RAPPEL ELECTROMAGNETISME

Rappel sur la transformée de Fourier : (voir aussi le cours de Randal Douc)

$$\hat{e}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)e^{-i\omega t}dt$$ (transformée de Fourier directe)

$$e(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{e}(\omega)e^{i\omega t}dt$$ (transformée de Fourier inverse)

I. Electrostatique

Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées d'une distance d. La force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est de la forme : $F_{12}=-F_{21}=A\frac{q_1 q_2}{d^2}u_{12}$

avec $\vec{u}_{12}$ vecteur unitaire joignant 1 et 2

On peut réécrire cette équation sous la forme : $\vec{F}=Aq_1q_2\frac{\vec{u}_{12}}{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2}$

Quelques formules à retenir :

$\vec{F}(M)=q(M)\vec{E}(M)$ avec $\vec{E}=-\vec{grad}(V)$

$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1\frac{\vec{u}_{MM'}}{R^2}$ avec R la distance séparant M et M'.

Théorème de Gauss :

Le flux de E à travers une surface S fermée est égal à la somme de toutes les charges intérieures à S :

$$\iint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS=\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$$

Théorème de Green-Ostrogradsky :

Une intégrale de flux peut être transformée en une intégrale de volume selon la relation suivante :

$$\iint_S \vec{E}.\vec{n}\,dS=\iiint_V \mathrm{div}(\vec{E})dV$$

Ces deux théorèmes permettent d'établir la première équation de Maxwell : $\mathrm{div}(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Propriétés : (relations de passage à la traversée d'une surface chargée)

- Continuité des composantes tangentielles de E :

$$\begin{cases}\lim\limits_{P\to M_0} \vec{t}(\vec{E}(P)-\vec{E}(M_0))=0\\ \lim\limits_{Q\to M_0} \vec{t}(\vec{E}(Q)-\vec{E}(M_0))=0\end{cases}$$ où t est un vecteur unitaire tangent.

- Discontinuité des composantes normales de E

$$\begin{cases}\lim\limits_{P\to M_0} \vec{n}(\vec{E}(P)-\vec{E}(M_0))=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\\ \lim\limits_{Q\to M_0} \vec{n}(\vec{E}(Q)-\vec{E}(M_0))=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\end{cases}$$ où n est le vecteur normal à S.

Cas d'un diélectrique :
Dans ce cas, on note l'apparition d'une densité de charge surfacique σ'
On introduit donc le vecteur $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{m}$ où *m* est le moment dipolaire.

Théorème :
Pour un milieu diélectrique isotrope et en approximation linéaire :
$\vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

II. Magnétostatique

Rappel :
Une particule de charge *q* et de vitesse *v* soumis à un champ magnétique extérieur *B* subit une force de la forme : $\vec{f}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$

Loi de Biot et Savart :

Dans ces conditions : $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{P\to M_0}\vec{t}(\vec{E}(P)-\vec{E}(M_0))=0\\ \lim\limits_{Q\to M_0}\vec{t}(\vec{E}(Q)-\vec{E}(M_0))=0\end{array}\right\}$

Relations de passage :
Le champ *B* vérifie les relations de passage suivantes :
$\vec{B}_p-\vec{B}_q=-\mu_0\vec{n}_{12}\wedge\vec{j}_s$

Théorème d'Ampère :
$\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l}=\mu_0\iint_S \vec{j}.\vec{n}\,dS$ avec *S* surface s'appuyant sur le contour Γ

Théorème de Stokes :
$\oint \vec{A}.d\vec{l}=\oiint \vec{rot}(\vec{A}).\vec{n}\,dS$

III. Équations de Maxwell

Propriétés :
$\vec{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
$\vec{rot}(\vec{B})=\mu_0\vec{j}$
$\mathrm{div}(\vec{D})=\rho$
$\mathrm{div}(\vec{B})=0$

Principe de conservation de la charge :
$\mathrm{div}(\vec{j})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

En introduisant le vecteur $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ les équations de Maxwell se réécrivent :

$$\vec{rot}(\vec{E})=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{rot}(\vec{H})=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}(\vec{D})=\rho$$

$$\mathrm{div}(\vec{H})=0$$

Relations de passage :

$$\vec{n_{pq}}(\vec{D}_q-\vec{D}_p)=\sigma_v(\text{densité surfacique de charges vraies})$$

$$\vec{H}_p-\vec{H}_q=-\vec{n_{12}}\wedge\vec{j}_s(\text{densité surfacique de courant})$$

Equations de Maxwell en harmonique :

$$\vec{rot}(\vec{E})=-i\omega\vec{B}$$

$$\vec{rot}(\vec{H})=\vec{j}+i\omega\vec{D}$$

$$\mathrm{div}(\vec{D})=\rho$$

$$\mathrm{div}(\vec{B})=0$$

Equation de Helmholtz :

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{D}=-\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=\omega^2\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}(\text{en harmonique})$$

<u>Cas des ondes planes :</u>

Dans le cas des ondes planes, l'étude est simplifiée :

$\vec{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Leftrightarrow\vec{k}\wedge\vec{E}=\omega\vec{B}$ k étant le vecteur d'onde.