Ejercicio: Demostrar que $I^{i}{}_{j}$ es un tensor (inciso a)

Enunciado y definición

Para un cuerpo continuo, el *tensor de inercia mixto* se define por

$$I^{i}{}_{j} \;\equiv\; \int_V \rho(\boldsymbol{r})\,\Big(\delta^{i}{}_{j}\,x^k x_k \;-\; x^i x_j\Big)\,\mathrm{d}\nu, \qquad x^i=\{x,y,z\}, \quad \mathrm{d}\nu = dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

Definiciones usadas (del VolumenUNO)

1. **Delta de Kronecker:** $\delta^p{}_q = 1$ si $p=q$ y 0 en otro caso.
2. **Transformación cartesiano→cartesiano (rotación):**
$$x^{i'} = A^{i'}{}_{k}\,x^k, \qquad x^k = \tilde{A}^{k}{}_{i'}\,x^{i'}, \qquad A^{i'}{}_{k}\,\tilde{A}^{k}{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}.$$
3. **Componentes covariantes (índice abajo):** $x_j = g_{jk}x^k$. En Euclídea $g_{jk}=\delta_{jk}$, y bajo rotaciones
$$x_{j'} = \tilde{A}^{q}{}_{j'}\,x_q \qquad \text{(transforman con la inversa).}$$
4. **Invariancias de una rotación:** $x^{k'}x_{k'} = x^k x_k$ (el producto interno r^2 no cambia) y $\mathrm{d}\nu' = \mathrm{d}\nu$.
5. **Ley de transformación de un tensor $(1,1)$:**
$$T^{i'}{}_{j'} = A^{i'}{}_{p}\,\tilde{A}^{q}{}_{j'}\,T^{p}{}_{q}.$$

Demostración de que $I^{i}{}_{j}$ es tensor

Queremos verificar que $I^{i}{}_{j}$ satisface la ley anterior.

1. Escribir $I^{i'}{}_{j'}$ en el sistema rotado

Por (1),
$$I^{i'}{}_{j'} = \int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')\Big(\delta^{i'}{}_{j'}\,x^{k'}x_{k'} - x^{i'}x_{j'}\Big)\,\mathrm{d}\nu'.$$

2. Sustituir las transformaciones básicas

Usamos:
$$x^{i'} = A^{i'}{}_{p}x^p, \qquad x_{j'} = \tilde{A}^{q}{}_{j'}x_q, \qquad \delta^{i'}{}_{j'} = A^{i'}{}_{p}\,\tilde{A}^{q}{}_{j'}\,\delta^p{}_q,$$
y las invariancias $x^{k'}x_{k'} = x^k x_k$, $\mathrm{d}\nu' = \mathrm{d}\nu$. Entonces
$$I^{i'}{}_{j'} = \int_V \rho\Big[\big(A^{i'}{}_{p}\tilde{A}^{q}{}_{j'}\delta^p{}_q\big)\,x^k x_k - \big(A^{i'}{}_{p}x^p\big)\big(\tilde{A}^{q}{}_{j'}x_q\big)\Big]\,\mathrm{d}\nu.$$

Pregunta frecuente: ***¿de dónde sale $x_{j'} = \tilde{A}^q{}_{j'} x_q$?*** Partimos de $x_{j'} = g_{j'i'} x^{i'}$ y de $x^{i'} = A^{i'}{}_k x^k$:

$$x_{j'} = g_{j'i'} A^{i'}{}_k x^k = \big(\tilde{A}^p{}_{j'} \tilde{A}^q{}_{i'} g_{pq}\big) A^{i'}{}_k x^k = \tilde{A}^p{}_{j'} g_{pq} \underbrace{\tilde{A}^q{}_{i'} A^{i'}{}_k}_{=\,\delta^q{}_k} x^k = \tilde{A}^p{}_{j'} g_{pq} x^q = \tilde{A}^q{}_{j'} x_q.$$

3. Reorganizar y factorizar constantes

$A^{i'}{}_p, \tilde{A}^q{}_{j'}, \delta^p{}_q$ no dependen del punto, así que salen de la integral:

$$I^{i'}{}_{j'} = A^{i'}{}_p \, \tilde{A}^q{}_{j'} \int_V \rho \Big(\delta^p{}_q \, x^k x_k - x^p x_q\Big) \, \mathrm{d}\nu.$$

Pregunta frecuente: ***la "simplificación" paso a paso***

1. Distribuyo: $(A\tilde{A}\delta)\, x^k x_k - (Ax)(\tilde{A}x) = A\tilde{A}\big(\delta \, x^k x_k - x^p x_q\big)$.
2. Saco $A^{i'}{}_p \tilde{A}^q{}_{j'}$ de la integral por linealidad.
3. Observo que k es índice *mudo* (se contrae en $x^k x_k = r^2$) y que p, q quedan *libres* fuera de la integral.

4. Reconocer la definición original

El integral que queda es *exactamente* la definición de $I^p{}_q$:

$$I^p{}_q = \int_V \rho \Big(\delta^p{}_q \, x^k x_k - x^p x_q\Big) \, \mathrm{d}\nu.$$

Por tanto,

$$\boxed{I^{i'}{}_{j'} = A^{i'}{}_p \, \tilde{A}^q{}_{j'} \, I^p{}_q}$$

que coincide con la ley de transformación de un tensor $(1,1)$. □

Conclusión

Como $I^{i'}{}_{j'} = A^{i'}{}_p \, \tilde{A}^q{}_{j'} I^p{}_q$ para cualquier rotación cartesiana, $I^i{}_j$ **es un tensor mixto** $(1,1)$. El paso clave es escribir $x^{i'}$ y $x_{j'}$ con A y $\tilde{A}$ y factorizar las constantes para reconocer dentro de la integral la *misma* expresión que define $I^p{}_q$.