Telecom - INT

JUIN, 2007
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

L'usage des calculatrices, notes de cours ou autres documents, n'est pas autorisé.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 points par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par une étoile (.*) et l'espérance mathématique par E{.}.

PARTIE A : Questions et QCM sur les cours/TDs/TPs (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Deux ou trois lignes maximum sont demandées dans les questions 1 à 6
(place réservée sur la feuille de réponses).
Pour les questions 7 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.8.

1. Définir les notions de signal aléatoire et signal déterministe.

2. Comment se définit la densité spectrale de puissance ? Quel est le lien entre puissance et densité spectrale de puissance ?

3. Comment s'écrit la fonction de transfert en z d'un filtre numérique lorsque celui-ci est de réponse impulsionnelle finie (filtre transverse) ? Quelle est la relation correspondante qui permet de calculer la sortie ?

4. Quelle est la définition du signal analytique associé à un signal réel ?

5. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \le \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

suite ...

6. On envoie en entrée de l'analyseur de spectre analogique que vous avez manipulé en TP le signal $x(t)$ de la question précédente avec $\tau = 25\mu$s et $T = 10$ms (valeurs du TP). L'analyseur est réglé avec les paramètres suivants :
– `Freq. center` = 20kHz
– `Freq. span` = 1kHz
– `Res. bandwidth` = 9.1Hz
– `Sweep time` = 6.55s
Tracer sur la feuille de réponses (p.8) l'allure de la courbe que l'on peut observer à l'analyseur de spectre.

7. Sous le logiciel SCILAB, on entre les commandes[1] suivantes :
```
t = (1:512);
x = cos(2*%pi*0.25*t);
X = fft(x);
```
(a) La commande `plot((0 :511)/512,X)` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(b) La commande `plot(abs(fft(x)))` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(c) La commande `plot((0 :511)/512,abs(X))` affiche le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée. Ici, la fréquence réelle est aussi la fréquence normalisée et il apparaît des raies aux fréquences 0,25 et 0,75.

(d) La commande `plot(t,abs(X))` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée. Ici, la fréquence réelle est aussi la fréquence normalisée et il apparaît des raies aux fréquences 0,25 et 0,75.

8. Si $x = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 5 & -2\end{bmatrix}$ et si on note $X = \begin{bmatrix}X_0 & X_1 & \dots & X_7\end{bmatrix}$ la transformée de Fourier discrète de la suite d'échantillons contenus dans le vecteur x, que vaut X_0 ?

(a) $+\sqrt{2} - i2\pi$

(b) $-\sqrt{2} + i2\pi$

(c) 0

(d) 8

9. Dans une modulation :

(a) Le signal qui contient l'information en bande de base est appelé porteuse.

(b) Le signal qui contient l'information en bande de base est appelé signal modulant.

(c) Le signal modulé est une sinusoïde pure.

(d) Le signal modulé est toujours obtenu à partir de la transformée de Hilbert du signal modulant.

10. La transformée de Fourier à temps discret

(a) est périodique de période 1.

(b) n'est définie que pour un ensemble fini de fréquences.

(c) n'a de sens que pour un signal de durée finie.

(d) n'a de sens que pour un signal de période 1.

[1] Certains ont pu utiliser `plot2d` : l'effet est ici identique à `plot`.

11. Un filtre à temps continu est stable au sens entrée bornée-sortie bornée si et seulement si :

(a) la réponse à un Dirac en entrée est de durée finie.

(b) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < +\infty$.

(c) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\,dt < +\infty$.

(d) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$.

12. Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie, $X(f)$ sa transformée de Fourier et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

(a) On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|^2$.

(b) On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|$.

(c) On a l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(f)\,df$.

(d) $\Gamma_x(f)$ est toujours maximal en 0.

13. Le domaine de convergence de la transformée en z d'un signal $x_n, n \in \mathbb{Z}$ à temps discret :

(a) donne une indication sur l'inversibilité de la transformée en z : le cercle unité doit en effet appartenir au domaine de convergence.

(b) est vide sauf pour des signaux de durée finie.

(c) n'a aucun intérêt puisque seule l'expression de la transformée en z nous intéresse.

(d) est important car une même fonction de la variable complexe z considérée sur des domaines de convergence distincts peut être la transformée en z de deux signaux à temps discret distincts.

14. La formule d'interpolation d'un signal à bande limitée :

(a) est une approximation qui permet d'approcher les valeurs du signal entre les échantillons.

(b) est une égalité ; la reconstruction exacte du signal entre deux échantillons est possible en théorie.

(c) ne fait intervenir que les échantillons passés du signal car un filtre de restitution doit être causal.

(d) n'est valable que pour des signaux périodiques.

15. Un filtre à réponse impulsionnelle finie est aussi appelé :

(a) filtre transverse.

(b) filtre récursif.

(c) filtre à causalité finie.

(d) filtre à pôles positifs.

suite ...

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [J. Boudy] Un système ”Mains-libres” d'un terminal téléphonique de type GSM est caractérisé par :

(a) un ”haut-parleur” placé sur la base du terminal pour amplifier la voix du correspondant ;

(b) un microphone et un haut-parleur (intégré ou non au terminal) distants de l'utilisateur, utilisables à la place du combiné téléphonique ;

(c) un système de prise de son spécifiquement prévu pour la téléphonie mobile en voiture.

17. [J. Boudy] Un système de reconnaissance de parole (RdP) ”Indépendant du locuteur” permettant par exemple de prononcer des chiffres ou des mots de commande usuels isolés est :

(a) un système permettant de vérifier l'identité d'une personne à partir de quelques mots prononcés par elle ;

(b) un système pour lequel il devra effectuer un apprentissage préalable de mots de commandes et de chiffres ;

(c) un système permettant à l'utilisateur de composer automatiquement un numéro de téléphone en l'énonçant vocalement, ceci sans avoir besoin d'effectuer un apprentissage préalable du système de RdP.

18. [P. Mège] Les techniques de codage canal sont :

(a) utilisées uniquement dans les systèmes numériques de radiocommunication pour protéger les informations transmises sur la voie radio.

(b) utilisées dans de nombreux systèmes de télécommunications, mais elles sont réservées exclusivement à la protection des informations transmises sur le médium de transmission que ce soit un lien filaire, radio ou autres.

(c) utilisées pour de nombreuses applications incluant, entre autres, le Compact Disc, le stockage en mémoire, la radiodiffusion numérique, les systèmes radiomobiles, les radiocommunications militaires, les modems filaires ou radio.

19. [F. Barbaresco] Le Radar utilise, pour améliorer sa résolution distance, la technique de traitement du signal appelée ”compression d'impulsion” qui consiste à l'émission à émettre une impulsion modulée linéairement en fréquence sur une une bande de fréquences B et en réception à appliquer le ”filtre adapté” (convolution avec une réplique inversée temporellement et conjuguée). La résolution en distance obtenue est alors proportionnelle :

(a) à la bande de fréquences de modulation B,

(b) à l'inverse de la bande de fréquences de modulation B,

(c) à la racine carrée de la bande de fréquences de modulation B.

20. [G. Richard] Le système Dolby Surround est :

(a) un système de spatialisation adapté pour une restitution sur 2 canaux ;

(b) un système de spatialisation adapté pour une restitution sur 4 canaux ;

(c) un système de spatialisation qui nécessite l'utilisation d'au moins 5 canaux ;

(d) un système permettant une haute fidélité audio grâce à un module de compression des signaux audio (codage Dolby AC3).

suite . . .

PARTIE B

On considère un signal aléatoire à temps continu $x(t)$ que l'on suppose réel, centré et stationnaire au sens large. On suppose qu'au cours d'une transmission, un récepteur reçoit le signal $y(t)$ donné par :

$$y(t) = x(t) + \rho x(t - \theta) \tag{1}$$

où ρ et θ sont des constantes réelles. On note $\gamma_x(\tau) \triangleq \mathrm{E}\{x(t)x(t-\tau)\}$ la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

21. Rappeler la définition de la stationnarité au sens large. Calculer $\mathrm{E}\{y(t)\}$ puis la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ (notée $\gamma_y(\tau)$) en fonction de celle de $x(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

22. Exprimer la puissance $\mathrm{E}\{y(t)^2\}$ en fonction de $\gamma_x(0)$ et $\gamma_x(\theta)$.

23. Calculer la densité spectrale de $y(t)$ (notée $\Gamma_y(f)$) en fonction de celle de $x(t)$ (notée $\Gamma_x(f)$).

24. Justifier que $y(t)$ est obtenu par filtrage de $x(t)$. Trouver la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre et retrouver l'expression précédente de $\Gamma_y(f)$ à l'aide de la formule des interférences.

25. On suppose que $x(t)$ est un signal bande étroite autour de la fréquence f_0. $y(t)$ est-il également bande étroite ? Pourquoi ?

26. On suppose que $x(t)$ s'écrit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ où φ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$. Justifier la stationnarité de $x(t)$ dans ce cas.

PARTIE C

Soit $s(t)$ un signal à bande limitée $[-B, B]$ dont l'allure du spectre est représentée schématiquement sur la figure 1.

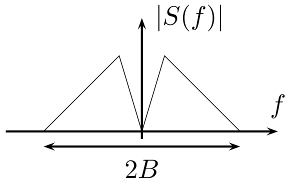


FIG. 1 – Spectre schématique du signal $s(t)$

27. On définit les signaux à temps discret :

$$\forall n : \qquad x_n = s\left(\frac{n}{2B}\right) \qquad z_n = s\left(\frac{n}{4B}\right) \tag{2}$$

Comment s'appelle l'opération qui consiste à recueillir les signaux ci-dessus à partir de $s(t)$? La condition du théorème de Shannon-Nyquist est-t-elle vérifiée pour x_n ? pour z_n ?

28. Tracer l'allure schématique des spectres des signaux à temps discret x_n et z_n (on tracera l'allure des transformées de Fourier à temps discret respectives $X(f)$ et $Z(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$).

29. On définit le signal à temps discret y_n par :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair } (n = 2p), & y_{2p} = x_p \\ \text{Si } n \text{ est impair } (n = 2p+1), & y_{2p+1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Calculer la transformée en z de y_n (notée $Y[z]$) en fonction de celle de x_n (notée $X[z]$).

30. Quel est le lien entre $Y[z]$ et la transformée de Fourier à temps discret de y_n (notée $Y(f)$) ? En déduire un lien entre $Y(f)$ et $X(f)$. Représenter alors l'allure de $Y(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$).

31. Montrer que par un filtrage passe-bas numérique de y_n, il est possible de retrouver z_n.

32. On souhaite obtenir la formule correspondant à l'interpolation précédemment décrite en fréquence.

(a) Considérer $Z(f)$ sur l'intervalle $[-1/4, 1/4]$, décomposer cette fonction en série de Fourier[2] sur cet intervalle et montrer que cette décomposition s'écrit :

$$Z(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}e^{-\imath 4\pi pf} \qquad \text{(sur l'intervalle } [-1/4, 1/4])$$

(b) Exprimer z_n en fonction de $Z(f)$ puis en déduire la relation suivante qui exprime z_n en fonction des échantillons pairs :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} z_{2p}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{2}\right)$$

(c) En déduire z_n en fonction des x_n.

[2]Pour une fonction g périodique de période a, on rappelle qu'une écriture de la décomposition en série de Fourier est donnée par $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-\imath 2\pi kx/a}$ avec $c_k = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} g(x)e^{+\imath 2\pi kx/a}\,dx$.

Nom: ______________________

Prénom: ______________________

PARTIE A

1.

2.

3.

4.

5.

suite ...

Entourer les réponses justes.

7.	a	b	c	d
8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	
17.	a	b	c	
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	
20.	a	b	c	d

Telecom - INT

JUIN, 2007
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

Eléments de correction

PARTIE A

Voir cours/TDs/TPs et conférences.

PARTIE B

21. $\mathrm{E}\{y(t)\} = 0$. $\gamma_y(\tau) \triangleq \mathrm{E}\{y(t)y(t-\tau)\} = (1+\rho^2)\gamma_x(\tau) + \rho(\gamma_x(\tau+\theta) + \gamma_x(\tau-\theta))$

22. $\mathrm{E}\{y(t)^2\} = \gamma_y(0) = (1+\rho^2)\gamma_x(0) + 2\rho\gamma_x(\theta)$

23. $\Gamma_y(f) = [(1+\rho^2) + 2\rho\cos(2\pi\theta f)]\gamma_x(f)$

24. L'équation donnant $y(t)$ en fonction de $x(t)$ est un exemple classique de système linéaire et invariant dans le temps : c'est donc une opération de filtrage et la réponse en fréquence est : $H(f) = 1 + \rho e^{-\imath 2\pi\theta f}$. La relation $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f)$ redonne bien l'expression de la question précédente.

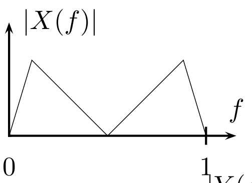
25. $y(t)$ est aussi bande étroite : le support du spectre de $y(t)$ est en effet contenu dans celui de $x(t)$ d'après les relations des deux questions précédentes.

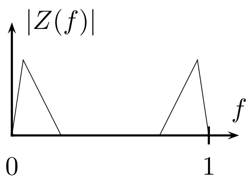
26. Voir exercice du poly traité en TD.

PARTIE C

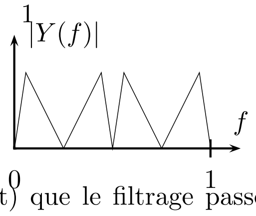
27. Il s'agit d'un échantillonnage. Les conditions du théorème de Shannon-Nyquist sont vérifiées pour x_n et pour z_n. Pour x_n, la fréquence d'échantillonnage est la valeur minimale limite fournie par le théorème d'échantillonnage.

28.





29. $Y[z] = X[z^2]$.



30. $Y(f) = X(2f)$.

31. On constate (graphiquement) que le filtrage passe-bas numérique du motif qui représente $Y(f)$ donne le motif qui représente $Z(f)$.

32. (a) Sur l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, $Z(f)$ peut se décomposer :

$$Z(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p e^{-\imath 4\pi p f} \tag{1}$$

où, compte tenu du support de $Z(f)$:

$$c_p = 2\int_{-1/4}^{1/4} Z(f) e^{+\imath 4\pi p f}\, df = 2\int_{-1/2}^{1/2} Z(f) e^{+\imath 4\pi p f}\, df = 2 z_{2p} \tag{2}$$

D'où le résultat.

(b) En tenant à nouveau compte du support de $Z(f)$:

$$z_n = \int_{-1/2}^{1/2} Z(f) e^{+\imath 2\pi n f}\, df = \int_{-1/4}^{1/4} Z(f) e^{+\imath 2\pi n f}\, df \tag{3}$$

En remplaçant $Z(f)$ par l'expression trouvée sur cet intervalle :

$$z_n = \int_{-1/4}^{1/4} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} 2 z_{2p} e^{-\imath 4\pi p f} \right) e^{+\imath 2\pi n f}\, df = \sum_{p \in \mathbb{Z}} 2 z_{2p} \int_{-1/4}^{1/4} e^{-\imath 4\pi p f} e^{+\imath 2\pi n f}\, df \tag{4}$$

En poursuivant le calcul, il vient le résultat demandé :

$$z_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} z_{2p} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2} \right)$$

(c) On a $z_{2p} = x_p$ pour tout entier p et donc d'après la question précédente :

$$z_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2} \right)$$

Remarque : L'élève soucieux de rigueur pourra supposer que z_n est sommable et donc dans ℓ^2. Dès lors, (1) est vraie dans $\mathrm{L}^2(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (et non pas pour tout f). (3) exprime alors que compte tenu du support de $Z(f)$ dans $\mathrm{L}^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on a l'égalité des deux produits scalaires :

$$\langle e^{-\imath 2\pi n f}, Z(f) \rangle_{\mathrm{L}^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \langle e^{-\imath 2\pi n f}, Z(f) \rangle_{\mathrm{L}^2(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} \tag{5}$$

Ceci justifie la permutation de la somme et de l'intégrale dans (4).

Telecom - INT

AOÛT, 2007
Deuxième session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

L'usage des calculatrices, notes de cours ou autres documents, n'est pas autorisé.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 points par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par une étoile $(.^*)$ et l'espérance mathématique par $\mathrm{E}\{.\}$.

PARTIE A : Questions de cours et QCM (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Deux ou trois lignes maximum sont demandées dans les questions 1 à 6
(place réservée sur la feuille de réponses).
Pour les questions 8 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.9.

1. Définir ce qu'on appelle un signal quantifié et un signal échantillonné.

2. Comment s'écrit la fonction de transfert en z d'un filtre purement récursif (ou filtre AR : auto-régressif) ? Quelle est la relation correspondante qui permet de calculer la sortie ?

3. Comment se définit la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'un signal (temps discret) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

4. Quel est le lien entre la TFTD définie à la question précédente et la transformée de Fourier discrète (TFD) ? Qu'est-ce que la «FFT» ?

5. Qu'appelle-t-on signal à bande étroite ? Donner un exemple classique.

6. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

7. On envoie en entrée de l'analyseur de spectre analogique que vous avez manipulé en TP le signal $x(t)$ de la question précédente avec $\tau = 25\mu$s et $T = 10$ms (valeurs du TP). L'analyseur est réglé avec les paramètres suivants :
- `Freq. start` = 0kHz
- `Freq. stop` = 100kHz
- `Res. bandwidth` = 580Hz
- `Sweep time` = 9.83s

Tracer sur la feuille de réponses (p.9) l'allure de la courbe que l'on peut observer à l'analyseur de spectre.

8. Sous le logiciel Scilab, on suppose avoir chargé dans la variable `x` des échantillons d'un signal prélevés à une fréquence d'échantillonnage de 1kHz.

(a) La commande `plot(fft(x)) ;` trace la représentation graphique de la transformée de Fourier du signal à temps continu $x(t)$ dont proviennent les échantillons.

(b) La commande `plot(fft(x)) ;` trace la représentation graphique du module de la transformée de Fourier du signal à temps continu $x(t)$ dont proviennent les échantillons.

(c) Les commandes `N=length(x) ; plot((1 :N),abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(d) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N*1000,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réelle est indiquée est abscisse.

9. On considère l'opération qui à un signal à temps continu $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_t^{t+\alpha} x(\theta)\, d\theta \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

(a) C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

suite . . .

10. Soit $T \in \mathbb{R}_+$ et $p_T(t)$ le signal porte défini par $p_T(t) = 1$ si $t \in [-T/2, T/2]$ et $p_T(t) = 0$ si $t \notin [-T/2, T/2]$. La transformée de Fourier $P_T(f)$ de $p_T(t)$:

(a) n'est pas dérivable car le signal $p_T(t)$ n'est pas continu.

(b) vérifie l'égalité : $\int_{-\infty}^{+\infty} |P_T(f)|^2 \, df = T$

(c) est à valeurs complexes (et non pas réelles), comme c'est le cas pour toutes les transformées de Fourier.

(d) vaut : $P_T(f) = T \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2$ si $f \neq 0$ et $P_T(0) = 1$.

11. Soit $x(t)$ un signal à bande limitée, dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans $[-B, B]$; soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre quelconque. Soit $y(t)$ la sortie de ce filtre excité par $x(t)$.

(a) $y(t)$ est un signal à bande limitée.

(b) si T est une période d'échantillonnage telle que $1/T > 2B$, alors le signal à temps discret $(y(nT))$ coïncide avec la version filtrée de $(x(nT))$, la réponse impulsionnelle du filtre numérique dont il est question étant $(h(nT))$.

(c) puisque $y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$, on peut toujours écrire, quel que soit $T > 0$:

$$y(nT) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(kT) x(nT - kT)$$

(d) $y(t)$ est un signal causal car obtenu par une opération de filtrage.

12. Soient les signaux à valeurs complexes $x_1(t) = e^{\imath 2\pi f_1 t}$ et $x_2(t) = e^{\imath 2\pi f_2 t}$ où les fréquences f_1 et f_2 valent $f_1 = -418\text{Hz}$ et $f_2 = 582\text{Hz}$. $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont tous deux échantillonnés aux instants $nT_e, n \in \mathbb{Z}$, avec une durée $T_e = 1\text{ms}$ entre deux échantillons.

(a) La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist n'est pas vérifiée pour $x_1(t)$ et est vérifiée pour $x_2(t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$.

(b) La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée pour $x_1(t)$ et n'est pas vérifiée pour $x_2(t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$.

(c) La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist n'est vérifiée ni pour $x_1(t)$, ni pour $x_2(t)$.

(d) L'affirmation «$x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$» est inexacte car la condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

13. Un filtre numérique rationnel défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est stable si et seulement si :

(a) le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\}$, où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative.

(c) la réponse impulsionnelle est bornée (càd il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout n, $|h_n| < M$).

(d) l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ est inclus dans le domaine de convergence de $H[z]$.

suite ...

14. La puissance moyenne d'un signal $x(t), t \in \mathbb{R}$:

(a) est définie par la limite suivante : $\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$.

(b) est infinie si l'énergie de $x(t)$ est non nulle.

(c) est nulle lorsque l'énergie de $x(t)$ est finie.

(d) peut être négative dans le cas d'un signal complexe.

15. Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie, $X(f)$ sa transformée de Fourier et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

(a) L'énergie de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$.

(b) On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|$.

(c) $\Gamma_x(f)$ admet toujours une symétrie hermitienne, càd : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma(f) = \Gamma(-f)^*$.

(d) $\Gamma_x(f)$ est toujours maximale en 0.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [J. Boudy] Les coefficients du Cepstre, en particulier les MFCC calculés dans l'étage d'analyse d'un système de Reconnaissance de Parole (ou encore Extraction de paramètres), sont-ils définis :

(a) dans le domaine fréquentiel ?

(b) dans le domaine temporel ?

(c) dans le domaine de Laplace ?

17. [J. Boudy] Un système de reconnaissance de parole (RdP) "Indépendant du locuteur" permettant par exemple de prononcer des chiffres ou des mots de commande usuels isolés est :

(a) un système permettant de vérifier l'identité d'une personne à partir de quelques mots prononcés par elle ;

(b) un système pour lequel il devra effectuer un apprentissage préalable de mots de commandes et de chiffres ;

(c) un système permettant à l'utilisateur de composer automatiquement un numéro de téléphone en l'énonçant vocalement, ceci sans avoir besoin d'effectuer un apprentissage préalable du système de RdP.

18. [P. Mège] Dans un système comme le GSM, pourquoi utilise-t-on une séquence d'apprentissage ?

(a) Pour permettre à la réception la synchronisation des bursts. C'est la seule fonction remplie par cette séquence d'apprentissage.

(b) Pour permettre l'identification du terminal émetteur (sur la voie montante) ou de la cellule émettrice (sur la voie descendante). L'émission d'une telle séquence est obligatoire pour des raisons réglementaires.

(c) Pour estimer les multitrajets de propagation sur une séquence connue à la fois de l'émetteur et du récepteur afin de permettre un traitement d'égalisation ou un traitement équivalent. La séquence d'apprentissage permet également de mettre à jour la synchronisation.

suite ...

19. [F. Barbaresco] La technique radar Doppler consiste à émettre un train d'impulsions. Du fait du théorème d'échantillonnage de Shannon, le radar est ambigu en Doppler, et du fait du temps d'écoute limité entre impulsions émises, le radar est ambigu en distance. Ces deux ambiguïtés ne sont pas indépendantes. Laquelle de ces dépendances lie l'ambiguïté Doppler et l'ambiguïté Distance :

(a) le produit des ambiguïtés Doppler et Distance est constant ;

(b) le rapport des ambiguïtés Doppler et Distance est constant ;

(c) la somme des ambiguïtés Doppler et Distance est constant.

20. [G. Richard] Un ensemble de «filtres de tête» (ou HRTF pour *Head Related Transfer Function*) ont été mesurés pour chaque oreille pour des positions discrètes de l'espace. Ces positions sont situées sur une sphère d'un mètre (1m) de rayon pour 25 valeurs d'azimuth (entre -90^o et $+90^o$) et 50 valeurs d'élévation entre -45^o et $+230^o$.

(a) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute sur une enceinte.

(b) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute au casque.

(c) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute sur haut-parleurs.

(d) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute au casque qui sera indépendant de l'auditeur.

PARTIE B

On considère le signal suivant à temps continu :

$$x(t) = a(t)e^{\imath 2\pi f_0 t}$$

où f_0 est une constante et $a(t)$ est un signal à valeurs complexes.

21. On suppose que $a(t)$ est un signal déterministe dont la transformée de Fourier existe et est notée $A(f)$.

(a) $x(t)$ est-il un signal déterministe ou aléatoire ?

(b) Exprimer $X(f)$, la transformée de Fourier de $x(t)$ en fonction de $A(f)$.

(c) Si $a(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$, quelle est la bande occupée par $x(t)$?

22. On suppose maintenant que $a(t)$ est un signal aléatoire centré stationnaire au sens large dont la fonction d'autocorrélation est notée $\gamma_a(\tau) \triangleq \mathrm{E}\{a(t)a^*(t-\tau)\}$.

(a) Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ de $x(t)$ et justifier la stationnarité au sens large de $x(t)$.

(b) Calculer $\Gamma_x(f)$, la densité spectrale de puissance de $x(t)$ en fonction de $\Gamma_a(f)$, densité spectrale de puissance de $a(t)$. Si $a(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$ (càd si $\Gamma_a(f)$ est nul en dehors de cette bande), que peut-on dire de $x(t)$?

PARTIE C

Le but de cet partie est d'étudier quelques propriétés simples à la base d'une analyse en sous-bandes.

23. On considère des signaux à temps discret $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Le signal b_n est obtenu à partir de a_n par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad b_n = a_{2n}$$

Les échantillons pairs uniquement sont conservés ; on parle d'opération de décimation d'un facteur deux, ce que l'on note par le signe $2\downarrow$. Le signal c_n est obtenu à partir de b_n par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} c_{2n} = b_n, \\ c_{2n+1} = 0. \end{cases}$$

Cette opération qui consiste à intercaler un zéro entre deux échantillons est notée $2\uparrow$. L'opération globale est résumée sur le schéma de la figure 1.

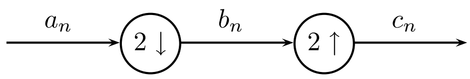


FIG. 1 – Sur- et sous-échantillonnage d'un facteur 2.

D'après la description ci-dessus, que valent les échantillons $b_0, b_1, \ldots, b_9$ et $c_0, c_1, \ldots, c_9$ en fonction des échantillons du signal a_n.

24. Rappeler la définition de la transformée en z d'un signal. Démontrer la relation :

$$C[z] = \frac{A[z] + A[-z]}{2}$$

où $A[z], B[z]$ et $C[z]$ sont les transformées en z respectives de a_n, b_n et c_n.

25. On considère maintenant le système de la figure 2 où $H_0[z], H_1[z], \widetilde{H_0}[z], \widetilde{H_1}[z]$ représentent des fonctions de transfert en z de filtres. En utilisant la question précédente, trouver le lien entre $Y[z]$ et $X[z]$, transformées

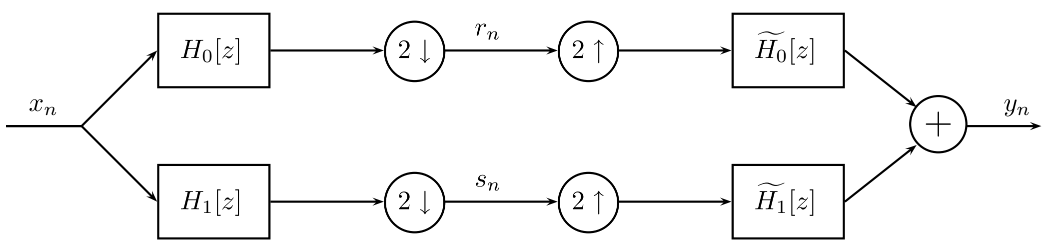


FIG. 2 – Schéma de l'analyse en deux sous-bandes

en z respectives de y_n et x_n.

26. Déduire de la question précédente que l'on retrouve exactement $X[z]$ en sortie du système si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées (on parle alors de reconstruction parfaite du signal x_n) :

$$\begin{cases} H_0[-z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[-z]\widetilde{H_1}[z] = 0 & \text{(1a)} \\ H_0[z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[z]\widetilde{H_1}[z] = 2 & \text{(1b)} \end{cases}$$

27. On choisit dorénavant de se placer dans le cas :

$$\begin{cases} H_1[z] = H_0[-z] \\ \widetilde{H_0}[z] = H_0[z] \\ \widetilde{H_1}[z] = -H_0[-z] \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que (1a) est vérifiée et donner la contrainte qu'entraîne la condition (1b) sur $H_0[z]$.

28. On suppose que la réponse impulsionnelle de $H_0[z]$ est paire, càd que cette réponse impulsionnelle vérifie : $\forall n \in \mathbb{Z}, h_n = h_{-n}$.

(a) Justifier que $H_0[z] = H_0[z^{-1}]$ dans ce cas.

(b) En déduire $H_1[z] = H_0[-z^{-1}]$.

(c) Rappeler le lien entre la transformée en z d'une réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence. Déduire alors de la question précédente que $H_1(f) = H_0(1/2 - f)$. On parle pour $H_1[z]$ et $H_0[z]$ de filtres miroirs en quadrature.

(d) On suppose que $H_0[z]$ est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure normalisée 1/4. Tracer schématiquement le module de la réponse fréquentielle de $H_0[z]$ et de $H_1[z]$. Le filtre $H_1[z]$ est-il passe-bas, passe-haut ou passe-bande ?

29. On abandonne l'hypothèse de symétrie de la réponse impulsionnelle de $H_0[z]$. En effectuant le choix (2), il n'existe pas de solution de réponse impulsionnelle finie satisfaisant (1b). On affaiblit cette contrainte en :

$$H_0[z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[z]\widetilde{H_1}[z] = 2z^k \tag{3}$$

où k est un entier, $k \geq 1$.

(a) Pour la reconstruction parfaite, que signifie la présence d'une puissance de z dans (3) vis à vis de (1b) ?

(b) Montrer que pour $k = 1$, l'expression $H_0[z] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z)$ est une solution. On l'appelle filtre de Haar.

30. Quel peut être l'intérêt d'un système tel que celui de la figure 2 qui permet de décomposer le signal initial en deux signaux r_n et s_n ?

Nom: ______________________

Prénom: ______________________

PARTIE A

1.

2.

3.

4.

5.

---

suite ...

6.

7.

Entourer les réponses justes.

8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	
17.	a	b	c	
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	
20.	a	b	c	d

Telecom - INT

AOÛT, 2007
Deuxième session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

Eléments de correction

PARTIE A

Voir cours/TDs/TPs et conférences.

PARTIE B

21. (a) $x(t)$ est déterministe.

(b) $X(f) = A(f - f_0)$ (propriété de modulation de la transformée de Fourier)

(c) Bande occupée par $x(t)$: $[f_0 - B, f_0 + B]$.

22. (a) $\gamma_x(\tau) = \gamma_a(\tau)e^{\imath 2\pi f_0 \tau}$.

(b) $\Gamma_x(f) = \Gamma_a(f - f_0)$. Si $a(t)$ à bande limitée $[-B, B]$, la bande occupée par $x(t)$ est $[f_0 - B, f_0 + B]$.

PARTIE C

23. $b_0 = a_0, b_1 = a_2, b_2 = a_4, \ldots$ et $c_0 = a_0, c_1 = 0, c_2 = a_2, c_3 = 0, c_4 = a_4, c_5 = 0, \ldots$.

24.

$$C[z] = \sum_n c_n z^{-n} = \sum_p \left(c_{2p} z^{-2p} + c_{2p+1} z^{-(2p+1)} \right) = \sum_p b_p z^{-2p} = B[z^2]$$

$$\begin{aligned}
C[z] &= \sum_n c_n z^{-n} = \sum_p \left(c_{2p} z^{-2p} + c_{2p+1} z^{-(2p+1)} \right) = \sum_p a_{2p} z^{-2p} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_p a_{2p} z^{-2p} + \sum_p a_{2p+1} z^{-(2p+1)} + \sum_p a_{2p} (-z)^{-2p} + \sum_p a_{2p+1} (-z)^{-(2p+1)} \right) \\
&= \frac{A[z] + A[-z]}{2}
\end{aligned}$$

suite ...

25.

$$\begin{aligned} Y[z] &= \widetilde{H_0}[z]\frac{H_0[z]X[z] + H_0[-z]X[-z]}{2} + \widetilde{H_1}[z]\frac{H_1[z]X[z] + H_1x[-z]X[-z]}{2} \\ &= \frac{\widetilde{H_0}[z]H_0[z] + \widetilde{H_1}[z]H_1[z]}{2}X[z] + \frac{\widetilde{H_0}[z]H_0[-z] + \widetilde{H_1}[z]H_1[-z]}{2}X[-z] \end{aligned}$$

26. La question précédente indique que $Y[z] = X[z]$ lorsque les conditions indiquées sont satisfaites.

27. La première condition est satisfaite et on vérifie que la deuxième devient :

$$H_0[z] - H_0[-z]^2 = 2$$

28. (a) $H_0[z] = \sum_n h_n z^{-n} = \sum_n h_{-n} z^{-n} = \sum_n h_n z^n = H_0[z^{-1}]$

(b) $H_1[z] = H_O[-z] = H_0[-z^{-1}]$

(c) D'après la question précédente $H_1[e^{\imath 2\pi f} = H_0[e^{\imath\pi - \imath 2\pi f}]$ d'où $H_1(f) = H_0(1/2 - f)$.

(d) Si $H_0[z]$ est passe-bas idéal de fréquence de coupure normalisée 1/4, $H_1[z]$ est passe-haut idéal, même fréquence de coupure.

29. (a) La reconstruction parfaite est souhaitée à un retard près.

(b) Vérification facile.

30. Décomposition et codage en deux sous-bandes : l'une contenant plutôt les basses fréquences et l'autre les hautres fréquences.

Telecom - INT

JUIN, 2008
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

L'usage des calculatrices, notes de cours ou autres documents, n'est pas autorisé.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
– Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
– Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
– Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 points par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
– Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par l'étoile $.^*$ en exposant, la transposition et conjugaison complexe par un $.^{\mathrm{H}}$ en exposant.

PARTIE A : Questions et QCM sur les cours/TDs/TPs (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Deux ou trois lignes maximum sont demandées dans les questions 1 à 6
(place réservée sur la feuille de réponses).
Pour les questions 7 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.8.

1. Quelle est la définition de l'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ de deux signaux déterministes, à temps continu et de puissance finie (non nulle) ?

2. Comment se définit la densité spectrale de puissance pour un signal aléatoire ? Quel est le lien entre puissance et densité spectrale de puissance ?

3. Qu'est-ce qu'un bruit blanc ? On précisera ce que valent la densité spectrale et l'autocorrélation d'un bruit blanc.

4. Comment se définit un filtre en traitement du signal ? Si $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre à temps discret, quelle est la relation entrée-sortie correspondante ?

5. Qu'est-ce que le procédé de modulation ? Préciser si les signaux appelés porteuse et modulante sont haute ou basse fréquence.

6. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

7. On envoie en entrée de l'analyseur de spectre que vous avez manipulé en TP le signal $x(t)$ de la question 6 avec $\tau = 25\mu$s et $T = 10$ms (valeurs du TP). L'analyseur est réglé avec les paramètres suivants :
- `Freq. center` = 20kHz
- `Freq. span` = 1kHz
- `Res. bandwidth` = 9.1Hz
- `Sweep time` = 6.55s

Tracer sur la feuille de réponses (p.8) l'allure de la courbe que l'on peut observer à l'analyseur de spectre (avec une échelle linéaire en ordonnée).

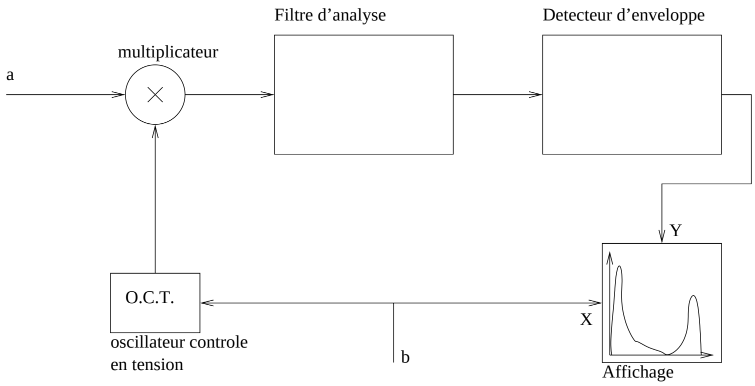


FIG. 1 – Schéma de principe d'un analyseur de spectre (incomplet)

8. La figure 1 représente un schéma de principe incomplet d'un analyseur de spectre tel que celui que vous avez manipulé en TP.

(a) Il s'agit d'un analyseur de spectre numérique.

(b) Il s'agit d'un analyseur de spectre numérique, mais sur le schéma n'a pas été représentée l'opération d'échantillonnage.

(c) Il s'agit d'un analyseur de spectre analogique.

(d) Il s'agit d'un analyseur de spectre à FFT (Fast Fourier Transform).

9. Le filtre d'analyse représenté sur la figure 1 du schéma de principe d'un analyseur de spectre :

(a) est de type passe-bas ;

(b) est de type passe-haut ;

(c) est de type passe-bande ;

(d) est de l'un des types ci-dessus en fonction de l'analyse que l'on souhaite effectuer.

10. Soit $x(t)$ un signal à temps continu et valeurs réelles, $z_x(t)$ son signal analytique associé, $\widehat{x}(t)$ sa transformée de Hilbert et $\xi_x(t)$ son enveloppe complexe.

(a) $z_x(t)$ est à valeurs réelles car son spectre ne contient que des fréquences positives, les seules qui aient un sens physique.

(b) $\xi_x(t)$ est à valeurs complexes tandis que $z_x(t)$ est à valeurs réelles.

(c) Le signal $x(t)$ est la partie réelle de $z_x(t)$ et $\widehat{x}(t)$ est la partie imaginaire de $z_x(t)$.

(d) $\widehat{x}(t)$ ne peut pas être la partie imaginaire de $z_x(t)$ car $\widehat{x}(t)$ est un signal à valeurs complexes.

11. On souhaite tracer sous Matlab la courbe de la fonction $t \mapsto e^{-t}\sin(2\pi t)$ pour $t \in [-2, 2]$. Laquelle de ces suites d'instructions Matlab permet-elle d'obtenir un tracé d'allure correcte ?

(a) `plot(exp(-t)*sin(2*pi*t),t=[-2..2]) ;`

(b) `t = [-2 :0.05 :2] ; x = (exp(-t)*sin(2*pi*t)) ; plot(t,x) ;`

(c) `t = [-2 :0.05 :2] ; x = (exp(-t).*sin(2*pi*t)) ; plot(t,x) ;`

(d)
```
for t=-2 :0.01 :2,
plot(exp(-t).*sin(2*pi*t)) ;
end ;
```

12. Sous le logiciel MATLAB, on entre les commandes suivantes : `t = (1 :512) ; x = cos(2*pi*0.25*t) ; X = fft(x) ;`

(a) La variable `x` est un vecteur de taille 512 qui contient des échantillons d'une sinusoïde de fréquence 0.25 échantillonnée à la période 1.

(b) La commande `plot(t,abs(X))` permet de tracer le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(c) La commande `plot(t/512,abs(X))` affiche le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(d) La commande `plot(fft(X))` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

13. Sous le logiciel MATLAB, on suppose avoir chargé dans la variable `x` des échantillons d'un signal prélevés à une fréquence d'échantillonnage de 1kHz.

(a) Les commandes `N=length(x) ; plot((1 :N),abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(b) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(c) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N*1000,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(d) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N*1000,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réelle est indiquée est abscisse.

suite ...

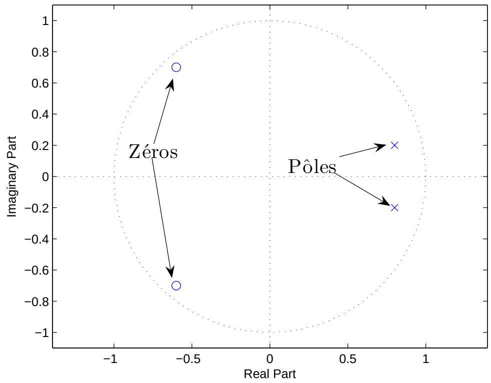


FIG. 2 – Pôles et zéros dans le plan complexe du filtre des questions 14 et 15

14. On considère le filtre causal dont la transformée en z est donnée par :

$$H[z] = \frac{0,85z^{-2} + 1,2z^{-1} + 1}{0,68z^{-2} - 1,6z^{-1} + 1} \quad (1)$$

Ses zéros et pôles sont représentés sur la figure 2 :

(a) le filtre $H[z]$ est de type passe-bas.

(b) le filtre $H[z]$ est de type passe-bande.

(c) le filtre $H[z]$ est de type passe-haut.

(d) il est impossible d'avoir la moindre idée du comportement de ce filtre à partir des éléments donnés.

15. On considère le même filtre qu'à la question 14.

(a) indépendamment des zéros, le filtre $H[z]$ est stable car ses pôles sont de module inférieur à 1.

(b) indépendamment des pôles, le filtre $H[z]$ est stable car ses zéros sont de module inférieur à 1.

(c) le filtre $H[z]$ est stable car ses zéros sont à partie réelle négative.

(d) le filtre $H[z]$ est instable car ses pôles sont à partie réelle positive.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [F. Barbaresco] L'onde électromagnétique rétrodiffusée par les objets est d'amplitude maximale, si la dimension des objets est d'une dimension égale :

(a) à la demie longueur d'onde.

(b) à la longueur d'onde.

(c) à deux fois la longeur d'onde.

17. [F. Barbaresco] Quelle est la nouvelle politique du groupe THALES pour favoriser les thèses ?

(a) Envoyer les thésards un an dans une des filliales à l'étranger du groupe Thales.

(b) Compléter le salaire pour le mettre au niveau d'un jeune ingénieur embauché.

(c) Tenir compte des 3 années de thèses en ancienneté en cas d'embauche du thésard.

(d) Financer des formations complémentaires au thésard pour faciliter son insertion professionnelle.

18. [P. Mège] En présence de réflexions longues de propagation, la distorsion observée sur le canal de propagation est :

(a) de l'interférence inter-symbole (ISI) due à l'étalement temporel du canal.

(b) du fading plat (flat fading) dû à l'étalement fréquentiel du canal (étalement Doppler) et de plus de l'interférence inter-porteuses (ICI) si l'on est en transmission multi-porteuses.

(c) des erreurs aléatoirement disposées dues à la collision entre les différents trajets de propagation.

19. [L. Fathi] Pour augmenter le débit de transmission (bits/s) d'un un système CDMA, il faut :

(a) Augmenter le facteur d'étalement.

(b) Choisir des modulations d'ordre supérieur.

(c) Allouer plusieurs codes au même utilisateur simultanément.

(d) Réduire le temps symbole.

20. [J. Boudy] Critère le plus couramment utilisé pour la phase de reconnaissance (ou de décodage par les modèles de Markov pré-appris) :

(a) Maximum de Vraisemblance : Max {P(O/M)}

(b) Maximum a Posteriori (MAP) : Max {P(M/O)}

(c) Maximum d'Entropie : Max {-P(M/O).LogP(M/O)}

PARTIE B

On considère le signal à temps continu $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \phi) + b(t)$ où a et f_0 sont des constantes réelles, ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et $b(t)$ est un bruit blanc (centré) dont la densité spectrale est notée $\frac{N_0}{2}$. Les deux processus $a\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ et $b(t)$ sont supposés indépendants.

21. Montrer que le signal $x(t)$ est stationnaire au sens large et calculer sa fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau), \tau \in \mathbb{R}$.

22. Calculer $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$.

23. Le signal $x(t)$ est appliqué en entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle vaut :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [f_0 - B/2, f_0 + B/2] \cup [-f_0 - B/2, -f_0 + B/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Calculer la puissance du signal $y(t)$ en sortie du filtre.

PARTIE C

Cet exercice redémontre quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète (TFD) et introduit à partir de celle-ci la transformée en cosinus discrète qui est très utilisée dans les algorithmes de compression d'images (normes JPEG, MPEG,. . .).

suite . . .

24. On considère les N échantillons $(x_n)_{n=0,\dots,N-1}$ d'un signal à temps discret de durée finie. On rappelle que la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $(x_n)_{n=0,\dots,N-1}$ s'exprime par la somme (ici finie) :

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\imath 2\pi k f} \tag{3}$$

On notera $(X_n)_{n=0,\dots,N-1}$ la TFD de $(x_n)_{n=0,\dots,N-1}$.

(a) Rappeler comment la TFD s'interprète comme les valeurs de la TFTD en N points de l'intervalle unité. Donner l'expression de $(X_n)_{n=0,\dots,N-1}$. Montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

où $\mathbf{W}$ est la matrice $\mathbf{W} = (w^{(k-1)(l-1)})_{k,l=1,\dots,N}$, avec $w \in \mathbb{C}$ à préciser.

(b) Calculer $\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}$. En déduire le lien entre $\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$ et $\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$ ainsi que la formule de la TFD inverse.

25. A partir de maintenant, on pose $N = 2P$ et on suppose que $(x_n)_{n=0,\dots,2P-1}$ est réel. Quelle relation de symétrie cela entraîne-t-il pour les coefficients X_k ?

26. On fait l'hypothèse supplémentaire que $\forall n \in \{0,\dots,2P-1\} \qquad x_{2P-1-n} = x_n$.
Montrer que cela permet d'écrire :

$$\forall k \in \{0,\dots,P\} \qquad \exp\left(-\imath \frac{\pi k}{2P}\right) X_k = A_k \tag{5}$$

où $A_k \in \mathbb{R}$ est à préciser.

27. Que vaut X_P ?

28. En déduire que $\forall n \in \{0,\dots,P-1\}, \qquad x_n = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n+\frac{1}{2})\right)\right).$

29. La transformée en cosinus discrète de $(x_n)_{n=0,\dots,P-1}$ est définie par les coefficients $(\widetilde{A}_k)_{k=0,\dots,P-1}$ tels que :

$$\widetilde{A}_k = \begin{cases} \frac{A_0}{2\sqrt{P}} & \text{si } k = 0, \\ \frac{A_k}{\sqrt{2P}} & \text{si } k \in \{1,\dots,P-1\}. \end{cases} \tag{6}$$

Vérifier que cette transformation conserve l'énergie du signal, çàd que $\sum_{n=0}^{P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} \widetilde{A}_k^2$.

Nom: ____________________

Prénom: ____________________

PARTIE A

1.

2.

3.

4.

5.

suite ...

6.

7.

Entourer les réponses justes.

8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	
17.	a	b	c	d
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	d
20.	a	b	c	

Telecom - INT

JUIN, 2008
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

Eléments de correction

PARTIE A

Voir cours/TDs/TPs et conférences.

PARTIE B

21. En utilisant l'indépendance des termes croisés et le fait que le bruit est centré, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{x(t)x(t-\tau)\} &= \mathrm{E}\{a^2\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)\} + \mathrm{E}\{b(t)b(t-\tau)\} \\ &= \mathrm{E}\{\frac{a^2}{2}\big(\cos(4\pi f_0(t-\tau/2)+2\phi)+\cos(2\pi f_0\tau)\big)\} + \mathrm{E}\{b(t)b(t-\tau)\} \end{aligned}$$

ϕ étant uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et $b(t)$ étant blanc, le signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_x(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

22. La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de l'expression précédente :

$$\Gamma_x(f) = \frac{a^2}{4}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right) + \frac{N_0}{2}$$

23. En notant $\Gamma_y(f)$ la densité spectrale de $y(t)$, la puissance s'écrit :

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_y(f)\,df = \int_{-f_0-B/2}^{-f_0+B/2}\Gamma_x(f)\,df + \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2}\Gamma_x(f)\,df = \frac{a^2}{2} + BN_0$$

suite ...

PARTIE C

24. Voir cours.

25. Pour tout $k \in \{1, \dots, 2P-1\}$:

$$X_{2P-k} = \sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{j(2P-k)}{2P}} = \sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} = \left(\sum_{j=0}^{2P-1} x_j^* e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} \right)^* = \left(\sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} \right)^* = X_k^*$$

26. Pour tout $k \in \{0, \dots, P\}$:

$$\begin{aligned}
X_k &= \sum_{j=0}^{P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + \sum_{j=P}^{2P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} = \sum_{j=0}^{P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + \sum_{l=0}^{P-1} x_{2P-1-l} e^{-\imath 2\pi \frac{(2P-1-l)k}{2P}} \\
&= \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + e^{-\imath 2\pi \frac{(2P-1-j)k}{2P}} \right) = \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + e^{\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} e^{\imath 2\pi \frac{k}{2P}} \right) \\
&= e^{\imath \pi \frac{k}{2P}} \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} e^{-\imath \pi \frac{k}{2P}} + e^{\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} e^{\imath \pi \frac{k}{2P}} \right) = e^{\imath \pi \frac{k}{2P}} \sum_{j=0}^{P-1} 2x_j \cos\left(\frac{\pi k}{P}(j + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned}$$

et donc $\forall k \in \{0, \dots, P\}, e^{-\imath \pi \frac{k}{2P}} X_k = A_k \in \mathbb{R}$ avec $A_k = \sum_{j=0}^{P-1} 2x_j \cos\left(\frac{\pi k}{P}(j+\frac{1}{2})\right)$

27. $X_P = 0$.

28. Puisque $X_P = 0$, on a pour tout $n \in \{0, \dots, P-1\}$:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2P} \sum_{k=0}^{2P-1} X_k e^{\imath 2\pi \frac{kn}{2P}} = \frac{1}{2P} X_0 + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} + \frac{1}{2P} \sum_{k=P+1}^{2P-1} X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} \\
&= \frac{1}{2P} X_0 + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} \left(X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} + X_{2P-k} e^{\imath \pi \frac{(2P-k)n}{P}} \right) = \frac{1}{2P} X_0 + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} \left(X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} + X_k^* e^{-\imath \pi \frac{kn}{P}} \right) \\
&= \frac{A_0}{2P} + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} \left(A_k e^{\imath \pi (\frac{kn}{P} + \frac{k}{2P})} + A_k e^{-\imath \pi (\frac{kn}{P} + \frac{k}{2P})} \right) = \frac{1}{P} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n + \frac{1}{2}) \right) \right]
\end{aligned}$$

29.

$$\sum_{k=0}^{P-1} \widetilde{A}_k^2 = \frac{1}{2P} \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k^2 \right] = \frac{1}{2P} \left[\frac{|X_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} |X_k|^2 \right] = \frac{1}{4P} \sum_{k=0}^{2P-1} |X_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} x_n^2$$