FILES D'ATTENTES M/G/1

Le système considéré:
Arrivé de Poisson
Temps de service généraux, suivent une loi de densité $s(x)$
Dans le cas de la M/M/1, on considère $N(t)$
Puisque $N(t)$ était markovien,

$$P(N(t+dt)=k)=P(N(t)=k-1)(\lambda dt+o(dt))+P(N(t)=k+1)(\mu dt+o(dt))$$
$$+P(N(t)=k)(1-\lambda dt-\mu dt+o(dt))$$

Ce qui nous permet ensuite de calculer $P'(N(t))$
Ceci était possible car $N(t)$ était markovien, car

$$P(\text{un départ pendant } dt)=P(T<S<T+dt \mid S>T)=...=\mu dt+o(dt)$$

Mais si les temps de services ne sont plus exponentiels mais par exemple Unif([0,a]), alors

$$P(T<S<T+dt \mid S>T)=\frac{dt}{a-T}$$

Donc la probabilité d'un départ pendant *dt* dépend du temps qui s'est écoulé depuis le début du service du client qui va partir.

Donc dans le cas général, pour prédire l'évolution de $N(t)$, il faut connaître ce temps
→ la seule connaissance de $N(t)$ ne suffit pas à prévoir l'évolution de $N(t)$ et donc que $N(t)$ n'est pas markovien!
On pourrait étudier $(N(t), T)$ mais c'est très compliqué :(

<u>Astuce:</u>
On considère le nombre q_n de clients laissés dans le système par le n-ième départ
Le système évoluant par pas de 1, le nombre de fois où un client qui part laisse k client dans le système est égal au nombre de fois où son client qui arrive trouve des clients dans le système

Donc, $P(\text{un client laisse } k \text{ clients dans le système})=D_k=P(\text{un client trouve } k \text{ clients})=A_k$

Or PASTA affirme qu'un client qui arrive dans le système voit le système dans l'état de ses moyennes temporelles (sous l'hypothèse que les arrivées sont indépendantes du système)

$$\frac{1}{K(t)}\sum_i X_i=\int_0^t X_i(t)$$

Et, si le système est ergodique, les moyennes temporelles convergent vers les moyennes en proba
Donc $D_k=A_k$ et $A_k=P(N(t)=k)$ par PASTA

1. Distribution de q_n, R&W, étude du nombre de clients dans le système, de temps de réponse et d'attente

$$q_n+1=\begin{cases} q_n-1+v_n+1, \text{si } q_n>0 \\ v_n+1, \text{si } q_n=0 \end{cases} \text{avec } v_n+1 \text{ nombre d'arrivées pendant le } n+1 \text{ ième service}$$

$$\Rightarrow q_n+1=q_n-\Delta q_n+v_n+1 \quad \text{avec} \quad \Delta q_n=1 \quad \text{si} \quad q_n>0$$

$$z_n^q+1=z_n^q-\Delta q_n+z_n^v+1$$

$$E(z_n^q+1)=E(z_n^q-\Delta q_n)E(z_n^v+1) \quad \text{car} \quad v_n+1 \quad \text{indépendant de} \quad q_n \quad \text{et} \quad \Delta q_n$$

$$E(z_n^q - \Delta q_n) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(q_n - \Delta q_n = k) = P(q_n = 0) + z P(q_n = 1) + z^2 P(q_n = 2) + \ldots$$

$$E(z_n^q - \Delta q_n) = 1 - \rho + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(q_n = k)$$

$\rho = \lambda E(S)$ taux d'occupation de Chang-Lavenberg

$$E(z_n^q - \Delta q_n) = 1 - \rho - \frac{1}{z}(Q(z) - P(q_n = 0)) \quad \text{avec} \quad Q(z) = E(z_n^q)$$

$$E(z_n^q - \Delta q_n) = (1-\rho)\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} Q(z)$$

$E(v_n + 1) = \sum_k z^k P(v_n + 1 = k) = \sum_k z^k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} s(x)\, dx$ c'est la proba d'avoir les arrivées pendant le temps de service de durée x du n+1ième client

$$E(v_n + 1) = \int_0^{\infty} \sum_k \frac{(z \lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} s(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{z \lambda x} e^{-\lambda x} s(x)\, dx = S^*(\lambda(1-z))$$

où S* est la transformée de Laplace de s(x)

Donc $E(z_n^q + 1) = \left((1-\rho)\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} Q(z)\right) S^*(\lambda(1-z))$

Pour n grand, $E(z_n^q + 1) = E(z_n^q) = Q(z)$

Donc $Q(z) = \left((1-\rho)\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} Q(z)\right) S^*(\lambda(1-z))$

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{(1-\rho)\left(1 - \frac{1}{z}\right) S^*(\lambda(1-z))}{S^*(\lambda(1-z)) - z}$$

QED

Temps de réponse:

Le nombre de clients q_n laissés par le *n*-ième client qui quitte le système est égal au nombre d'arrivées pendant son temps de réponse.

$$Q(z) = E(z_n^q) = \sum_k z^k P(q_n = k) = \sum_k z^k \int \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} r(x)\, dx = \int e^{-\lambda(1-z)x} r(x)\, dx = R^*(\lambda(1-z))$$

où $r(x)$ est la densité de probabilité de temps de réponse

$$\Rightarrow Q(z) = R^*(\lambda(1-z))$$

Posons $u = \lambda(1-z) \Rightarrow z = 1 - \frac{u}{\lambda}$

$$R^*(u) = Q\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) = \frac{(1-\rho) u S^*(u)}{\lambda S^*(u) - \lambda + u}$$

Temps d'attente:

$$W = \frac{R}{S} \Rightarrow W^*(u) = \frac{R^*(u)}{S^*(u)} = \frac{(1-\rho) u}{\lambda S^*(u) - \lambda + u}$$

2. Utilisation

$$E(q_n)=\frac{dE(z_n^q)}{dz}=\frac{dQ(z)}{dz}$$

Pour une transformée de Laplace F*(u) d'une fonction f(x)

$$F^*(u)=\int e^{-ux} f(x)dx=\int \sum_k (-1)^k \frac{(ux)^k}{k!} f(x)dx=\sum_k (-1)^k \frac{u^k}{k!} E(X^k)$$

Par ailleurs, la formule de Taylor donne F*(u)= Σ $F^k(0)/k!\ u^k$ $F^*(u)=\sum_k \frac{F^{(k)}(0)}{k!} u^k$

par identification terme à terme des deux séries entières, $E(X^k)=(-1)^k F^{(k)}(0)$

Cas de la M/M/1

$$s(x)=\mu e^{-\mu x}$$

$$S^*(u)=\int_0^\infty e^{-\mu x} \mu e^{-\mu x} dx$$

$$\Rightarrow Q(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)S^*(\lambda-\lambda z)}{S^*(\lambda-\lambda z)-z}=\frac{1-\rho}{1-\rho^z}$$

$$Q(z)=(1-\rho)\sum_k (\rho z)^k=E(z^q)=\sum_k z^k P(\tilde{q}=k)$$

$$\Rightarrow P(\tilde{q}=k)=(1-\rho)\rho^k$$