# Matriz de una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ respecto a bases no estándar

Dada

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x-2z\\x+2y+3z\\y-2z\end{bmatrix},$$

y las bases

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad \mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4,$$

queremos la matriz $[T]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}$ tal que $[T]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}\,[x]_{\mathcal{B}} = [T(x)]_{\mathcal{F}}$.

## Receta

Para cada $j = 1, 2, 3$:

1. Calculamos $T(b_j)$ en coordenadas estándar de $\mathbb{R}^4$, $T(b_j) = \begin{bmatrix}u\\v\\w\\t\end{bmatrix}$.

2. Hallamos los coeficientes $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ tales que $T(b_j) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4$. Como

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = \begin{bmatrix}c_1\\c_1+c_2\\c_1+c_2+c_3\\c_1+c_2+c_3+c_4\end{bmatrix},$$

   obtenemos el sistema triangular

$$c_1 = u, \qquad c_2 = v-u, \qquad c_3 = w-v, \qquad c_4 = t-w.$$

3. La columna $j$ de $[T]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}$ es $\big(c_1, c_2, c_3, c_4\big)^{\mathsf{T}}$.

## Cálculo de columnas

**Columna 1:** $b_1 = (1, 1, 0)^{\mathsf{T}}$**.**

$$T(b_1) = \begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = 1-2 = -1,\ c_3 = 3-1 = 2,\ c_4 = 1-3 = -2.$$

Columna 1: $\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\-2\end{bmatrix}$.

**Columna 2:** $b_2 = (1,0,1)^{\mathsf{T}}$**.**

$$T(b_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = -1 - 1 = -2,\ c_3 = 4 - (-1) = 5,\ c_4 = -2 - 4 = -6.$$

Columna 2: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$.

**Columna 3:** $b_3 = (0,1,1)^{\mathsf{T}}$**.**

$$T(b_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = -2 - 1 = -3,\ c_3 = 5 - (-2) = 7,\ c_4 = -1 - 5 = -6.$$

Columna 3: $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}$.

## Matriz final

$$[T]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -6 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Uso.** Para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$, si $[x]_{\mathcal{B}}$ son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$, entonces

$$[T(x)]_{\mathcal{F}} = [T]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}\,[x]_{\mathcal{B}}.$$