# Sistemas ortogonales: factores de escala, métrica y vectores base unitarios

En un sistema ortogonal $q^1, q^2, q^3$ con radio–vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$:

$$h_i = \|\partial_i \mathbf{r}\|, \quad \widehat{e}_i = \frac{1}{h_i}\,\partial_i \mathbf{r}, \quad g_{ij} = \partial_i \mathbf{r} \cdot \partial_j \mathbf{r}, \quad ds^2 = \sum_i h_i^2\,(dq^i)^2 \ \ \text{(si es ortogonal).}$$

## (a) Coordenadas cilíndricas parabólicas $(u, v, \varphi)$

Definición del cambio:

$$x = uv\cos\varphi, \qquad y = uv\sin\varphi, \qquad z = \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

Es decir,

$$\mathbf{r}(u, v, \varphi) = \big(uv\cos\varphi,\ uv\sin\varphi,\ \tfrac{u^2-v^2}{2}\big).$$

**Explicación (cálculo de $h_i$).** Primero derivamos:

$$\partial_u \mathbf{r} = (v\cos\varphi,\ v\sin\varphi,\ u), \quad \partial_v \mathbf{r} = (u\cos\varphi,\ u\sin\varphi,\ -v), \quad \partial_\varphi \mathbf{r} = (-uv\sin\varphi,\ uv\cos\varphi,\ 0).$$

Luego tomamos sus normas:

$$\|\partial_u \mathbf{r}\|^2 = v^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + u^2 = u^2 + v^2, \qquad \|\partial_v \mathbf{r}\|^2 = u^2 + v^2,$$

$$\|\partial_\varphi \mathbf{r}\|^2 = (uv)^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = (uv)^2.$$

Por tanto

$$\boxed{h_u = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad h_\varphi = |uv|}.$$

(En la práctica se suele escribir $h_\varphi = uv$ asumiendo $uv \geq 0$; por definición, los factores son positivos.)

**Explicación (por qué los cruzados son cero).** Verificamos los productos punto cruzados:

$$\partial_u \mathbf{r} \cdot \partial_v \mathbf{r} = uv(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - uv = 0,$$

$$\partial_u \mathbf{r} \cdot \partial_\varphi \mathbf{r} = -uv^2\cos\varphi\sin\varphi + uv^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$\partial_v \mathbf{r} \cdot \partial_\varphi \mathbf{r} = -u^2 v\sin\varphi\cos\varphi + u^2 v\cos\varphi\sin\varphi = 0.$$

Al ser todos cero, el sistema es ortogonal y la métrica es diagonal.

**Métrica (elemento de línea).**

$$\boxed{ds^2 = (u^2 + v^2)\,du^2 + (u^2 + v^2)\,dv^2 + (uv)^2\,d\varphi^2}.$$

Equivalente a:

$$\boxed{g_{uu} = u^2 + v^2, \quad g_{vv} = u^2 + v^2, \quad g_{\varphi\varphi} = (uv)^2, \quad g_{uv} = g_{u\varphi} = g_{v\varphi} = 0}.$$

**Vectores base unitarios.**

$$\widehat{e}_u = \frac{(v\cos\varphi,\ v\sin\varphi,\ u)}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad \widehat{e}_v = \frac{(u\cos\varphi,\ u\sin\varphi,\ -v)}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad \widehat{e}_\varphi = \frac{(-uv\sin\varphi,\ uv\cos\varphi,\ 0)}{|uv|}.$$

## (b) Coordenadas hiperbólicas $(u, v, \varphi)$

Definición del cambio:

$$x = \cosh u\,\cos v\,\cos\varphi, \quad y = \cosh u\,\cos v\,\sin\varphi, \quad z = \sinh u\,\sin v.$$

Es decir,

$$\mathbf{r}(u,v,\varphi) = \big(\cosh u\,\cos v\,\cos\varphi,\ \cosh u\,\cos v\,\sin\varphi,\ \sinh u\,\sin v\big).$$

**Explicación (cálculo de $h_i$).** Derivadas:

$$\partial_u\mathbf{r} = (\sinh u\,\cos v\,\cos\varphi,\ \sinh u\,\cos v\,\sin\varphi,\ \cosh u\,\sin v),$$

$$\partial_v\mathbf{r} = (-\cosh u\,\sin v\,\cos\varphi,\ -\cosh u\,\sin v\,\sin\varphi,\ \sinh u\,\cos v),$$

$$\partial_\varphi\mathbf{r} = (-\cosh u\,\cos v\,\sin\varphi,\ \cosh u\,\cos v\,\cos\varphi,\ 0).$$

Normas:

$$\|\partial_u\mathbf{r}\|^2 = \sinh^2 u\,\cos^2 v + \cosh^2 u\,\sin^2 v, \qquad \|\partial_v\mathbf{r}\|^2 = \cosh^2 u\,\sin^2 v + \sinh^2 u\,\cos^2 v,$$

$$\|\partial_\varphi\mathbf{r}\|^2 = (\cosh u\,\cos v)^2.$$

Luego,

$$\boxed{h_u = h_v = \sqrt{\sinh^2 u\,\cos^2 v + \cosh^2 u\,\sin^2 v}, \qquad h_\varphi = \cosh u\,\cos v}.$$

**Explicación (por qué los cruzados son cero).** Productos cruzados representativos:

$$\partial_u\mathbf{r}\cdot\partial_v\mathbf{r} = -\sinh u\cosh u\,\cos v\,\sin v(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cosh u\sinh u\,\sin v\,\cos v = 0,$$

$$\partial_u\mathbf{r}\cdot\partial_\varphi\mathbf{r} = -\sinh u\cosh u\,\cos^2 v(\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = 0,$$

$$\partial_v\mathbf{r}\cdot\partial_\varphi\mathbf{r} = \cosh^2 u\,\sin v\,\cos v(\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = 0.$$

Por lo tanto la métrica es diagonal.

**Métrica (elemento de línea).**

$$\boxed{ds^2 = \big(\sinh^2 u\,\cos^2 v + \cosh^2 u\,\sin^2 v\big)\,(du^2 + dv^2) + (\cosh u\,\cos v)^2\,d\varphi^2}.$$

Equivalente a:

$$\boxed{g_{uu} = g_{vv} = \sinh^2 u\,\cos^2 v + \cosh^2 u\,\sin^2 v, \quad g_{\varphi\varphi} = (\cosh u\,\cos v)^2, \quad g_{uv} = g_{u\varphi} = g_{v\varphi} = 0}.$$

**Vectores base unitarios.**

$$\widehat{e}_u = \frac{\partial_u\mathbf{r}}{h_u}, \qquad \widehat{e}_v = \frac{\partial_v\mathbf{r}}{h_v}, \qquad \widehat{e}_\varphi = \frac{\partial_\varphi\mathbf{r}}{\cosh u\,\cos v}.$$