FILE D'ATTENTE
TD 3

Exercice 4 :

File M/M/C/C
- Arrivées poissoniennes
- Services exponentiels
- n: nombre d'éléments dans la file, est markovien

Il y a 2 possibilités :
- naissance : un client arrive
- mort : fin de service

1) Loi de l'inf :
On va calculer la probabilité que le serveur i ait fini à t :

$$P_{\text{serveur i a fini à t}} = 1 - e^{-\mu t}$$

$$P_{\text{serveur encore en service à t}} = e^{-\mu t}$$

$$P_{\text{tous les serveurs en service à t}} = (e^{-\mu t})^k = e^{-\mu k t}$$

Ainsi : $P_{\text{au moins un serveur a fini à t}} = 1 - e^{-\mu k t}$ loi exponentielle de paramètre $k\mu$

2) Théorème des coupes :

$$\lambda \pi_0 = \mu \pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

$$\lambda \pi_1 = 2\mu \pi_2$$

$$\forall k \in [0, c] \quad \lambda \pi_{k-1} = \mu k \pi_k \quad \Rightarrow \quad \pi_k = \frac{\lambda}{k\mu}\pi_{k-1}$$

Ainsi, par récurrence simple, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in [0, c] \quad \pi_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0}$$

Ensuite, on sait que l'on a affaire à un vecteur d'état, ie :

$$\sum_{k=0}^{c} \pi_k = 1 = \sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0$$

Ainsi : $\boxed{\pi_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}}$

Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ le système est stable

$$\pi_k = \frac{\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{\frac{-\lambda}{\mu}}$$

3) On va maintenant appliquer PASTA :

- Arrivées poissoniennes indépendantes de l'état du système
- Traitements exponentiels
- First Come First Served

Il y a rejet si C clients en file lors de l'arrivée :

$$P(\text{rejet}) = \pi_c = \frac{\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

4) Nombre de clients en file (en moyenne)

$$E(n) = \sum_{k=0}^{c} k\,\pi_k = \ldots = \frac{\lambda}{\mu}$$

Débit réel dans le système :

$$\Lambda' = (1 - P(\text{rejet}))\lambda$$

Temps de réponse du système :

$$\tau_r = t(\text{attente}) + t(\text{service}) = \frac{1}{\mu}$$

D'après la formule de Little : $L = \Lambda' R = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P(\text{rejet}))$

$$E(N) = L = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k - \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

<u>Exercice 4.8 :</u>

La file M/G/1 :
M → arrivées poissoniennes de toutes les classes de client
G → services selon une loi non markovienne et non constante (paquets)

Les services ne sont ni markoviens ni constants
→ on calcule le coefficient de variation.

$$C^2(L) = \frac{\sigma^2 L}{E^2(L)} = 1$$

Temps de service :

Paquets de type 1 : $\frac{\textit{longueur du paquet}}{\textit{débit}} = \frac{50 \times 8}{100} = 4\,\mu s$

2 : $40\,\mu s$

3 : $120\,\mu s$

Moyenne : idem au cas 2 : $40\,\mu s = E[S]$

Taux d'occupation $\rho = 0{,}8$

Formule du poly : $\frac{E[W]}{E[S]} = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1+C^2}{2}\right)$

$E[W]=160\,\mu s$

Puis, pour les différents paquets :

Type 1 : $E[R_1]=160+4=164\,\mu s$

Type 2 : $E[R_2]=E[R]=200\,\mu s$