THEORIE DU SIGNAL
TD 1

Exercice 3 p 3

On considère le signal $x(t)=\begin{cases} A e^{-\alpha t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Calculons l'énergie :

$$E_x=\int |x(t)|^2\,dt=A^2\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}\,dt=-\frac{A^2}{2\alpha}[e^{-2\alpha t}]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{E_x=\frac{A^2}{2\alpha}}$$

2. On souhaite maintenant déterminer la fonction d'auto-corrélation

Elle est définie par $\gamma_x(\tau)=\int x(t)x^*(t-\tau)\,dt$

$$\gamma_x(\tau)=\int A e^{-\alpha t} 1_{[0,+\infty[}(t) A e^{-\alpha(t-\tau)} 1_{[0,+\infty[}(t-\tau)\,dt=A^2\int_{\max(0,\tau)}^{+\infty} e^{-2\alpha t+\alpha\tau}\,dt$$

$$\gamma_x(\tau)=\frac{A^2}{2\alpha}[e^{-2\alpha t+\alpha\tau}]_{\max(0,\tau)}^{+\infty}=\begin{cases} \frac{A^2}{2\alpha}e^{-\alpha\tau} & \text{si } \tau>0 \\ \frac{A^2}{2\alpha}e^{\alpha\tau} & \text{si } \tau<0 \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma_x(\tau)=\frac{A^2}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}}$$

On peut alors retrouver l'expression de l'énergie : $E_x=\gamma_x(0)=\frac{A^2}{2\alpha}$

3. On va maintenant calculer la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, que l'on appelle densité spectrale d'énergie :

$$\Gamma_x(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_x(\tau)e^{-2i\pi f\tau}\,d\tau=\frac{A^2}{2\alpha}\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(\alpha-2i\pi f)}\,d\tau+\frac{A^2}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{\tau(-\alpha-2i\pi f)}\,d\tau$$

$$\Gamma_x(f)=\frac{A^2}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha-2i\pi f}+\frac{1}{\alpha+2i\pi f}\right]$$

$$\boxed{\Gamma_x(f)=\frac{A^2}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}}$$

On retrouve ici l'énergie en intégrant la densité spectrale d'énergie :

$$E=\int \Gamma_x(f)\,df=A^2\int \frac{1}{\alpha^2\left(1+\frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2}\right)}\,df$$

$$E=\frac{A^2}{2\alpha\pi}\int\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{A^2}{2\alpha\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$E=\frac{A^2}{2\alpha}$$

La vraie finalité de la transformée de Fourier :

On peut écrire un signal périodique non pas sous forme de somme finie, mais sous forme de somme infinie de signaux périodiques : $x(t)=\int X(f)e^{-2i\pi f t}df$

4. Cette fois, on intègre sur $\left[-\frac{\alpha}{2\pi};\frac{\alpha}{2\pi}\right]$

$$E'=\int_{-\frac{\alpha}{2\pi}}^{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{A^2}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}df$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{E'=\frac{A^2}{4\alpha}=\frac{E}{2}}$

Exercice 4 p 3

$$y(t)=A\,x(t-t_0)+\alpha\,x(t-t_1)$$

Rappel : si $y(t)=x(t)*h(t)$ alors $Y(f)=X(f)H(f)$

1. Calcul de la fonction de transfert $H_c(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}$

En remarquant que $\int x(t-t_0)e^{-2i\pi f t}dt=\int x(t)e^{-2i\pi f(t-t_0)}dt=e^{-2i\pi f t_0}X(f)$ on obtient :

$$H_c(f)=A\,e^{-2i\pi f t_0}+\alpha\,e^{-2i\pi f t_1}$$

2. On souhaite déterminer une nouvelle fonction de transfert telle que

$$\begin{Bmatrix} Y'(f)=H_e(f)Y(f) \\ Y'(f)=A e^{-2i\pi f t_0}X(f) \end{Bmatrix}$$

On obtient ainsi $H_e(f)=\dfrac{1}{1+\frac{\alpha}{A}e^{-2i\pi f(t_1-t_0)}}$

En faisant un développement limité à l'ordre 2 :

$$H_e(f)=1-\frac{\alpha}{A}e^{-2i\pi f(t_1-t_0)}+\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 e^{-4i\pi f(t_1-t_0)}$$

En découle :

$$Y'(f)=Y(f)-\frac{\alpha}{A}e^{-2i\pi f(t_1-t_0)}Y(f)+\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 e^{-4i\pi f(t_1-t_0)}Y(f)$$

Ce qui se réécrit en temporel :

$$\boxed{y'(t)=y(t)-\frac{\alpha}{A}y(t-(t_1-t_0))+\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 y(t-2(t_1-t_0))}$$

Il ne reste plus qu'à identifier les coefficients :

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_0=1 & A_1=-\frac{\alpha}{A} \\ A_2=\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 & \tau=t_1-t_0 \end{array}}$$