FILE D'ATTENTE
TD 5

CHAPITRE 5 : RESEAUX DE FILE D'ATTENTE

Exercice 5.1 : Système multi-programmé à mémoire virtuelle

1°) La file WAIT n'est jamais vide, ce qui signifie que l'on a toujours $M = 4$ dans l'ensemble CPU + DK. Sinon, un élément entrerait directement dans l'ensemble, et la file WAIT pourrait se retrouver vide.

On utilise la loi de Little : $L = \Lambda R \Leftrightarrow R = \frac{L}{\Lambda}$

Appliqué au système complet : $\boxed{R = \frac{N}{\Lambda} = \frac{10}{0{,}4} = 25 \text{ secondes}}$

Appliqué à l'ensemble CPU + DK : $\boxed{R' = \frac{M}{\Lambda} = \frac{4}{0{,}4} = 10 \text{ secondes}}$

$R = Z + W + R' \Leftrightarrow W = R - Z - R'$

$\boxed{E[W] = 25 - 4 - 10 = 11 \text{ secondes}}$ temps moyen d'attente dans la file WAIT

2°) On veut calculer les demandes totales de traitement du CPU et du DK

Le besoin en temps de traitement est égal au produit du nombre moyen de passages par le temps de service à chaque passage : $\boxed{e_{[DK]} . E_{[S_{[DK]}]} = 50 \times 40 = 2000 \text{ ms} = 2 \text{ secondes}}$

Pour le CPU, c'est plus compliqué, on va utiliser l'égalité de Chang – Lavenberg : $\Lambda = \frac{U_i}{e_i S_i}$

Ainsi, ici, on a $\boxed{e_{CPU} S_{CPU} = \frac{U_{CPU}}{\Lambda} = \frac{0{,}8}{0{,}4} = 2 \text{ secondes}}$

Conditions de stabilité, limite de charge :

$\boxed{\forall i \quad U_i \geq 1}$

Pour le CPU : $U_{CPU} = \Lambda e_{CPU} S_{CPU} < 1 \Leftrightarrow \Lambda_{\lim} = \frac{1}{2}$ it/s

Pour le DK : $U_{DK} < 1 \Leftrightarrow \Lambda_{\lim} = \frac{1}{2}$ it/s

La limite de débit est la même des deux côtés, le système est donc stable, équilibré avec $\boxed{\Lambda_{\lim} = \frac{1}{2}}$

3°) Les hypothèses sont celles du théorème de Jackson :

Le système est ouvert, les lois sont markoviennes, les arrivées sont poissoniennes, les services exponentiels, la loi de priorité est FCFS.

Ainsi $E_{[L_i]} = \frac{\frac{\lambda e_i}{\mu_i}}{1 - \frac{\lambda e_i}{\mu_i}} = \frac{\Lambda e_i S_i}{1 - \Lambda e_i S_i}$

Ce qui donne, pour le DK : $E_{[DK]}=\dfrac{0{,}4\times 2}{1-0{,}4\times 2}=4$

Pour le CPU : $E_{[CPU]}=4$

$E_{[L_{[CPU+DK]}]}=4+4=8$ <u>ABSURDE</u> car $M = 4$

On a négligé :

- la limite de charge $M = 4$
- le fait qu'on avait une file pleine en amont

Ce qui imposait 4 éléments dans le système en permanence.
Le modèle n'est donc pas bon, une des hypothèses n'est pas vérifiée.

4°) Modèle fermé de l'ensemble CPU + DK
On va utiliser le théorème de Gordon et Newell. Les hypothèses à vérifier sont :

- réseau fermé
- services exponentiels de paramètre constant
- priorité FCFS
- probabilités de transition constantes

L'état du système est donné par le nombre d'éléments dans chaque file.
Le théorème donne alors : $P(i,j)=\text{cst}(e_i S_i)^i (e_j S_j)^j$

$P(0{,}4)=P(1{,}3)=P(2{,}2)=P(3{,}1)=P(4{,}0)=\text{cst}\,2^4$

Tous les états sont équiprobables.
De plus $P(0{,}4)+P(1{,}3)+P(2{,}2)+P(3{,}1)+P(4{,}0)=5\times 16\,\text{cst}=1$

Ainsi $\text{cst}=\dfrac{1}{80}$

Et $\boxed{P(x,x)=\dfrac{16}{80}=\dfrac{1}{5}}$

$L_{[CPU]}=0\times P(0{,}4)+1\times P(1{,}3)+2\times P(2{,}2)+3\times P(3{,}1)+4\times P(4{,}0)=2$

$L_{[DK]}=4\times P(0{,}4)+3\times P(1{,}3)+2\times P(2{,}2)+1\times P(3{,}1)+0\times P(4{,}0)=2$

Ainsi $\boxed{L_{[DK]}+L_{[CPU]}=2+2=4=M}$

En appliquant Little à la file i : $R_i=\dfrac{L_i}{\lambda_i}$ avec $\lambda_i=e_i\Lambda$ débit dans la file i

e_i nombre de passage dans la file i pour un passage en référence

Λ débit dans la file de référence

Pour 1 passage : $\boxed{R_{[DK]}-W_{[DK]}-S_{[DK]}=0{,}04 \;\Rightarrow\; W_{[DK]}=0{,}06=60\,\text{ms}}$

Pour $e_{[DK]}=50$ passages

$e_{[DK]}S_{[DK]}=2\,\text{s}$

$\boxed{W_{[DK]}=3\text{s}}$

$R_{[DK]}=5\text{s}$

$e_{[CPU]}=e_{[DK]}+1=51$

Pour 51 passages: $\boxed{R_{[CPU]}=\dfrac{51\times 2}{0{,}4\times 51}=5\text{s}}$

Algorithme de Reiser :

N	1	2	3	4
$e_{CPU}S_{CPU}$	2	3	4	5
$e_{DK}S_{DK}$	2	3	4	5
Λ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	0,4
L_{CPU}	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2
L_{DK}	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2

$$\Lambda=\frac{N}{e_{CPU}S_{CPU}+e_{DK}S_{DK}}=\frac{1}{4}$$
$$L_{CPU}=\Lambda e_{CPU}S_{CPU}=\frac{1}{2}=L_{DK}$$
Pour $N=1$

Pour 1 passage en référence :

$$R_{CPU}=5\text{ s avec}\begin{cases}2\times1=2\text{s de traitement}\\ \frac{3}{2}\times2=3\text{ s d'attente}\end{cases}$$
$$L_{[DK]}=L_{[CPU]}=2 \Rightarrow L=4 \Rightarrow \text{le système est équilibré}$$

5°) On suppose que la file WAIT n'est jamais vide

N	1	2
$e_{CPU}S_{CPU}$	2	$\frac{10}{3}$
$\frac{e_{DK}}{2}S_{DK}$	1	$\frac{4}{3}$
Λ	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}\approx0{,}42>0{,}4$
L_{CPU}	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{7}$
L_{DK}	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{7}$

Exercice 5.2 : Du choix du point où l'on compte le débit global dans un réseau fermé

1°) On souhaite déterminer le nombre de passages dans chacune des files.
On vérifie les hypothèses du théorème de Jackson :

- réseau ouvert
- arrivées poissoniennes de paramètre constant
- services exponentiels de paramètre constant aussi
- priorité FCFS
- probabilités de transition constantes et indépendantes

Alors $\boxed{e=Q+eP \quad \text{avec} \begin{Bmatrix} P \text{ matrice de transition} \\ Q \text{ vecteur des probabilités d'arrivées} \end{Bmatrix}}$

Ici, la matrice de transition est $\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a aussi $p_{1,4}=1-p_{1,2}-p_{1,3}$

Et $Q=[1,0,0]$

On reporte dans l'égalité de Jackson, ce qui donne :

$e_1=1+e_2+e_3$

$e_2=0+\frac{e_1}{2}$

$e_3=0+\frac{e_1}{3}$

La solution du système est alors $\boxed{\begin{Bmatrix} e_1=6 \\ e_2=3 \\ e_3=2 \end{Bmatrix}}$

On dit que le système est stable si aucune file n'est engorgée, ie $\forall i \quad U_i<1$

D'après le théorème de Jackson :

$U_i=\frac{\lambda e_i}{\mu_i}$

Applications numériques :

$U_1=\frac{3}{4}$

λ_{max} tel que $\frac{\lambda_{max}\times 6}{4}=1 \Rightarrow \lambda_{max}=\frac{2}{3}$

$U_2=\frac{2}{3}<1$

$\frac{\lambda_{max}\times 3}{3}=1 \Rightarrow \lambda_{max}=1$

$U_3=\frac{1}{4}<1$

$\frac{\lambda_{max}\times 2}{4}=1 \Rightarrow \lambda_{max}=2$

Ainsi $\Lambda_{max}=\min(\lambda_{imax})=\frac{2}{3}$

Temps de réponse :

Pour 1 passage $R_i=\dfrac{1}{\mu_i-\lambda e_i}$ et $R=\sum_i \dfrac{e_i}{\mu_i-\lambda e_i}$

$R_1=1 \quad R_2=\dfrac{2}{3} \quad R_3=\dfrac{1}{3}$

$$\boxed{R=6\times 1+3\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{26}{3}}$$

2°) On ferme le réseau sur lui-même

On peut appliquer le théorème de Jackson fermé, ou de Gordon et Newell, ainsi que l'algorithme de Reiser.

Calcul des nombres moyens de passages dans le cas fermé :

référence : file 1

$$e=R+eQ \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ R=[p_{1,4};\, p_{1,2};\, p_{1,3}]\end{array}\right\}$$

On obtient le système suivant :

$$e_1=\frac{1}{6}+e_2+e_3$$

$$e_2=\frac{1}{2}+0$$

$$e_3=\frac{1}{3}+0$$

dont la solution est $\boxed{\left\{\begin{array}{l} e_1=1\\ e_2=\dfrac{1}{2}\\ e_3=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}}$

On veut la référence en D. Pour un passage en 1, on effectue $p_{1,4}=\dfrac{1}{6}$ passages en D

Pour un passage en D, le nombre de passage en 1 est multiplié par $\dfrac{1}{p_{1,4}}=6$

Ainsi $p_1=6 \quad p_2=3 \quad p_3=2$

N	1	2
$e_1 S_1 = \frac{e_1}{\mu_1}$	1,5	$\frac{9}{4}$
$e_2 S_2$	1	$\frac{4}{3}$
$e_3 S_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$
Λ	$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{25}$
L_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{25}$
L_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{25}$
L_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{25}$