Cambio de coordenadas y transformación de tensores (VU)

Enunciado

Dados dos sistemas ortogonales $O \equiv (x, y, z)$ y $O' \equiv (x', y', z')$, donde O' se obtiene (i) rotando un ángulo $\theta = \pi/6$ alrededor de z, y luego (ii) rotando $\phi = \pi/2$ alrededor de x', de modo que y' coincide con z.

(a) Exprese $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ en O'.

(b) Dado el tensor (operador) de esfuerzos en O

$$[P] = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

calcule su matriz en O'.

Fórmulas y definiciones usadas (Volumen UNO)

(VU–1) Matriz de cosenos directores / cambio ortonormal. Si $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ y $\{\hat{e}_{x'}, \hat{e}_{y'}, \hat{e}_{z'}\}$ son bases ortonormales, la matriz $R = \begin{bmatrix} \hat{e}_{x'}^\top \\ \hat{e}_{y'}^\top \\ \hat{e}_{z'}^\top \end{bmatrix}$ es *ortogonal* ($R^{-1} = R^\top$).

(VU–2) Transformación de componentes de un vector (pasiva). Con R como arriba:

$$\boxed{\mathbf{v}' = R\,\mathbf{v}} \qquad (v_i' = \hat{e}_{i'} \cdot \mathbf{v}).$$

(VU–3) Transformación de un tensor $(1, 1)$ (operador lineal). En bases ortonormales:

$$\boxed{[P]' = R\,[P]\,R^\top} \qquad \text{(cambio por semejanza).}$$

Construcción de los ejes x', y', z'

Primera rotación (alrededor de z) con $\theta = \pi/6$:

$$\hat{e}_{x_1} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \tfrac{1}{2}\hat{\jmath}, \quad \hat{e}_{y_1} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} = -\tfrac{1}{2}\hat{\imath} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}, \quad \hat{e}_{z_1} = \hat{k}.$$

Segunda rotación (alrededor de x') con $\phi = \pi/2$ deja fijo x' y lleva y_1 a z_1, por lo que $\boxed{\hat{e}_{y'} = \hat{k}}$. Entonces

$$\hat{e}_{x'} = \hat{e}_{x_1} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right), \qquad \hat{e}_{z'} = \hat{e}_{x'} \times \hat{e}_{y'} = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

La matriz de cambio (filas = ejes nuevos escritos en la base vieja) es

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}}, \qquad R^{-1} = R^\top.$$

(a) Componentes de a y b en O'

Por (VU–2), $\mathbf{v}' = R\,\mathbf{v}$.

$$\mathbf{a}' = R\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + 0\cdot 3\\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3\\ \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + 0\cdot 3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 3\\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}_{(x',y',z')}}.$$

$$\mathbf{b}' = R\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\\ 3\\ \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\\ 3\\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}_{(x',y',z')}}.$$

Chequeo: como $y' \equiv z$, la segunda componente de ambos vectores es su componente z original $(= 3)$.

(b) Tensor de esfuerzos en O'

Por (VU–3):

$$[P]' = R\,[P]\,R^{\top}.$$

Para mostrar el procedimiento, primero calculemos $S := R\,[P]$:

$$S = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & 0 & P_4\\ 0 & P_2 & 0\\ 0 & 0 & P_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 & \frac{1}{2}P_2 & \frac{\sqrt{3}}{2}P_4\\ 0 & 0 & P_3\\ \frac{1}{2}P_1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}P_2 & \frac{1}{2}P_4\end{pmatrix}.$$

Luego $[P]' = S\,R^{\top}$ con $R^{\top} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Como ejemplo de entrada,

$$P'_{11} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}P_1,\ \tfrac{1}{2}P_2,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}P_4\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2.$$

Análogamente,

$$P'_{12} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}P_1,\ \tfrac{1}{2}P_2,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}P_4\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,P_4, \qquad P'_{22} = (0,0,P_3)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = P_3,$$

y así con las demás entradas. El resultado final simplificado es

$$\boxed{[P]' = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\,P_4 & \frac{\sqrt{3}}{4}\,(P_1 - P_2)\\ 0 & P_3 & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{4}\,(P_1 - P_2) & \frac{1}{2}\,P_4 & \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_2\end{pmatrix}_{(x',y',z')}}.$$

Observación. La fila/columna y' queda desacoplada porque $y' \parallel z$ y, en $[P]$, el eje z ya estaba desacoplado. Si $P_4 = 0$ y/o $P_1 = P_2$, el bloque (x', z') resulta simétrico/diagonal.