

Ejercicios 4.3.7 ejercicio 2

Marco común y notación

Espacio: $P_4(t)$ con producto interno

$$\langle g|f \rangle = \int_{-1}^1 g(t) f(t) dt.$$

Bases:

$$\mathcal{B}_m = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}, \quad \mathcal{B}_L = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

Polinomios de Legendre (no normalizados) hasta grado 4:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad P_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3).$$

Ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Polinomio de trabajo:

$$f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3.$$

(a) Coordenadas de f y matriz de cambio de base

1. Coordenadas de f en la base de monomios \mathcal{B}_m

Como $f(t) = 0 \cdot 1 + 5t + 3t^2 + 4t^3 + 0 \cdot t^4$, tenemos

$$[f]_{\mathcal{B}_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Coordenadas de f en la base de Legendre \mathcal{B}_L

Escribimos $f = \sum_{n=0}^4 c_n P_n$ y, por ortogonalidad,

$$c_n = \frac{\langle P_n | f \rangle}{\langle P_n | P_n \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 P_n(t) f(t) dt}{\frac{2}{2n+1}}.$$

Cálculos:

$$\int_{-1}^1 f = \int (5t + 3t^2 + 4t^3) dt = 2 \Rightarrow c_0 = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\int_{-1}^1 t f = \int (5t^2 + 3t^3 + 4t^4) dt = \frac{74}{15} \Rightarrow c_1 = \frac{\frac{74}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{37}{5}.$$

$$\int_{-1}^1 P_2 f = \frac{1}{2} \int (3t^2 - 1)(5t + 3t^2 + 4t^3) dt = \frac{4}{5} \Rightarrow c_2 = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = 2.$$

$$\int_{-1}^1 P_3 f = \frac{1}{2} \int (5t^3 - 3t)(5t + 3t^2 + 4t^3) dt = \frac{16}{35} \Rightarrow c_3 = \frac{\frac{16}{35}}{\frac{2}{7}} = \frac{8}{5}.$$

$$c_4 = 0 \quad (\text{por ortogonalidad y } \deg f = 3).$$

Por tanto,

$$[f]_{\mathcal{B}_L} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{37}{5} \\ 2 \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Matriz de cambio de base

Escribiendo cada P_n en monomios:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= t, \\ P_2 &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} t^2, \\ P_3 &= -\frac{3}{2} t + \frac{5}{2} t^3, \\ P_4 &= \frac{3}{8} \cdot 1 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{35}{8} t^4. \end{aligned}$$

Con ello, la matriz C (Legendre \rightarrow monomios) y su inversa son

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{35} \end{bmatrix}.$$

Relaciones: $[f]_{\mathcal{B}_m} = C [f]_{\mathcal{B}_L}$, $[f]_{\mathcal{B}_L} = C^{-1} [f]_{\mathcal{B}_m}$.

(b) Proyector ortogonal sobre $P_2(t)$ y proyección de f

Subespacio $P_2 = \text{span}\{1, t, t^2\} = \text{span}\{P_0, P_1, P_2\}$.

1. Operador proyector en forma abstracta

Para base ortogonal $\{P_n\}$,

$$\Pi_2[g](t) = \sum_{n=0}^2 \frac{\langle P_n | g \rangle}{\langle P_n | P_n \rangle} P_n(t) = \sum_{n=0}^2 \frac{2n+1}{2} \left(\int_{-1}^1 P_n(s) g(s) ds \right) P_n(t).$$

En \mathcal{B}_L : $[\Pi_2]_{\mathcal{B}_L} = \text{diag}(1, 1, 1, 0, 0)$.

2. Matriz del proyector en monomios (construcción columna a columna)

Denotemos $e_0 = 1$, $e_1 = t$, $e_2 = t^2$, $e_3 = t^3$, $e_4 = t^4$. Cada columna es $[\Pi_2 e_k]_{\mathcal{B}_m}$.

- Col. 1: $e_0 = 1 = P_0 \in P_2 \Rightarrow \Pi_2 e_0 = e_0 \Rightarrow [1, 0, 0, 0, 0]^T$.
- Col. 2: $e_1 = t = P_1 \in P_2 \Rightarrow \Pi_2 e_1 = e_1 \Rightarrow [0, 1, 0, 0, 0]^T$.
- Col. 3: $t^2 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0 \in P_2 \Rightarrow \Pi_2 e_2 = e_2$. En monomios: $e_2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot t^2 \Rightarrow [1/3, 0, 2/3, 0, 0]^T$.
- Col. 4: $t^3 = \frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{5}P_1 \Rightarrow \Pi_2 e_3 = \frac{3}{5}t \Rightarrow [0, 3/5, 0, 0, 0]^T$.
- Col. 5: $t^4 = \frac{8}{35}P_4 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{1}{5}P_0 \Rightarrow \Pi_2 e_4 = \frac{4}{7}P_2 + \frac{1}{5}P_0$. En monomios: $\frac{4}{7}P_2 = \frac{2}{7}(3t^2 - 1) = \frac{6}{7}t^2 - \frac{2}{7}$. Sumando $\frac{1}{5}$ queda $\frac{6}{7}t^2 - \frac{3}{35} \Rightarrow [-3/35, 0, 6/7, 0, 0]^T$.

Por tanto,

$$[\Pi_2]_{\mathcal{B}_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & -3/35 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Es idempotente: $[\Pi_2]^2 = [\Pi_2]$.)

3. Proyección de f

En Legendre: $[f]_{\mathcal{B}_L} = (1, 37/5, 2, 8/5, 0)^T$ y

$$[\Pi_2 f]_{\mathcal{B}_L} = (1, 37/5, 2, 0, 0)^T.$$

Volviendo a polinomio:

$$\Pi_2 f(t) = 1 \cdot P_0 + \frac{37}{5} P_1 + 2P_2 = 1 + \frac{37}{5}t + (3t^2 - 1) = \boxed{\frac{37}{5}t + 3t^2}.$$

Chequeo de ortogonalidad del residuo $r = f - \Pi_2 f = -\frac{12}{5}t + 4t^3$: $\langle 1|r \rangle = 0$, $\langle t|r \rangle = 0$, $\langle t^2|r \rangle = 0$.

(c) T^{-1} , T^\dagger y si T es hermítico o unitario

Recordemos $T = e^D$ con $D = \frac{d}{dt}$ y, para polinomios, $(Tf)(t) = f(t+1)$.

1. Inversa T^{-1}

$$\boxed{T^{-1} = e^{-D}, \quad (T^{-1}f)(t) = f(t-1)}.$$

Comprobación directa: $T^{-1}Tf = f$ y $TT^{-1}f = f$.

2. Adjunto de D y de T

Para $f, g \in P_4$,

$$\langle g|Df \rangle = \int g f' = [gf]_{-1}^1 - \int g' f = \langle -Dg | f \rangle + \underbrace{g(1)f(1) - g(-1)f(-1)}_{\text{ términos de borde}}.$$

En dimensión finita, los funcionales $f \mapsto f(\pm 1)$ se representan como $\langle \psi_\pm | f \rangle$ por vectores $\psi_\pm \in P_4$.
En base de Legendre:

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

Buscamos $\psi_+ = \sum_{n=0}^4 a_n P_n$ con $\langle \psi_+, P_n \rangle = P_n(1) = 1 \Rightarrow a_n \frac{2}{2n+1} = 1 \Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{2}$. Análogamente, $\psi_- = \sum_{n=0}^4 \frac{2n+1}{2} (-1)^n P_n$. Así,

$$\boxed{D^\dagger g = -Dg + g(1) \psi_+ - g(-1) \psi_-}, \quad \boxed{\psi_+ = \sum_{n=0}^4 \frac{2n+1}{2} P_n, \quad \psi_- = \sum_{n=0}^4 \frac{2n+1}{2} (-1)^n P_n}.$$

En dimensión finita: $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$, por lo que

$$\boxed{T^\dagger = e^{D^\dagger} = \exp(-D + |\psi_+\rangle\langle\delta_+| - |\psi_-\rangle\langle\delta_-|)},$$

donde $\langle \delta_\pm | f \rangle = f(\pm 1)$. Forma práctica (matricial, en cualquier base con Gram G):

$$\boxed{T^\dagger = G^{-1} T^\top G \quad (\text{coef. reales})}.$$

En Legendre: $G_L = \text{diag}(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9})$. En monomios: $(G_m)_{ij} = \int_{-1}^1 t^{i+j} dt$.

3. T no es hermítico

Contraejemplo: $f(t) = t^2$, $g(t) = 1$.

$$\langle 1 | Tt^2 \rangle = \int (t+1)^2 dt = \frac{8}{3}, \quad \langle T1 | t^2 \rangle = \int t^2 dt = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} \neq \frac{2}{3}.$$

\Rightarrow T no es hermítico.

4. T no es unitario

Debe preservar norma. Con $f(t) = t$:

$$\langle t, t \rangle = \frac{2}{3}, \quad \langle Tt, Tt \rangle = \int (t+1)^2 dt = \frac{8}{3}.$$

\Rightarrow T no es unitario. (La traslación mueve masa fuera/dentro de $[-1, 1]$, no preserva norma ni simetría.)

(d) Matrices de T en ambas bases y comparación de traza/determinante

1. En monomios \mathcal{B}_m

Cada columna es $T(t^k) = (t+1)^k$ expandido con Newton.

$$[T]_{\mathcal{B}_m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Triangular superior, unos en la diagonal; coeficientes binomiales por encima.

2. En Legendre \mathcal{B}_L

Cambio de base:

$$[T]_{\mathcal{B}_L} = C^{-1} [T]_{\mathcal{B}_m} C.$$

Resultado explícito:

$$[T]_{\mathcal{B}_L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{75}{8} \\ 0 & 1 & 3 & \frac{15}{2} & \frac{41}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Trazas y determinantes

En \mathcal{B}_m : $\text{tr} = 5$, $\det = 1$ (triangular con unos). Matrices similares ($C^{-1}AC$) conservan invariantes, de modo que en \mathcal{B}_L también:

$$\text{tr}([T]) = 5, \quad \det([T]) = 1 \text{ en ambas bases.}$$

(e) Matrices de T^{-1} y T^\dagger . Transformación entre bases

1. T^{-1} en monomios \mathcal{B}_m

Cada columna es $T^{-1}(t^k) = (t - 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} t^i$.

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}_m} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Triangular superior con unos; inversa de la matriz binomial de T .

2. T^{-1} en Legendre \mathcal{B}_L

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}_L} = C^{-1} [T^{-1}]_{\mathcal{B}_m} C.$$

(Se mantiene estructura triangular con unos en la diagonal $\Rightarrow \det = 1, \text{tr} = 5$.)

3. Adjunto T^\dagger en cualquier base (fórmula de Gram)

Sea G la matriz de Gram del producto interno en la base elegida. Entonces

$$[T^\dagger] = G^{-1} [T]^T G \quad (\text{coef. reales}).$$

Gram en monomios:

$$G_m = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}, \quad G_L = \text{diag}\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}\right).$$

Así,

$$[T^\dagger]_{\mathcal{B}_m} = G_m^{-1} [T]_{\mathcal{B}_m}^T G_m, \quad [T^\dagger]_{\mathcal{B}_L} = G_L^{-1} [T]_{\mathcal{B}_L}^T G_L.$$

Compatibilidad de adjuntos entre bases:

$$[T^\dagger]_{\mathcal{B}_L} = C^{-1} [T^\dagger]_{\mathcal{B}_m} C.$$

(En general $T^\dagger \neq T^{-1}$ con este producto interno debido a términos de borde en D^\dagger .)

Resumen final:

- $[f]_{\mathcal{B}_m} = (0, 5, 3, 4, 0)^T, [f]_{\mathcal{B}_L} = (1, 37/5, 2, 8/5, 0)^T$.
- C y C^{-1} tal como arriba (Legendre \leftrightarrow monomios).
- $[\Pi_2]_{\mathcal{B}_L} = \text{diag}(1, 1, 1, 0, 0), [\Pi_2]_{\mathcal{B}_m}$ con columnas $(1, 0, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0, 0)^T, (1/3, 0, 2/3, 0, 0)^T, (0, 3/5, 0, 0, 0)^T, (-3/35, 0, 6/7, 0, 0)^T$.
- $\Pi_2 f(t) = \frac{37}{5}t + 3t^2$; el residuo es ortogonal a $1, t, t^2$.
- T : traslación +1. $[T]_{\mathcal{B}_m}$ y $[T]_{\mathcal{B}_L}$ como arriba. $\text{tr} = 5, \det = 1$.
- T^{-1} : traslación -1. $[T^{-1}]_{\mathcal{B}_m}$ como arriba; $[T^{-1}]_{\mathcal{B}_L} = C^{-1} [T^{-1}]_{\mathcal{B}_m} C$.
- T^\dagger : por Gram $G^{-1} T^T G$; no coincide con T^{-1} .
- T no es hermítico ni unitario con $\langle \cdot | \cdot \rangle = \int_{-1}^1 \dots$