Telecom SudParis

SEPTEMBRE, 2009
Deuxième session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

Les calculatrices, notes de cours ou autres documents, ne sont pas autorisés.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le **barême** prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 point par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par l'étoile $.^*$ en exposant. L'espérance mathématique est notée $\mathbb{E}\{.\}$.
- En annexe est donné un formulaire et un extrait de l'aide Matlab.

PARTIE A : Questions courtes et QCM
(répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Pour les questions 1 à 7, les réponses sont à donner sur la place réservée en p.10.
Deux ou trois lignes maximum sont demandées.
Pour les questions 8 à 20 de type QCM, indiquer **la ou *les* bonne(s) réponse(s)**
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.11.

1. Que peut-on dire de la transformée de Fourier de signaux échantillonnés ? de la transformée de Fourier de signaux périodiques ?

2. Le signal analytique associé à un signal à valeurs réelles est-il à valeurs réelles ou complexes ? Justifier.

3. Donner la forme générale de la fonction de transfert en z d'un filtre purement récursif (ou filtre AR : auto-régressif). Quelle est l'équation temporelle donnant la sortie en fonction de l'entrée ?

4. Que peut-on dire du domaine de convergence de la fonction de transfert en z d'un filtre causal ? Faire un schéma.

5. Comment un signal aléatoire se définit-il mathématiquement ? Qu'appelle-t-on trajectoire d'un signal aléatoire ?

6. Quelle est le nom donné à un signal aléatoire stationnaire (sens large) dont la densité spectrale de puissance est constante ?

7. Qu'appelle-t-on algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) ? Préciser le produit matriciel effectué et la (ou les) condition(s) pour que cet algorithme puisse être utilisé.

suite ...

8. On effectue l'analyse d'un signal à l'analyseur de spectre analogique (tel que celui que vous avez manipulé en TP). On garde constante la bande de fréquences $[f_{\min}, f_{\max}]$ étudiée et affichée à l'analyseur.

- **F** Pour améliorer la résolution en fréquence, il faut choisir un balayage plus rapide.
- **F** Pour améliorer la résolution en fréquence, il faut que le filtre d'analyse de l'analyseur soit moins sélectif et ait une bande passante plus large.
- **V** Pour un affichage plus rapide, il faut un balayage plus rapide. La vitesse de balayage possible dépend de la résolution choisie.
- **F** Pour un affichage plus rapide, il faut un balayage plus rapide. La vitesse de balayage possible peut être choisie indépendamment de la résolution.

9. Que renvoie la commande `fftshift([1 1 1 1])` sous le logiciel Matlab ?

- **F** Le vecteur `[1 2 3 4]`.
- **F** Le vecteur `[4 0 0 0]`.
- **F** Le vecteur `[1+i 1-i 1+i 1-i]`.
- **V** Le vecteur `[1 1 1 1]`.

10. Que renvoie la commande `fft([1 0 0 0])` sous le logiciel Matlab ?

- **F** Le vecteur `[1 2 3 4]`.
- **F** Le vecteur `[4 0 0 0]`.
- **F** Le vecteur `[1+i 1-i 1+i 1-i]`.
- **V** Le vecteur `[1 1 1 1]`.

11. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de puissance σ^2 envoyé en entrée d'un filtre stable de réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de réponse en fréquence $H(f)$.

- **F** La densité spectrale de puissance en sortie est $H(f)X(f)$ où $X(f)$ est la transformée de Fourier à temps discret de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
- **F** La densité spectrale de puissance en sortie est $H(f)X(f)$ où $X(f)$ est la transformée de Fourier rapide de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
- **V** La densité spectrale de puissance en sortie est $|H(f)|^2\sigma^2$.
- **F** La densité spectrale de puissance en sortie est $H(f)\sigma$.

12. Un bruit blanc numérique :

- **V** a une densité spectrale de puissance constante.
- **F** a une densité spectrale de puissance égale à un Dirac.
- **F** a pour transformée de Fourier une constante.
- **F** a pour transformée de Fourier un Dirac.

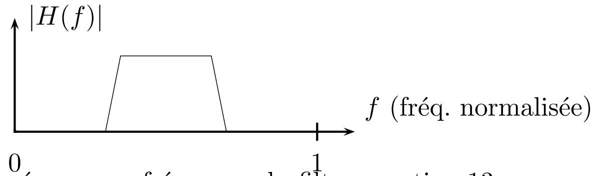

FIG. 1 – Module de la réponse en fréquence du filtre question 13

13. La figure 1 représente schématiquement le module de la réponse en fréquence d'un filtre *numérique* en fonction de la fréquence normalisée.

F il s'agit d'un filtre passe-bas.

V il s'agit d'un filtre passe-haut.

F il s'agit d'un filtre passe-bande.

F il s'agit d'un filtre coupe-bande.

14. Soit $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale d'énergie (ou respectivement de puissance) d'un signal $x(t)$.

F L'énergie (ou respectivement la puissance) du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma_x(f)|^2 \, df$.

V L'énergie (ou respectivement la puissance) du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(f) \, df$.

F L'énergie (ou respectivement la puissance) du signal vaut $\Gamma_x(0)$.

F L'énergie (ou respectivement la puissance)du signal vaut $|\Gamma_x(0)|^2$.

15. Un filtre numérique rationnel défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stable si et seulement si :

F les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative.

V $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k|$ est fini.

V l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ est inclus dans le domaine de convergence de $H[z]$.

F $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [L. Fathi] Pourquoi l'impulsion carrée (fonction porte) n'est-elle pas utilisée pour la mise en forme dans les systèmes réels de communication ?

F Parce qu'elle ne vérifie pas le critère de Nyquist.

F Parce que le module de sa transformée de Fourier est une fonction paire.

V Parce qu'elle possède un spectre qui occupe tout l'axe des fréquences.

F Parce qu'elle est sensible au bruit.

17. [L. Fathi] En communications numériques, le critère de Nyquist stipule qu'il y a absence d'interférence entre-symboles, si l'échantillonnage au rythme symbole de la fonction d'autocorrélation de l'impulsion de mise en forme conduit à :

- **V** Une impulsion de Dirac.
- **F** Un peigne de Dirac de période correspondant au temps symbole.
- **F** Une impulsion triangulaire de durée correspondant à deux fois le temps symbole.
- **F** Une impulsion gaussienne avec un écart-type correspondant au temps symbole.

18. [F. Barbaresco] La technique radar Doppler consiste à émettre un train d'impulsions. Du fait du théorème d'échantillonnage de Shannon, le radar est ambigu en Doppler, et du fait du temps d'écoute limité entre impulsions émises, le radar est ambigu en distance. Ces deux ambiguïtés ne sont pas indépendantes. Laquelle de ces dépendances lie l'ambiguïté Doppler et l'ambiguïté Distance :

- **V** le produit des ambiguïtés Doppler et Distance est constant ;
- **F** le rapport des ambiguïtés Doppler et Distance est constant ;
- **F** la somme des ambiguïtés Doppler et Distance est constant.

19. [P. Mège] Les interférences inter-symboles sont dues :

- **F** à l'effet Doppler qui modifie le spectre des fréquences du signal reçu.
- **V** aux réflexions des différents trajets sur des obstacles.
- **F** aux imprécisions d'horloge du récepteur qui introduisent de la gigue.

20. [P. Mège] Dans un système de radiocommunication la modulation utilisée doit être efficace spectralement :

- **F** Elle doit distordre le spectre de fréquence du signal le moins possible de façon que le destinataire reçoive un signal propre.
- **F** Elle doit utiliser une bande de fréquence la plus large possible afin d'offrir le débit le plus élevé possible au destinataire
- **V** Elle doit maximiser la capacité offerte pour une bande de fréquence disponible donnée.

PARTIE B : exercice

On désigne par $\mathbb{E}\{.\}$ l'espérance mathématique et par $< . >$ la moyenne temporelle d'une expression quelconque (càd que par définition : $< z(t) >\triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} z(t)\,dt$).
Soit le signal aléatoire à temps continu :

$$x(t) = A_1 e^{\imath 2\pi f_1 t} + A_2 e^{\imath 2\pi f_2 t}$$

où f_1, f_2 sont des constantes réelles strictement positives et A_1, A_2 sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{C}$. A_1 et A_2 sont supposées centrées ($\mathbb{E}\{A_1\} = \mathbb{E}\{A_2\} = 0$).

21. Calculer $\mathbb{E}\{x(t)\}$ et $< x(t) >$. Conclusion.

22. (a) On suppose de plus que A_1 et A_2 sont décorrélées et telles que $|A_1| = |A_2| = 1$. Calculer $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)^*\}$ et $< x(t)x(t-\tau)^* >$. Conclusion.

(b) On suppose ici que A_1 et A_2 sont corrélées (et donc non indépendantes). Calculer à nouveau $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)^*\}$ et montrer qu'il apparaît des termes supplémentaires. Le signal est-il stationnaire dans ce cas ?

23. Dans le cas où le signal est stationnaire au sens large, calculer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de $x(t)$? Quelle est la puissance du signal ?

Eléments de réponse:

21. $\mathbb{E}\{x(t)\} =< x(t) >= 0$. Le signal est stationnaire et ergodique au 1^{er} ordre.

22. (a) $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)^*\} =< x(t)x(t-\tau)^* >= e^{\imath 2\pi f_1 \tau} + e^{\imath 2\pi f_2 \tau}$. Le signal est stationnaire et ergodique au 2^{nd} ordre (remarquer la nécessité de $|A_1| = |A_2| = 1$ pour l'ergodicité.

(b) Si A_1 et A_2 sont corrélées, non stationnarité (sauf pour $f_1 = f_2$) en raison des termes croisés supplémentaires (qui dépendent de t :

$$\mathbb{E}\{A_1 A_2^*\} e^{\imath 2\pi[(f_1-f_2)t+f_2\tau]} + \mathbb{E}\{A_1^* A_2\} e^{\imath 2\pi[(f_2-f_1)t+f_1\tau]}$$

23. $S_x(f) = \delta(f - f_1) + \delta(f - f_2)$; $P_x = R_x(0) = 2$.

PARTIE C : exercice

24. On considère un signal analogique $x(t)$ à bande limitée qui occupe une bande $[-B, B]$.

(a) Quelle est la fréquence minimale à laquelle il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ?

(b) On construit le signal $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence fixée et grande par rapport à B. Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ en fonction de $X(f)$, tranformée de Fourier de $x(t)$ (on suppose qu'il n'y a pas de problème d'existence). Représenter schématiquement $Y(f)$ et $X(f)$.

(c) Quelle est la bande $[-C, C]$ occupée par $y(t)$? Si on applique directement le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage de $y(t)$?
Ce résultat vous inspire-t-il un commentaire en comparaison du résultat de la question 24a ?

Nous allons maintenant montrer comment il est possible d'échantillonnner un signal bande étroite à une fréquence inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist.

25. On considère un signal $s(t)$ à *valeurs réelles* et à bande étroite. On note f_0 la fréquence centrale de $s(t)$; $[f_0 - B, f_0 + B]$ désigne la bande des fréquences positives occupés par $s(t)$ (f_0 grand par rapport à B).

(a) Tracer schématiquement le spectre de $s(t)$ en faisant apparaître les fréquences positives et négatives.

(b) Rappeler la définition de $z_s(t)$, signal analytique associé à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

(c) Rappeler la définition de $\xi_s(t)$, enveloppe complexe associée à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

26. (a) Quelle est la bande occupée par $\xi_s(t)$? En déduire la fréquence minimale à laquelle on peut échantillonner $\xi_s(t)$ sans perdre d'information.

(b) Expliquer brièvement comment à partir d'échantillons de $\xi_s(t)$ prélevés à la fréquence $2B$, on peut reconstituer $s(t)$. Conclure.

Eléments de réponse:

24. (a) Fréquence minimale d'échantillonnage de $x(t)$: $f_e^{(x)} = 2B$.

(b) $Y(f) = \frac{1}{2}(X(f - f_0) + X(f + f_0))$.

(c) $C = f_0 + B$. Fréquence minimale d'échantillonnage de $y(t)$: $f_e^{(y)} = 2C = 2(f_0 + B)$. Il est surprenant que $f_e^{(y)} >> f_e^{(x)}$ alors que les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ contiennent la même information.

25. (a)

(b) Voir cours.

(c) Voir cours.

26. (a) Bande occupée par $\xi_s(t)$: $[-B, B]$. Fréquence minimale d'échantillonnage de $\xi_s(t)$: $f_e^{(\xi)} = 2B$.

(b) A partir d'échantillons $\xi_s(k/2B), k \in \mathbb{Z}$ on peut théoriquement reconstruire $\xi_s(t), t \in \mathbb{R}$ (d'après th. d'échantillonnage) et alors $s(t) = \Re[\xi_s(t)e^{\imath 2\pi f_0 t}]$. Il est donc possible de reconstruire un signal réel et bande étroite (largeur de bande $2B$) à partir des échantillons de son enveloppe complexe prélevés à une fréquence $2B$ très inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist.

1 Formulaire

Energie, puissance, corrélation, densité spectrale :

$$E_x \triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$R^e_{xy}(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t-\tau) \, dt$$

$$R^p_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t-\tau) \, dt$$

$$S^e_{xx}(f) \triangleq \mathrm{TF}[R^e_{xx}(\tau)] = |X(f)|^2$$

$$S^p_{xx}(f) \triangleq \mathrm{TF}[R^p_{xx}(\tau)]$$

Convolution, filtrage, échantillonnage :

$$h(t) \star x(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} h(\theta) x(t-\theta) \, d\theta = x(t) \star h(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(\theta) h(t-\theta) \, d\theta$$

$$Y(f) = H(f)X(f) \qquad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

$$x_e(t) \triangleq x(t)\, Ш_{T_e}(t) \qquad X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_k X_e(f - \frac{k}{T_e})$$

cond. Shannon-Nyquist : $F_e \geq 2B$

Signal analytique, transformée de Hilbert, enveloppe complexe :

$$Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

$$z_x(t) = \left(\delta(t) + \imath \frac{1}{\pi t}\right) \star x(t)$$

$$z_x(t) = x(t) + \imath \widehat{x}(t)$$

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t) \qquad \widehat{X}(f) = -\imath X(f) \mathrm{signe}(f)$$

$$\xi_x(t) = e^{-\imath 2\pi f_0 t} z_x(t) \qquad \Xi_x(f) = Z_x(f+f_0)$$

Temps discret :

$$X[z] \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

$$x_k = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C X[z] z^{k-1} \, dz = \sum_j \mathrm{Res}\left[X[z]z^{k-1}, p_j\right]$$

$$h_n \star x_n \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k} = x_n \star h_n \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{n-k}$$

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \leftrightarrow y_n + \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j}$$

Transformées de Fourier :

$$\text{TFTC : } X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-\imath 2\pi f t} \, dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{\imath 2\pi f t} \, df$$

$$\text{TFTD : } X(\tilde{f}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-\imath 2\pi \tilde{f} n} \qquad x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tilde{f}) e^{\imath 2\pi \tilde{f} n} \, d\tilde{f}$$

$$\text{TFD : } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\imath 2\pi \frac{k}{N} n} \qquad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\imath 2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$\mathbf{W} = \left[e^{-\imath \frac{2\pi}{N}(n-1)(p-1)}\right]_{n,p=1\ldots N}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{W}\mathbf{W}^H = N\mathbf{Id}$$

Propriétés transformées Fourier / z / convolution :

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathrm{TF}} e^{-\imath 2\pi f t_0} X(f) \qquad e^{\imath 2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f-f_0)$$

$$x(t)^* \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(-f)^* \qquad x(at) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{|a|})$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathrm{TF}} \imath 2\pi f X(f) \qquad tx(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} -\frac{1}{\imath 2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

$$x(t) \star y(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f)Y(f) \qquad x(t)y(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f) \star Y(f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 \, df$$

$$\delta(t) \star x(t) = x(t) \qquad x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} 1 \qquad Ш_T(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f) \qquad e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\mathrm{TF}} e^{-\pi f^2}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{2}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{2\imath}(\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0))$$

$$\mathbb{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} T\mathrm{sinc}(\pi f T)$$

$$x_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{Tz}} z^{-1} X[z] \qquad h_n \star x_n \xrightarrow{\mathrm{Tz}} H[z]X[z]$$

$$X(\tilde{f}) = X[e^{\imath 2\pi \tilde{f}}]$$

Signaux aléatoires :

$$P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x_n|^2\} \quad / \quad P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x(t)|^2\}$$

$$m_x \triangleq \mathbb{E}\{x_n\} \qquad R_{xy}(k) \triangleq \mathbb{E}\{(x_n - m_x)(y_{n-k} - m_y)^*\}$$

$$m_x \triangleq \mathbb{E}\{x(t)\} \qquad R_{xy}(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{(x(t) - m_x)(y(t-\tau) - m_y)^*\}$$

$$S_{xx}(f) \triangleq \mathrm{TF}[R_{xx}(k)]$$

2 Extraits de l'aide Matlab

```
FFT Discrete Fourier transform.
   FFT(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  For
   matrices, the FFT operation is applied to each column. For N-D
   arrays, the FFT operation operates on the first non-singleton
   dimension.

   FFT(X,N) is the N-point FFT, padded with zeros if X has less
   than N points and truncated if it has more.

   FFT(X,[],DIM) or FFT(X,N,DIM) applies the FFT operation across the
   dimension DIM.

   For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
   with elements
                     N
      X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                    n=1
   The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                     N
      x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                    k=1


FFTSHIFT Shift zero-frequency component to center of spectrum.
   For vectors, FFTSHIFT(X) swaps the left and right halves of
   X.  For matrices, FFTSHIFT(X) swaps the first and third
   quadrants and the second and fourth quadrants.  For N-D
   arrays, FFTSHIFT(X) swaps "half-spaces" of X along each
   dimension.

   FFTSHIFT(X,DIM) applies the FFTSHIFT operation along the
   dimension DIM.

   FFTSHIFT is useful for visualizing the Fourier transform with
   the zero-frequency component in the middle of the spectrum.

   Class support for input X:
      float: double, single
```

suite . . .

Nom: ______________________

Prénom: ______________________

1.

2.

3.

4.

5.

---

suite ...

6.

7.

Entourer les réponses justes.

8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	d
17.	a	b	c	d
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	
20.	a	b	c	