

Fuerza central para un movimiento elíptico armónico

Enunciado. Una partícula se mueve según

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t), \quad (1)$$

donde \mathbf{a} , \mathbf{b} son vectores constantes y ω es constante. Demuestre que la fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza central.

Solución paso a paso.

1) Velocidad. Derivando (1) respecto del tiempo t y usando $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$, $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$, se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \mathbf{v}(t) = -\omega \mathbf{a} \sin(\omega t) + \omega \mathbf{b} \cos(\omega t). \quad (2)$$

2) Aceleración. Volviendo a derivar (2):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\omega^2 \mathbf{a} \cos(\omega t) - \omega^2 \mathbf{b} \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 [\mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t)] \\ &= -\omega^2 \mathbf{r}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación (3) es la del oscilador armónico *vectorial*:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0.$$

3) Fuerza (Segunda ley de Newton). Multiplicando (3) por la masa m :

$$\mathbf{F}(t) = m \ddot{\mathbf{r}}(t) = -m \omega^2 \mathbf{r}(t). \quad (4)$$

4) Carácter central de la fuerza. Una fuerza es *central* si es colineal con el radio vector y su módulo depende sólo de $r = \|\mathbf{r}\|$, i.e.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

A partir de (4):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m \omega^2 \mathbf{r} = (-m \omega^2 r) \hat{\mathbf{r}}, \quad (5)$$

que es de la forma requerida con $f(r) = -m \omega^2 r$. Por tanto, la fuerza apunta a lo largo de \mathbf{r} (hacia el origen) y su intensidad depende únicamente de r : **es una fuerza central** con centro en el origen.

5) Verificaciones útiles.

(i) *Momento angular constante.* Sea $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$. Entonces

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m (\mathbf{0} + \mathbf{r} \times (-\omega^2 \mathbf{r})) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

de modo que \mathbf{L} se conserva, como debe ocurrir bajo fuerzas centrales.

(ii) *Potencial asociado.* Existe un potencial escalar

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7)$$

tal que $-\nabla U = \mathbf{F}$, pues $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$ en una base cartesiana fija. Con ello, la energía mecánica $E = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + U(\mathbf{r})$ es constante.

Conclusión. La fuerza que actúa sobre la partícula es

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m\omega^2 \mathbf{r}}$$

y es una fuerza central (dirigida al origen y de módulo que depende sólo de r). La partícula se mueve en el plano generado por **a** y **b** describiendo, en general, una elipse centrada en el origen con frecuencia ω .