

# Fuerza central para un movimiento elíptico armónico

**Enunciado.** Una partícula se mueve según

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t), \quad (1)$$

donde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  son vectores constantes y  $\omega$  es constante. Demuestre que la fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza central.

**Solución paso a paso.**

**1) Velocidad.** Derivando (1) respecto del tiempo  $t$  y usando  $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$ ,  $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$ , se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \mathbf{v}(t) = -\omega \mathbf{a} \sin(\omega t) + \omega \mathbf{b} \cos(\omega t). \quad (2)$$

**2) Aceleración.** Volviendo a derivar (2):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\omega^2 \mathbf{a} \cos(\omega t) - \omega^2 \mathbf{b} \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 [\mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t)] \\ &= -\omega^2 \mathbf{r}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación (3) es la del oscilador armónico *vectorial*:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0.$$

**3) Fuerza (Segunda ley de Newton).** Multiplicando (3) por la masa  $m$ :

$$\mathbf{F}(t) = m \ddot{\mathbf{r}}(t) = -m \omega^2 \mathbf{r}(t). \quad (4)$$

**4) Carácter central de la fuerza.** Una fuerza es *central* si es colineal con el radio vector y su módulo depende sólo de  $r = \|\mathbf{r}\|$ , i.e.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

A partir de (4):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m \omega^2 \mathbf{r} = (-m \omega^2 r) \hat{\mathbf{r}}, \quad (5)$$

que es de la forma requerida con  $f(r) = -m \omega^2 r$ . Por tanto, la fuerza apunta a lo largo de  $\mathbf{r}$  (hacia el origen) y su intensidad depende únicamente de  $r$ : **es una fuerza central** con centro en el origen.

**5) Verificaciones útiles.**

(i) *Momento angular constante.* Sea  $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ . Entonces

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m(\mathbf{0} + \mathbf{r} \times (-\omega^2 \mathbf{r})) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

de modo que  $\mathbf{L}$  se conserva, como debe ocurrir bajo fuerzas centrales.

(ii) *Potencial asociado.* Existe un potencial escalar

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7)$$

tal que  $-\nabla U = \mathbf{F}$ , pues  $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$  en una base cartesiana fija. Con ello, la energía mecánica  $E = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + U(\mathbf{r})$  es constante.

**Conclusión.** La fuerza que actúa sobre la partícula es

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m\omega^2 \mathbf{r}}$$

y es una fuerza central (dirigida al origen y de módulo que depende sólo de  $r$ ). La partícula se mueve en el plano generado por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  describiendo, en general, una elipse centrada en el origen con frecuencia  $\omega$ .