Ejemplo 4.11 — Derivada como operador lineal y su matriz en distintas bases

Sea el operador lineal
$$D = \frac{d}{dx} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^2,$$
con base del dominio fija
$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \quad (\dim \mathbb{P}^3 = 4),$$
y dos órdenes de base en el codominio:
$$\varphi = \{1, x, x^2\}, \qquad \psi = \{x^2, x, 1\} \quad (\dim \mathbb{P}^2 = 3).$$

Construcción de la matriz por columnas

Por definición, la columna j de $[D]^{\gamma}{}_{\beta}$ es el vector de coordenadas de $D(b_j)$ en la base γ del codominio, con $b_j \in \beta$.

Aplicamos D a cada elemento de β:
$$D(1) = 0, \qquad D(x) = 1, \qquad D(x^2) = 2x, \qquad D(x^3) = 3x^2.$$

En la base $\varphi = \{1, x, x^2\}$. Expresando cada derivada en el orden $(1, x, x^2)$:
$$\begin{aligned} D(1) &= 0 = (0,0,0)_{\varphi}, \\ D(x) &= 1 = (1,0,0)_{\varphi}, \\ D(x^2) &= 2x = (0,2,0)_{\varphi}, \\ D(x^3) &= 3x^2 = (0,0,3)_{\varphi}. \end{aligned}$$
Por columnas,
$$\boxed{[D]^{\varphi}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \qquad (3 \times 4).$$

En la base $\psi = \{x^2, x, 1\}$. Expresando ahora en el orden $(x^2, x, 1)$:
$$\begin{aligned} D(1) &= 0 = (0,0,0)_{\psi}, \\ D(x) &= 1 = (0,0,1)_{\psi}, \\ D(x^2) &= 2x = (0,2,0)_{\psi}, \\ D(x^3) &= 3x^2 = (3,0,0)_{\psi}. \end{aligned}$$
Por columnas,
$$\boxed{[D]^{\psi}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Acción sobre $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Las coordenadas de p en la base del dominio β son
$$[p]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con codominio en φ.

$$[D]^{\varphi}{}_{\beta}\,[p]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \quad Dp = 1 + 2x + 3x^2 \text{ (en la base } \varphi\text{)}.$$

Con codominio en ψ.

$$[D]^{\psi}{}_{\beta}\,[p]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \quad Dp = 3x^2 + 2x + 1 \text{ (en la base } \psi\text{)}.$$

Observación. Ambas representaciones describen el *mismo* polinomio Dp, pero con distinto orden de coordenadas debido al distinto orden de la base del codominio.