TD SIGNAL

Exercice 18 page 13

$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\phi)$ avec ϕ variable aléatoire sur $[0,2\pi]$

1°) A *t* fixé, *x* est une variable aléatoire. Calculons son espérance :

$$E(x(t))=E(A\cos(2\pi f_0 t+\phi))=\int_{\mathbb{R}} A\cos(2\pi f_0 t+\phi)\frac{1}{2\pi}1_{[0,2\pi]}(\phi)d\phi$$

$$E(x(t))=\int_0^{2\pi}\frac{A}{2\pi}\cos(2\pi f_0 t+\phi)d\phi=\frac{A}{2\pi}(\sin(2\pi f_0 t+\phi)-\sin(2\pi f_0 t))$$

Ainsi $\boxed{E(x(t))=0}$

L'espérance ne dépend pas du temps, donc le processus est stationnaire à l'ordre 1.

Calculons maintenant la moyenne temporelle :

$$<x(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos(2\pi f_0 t+\phi)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{A}{2\pi f_0 T}\left[\sin\left(2\pi f_0\frac{T}{2}+\phi\right)-\sin\left(-2\pi f_0\frac{T}{2}+\phi\right)\right]$$

Ainsi $<x(t)>=0$

La moyenne temporelle ne dépend pas de la phase, donc le processus est ergodique d'ordre 1.

2°) Passons maintenant à l'ordre 2 :

$$E(x(t)x(t-\tau))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} A\cos(2\pi f_0 t+\phi)A\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)d\phi$$

$$E(x(t)x(t-\tau))=\frac{A^2}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\cos(2\pi f_0(2t-\tau)+2\phi)d\phi+\int_0^{2\pi}\cos(2\pi f_0\tau)d\phi\right]$$

$$\boxed{E(x(t)x(t-\tau))=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

L'espérance est indépendante du temps, donc le processus est stationnaire d'ordre 2.

Il est stationnaire d'ordre 1 et d'ordre 2, il est donc stationnaire au sens large.

Pour la moyenne temporelle :

$$<x(t)x(t-\tau)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos(2\pi f_0 t+\phi)A\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)dt$$

$$\boxed{<x(t)x(t-\tau)>=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

De même, la moyenne est indépendante de la phase, donc la processus est ergodique d'ordre 2.

Rappel

$$\Gamma_x(f)=TF(R_x(\tau))(f)=\frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))\right)$$ (transformée de Fourier du cosinus)

$$\Gamma_x(f)=\frac{A^2}{4}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$$

$$\Rightarrow P=\int\Gamma_x(f)df=\frac{A^2}{2}=R_x(0)$$

Exercice 20 page 14

On considère le signal suivant :

$$x(t)=a\cos(2\pi f_0 t+\phi)+b(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi \quad \text{variable aléatoire sur } [0,2\pi] \\ b(t) \quad \text{bruit blanc centré de densité spectrale } \dfrac{N_0}{2} \end{cases}$$

1°) Calcul de l'énergie

$$E(x(t))=E(a\cos(2\pi f_0 t+\phi))+E(b(t))=0$$

Donc le signal est stationnaire à l'ordre 1

$$E(x(t)x(t-\tau))=E((a\cos(2\pi f_0 t+\phi)+b(t))(a\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)+b(t-\tau)))$$

$$E(x(t)x(t-\tau))=E(a^2\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi))+E(a\cos(2\pi f_0 t+\phi)b(t-\tau)) \\ +E(a\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)b(t))+E(b(t)b(t-\tau))$$

$$E(x(t)x(t-\tau))=\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+E(b(t)b(t-\tau)) \quad \text{(le reste vaut 0 par indépendance)}$$

$$E(b(t)b(t-\tau))=R_b(\tau)=TF^{-1}(S_b(f))=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Ainsi

$$\boxed{E(x(t)x(t-\tau))=\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+\frac{N_0}{2}\delta(\tau)=\gamma_x(\tau)}$$

2°) $\boxed{\Gamma_x(f)=TF(\gamma_x(\tau))=\frac{a^2}{4}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))+\frac{N_0}{2}}$

3°) $\Gamma_y(f)=\Gamma_x(f)\Gamma_h(f)=\Gamma_x(f)\,1_{[f_0-\frac{B}{2},f_0+\frac{B}{2}]\cup[-f_0-\frac{B}{2},-f_0+\frac{B}{2}]}(f)$

La puissance vaut alors

$$P_y=\int\Gamma_y(f)\,df=\frac{a^2}{4}+B\frac{N_0}{2}+\frac{a^2}{4}+B\frac{N_0}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow P_y=\frac{a^2}{2}+BN_0}$$