THEORIE DU SIGNAL
COURS 1 : LES SIGNAUX

Définition

Un *signal* est toute grandeur (physique ou non) qui contient une information. Cette grandeur dépend d'un paramètre (temps, espace, …). Ex : son audio, image, vidéo, …

Un *signal déterministe* est un signal dont l'évolution au cours du temps est complètement connue et donc parfaitement prévisible.

Par opposition, un *signal aléatoire* est un signal non parfaitement connu à l'avance et par suite non complètement prédictible.

I. Classification des signaux

Définition

On appelle *énergie* d'un signal x la quantité $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$ et *puissance moyenne* la quantité

$$P=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2\,dt$$

A partir de là, on distingue les signaux d'énergie finie $(E<+\infty)$ et les signaux de puissance moyenne finie $(0<P<+\infty)$

Définition

On distingue aussi les signaux selon qu'ils sont continus ou discrets, à temps continu ou à temps discret.

Un signal est dit *à temps discret* si l'on considère au plus un ensemble dénombrable d'instants possibles.

Remarque

Nous n'étudierons ici que les signaux continus.

II. Opération sur les signaux

1. *Multiplication temporelle*

$z(t)=x(t)y(t)$ simple multiplication

2. *Produit de convolution*

$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)y(t-u)\,du$ important car caractérise le filtrage linéaire des signaux

3. *Impulsion ou distribution de Dirac*

Ce n'est pas une fonction mais une distribution.

$$x_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t) \quad\Rightarrow\quad \delta(t)=\lim_{t\to0}\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t)$$

4. *Décomposition en série de Fourier*

Si x est une fonction périodique de période T, alors on peut écrire :

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

avec
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt \end{cases}$$

5. *Transformation de Fourier*

Les formules de transformations directe et inverse sont données par :

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi f t}dt \quad \text{et} \quad x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2i\pi f t}df$$

(Voir cours Transformées de Fourier pour les transformées usuelles)

Rappels

- Théorème de Plancherel
$$x(t)y(t) \overset{TF}{\rightarrow} X(f)*Y(f)$$
$$x(t)*y(t) \overset{TF}{\rightarrow} X(f)Y(f)$$
- Théorème de Parseval
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\overline{Y}(f)df$$
$$x(t)=y(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df$$

III. Signaux déterministes

Étant donnés deux signaux d'énergie finie, la *fonction d'inter-corrélation* vaut :

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y}(t-\tau)dt$$

De même, la *fonction d'auto-corrélation* vaut :

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{x}(t-\tau)dt$$

La *densité spectrale d'énergie*, notée DSE, vaut :

$$DSE=S_{xx}(f)=|X(f)|^2=TF(R_{xx}(\tau)) \quad \text{avec} \quad TF : \text{transformée de Fourier}$$

Pour un signal déterministe de puissance moyenne finie $\left(\text{ie } P=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2dt<+\infty\right)$, sa *densité spectrale de puissance*, notée DSP, est fournie par la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :

$$DSP=S_{xx}(f)=TF(R_{xx}(\tau))$$

IV. Les signaux aléatoires

Définition

On appelle *signal aléatoire* un signal qui, tout en dépendant d'un paramètre tel que le temps comme précédemment, dépendent en outre de facteurs dont la connaissance précise échappe à l'observateur, rendant le signal non parfaitement prévisible.
On appelle *processus aléatoire* le modèle mathématique destiné à représenter de tels signaux.

Moments temporels et moments statistiques

- *Moments temporels*

Étant donné $x(t,\omega)$ un processus aléatoire, on définit le moment d'ordre 1 ou moyenne temporelle par $<x(t,\omega_0)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,\omega_0)\,dt$ et le moment d'ordre 2 ou fonction d'auto-corrélation temporelle par $<x(t,\omega_0)\overline{x}(t-\tau,\omega_0)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,\omega_0)\overline{x}(t-\tau,\omega_0)\,dt$

- *Moments statistiques*

Pour le même processus, on définit aussi la moyenne statistique du processus par $E(x(t,\omega))$ (espérance mathématique classique), et la fonction d'auto-corrélation statistique par $R_{xx}(t,\tau)\triangleq E(x(t,\omega)\overline{x(t-\tau,\omega)})$

Définition

Un processus aléatoire sera dit *stationnaire* s'il garde les mêmes propriétés statistiques au premier et deuxième ordre au cours du temps, ie les moments statistiques sont indépendants du temps.
Un processus aléatoire sera dit ergodique si les moments temporels existent et sont indépendants de la réalisation choisie pour les calculer ou encore si les différentes réalisations possibles ont toutes les mêmes moments temporels.

Dans le cas d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique, la puissance moyenne du processus vaut

$$P=E(|x(t)|^2)=R_{xx}(0) \quad \Leftrightarrow \quad P=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

Définition

La *densité spectrale de puissance* d'un processus aléatoire du deuxième ordre est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation statistique : $DSP=S_{xx}(f)=TF[R_{xx}(\tau)](f)$