ANALYSE NUMERIQUE
TD 2

Exercice 3.3 p 65

$$g_\lambda(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$$

$$G_\lambda(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$$

Si t < 0 : $G_\lambda(t)=\frac{1}{2}[e^{\lambda x}]_{-\infty}^{t}=\frac{1}{2}e^{\lambda t}$

Si t > 0 : $G_\lambda(t)=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}$

Ainsi, la fonction de répartition vaut : $G_\lambda(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda t}, \text{ si } t<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}, \text{ si } t>0\end{cases}$

Ensuite on inverse cette fonction en résolvant $G_\lambda(t)=y$:

$$G_\lambda^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{\ln(2y)}{\lambda}, \text{ si } y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{-\ln(2(1-y))}{\lambda}, \text{ si } y\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

On prend u une loi uniforme sur [0,1] :

$$\begin{cases}\text{si } u<\frac{1}{2}, x=G_\lambda^{-1}(u)=\frac{\ln(2u)}{\lambda}\\ \text{si } u>\frac{1}{2}, x=G_\lambda^{-1}(u)=\frac{-\ln(2(1-u))}{\lambda}\end{cases}$$

2) Code Matlab correspondant :

$u=randn$ \\ on tire aléatoirement selon la loi normale

$$if\ u<\frac{1}{2}, x=\frac{\log(2u)}{\lambda}$$
$$else ...$$
$$end$$

3) Méthode d'acceptation-rejet:

$$f(x)<Mg(x)$$

L'idée : faire des tirages selon *g* et voir si ces tirages peuvent aussi s'appliquer à *f*.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Le quotient vaut alors : $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{-1}{2}(|x|-\lambda)^2+\frac{\lambda^2}{2}}$

Ce quotient est maximum quand $x=\lambda, M=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{\lambda^2}{2}}$

Méthode : on tire $z \sim g$ et u loi uniforme sur [0,1]. Si $u \leq \frac{f(x)}{M\,g(x)}$ alors x = z et le tirage en f est acceptable. Sinon, on retire z.

4) Code Matlab

Exercice 3.1 p 65

On a intérêt à prendre M le plus petit possible car la probabilité d'acceptation vaut $\frac{1}{M}$

$$\int f(x)dx \leq M \int g(x)dx \Rightarrow M \geq 1$$

$$P\left(U \leq \frac{f(z)}{M\,g(z)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\frac{f(z)}{M\,g(z)}} 1\,du\,g(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{M\,g(z)} g(z)dz = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$$

Ainsi : $P\left(U \leq \frac{f(z)}{M\,g(z)}\right) = \frac{1}{M}$

$$P_r(X < x \mid \text{acceptation}) = M\,P\left(z < x \cap u \leq \frac{f(z)}{M\,g(z)}\right) = M \int_{-\infty}^{x} \int_{0}^{\frac{f(z)}{M\,g(z)}} 1\,du\,g(z)dz$$

D'où : $P_r(X < x \mid \text{acceptation}) = F(x)$

Exercice 3.2 p 65

$$P(x) = \gamma e^{\left[\sum_{(s,t)\,\text{voisins}} \varphi_{(s,t)}(x_s, x_t)\right]}$$ où voisins signifie voisins horizontaux ou verticaux.

Nombre de configurations possibles : 2^{100}

On va utiliser un échantillonneur de Gibbs :

On note :

$$P(X_s=\omega_i \mid X_1=x_1, \ldots, X_{s-1}=x_{s-1}, X_{s+1}=x_{s+1}, \ldots) = P(X_s=\omega_i \mid X^*=x^*)$$

On utilise la formule de Bayes :

$$P(X_s=\omega_i \mid X^*=x^*) = \frac{P(X_s=\omega_i \cap X^*=x^*)}{P(X^*=x^*)} = \gamma\, e^{\left[\sum_{(u,v)\,\text{voisins}} \varphi_{(u,v)}(x_u, x_v)\right]} P(X^*=x^*)$$

$$P(X_s=\omega_i \mid X^*=x^*) = \frac{\gamma\, e^{\left[\sum_{t\in V_s} \varphi_{s,t}(\omega_i, x_t) + \sum_{(u,v)\in D} \varphi_{u,v}(x_u, x_v)\right]}}{\sum_{i=1}^{2} \gamma\, e^{\left[\sum_{t\in V_s} \varphi_{s,t}(\omega_i, x_t) + \sum_{(u,v)\in D} \varphi_{u,v}(x_u, x_v)\right]}}$$

$$P(X_s=\omega_i \mid X^*=x^*) = \frac{e^{\left[\sum_{t\in V_s} \varphi_{s,t}(\omega_i, x_t)\right]}}{\sum_{i=1}^{2} e^{\left[\sum_{t\in V_s} \varphi_{s,t}(\omega_i, x_t)\right]}} = P(X_s=\omega_i \mid \text{valeurs des voisins})$$