es perpendicular al plano $\mathrm{span}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Un vector perpendicular a ese plano es $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{e}^1 \;=\; m\big(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\big). \tag{2}$$

Esta elección *ya* garantiza $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ y $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$.

Paso 2: normalización

Imponemos $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$. Usando (2):

$$1 \;=\; \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 \;=\; m\,(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 \;=\; m\,\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \;=\; m\,V.$$

Luego

$$m \;=\; \frac{1}{V} \;=\; \frac{1}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}.$$

Sustituyendo en (2),

$$\boxed{\mathbf{e}^1 \;=\; \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}}.$$

Paso 3: verificación explícita

Con $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$:

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 \;=\; \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1}{V} \;=\; \frac{V}{V} \;=\; 1,$$

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 \;=\; \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2}{V} \;=\; 0, \qquad \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 \;=\; \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3}{V} \;=\; 0,$$

pues $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ es ortogonal a $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$.

Paso 4: casos $i = 2$ e $i = 3$

Por simetría cíclica de $(1, 2, 3)$ y por la propiedad cíclica del triple producto,

$$\mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V}, \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V}.$$

En ambos casos, el denominador vuelve a ser V por la identidad cíclica. Estas expresiones verifican $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$, $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, y análogamente para $\mathbf{e}^3$.

Observación 1. *Si la base tuviera orientación izquierda (no dextrógira), $V < 0$ y las fórmulas anteriores incorporan automáticamente el signo correcto a través de V.*

Demostración matricial (más algebraica)

Sea $E \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz cuyas *columnas* son los vectores de la base:

$$E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$, su vector de coordenadas en la base es el que resuelve $E\,\alpha = x$. La condición de base recíproca $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$ equivale a decir que *las filas* de E^{-1} son precisamente los covectores $\{\mathbf{e}^{1\top}, \mathbf{e}^{2\top}, \mathbf{e}^{3\top}\}$; es decir,

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{1\top} \\ \mathbf{e}^{2\top} \\ \mathbf{e}^{3\top} \end{bmatrix}.$$

Como E es invertible, $E^{-T} = (E^{-1})^\top$ tiene por *columnas* a los vectores $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$:

$$E^{-T} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \end{bmatrix}.$$

Usando adjunta (adjugate),

$$E^{-T} = \frac{1}{\det E}\,\mathrm{adj}(E)^T.$$

Pero para una matriz E con columnas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se tiene la identidad clásica

$$\mathrm{adj}(E) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{bmatrix},$$

cuyas columnas son precisamente los *cofactores vectoriales*. Además $\det E = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = V$. Por tanto,

$$E^{-T} \;=\; \frac{1}{V}\big[\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\,\big],$$

y leyendo columna a columna,

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{V}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{V}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{V},$$

que coincide con (1).

Demostración en notación índice (opcional, muy detallada)

Sea $E = [e_{i\alpha}]$ con $i \in \{1,2,3\}$ indicando la columna (base) y $\alpha \in \{1,2,3\}$ la componente. El símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ verifica:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_\alpha \;=\; \sum_{\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, a_\beta b_\gamma, \qquad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, a_\alpha b_\beta c_\gamma.$$

Definiendo

$$V \;=\; \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, e_{1\alpha}e_{2\beta}e_{3\gamma}, \qquad (\mathbf{e}^1)_\alpha \;=\; \frac{1}{V}\sum_{\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, e_{2\beta}e_{3\gamma},$$

se obtiene

$$\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_1 \;=\; \sum_\alpha (\mathbf{e}^1)_\alpha e_{1\alpha} \;=\; \frac{1}{V}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, e_{1\alpha}e_{2\beta}e_{3\gamma} \;=\; \frac{V}{V} \;=\; 1,$$

y, usando $\sum_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{2\beta}e_{3\gamma}e_{2\alpha} = 0$ (porque el determinante con dos columnas iguales es cero),

$$\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_2 \;=\; 0, \qquad \mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_3 \;=\; 0.$$

Los casos $i = 2, 3$ son análogos. Por unicidad de la solución del sistema lineal $\big(\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j = \delta^i_j\big)$, esta construcción da la base recíproca.

Comprobaciones y casos límite

- **Base ortonormal:** Si $\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{e}}_i$ ortonormales y dextrógiros, entonces $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1$ y las fórmulas dan $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$, como debe ser.
- **Escala y orientación:** Si se reescala $\mathbf{e}_i \mapsto \lambda_i \mathbf{e}_i$, entonces $V \mapsto \lambda_1\lambda_2\lambda_3 V$ y $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k \mapsto \lambda_j\lambda_k(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$; por tanto $\mathbf{e}^i \mapsto \dfrac{\lambda_j\lambda_k}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\,\mathbf{e}^i = \dfrac{1}{\lambda_i}\,\mathbf{e}^i$, coherente con $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_i = 1$.

Conclusión

Hemos mostrado, con tres enfoques (geométrico, matricial y por índices), que la base recíproca de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\mathbf{e}^i \;=\; \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}, \qquad (i, j, k) \text{ cíclico,}$$

y que ésta satisface exactamente $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$.