Plano tangente y línea normal a la esfera en $(0, 0, a)$

Enunciado. Hallar el *plano tangente* y la *línea normal* a la superficie de nivel

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

en el punto $P_0 = (0, 0, a)$.

Solución detallada

1. **Superficie de nivel y vector normal.**
   Para una superficie de nivel $\varphi(x, y, z) = c$, el gradiente $\nabla\varphi$ es perpendicular a la superficie en cada punto. Por ello, en P_0 el vector

   $$\mathbf{n}_0 = \nabla\varphi(P_0)$$

   es un vector normal al plano tangente y a la propia superficie.

2. **Cálculo del gradiente.**
   Como $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, se tiene

   $$\nabla\varphi(x, y, z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (2x,\ 2y,\ 2z).$$

   Evaluando en $P_0 = (0, 0, a)$:

   $$\mathbf{n}_0 = \nabla\varphi(P_0) = (0,\ 0,\ 2a).$$

   Cualquier múltiplo no nulo de $(0, 0, 2a)$ sirve como normal.

3. **Ecuación del plano tangente.**
   El plano tangente a una superficie de nivel en P_0 con normal $\mathbf{n}_0$ se escribe como

   $$\mathbf{n}_0 \cdot \big((x, y, z) - P_0\big) = 0.$$

   Sustituyendo $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 2a)$ y $P_0 = (0, 0, a)$:

   $$(0, 0, 2a) \cdot (x - 0,\ y - 0,\ z - a) = 2a(z - a) = 0.$$

   Si $a \neq 0$, dividiendo por $2a$ (o, simplemente, observando el producto) queda

   $$\boxed{z = a}.$$

   (Para $a = 0$, el plano tangente en el origen sigue siendo $z = 0$.)

4. **Ecuación de la línea normal.**
   La línea normal es la recta que pasa por P_0 con dirección $\mathbf{n}_0$. Una parametrización conveniente es

   $$\mathbf{r}(t) = P_0 + t\,\mathbf{n}_0 = (0, 0, a) + t(0, 0, 2a).$$

   Como la dirección puede reescalarse, una forma más simple (con dirección unitaria en el eje z) es

   $$\boxed{x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = a + t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. **Verificación geométrica.**
   La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ tiene radios ortogonales a la superficie. En P_0, el radio es paralelo al eje z, de modo que el plano tangente debe ser horizontal ($z = a$) y la normal coincide con la dirección del eje z, como se obtuvo.

Resultado.

$\boxed{\text{Plano tangente: } z = a}$ $\boxed{\text{Línea normal: } (x, y, z) = (0, 0, a) + t(0, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}.}$