Rotación alrededor del eje z: matriz, ortogonalidad y preservación del producto interno

Sea $x = (x, y, z)^{\mathsf T} \in \mathbb{R}^3$ el vector de coordenadas de un punto P en un sistema cartesiano $\{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$. Rotamos el sistema (o el vector) un ángulo θ alrededor del eje z. En este caso, la componente sobre z no cambia y en el plano xy se aplica la rotación usual de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \tilde{x} \;=\; x\cos\theta + y\sin\theta, \\ \tilde{y} \;=\; -\,x\sin\theta + y\cos\theta, \\ \tilde{z} \;=\; z. \end{cases} \tag{1}$$

Forma matricial

Definimos los vectores columna $x = (x, y, z)^{\mathsf T}$ y $\tilde{x} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^{\mathsf T}$. La transformación (1) se escribe

$$\tilde{x} \;=\; A(\theta)\,x, \qquad A(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

En notación de Einstein (índice repetido implica suma), esto es

$$\tilde{x}^{\,i} \;=\; A^i{}_j\, x^j.$$

La traspuesta es la inversa (ortogonalidad)

Calculamos la traspuesta

$$A(\theta)^{\mathsf T} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; A(-\theta).$$

Entonces

$$A(\theta)^{\mathsf T} A(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Por tanto,

$$A(\theta)^{-1} \;=\; A(\theta)^{\mathsf T},$$

y $A(\theta)$ es una matriz *ortogonal.* En notación indicial:

$$A^i{}_j\, A^j{}_k \;=\; \delta^i{}_k.$$

Además, $\det A(\theta) = +1$, de modo que se trata de una rotación propia (sin reflexión).

Preservación del producto interno

Para el producto interno euclidiano $\langle u, v\rangle = u^{\mathsf T} v$, se tiene

$$\|\tilde{x}\|^2 = \tilde{x}^{\mathsf T}\tilde{x} = (Ax)^{\mathsf T}(Ax) = x^{\mathsf T} A^{\mathsf T} A x = x^{\mathsf T} I x = \|x\|^2.$$

Es decir, la rotación (2) *preserva longitudes y ángulos.* En índices:

$$x^i x_i \;=\; \tilde{x}^{\,i}\tilde{x}_i \quad\Longleftrightarrow\quad A^i{}_j\, A^j{}_k \;=\; \delta^i{}_k.$$

Ejemplo numérico

Para $\theta = 90°$ (esto es, $\cos\theta = 0$ y $\sin\theta = 1$),

$$A(90°) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $x = (1, 2, 3)^\mathsf{T}$, entonces

$$\tilde{x} = A(90°)\, x = (2, -1, 3)^\mathsf{T}, \qquad \|x\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \|\tilde{x}\|^2.$$

Se verifica explícitamente la preservación del producto interno.

Resumen

- La rotación alrededor de z por θ está dada por (2).
- $A(\theta)$ es ortogonal: $A^{-1} = A^\mathsf{T}$ y $A^i{}_j A^j{}_k = \delta^i{}_k$.
- La transformación conserva longitudes y ángulos: $\|x\| = \|\tilde{x}\|$.