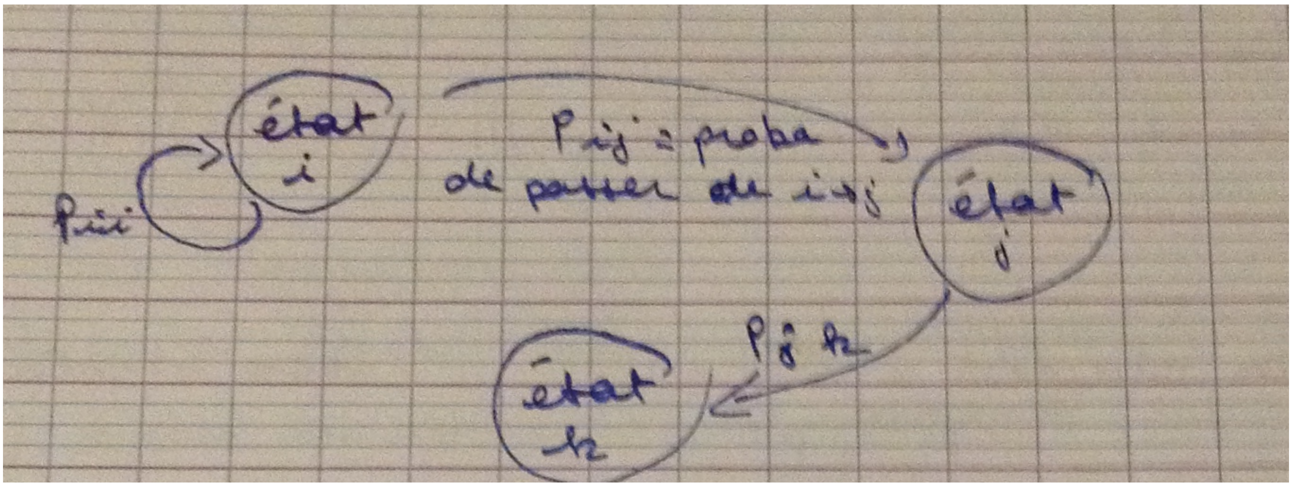
Chaines de Markov

Sans mémoire
Temps d'attente résiduel

-à temps discret (CMTD)
ou
-à temps continu (CMTC)

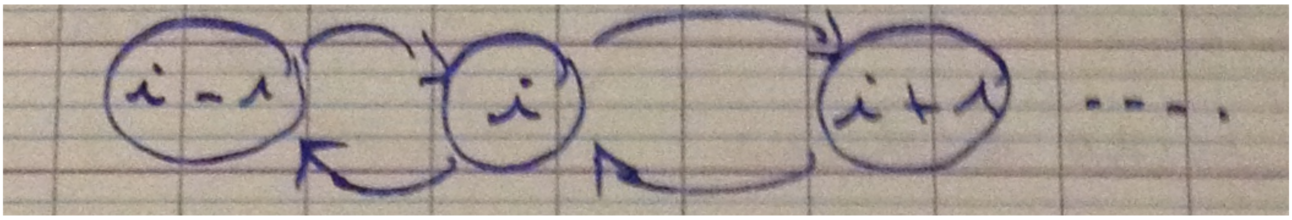
CMTD
Sans mémoire: on a assez d'informations quand on connait l'état présent pour connaître la loi d'évolution dans le futur. Pas besoin d'info sur le passé

Étude d'un système ayant un ensemble discret d'états possibles. On code les états du système. Quand on sait dans quel état est le système on connait la loi d'évolution dans le futur.



$x_n=i$: à l'instant n le système est à l'état
$p(x_n+1=j/x_n=i)=p(x_n+1=j/x_n=i_n,x_n-1=i_n-1,x_n-2=i_n-2...)$

État stationnaire: proportion du temps pendant laquelle l'état est i.
$p(x_n=i)$-> quand n vers l'inf $\Pi(i)$ = probabilité stationnaire («à l'équilibre»)



Probabilité que le serveur soit occupé= U
U=1-$\Pi(0)$= somme $\Pi(i)$

E(L)= longueur moyenne de la file =somme i $\Pi(i)$

Processus stochastique : fonction aléatoire du temps, système dont l'espace d'états est discret

Exemple: nombre de clients dans une file d'attente
On connait les probabilités pour passer aux différents états suivants à partir de l'état présent

p_{ij}= probabilité de passer de l'état i à l'état j
$P=(p_{ij})_{i,j}$ = matrice stochastique (somme des éléments sur chaque ligne =1)
$p_{ij}=p(x_n+1=j/x_n=i)=p(x_n+1=j/x_n=i,x_n-1i_n,...)$
$p(x_n=i)\text{->} \Pi(i)$

Notation vecteur d'état à l'instant n+1 : P(n+1)
P(n+1)=P(n).P
$\Pi= \Pi P$
On cherche une solution dont la somme des termes est égale à 1

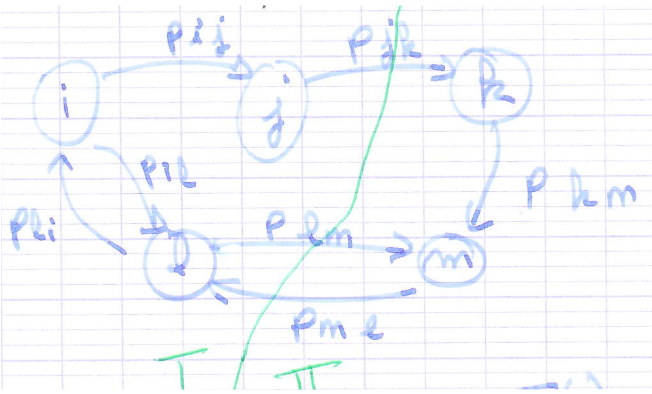
Théorème de convergence:
CTMD irréductible et apériodique
$\Pi(n)$->limite convergence Π tq $\Pi=\Pi P$
$\Pi(n)$->0 pas de convergence

État absorbant: qui ne «renvoie» vers personne
État transitoire: on reste dedans pendant un certain temps
État d'équilibre: lorsqu'il n'y a pas d'états absorbants
Chaine irréductible : graphe fortement connexe: de tout état i on peut atteindre tout état j en un certain nombre de pas <=> pas d'états absorbants.

Donc on cherche un vecteur Π solution de $\Pi=\Pi P$ non nul car la somme des Π_i=1.

Méthode: exhiber une solution non nulle de $\Pi=\Pi P$ ou bien montrer que $\Pi=\Pi P$ n'a pas d'autre solution que Π=0

Méthode des coupes



Si équilibre P(I->II)=P(II->I)
$\Pi(j)p_{jk}+ \Pi(l)p_{ln}= \Pi(n)p_{nl}$
$\Pi(i)+ \Pi(j)+ \Pi(k)+ \Pi(l)+ \Pi(p)=1$

CMTD finie et apériodique et irréductible => convergence