FILE D'ATTENTE
TD 6

CHAPITRE 6 : METHODES D'AGREGATION

Exercice 6.1 : Réseau symétrique

On va utiliser le théorème BCMP, dont les hypothèses sont :

- réseau formé avec des probabilités de transition constantes entre les files d'attente
- services exponentiels de taux constants
- priorités FCFS

On prend le point D comme référence. Par symétrie du problème : $\forall 1 \le i \le M \quad e_i = \frac{1}{M}$

Si on a $E[S_i] = \frac{1}{\mu_i}$ alors $\forall 1 \le i \le M \quad S_i = \frac{1}{\mu}$

$\Rightarrow \forall 1 \le i \le M \quad e_i S_i = \frac{1}{M\mu}$

Algorithme de Reiser :

N	1	2	3	N+1 (récurrence)
$e_1 S_1$	$\frac{1}{M\mu}$	$\frac{1}{M\mu}\left(1+\frac{1}{M}\right)$	$\frac{1}{M\mu}\left(1+\frac{2}{M}\right)$	$\frac{1}{M\mu}\left(1+\frac{N}{M}\right)$
$e_2 S_2$	$\frac{1}{M\mu}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_M S_M$	$\frac{1}{M\mu}$	$\frac{1}{M\mu}\left(1+\frac{1}{M}\right)$	$\frac{1}{M\mu}\left(1+\frac{2}{M}\right)$	$\frac{1}{M\mu}\left(1+\frac{N}{M}\right)$
$\Lambda(N)$	$\frac{N}{\sum_1^M \frac{1}{M\mu}} = \mu$	$\frac{2M\mu}{M+1}$	$\frac{3M\mu}{M+2}$	$\frac{(N+1)M\mu}{M+N}$
L_1	$\frac{1}{M}$	$\frac{2}{M}$	$\frac{3}{M}$	$\frac{N+1}{M}$
L_M	$\frac{1}{M}$	$\frac{2}{M}$	$\frac{3}{M}$	$\frac{N+1}{M}$

Pour remplir le tableau, on utilise les formules suivantes :

$$e_n S_n = e_1 S_1 (1 + L_{n-1})$$

$$\Lambda(N) = \frac{N}{\sum_1^M e_i S_i}$$

$$L_i = \Lambda(N) \times e_N S_N$$

Un moyen de s'assurer que les calculs sont justes est de vérifier que : $\sum_1^M L_i = N$

Ainsi, en généralisant par récurrence, on a obtenu : $\boxed{\Lambda(N)=\frac{N M \mu}{M+N-1}}$

On a donc agrégé le modèle en remplaçant les N serveurs par un seul de débit $\mu(N)=\Lambda(N)$

Exercice 6.2 : Agrégation de chaînes de Markov

1°) On considère une chaîne de Markov à temps discret et on a :

$\forall j \in [0,2] \sum_{i=0}^{2} p_{j,i}=1$

On trouve ainsi : $\boxed{\begin{cases} p_{0,1}=\frac{1}{4} \\ p_{1,1}=\frac{7}{8} \\ p_{2,2}=\frac{7}{8} \end{cases}}$

2°) Pour déterminer les probabilités d'état, on applique la méthode de résolution classique : on résout le système $\pi P=\pi$ avec $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$ matrice de transition, et sachant que, en tant que vecteur d'état : $\sum_i \pi(i)=1$. On peut aussi (c'est équivalent) utiliser le théorème des coupes.

Via cette dernière méthode, on a :

$$\frac{7}{8}\pi(0)=\frac{\pi(1)}{8}+\frac{\pi(2)}{8}$$

$$\frac{\pi(0)}{4}=\frac{\pi(1)}{8}$$

$$\pi(0)+\pi(1)+\pi(2)=1$$

Finalement, on obtient : $\boxed{\begin{cases} \pi(0)=\frac{1}{8} \\ \pi(1)=\frac{1}{8} \\ \pi(2)=\frac{5}{8} \end{cases}}$

3°) $\boxed{p_{11}+p_{1A}=1 \;\Rightarrow\; p_{1A}=1-p_{11}=\frac{1}{8}}$

Les probabilités de transition sont les mêmes dans l'état 1.

Par le théorème des coupes, on obtient $\pi_1 p_{1A}=\pi_A p_{A1}$

$\boxed{p_{A1}=\frac{1}{24}}$

Enfin $\boxed{p_{\mathrm{AA}} = 1 - p_{\mathrm{A1}} = \frac{23}{24}}$