Transformée de Fourier

Shockwave
(fiche en cours de construction)

Transformée de Fourier d'une fonction de L_1

Définition Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes d'une variable réelle. On appelle transformée de Fourier (ou spectre) de f, si elle existe, la fonction complexe de la variable réelle ν :

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

On écrira symboliquement :

$$\tilde{f} = \mathcal{F}_{[f]} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}(\nu) = \mathcal{F}_{[f(x)]}$$

De même, on définira la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction f par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \quad \bar{\mathcal{F}}_{[f]}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi\nu x} dx$$

Propriété Soit f Lebesgue-intégrable. Alors la transformée de Fourier de f existe.

Théorème Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable (au sens de Lebesgue).
Alors $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée et $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Théorème La fonction transformée de Fourier $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \to L_\infty(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire et continue, i.e. :

i) pour tous f,$g \in L_1(\mathbb{R})$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}_{[\alpha f + \beta g]} = \alpha \mathcal{F}_{[f]} + \beta \mathcal{F}_{[g]}$$

ii) Si la suite f_n tend vers 0 au sens de L_1, alors la suite $\tilde{f}_n$ tends vers 0 au sens de L_∞, i.e. :

$$(\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x)| dx = 0) \implies (\lim_{n\to\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{R}} \tilde{f}_n(\nu) = 0)$$

Lemme de Riemann-Lebesgue Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable.
Alors la fonction $\tilde{f}$ tends vers 0 en l'infini :

$$\lim_{|\nu|\to\infty} |\tilde{f}(\nu)| = 0$$

Inversion dans $L_1(\mathbb{R})$ Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable admettant une transformée de Fourier $\tilde{f}$ elle-même intégrable.
Alors, :

$$\bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(x) = f(x) \quad \text{en tout point x où f est continue}$$

En particulier, si f est de plus continue, alors $\bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]} = f$

Proposition Si f est de classe C^2 et si $f, f' et f''$ sont toutes intégrables alors $\tilde{f}$ est également intégrable. L'inversion de la transformée de Fourier devient possible et on a :

$$f = \bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}$$

Théorème Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$, de classe C^1 sauf en un nombre fini de points de discontinuités, telle que $f' \in L_1(\mathbb{R})$.
Alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$$

Par abus, on notera encore cette limite $\bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(x)$.