TD FILE D'ATTENTE

2.1] Étude d'une Chaîne de Markov à Temps Discret

1. Il faut qu'il n'y ait pas d'états absorbants, ie que le graphe soit fortement connexe.

Irréductibilité :

- si $\alpha=0$ $\Rightarrow$ 3 est un état absorbant
- si $p=0$ $\Rightarrow$ [1+2] est absorbant

Ainsi, pour que le graphe soit irréductible, il faut que $(\alpha, p)\neq(0,0)$

Remarque : si les deux sont positifs, le graphe est connexe et la chaîne est irréductible.

Apériodicité :

- si $p=1$ $\Rightarrow$ périodique de période 3 si $\alpha=1$ et apériodique sinon
- si $\alpha=1$ $\Rightarrow$ périodique si $p=1$

Conclusion : pour que le graphe soit apériodique irréductible, il faut que :

$\boxed{(\alpha, p)\neq(0,0)\,\text{et}\,(\alpha, p)\neq(1,1)}$

2. La probabilité stationnaire, c'est la probabilité d'équilibre, ie le temps pendant lequel on reste dans un état donné.

On considère alors le vecteur $\pi=[\pi_1, \pi_2, \pi_3]$ tel que $\pi P=\pi$

Ici $P=\begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$

Ainsi, on obtient le système suivant :

$$\pi_1=\pi_2$$
$$(1-p)\pi_1+\alpha\pi_3=\pi_2$$
$$p\pi_1+(1-\alpha)\pi_3=\pi_3$$

Enfin, comme c'est un vecteur d'état, on a aussi $\sum_{i=1}^{3}\pi_i=1$

On résout le système obtenu :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \pi_1=\pi_2=\dfrac{\alpha}{2\alpha+p} \\ \pi_3=\dfrac{p}{2\alpha+p} \end{Bmatrix}}$$

3. Les trois états sont équiprobables ssi $\pi_1=\pi_2=\pi_3$

ie $\boxed{\alpha=p}$

4. Temps moyen de premier retour en 2 :

Durée de retour(nbre d'étapes)	Probabilité
1	0
2	1(1 – p)
3	$1.p.\alpha$
4	$1.p.(1-\alpha).\alpha$
n	$\alpha.p.(1-\alpha)^{n-3}$

Le temps moyen de premier retour vaut alors :

$$E(n)=\sum_i n_i p_i=0*1+2(1-p)+\sum_{n=3}^{\infty} n*p*\alpha(1-\alpha)^{n-3}$$

Calcul à part :

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-3}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(1-\alpha)^{n-1}=2\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n+\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-1}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n=\frac{2}{1-(1-\alpha)}=\frac{2}{\alpha}$$

Dans la seconde somme, en posant $x=1-\alpha$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dx^n}{dx}=\frac{d\sum x^n}{dx}=\frac{1}{\alpha^2}$$

Ainsi $\boxed{E(n)=2(1-p)+\alpha p\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)=\frac{2\alpha+p}{\alpha}}$

Remarque : $E(n)=\frac{1}{\pi_1}=\frac{1}{\pi_2}$ ce qui n'est pas rare dans le cas de CMTD.

2.2] Processus de naissance et de mort

En appliquant le théorème des coupes, on a :

$$c_0 \Rightarrow p\pi_0=q\pi_1$$
$$c_1 \Rightarrow p\pi_1=q\pi_2$$
$$\vdots$$

Par récurrence immédiate, on obtient : $\pi_n=\left(\frac{p}{q}\right)^n\pi_0$

De plus, c'est un vecteur d'état, vérifiant donc $\sum_i \pi_i=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^n\pi_0=1$

p est nécessairement non nul, sinon, pas de système.
De plus, si p < q, la racine converge, et on a un état stationnaire.
Avec ces hypothèses, on a :

$$\pi_0=1-\frac{p}{q}$$

Et $\boxed{\pi_n=\left(\frac{p}{q}\right)^n\left(1-\frac{p}{q}\right)}$

2.3] Modèle de trafic sur un lien

1. Trafic de Bernoulli

La matrice du système vaut $P=\begin{pmatrix}1-p & p\\ 1-p & p\end{pmatrix}$

Comme dans l'exercice 2.1, on résout $\pi P=\pi$ et l'on obtient, en utilisant $\sum_i \pi_i=1$

$$\begin{Bmatrix}\pi_0=1-p\\ \pi_1=p\end{Bmatrix}$$

Le débit est alors égal à :

$$\Lambda=0*\pi_0+1*\pi_1=\pi_1=p$$

On va maintenant calculer la probabilité stationnaire :

Durée de retour	Probabilité
1	p
2	$p(1-p)$
n	$p(1-p)^{n-1}$

$$E(n)=\sum_i n_i p_i=\sum_{n=0}^{\infty} n*p(1-p)^{n-1}=p\sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{E(n)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\pi_1}}$

On souhaite aussi calculer la variance : $\mathrm{var}(n)=E(n^2)-(E(n))^2$

On va donc calculer $E(n(n-1))=E(n^2)-E(n)$ pour en déduire $E(n^2)$

$$E(n(n-1))=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p(1-p)^{n-1}=p(1-p)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}$$

En inversant somme et dérivée seconde, on obtient :

$$E(n(n-1))=\frac{2}{p^3}p(1-p)=\frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\Rightarrow E(n^2)=\frac{2-p}{p^2}$$

Et finalement : $\boxed{\mathrm{var}(n)=\frac{1-p}{p^2}}$

2. <u>Trafic de Bursty Geometric</u>

En utilisant le théorème des coupes :

$$(1-q)\pi_0=(1-p)\pi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1=\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\pi_0$$

De plus, sachant que c'est un vecteur d'état : $\pi_1+\pi_2=1$

Ce qui donne : $\boxed{\begin{Bmatrix} \pi_0=\dfrac{1-p}{2-p-q} \\ \pi_1=\dfrac{1-q}{2-p-q} \end{Bmatrix}}$

Le débit vaut :

$$\boxed{\Lambda=0*\pi_0+1*\pi_1=\frac{1-q}{2-p-q}}$$

De nouveau, on va s'intéresser à la probabilité stationnaire :

Durée de retour	Probabilité
1	p
2	$(1-q)(1-p)$
3	$q(1-q)(1-p)$
n	$q^{n-2}(1-q)(1-p)$

$$E(n) = p + \sum_{n=2}^{\infty} n(1-q)(1-p)q^{n-2} = p + \frac{(1-q)(1-p)}{q} \sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-1}$$

De nouveau, on va inverser somme et dérivée :

$$\sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{dq^n}{dq} = \frac{d\sum_{n=2}^{\infty} q^n}{dq} = \frac{q(2-q)}{(1-q)^2}$$

Ainsi ; $\boxed{E(n) = \frac{2-p-q}{1-q} = \frac{1}{\pi_1}}$

Ensuite, pour obtenir la variance, il faut calculer $E(n^2)$ via $E(n(n-1))$ …

2.3. $Y(t)$ n'est pas un processus markovien.

- 1 cellule : rafale + α arrivées de cellules
- 0 cellule : 2 possibilités :
  - a) on est en 0 : $P(n+1) = \alpha(1-q)$
  - b) on est en 1 et on n'a pas de cellules : $P(n+1) = \alpha p$

On n'a plus les mêmes probabilités d'évolution future.

Le débit est alors $\boxed{\Lambda' = \alpha \pi_1 = \frac{\alpha(1-p)}{2-p-q} \neq \Lambda}$