

Telecom SudParis

JUIN, 2009
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

Les calculatrices, notes de cours ou autres documents, ne sont pas autorisés.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

- NOTE:** – Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
 - Le barème prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 point par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
 - Dans l'ensemble du sujet: ι désigne le nombre complexe tel que $\iota^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par l'étoile $*$ en exposant. L'espérance mathématique est notée $\mathbb{E}\{\cdot\}$.
 - En annexe est donné un formulaire et un extrait de l'aide Matlab.

PARTIE A : Questions courtes et QCM (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Pour les questions 1 à 7, les réponses sont à donner sur la place réservée en p.9.

Deux ou trois lignes maximum sont demandées.

Pour les questions 8 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s) en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.10.

1. Quels sont les signaux dont la transformée de Fourier est périodique ? Existe-t-il une propriété duale ?
2. Comment se définit l'enveloppe complexe d'un signal à bande étroite $x(t)$? Faire un schéma dans le domaine des fréquences.
3. Donner la forme générale de la fonction de transfert en z d'un filtre (numérique) causal et de réponse impulsionnelle finie. Quelle est l'équation temporelle donnant la sortie en fonction de l'entrée ?
4. Que peut-on dire du domaine de convergence de la fonction de transfert en z d'un filtre stable ? Faire un schéma.
5. Qu'est-ce qu'un signal aléatoire ? Qu'appelle-t-on trajectoire d'un signal aléatoire ?
6. Qu'est-ce qu'un bruit blanc (à temps discret) ?
7. Quel est le lien entre la transformée de Fourier rapide (FFT), la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier à temps discret ?

suite ...

8. Sur un analyseur de spectre analogique (tel que celui que vous avez manipulé en TP) :
- (a) une durée de balayage plus faible améliore toujours la résolution.
 - (b) une durée de balayage plus grande permet de choisir une bande passante plus faible du filtre d'analyse et d'améliorer la résolution.
 - (c) une bonne résolution est obtenue avec une bande passante large du filtre d'analyse.
 - (d) la résolution en fréquence dépend de la rapidité à laquelle varie le signal et pas de l'appareil.
9. Que renvoie la commande `fft([1 1 1 1])` sous le logiciel MATLAB ?
- (a) Le vecteur $[1-i \ 1+i \ 1-i \ 1+i]$.
 - (b) Le vecteur $[4 \ 0 \ 0 \ 0]$.
 - (c) Le vecteur $[1+i \ 1-i \ 1+i \ 1-i]$.
 - (d) Le vecteur $[1 \ 1 \ 1 \ 1]$.
10. Que renvoie la commande `fftshift([1 2 3 4])` sous le logiciel MATLAB ?
- (a) Le vecteur $[3 \ 4 \ 1 \ 2]$.
 - (b) Le vecteur $[1 \ 3 \ 2 \ 4]$.
 - (c) La transformée de Fourier discrète du vecteur $[1 \ 2 \ 3 \ 4]$, avec des fréquences croissantes de $-\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$.
 - (d) La transformée de Fourier discrète du vecteur $[1 \ 2 \ 3 \ 4]$, avec des fréquences croissantes de 0 à 1.
11. Soit $\gamma_x(t)$ la fonction d'autocorrélation en puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.
- (a) $\gamma_x(t) \geq 0$ pour tout t .
 - (b) La puissance de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_x(t)|^2 dt$.
 - (c) $\gamma_x(t)$ peut être une fonction périodique.
 - (d) $\gamma_x(0) \geq |\gamma_x(t)|$ pour tout t .
12. Soit $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.
- (a) $\Gamma_x(0)$ est égal à la puissance du signal.
 - (b) $\Gamma_x(f)$ est positif.
 - (c) $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) \leq \Gamma_x(0)$.
 - (d) La puissance du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma_x(f)|^2 df$.
13. Un filtre à temps continu est stable au sens entrée bornée-sortie bornée si et seulement si :
- (a) la réponse à un Dirac en entrée est de durée finie.
 - (b) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$.
 - (c) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt < +\infty$.
 - (d) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$.

14. Pour définir une densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire, il faut :
- (a) que toutes ses trajectoires soient d'énergie finie.
 - (b) qu'il soit stationnaire au sens large.
 - (c) que le module de sa transformée de Fourier soit borné.
 - (d) que sa transformée de Fourier soit ergodique.
15. $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la sortie d'un filtre stable de réponse en fréquence $H(f)$ excité en entrée par un signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aléatoire stationnaire au sens large.
- (a) $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et sa transformée de Fourier à temps discret est $H(f)X(f)$ (où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal aléatoire $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$).
 - (b) $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire déterministe car le filtre est stable et sa transformée de Fourier à temps discret est $H(f)X(f)$ (où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal aléatoire $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$).
 - (c) $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et sa densité spectrale de puissance est $|H(f)|^2 \Gamma_x(f)$ (où $\Gamma_x(f)$ est la densité spectrale de puissance de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$).
 - (d) $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large. En tant que signal aléatoire, on ne peut pas définir sa densité spectrale de puissance.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [L. Fathi] Dans un système de communication sans fil utilisant la technique d'accès par codes (CDMA), le récepteur en râteau (en anglais : Rake) contient un nombre de doigts qui correspond au :
- (a) Nombre d'utilisateurs.
 - (b) Facteur d'étalement.
 - (c) Nombre de trajets dans le canal de propagation.
 - (d) Nombre de codes disponibles.
17. [L. Fathi] Pour un canal de propagation radio à multi-trajets, l'utilisation de plusieurs antennes en réception permet de :
- (a) Réduire la complexité du récepteur.
 - (b) Réduire le nombre de trajets dans le canal de propagation.
 - (c) Combattre l'évanouissement (fading) du canal de propagation.
 - (d) Améliorer le rapport signal-à-bruit (RSB) à la sortie du récepteur.
18. [F. Barbaresco] Le Radar utilise, pour améliorer sa résolution distance, la technique de traitement du signal appelée "compression d'impulsion" qui consiste à l'émission à émettre une impulsion modulée linéairement en fréquence sur une bande de fréquences B et en réception à appliquer le "filtre adapté" (convolution avec une réplique inversée temporellement et conjuguée). La résolution en distance obtenue est alors proportionnelle :
- (a) à la bande de fréquences de modulation B ,
 - (b) à l'inverse de la bande de fréquences de modulation B ,
 - (c) à la racine carrée de la bande de fréquences de modulation B .

19. [P. Mège] On souhaite réaliser un système de radiocommunications permettant de transmettre le plus efficacement à la fois de la parole et des données.
- (a) On optimise seulement pour le mode le plus contraignant.
 - (b) La parole numérisée ce n'est pas autre chose que des données. Il suffit donc que le système transmette efficacement les données et alors il transmettra aussi efficacement la parole.
 - (c) On optimise pour chacun des modes, parole et données, quitte à avoir un mode de transmission un peu différent selon les types d'information transportées.
20. [P. Mège] Les systèmes de radio-diffusion évoluent vers le numérique. Aujourd'hui sur mon autoradio analogique je peux me rendre compte de l'effet du fading, Mon récepteur radio ne reçoit rien ou presque rien s'il est dans un trou de fading. Quand j'aurai changé mon autoradio analogique pour un autoradio numérique, je ne me rendrai compte de rien
- (a) parce que dans un système analogique les signaux reçus ne sont plus affectés de fading.
 - (b) parce que les systèmes de radiodiffusion numérique utilisent des bandes de fréquences où il n'y a pas de fading.
 - (c) le phénomène de fading sera toujours présent mais le traitement de signal utilisé à l'émission et à la réception permet de masquer ce phénomène pour le destinataire.

PARTIE B : exercice

21. Soit le signal aléatoire (complexe) à temps discret $x_n = e^{i(\omega n + \phi)}$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et ϕ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.
- (a) Calculer $\mathbb{E}\{x_n\}$ et $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$. Que dire de la stationnarité ? Que vaut l'auto-corrélation $\gamma_x(k)$ du signal x_n ?
 - (b) Calculer :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n \quad \text{et :} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n-k}^*$$

Que peut-on dire concernant l'ergodicité ?

22. On considère maintenant le signal $y_n = e^{i(\omega_1 n + \phi_1)} + e^{i(\omega_2 n + \phi_2)}$ où ω_1, ω_2 sont fixés dans \mathbb{R} et ϕ_1, ϕ_2 sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 2\pi]$.
- (a) y_n est-il stationnaire ? Calculer $\mathbb{E}\{y_n\}$ et $\gamma_y(k) \triangleq \mathbb{E}\{y_n y_{n-k}^*\}$.
 - (b) Calculer la puissance de y_n .
23. Soit le signal $z_n = y_n + e_n$ où e_n est un bruit blanc centré, indépendant de y_n et de puissance σ_e^2 . Calculer la puissance, la moyenne et l'autocorrélation de z_n .

PARTIE C : exercice

On considère $h_a(t)$ et $x_a(t)$, deux signaux analogiques déterministes continus, à bande limitée $[-B, B]$ et tels que $\int |h_a(t)| dt < \infty$ et $\int |x_a(t)| dt < \infty$.

Le but de l'exercice est de démontrer une équivalence entre filtrage analogique et numérique. Ceci est représenté par les deux schémas de la figure 1, sur lequel on souhaite obtenir le lien entre $y_a(\frac{n}{2B})$ et y_n .

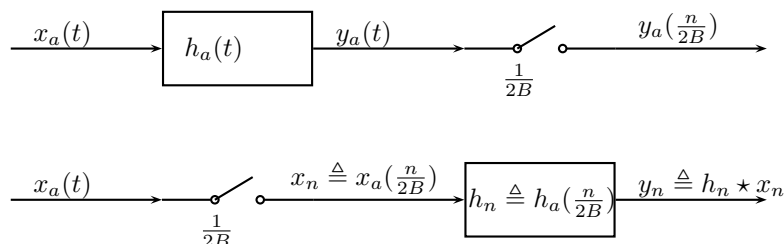


FIG. 1 – Filtrage analogique avant échantillonnage / Filtrage numérique après échantillonnage

24. Le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$ est-il stable ?
25. Soit $y_a(t)$ le résultat du filtrage de $x_a(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$.
- Comment s'écrit $y_a(t)$ sous forme d'une intégrale ?
 - On note $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$ les transformées respectives des signaux $x_a(t)$, $y_a(t)$ et $h_a(t)$ (la lettre f représente la fréquence). Quel est le lien entre $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$?
 - En déduire :

$$y_a(t) = \int_{-B}^B e^{i2\pi ft} H_a(f) X_a(f) df$$

26. On forme par échantillonnage les signaux $x_n \triangleq x_a(\frac{n}{2B})$ et $h_n \triangleq h_a(\frac{n}{2B})$. On suppose aussi pour des raisons techniques $\sum |x_n| < \infty$ et $\sum |h_n| < \infty$. La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle vérifiée ?
27. y_n est le résultat du filtrage numérique de x_n par le filtre de réponse impulsionnelle h_n .
- Comment s'écrit y_n sous forme d'une somme ?
 - On note $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$ les transformées respectives des signaux x_n , y_n et h_n (\tilde{f} représente la fréquence normalisée). Quel est le lien entre $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$?
 - En déduire que :

$$y_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi n \tilde{f}} H(\tilde{f}) X(\tilde{f}) d\tilde{f}$$

28. On admet pour les signaux $x_a(t)$ et $h_a(t)$ la formule sommatoire de Poisson est vérifiée :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a(f - 2Bk) = \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-i2\pi k \frac{f}{2B}} \quad \text{et} : \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_a(f - 2Bk) = \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-i2\pi k \frac{f}{2B}}$$

- Rappeler la définition de $X(\tilde{f})$ et en déduire que l'on a pour $\tilde{f} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$: $X(\tilde{f}) = 2B X_a(2B\tilde{f})$. Quelle relation a-t-on entre $H(\tilde{f})$ et $H_a(f)$?
- En déduire $y_n = 2B y_a(\frac{n}{2B})$ et la relation :

$$y_a\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) x_a\left(\frac{n-k}{2B}\right)$$

1 Formulaire

Energie, puissance, corrélation, densité spectrale :

$$\begin{aligned}
 E_x &\triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \\
 P_x &\triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \\
 R_{xy}^e(\tau) &\triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t - \tau) dt \\
 R_{xy}^p(\tau) &\triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t - \tau) dt \\
 S_{xx}^e(f) &\triangleq \text{TF}[R_{xx}^e(\tau)] = |X(f)|^2 \\
 S_{xx}^p(f) &\triangleq \text{TF}[R_{xx}^p(\tau)]
 \end{aligned}$$

Convolution, filtrage, échantillonnage :

$$\begin{aligned}
 h(t) \star x(t) &\triangleq \int_{\mathbb{R}} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \\
 &= x(t) \star h(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(\theta) h(t - \theta) d\theta \\
 Y(f) &= H(f) X(f) \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \\
 x_e(t) &\triangleq x(t) \text{III}_{T_e}(t) \quad X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_k X_e(f - \frac{k}{T_e}) \\
 &\text{cond. Shannon-Nyquist : } F_e \geq 2B
 \end{aligned}$$

Signal analytique, transformée de Hilbert, enveloppe complexe :

$$\begin{aligned}
 Z_x(f) &= \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \\
 z_x(t) &= \left(\delta(t) + i \frac{1}{\pi t} \right) \star x(t) \\
 z_x(t) &= x(t) + i\hat{x}(t) \\
 \hat{x}(t) &= \frac{1}{\pi t} \star x(t) \quad \hat{X}(f) = -iX(f)\text{signe}(f) \\
 \xi_x(t) &= e^{-i2\pi f_0 t} z_x(t) \quad \Xi_x(f) = Z_x(f + f_0)
 \end{aligned}$$

Temps discret :

$$\begin{aligned}
 X[z] &\triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n} \\
 x_k &= \frac{1}{i2\pi} \oint_c X[z] z^{k-1} dz = \sum_j \text{Res} [X[z] z^{k-1}, p_j] \\
 h_n \star x_n &\triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} = x_n \star h_n \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k} \\
 H[z] &= \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \\
 &\leftrightarrow y_n + \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j}
 \end{aligned}$$

Transformées de Fourier :

$$\begin{aligned}
 \text{TFTC : } X(f) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \\
 x(t) &= \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df \\
 \text{TFTD : } X(\tilde{f}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i2\pi \tilde{f} n} \\
 x_n &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tilde{f}) e^{i2\pi \tilde{f} n} d\tilde{f} \\
 \text{TFD : } X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n} \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi \frac{k}{N} n} \\
 \mathbf{W} &= \left[e^{-i2\pi \frac{2p}{N}(n-1)(p-1)} \right]_{n,p=1 \dots N} \\
 \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} &= \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}\mathbf{W}^H = N\mathbf{Id}
 \end{aligned}$$

Propriétés transformées Fourier / z / convolution :

$$\begin{aligned}
 x(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} X(f) \quad e^{i2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0) \\
 x(t)^* &\xrightarrow{\text{TF}} X(-f)^* \quad x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{|a|}\right) \\
 \frac{dx(t)}{dt} &\xrightarrow{\text{TF}} i2\pi f X(f) \quad tx(t) \xrightarrow{\text{TF}} -\frac{1}{i2\pi} \frac{dX(f)}{df} \\
 x(t) \star y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) Y(f) \quad x(t) y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \star Y(f) \\
 \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df \\
 \delta(t) \star x(t) &= x(t) \quad x(t) \delta(t - a) = x(a) \delta(t - a) \\
 \delta(t) &\xrightarrow{\text{TF}} 1 \quad \text{III}_T(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) \quad e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi f^2} \\
 \cos(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\
 \sin(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{2i} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \\
 \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t) &\xrightarrow{\text{TF}} T \text{sinc}(\pi f T) \\
 x_{n-1} &\xrightarrow{\text{Tz}} z^{-1} X[z] \quad h_n \star x_n \xrightarrow{\text{Tz}} H[z] X[z] \\
 X(\tilde{f}) &= X[e^{i2\pi \tilde{f}}]
 \end{aligned}$$

Signaux aléatoires :

$$\begin{aligned}
 P_x &\triangleq \mathbb{E}\{|x_n|^2\} \quad / \quad P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x(t)|^2\} \\
 m_x &\triangleq \mathbb{E}\{x_n\} \quad R_{xy}(k) \triangleq \mathbb{E}\{(x_n - m_x)(y_{n-k} - m_y)^*\} \\
 m_x &\triangleq \mathbb{E}\{x(t)\} \quad R_{xy}(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{(x(t) - m_x)(y(t - \tau) - m_y)^*\} \\
 S_{xx}(f) &\triangleq \text{TF}[R_{xx}(k)]
 \end{aligned}$$

2 Extraits de l'aide Matlab

FFT Discrete Fourier transform.

FFT(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X. For matrices, the FFT operation is applied to each column. For N-D arrays, the FFT operation operates on the first non-singleton dimension.

FFT(X,N) is the N-point FFT, padded with zeros if X has less than N points and truncated if it has more.

FFT(X,[],DIM) or FFT(X,N,DIM) applies the FFT operation across the dimension DIM.

For length N input vector x, the DFT is a length N vector X, with elements

$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) \exp(-j*2*\pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 \leq k \leq N.$$

The inverse DFT (computed by IFFT) is given by

$$x(n) = (1/N) \sum_{k=1}^N X(k) \exp(j*2*\pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 \leq n \leq N.$$

FFTSHIFT Shift zero-frequency component to center of spectrum.

For vectors, FFTSHIFT(X) swaps the left and right halves of X. For matrices, FFTSHIFT(X) swaps the first and third quadrants and the second and fourth quadrants. For N-D arrays, FFTSHIFT(X) swaps "half-spaces" of X along each dimension.

FFTSHIFT(X,DIM) applies the FFTSHIFT operation along the dimension DIM.

FFTSHIFT is useful for visualizing the Fourier transform with the zero-frequency component in the middle of the spectrum.

Class support for input X:

float: double, single

Nom: _____

Prénom: _____

1.

2.

3.

4.

5.

suite ...

6.

7.

Entourer les réponses justes.

- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 8. | a | b | c | d |
| 9. | a | b | c | d |
| 10. | a | b | c | d |
| 11. | a | b | c | d |
| 12. | a | b | c | d |
| 13. | a | b | c | d |
| 14. | a | b | c | d |
| 15. | a | b | c | d |
| 16. | a | b | c | d |
| 17. | a | b | c | d |
| 18. | a | b | c | |
| 19. | a | b | c | |
| 20. | a | b | c | |
-