ANALYSE NUMERIQUE
TD 1

Exercice 1 p 23

Montrer que $\lim_{h \to 0} \|u-u_h\|=0$

En se référant à la page 12 : $\|u-u_h\| \leq C \inf_{v_n \in E_n} \|u-v_n\|$

$\|u-u_h\| \leq C\|u-r_h(v)\|$

$\|u-u_h\| \leq C\|u-v+v-r_h(v)\| \leq C(\|u-v\|+\|v-r_h(v)\|)$

En faisant tendre h vers 0, on obtient :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \text{ tq } \forall |h| < \alpha, \|v-r_h(v)\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$

V dense dans E $\Rightarrow \exists v \in V$ tq $\|u-v\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$

$\boxed{\|u-u_h\| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{h \to 0} \|u-u_h\|=0}$

Exercice 2 p 23

$\hat{T}_1=\{K, P_1, \Sigma_1=\{s_1, s_2, s_3\}\}$ est-il un élément fini de Lagrange ?

$p \in P_1 \Leftrightarrow p(x, y)=ax+by+c$

Déjà on a $\dim(P_1)=\text{card}(\Sigma_1)=3$

Il s'agit maintenant de montrer que si $P(s_1, s_2, s_3)=0$, alors $P=0$

Ce que l'on a en écrivant $P(0{,}0)=P(1{,}0)=P(0{,}1)=0$

$a=0, b=0, c=0 \Rightarrow P=0$

Ainsi $\boxed{\hat{T}_1 \text{ est un élément fini de Lagrange}}$

Considérons maintenant $\hat{T}_2=\{K, P_2, \Sigma=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}\}$

$p \in P_2 \quad \Leftrightarrow \quad p(x, y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$

Déjà, on peut remarquer que $\dim(P_2)=6=\text{card}(\Sigma)$

Il s'agit maintenant de montrer que :

$\forall i \in [1{,}6] \quad p(s_i)=0 \quad \Rightarrow \quad p=0$

On va utiliser les fonctions de forme associées au point correspondant :

La fonction $p_1 \in P_2$ est telle que $\left\{ \begin{array}{c} p_1(s_1)=1 \\ \forall j \neq 1 \quad p_1(s_j)=0 \end{array} \right\}$

Cela nous fournit un système de 6 équations à 6 inconnues à résoudre.

La résolution nous donne finalement :

$\boxed{p_1(x, y)=2x^2+2y^2+4xy-3x-3y+1}$

En faisant de même pour 6, on obtient :

$\boxed{p_6(x, y)=4y-4y^2-4xy}$

Exercice 3 p 23

On cherche à résoudre :

$$-\Delta u = f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy = \int f\, v\, dx\, dy$$

Ce qui se réécrit encore : $\forall v \in E$ on cherche $u \in E$ tel que $a(u,v) = L(v)$ où a est une forme bilinéaire, et L une forme linéaire, type produit scalaire.

Sous problème : on cherche $u_h \in E_h$ tel que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$

Pour ce faire, soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E_h $\Leftrightarrow$ $\forall b_i \quad a(u_h, b_i) = <f, b_i>$

Dans cette base, on peut écrire : $u_h = \sum_j u_h^j b_j$

Et par linéarité, il vient que :

$$\sum_j u_h^j a(b_j, b_i) = \sum_j f_h^j <b_j, b_i>$$

D'où, sous forme matricielle : $\boxed{u_n = f\, B\, A^{-1}}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} a(b_1,b_1) & \ldots & a(b_1,b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ a(b_n,b_1) & \ldots & a(b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} <b_1,b_1> & \ldots & <b_1,b_n> \\ \vdots & & \vdots \\ <b_n,b_1> & \ldots & <b_n,b_n> \end{pmatrix}$$