FILES D'ATTENTES SIMPLES

I. Notation de Kendall

A/B/=m(c,e,f)

A=Arrivées
B=Services
m=Nombre de serveurs
c=Priorité
e=Capacité
f=Population

1. Arrivées

On pose X la loi du temps entre deux arrivées successives.
Si:

- A=M : Markov sans mémoire $E(Y)=E(X)\frac{1+C^2(X)}{2}$

  PK sans mémoire $E(Y)=E(X)$
- A=D : Déterministe ie X=cte
- A=E : Erlang somme de r variables indépendantes exponentielles de taux λ'

  $E(X)=\frac{r}{\lambda'}$ et $\text{var}(X)=r\,\text{var}(X_i)C^2(X)=\frac{1}{r}$
- A=H : hyperexponentiel $C^2(X)>1$
- A=B Bulk: arrivées groupées
- A=G Général
- A=GI Général et indépendants

2. Services

- B=M Markov $P_r(S<t)=1-e^{-\mu t}$

  $E(S)=\frac{1}{\mu}$ pendant une «busy period» quand le serveur travaille , débit de sortie = μ

μ = vitesse du serveur= nombre de services/unité de temps quand le serveur travaille

3. Loi de Priorité

Scheduling
FIFO: premier arrivé premier servi
Par défaut: FIFO
LIFO
FCFS
Random
Quantum: interruption du service en cours

4. Capacité

Nombre de places dans la file, par défaut capacité infinie.
Si file pleine: -rejet,...

5. <u>Population</u>

Par défaut réseau ouvert: population infinie.

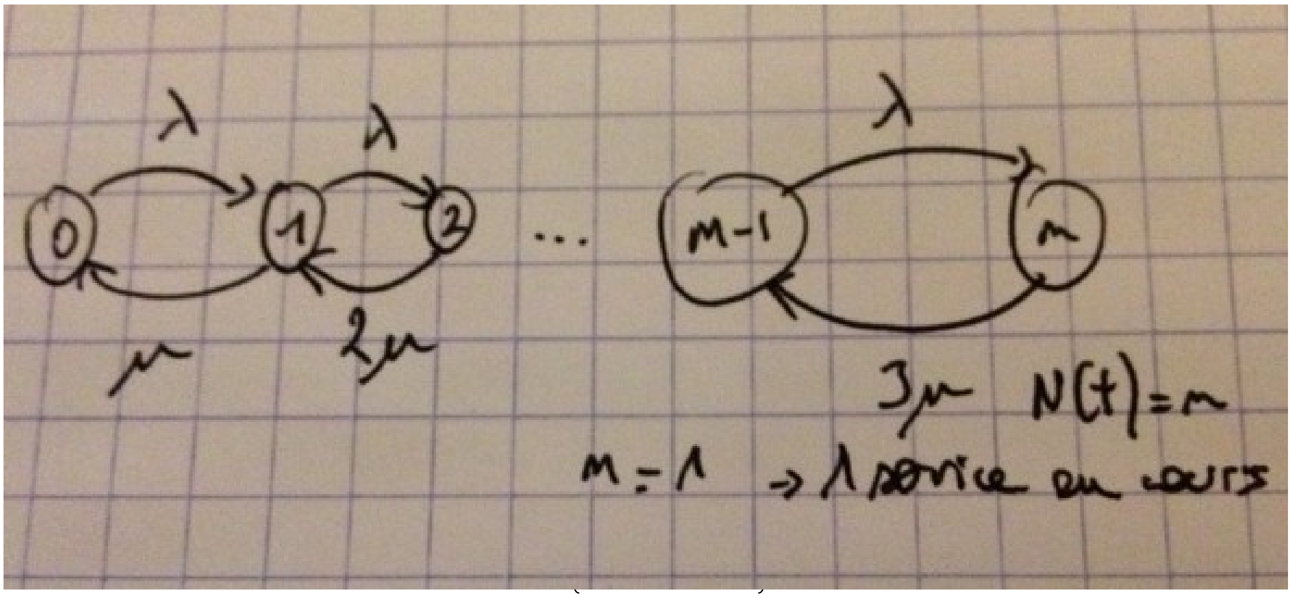
Exemple: M/M/1/N/N capacité N et réseau fermé N clients

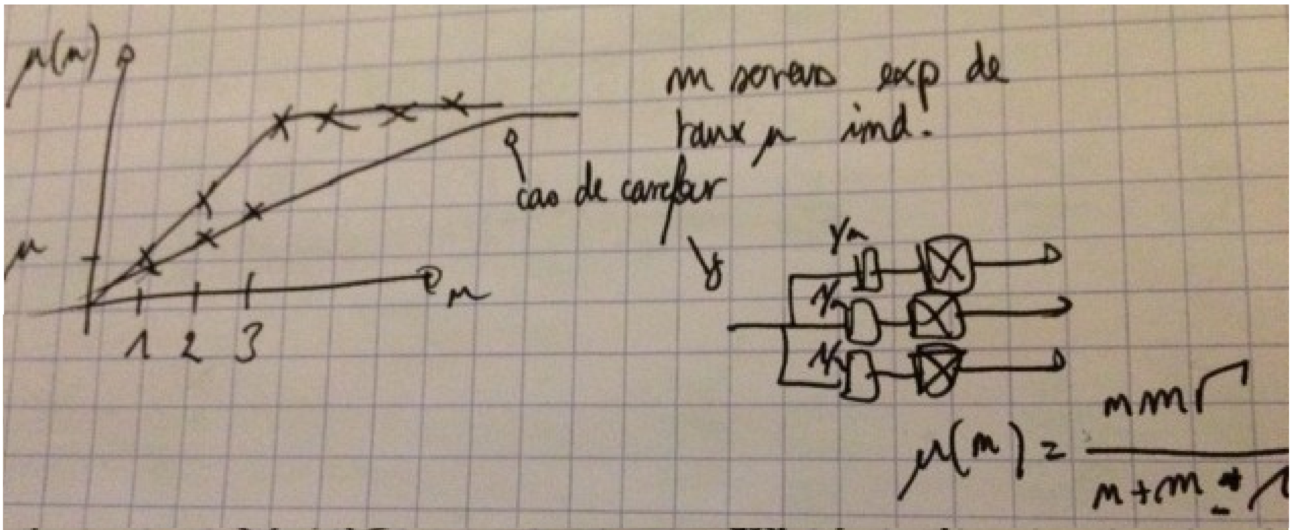
II. Modèles markoviens de files d'attentes

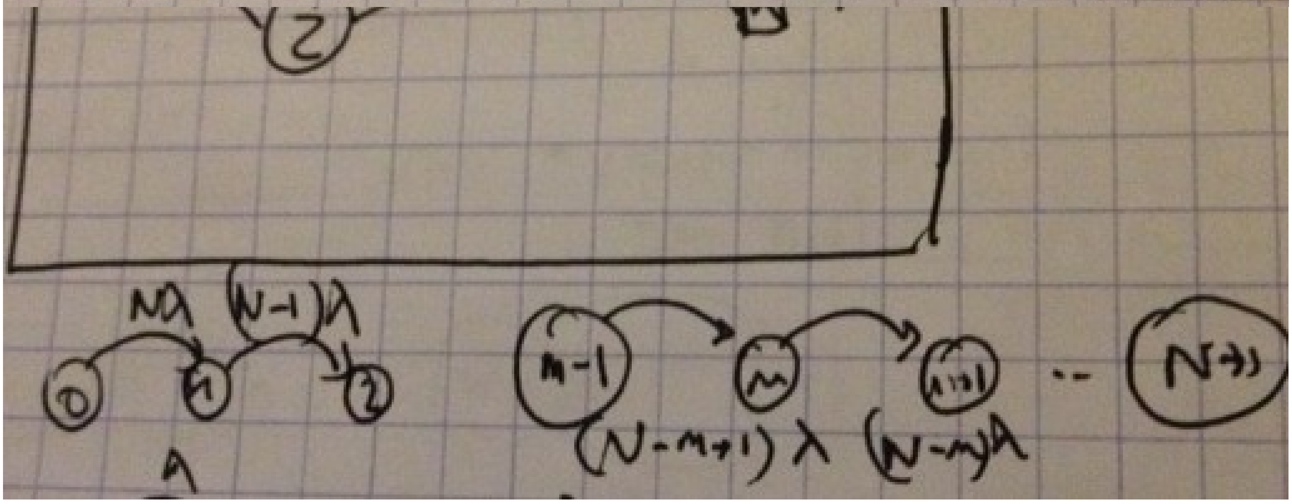
N(t): nombre de clients dans la file d'attente à t
Si N(t)= n , arrivées sans mémoire
fin de service si service sans mémoire
Fin de service au bout de Inf si
Inf 3 variables exponentielles de taux μ_i indépendantes et une variable exponentielle de taux somme des μ_i

$$P_r((\inf S_i)<t)=1-e^{-\sum_i \mu_i t}$$
$$P_r(S_i>t)=e^{-\mu_i t}$$
$$P_r((\inf S_i)>t)=P_r(\forall i \;\; S_i>t)=\prod_i P_r(S_i>t)$$

III. Processus de naissance et de mort

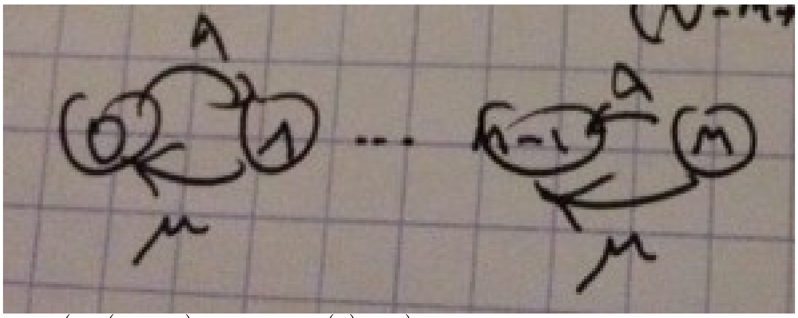






Ceci est M/M/3/N/N

M/M/1: arrivée poissonienne à un serveur exponentiel de capacité infinie, réseau ouvert de priorité FIFO.



$$P_r(N(t+dt)=n+1 \mid N(t)=n)=\lambda\, dt$$
$$P_r(N(t+dt)=n-1 \mid N(t)=n)=\mu\, dt$$

$$P(N(t)=n)\rightarrow ?$$
$$N(0)=0$$

λ et μ différents de 0 car chaînes de Markov irréductibles

$$\lambda\pi(n-1)=\mu\pi(n)$$

Notation : $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda E(S)$

$$\begin{cases} \pi(0)=1-\rho, \text{si } \rho<1 \\ \pi(n)=\rho^n(1-\rho), \text{si } \rho=1 \\ \text{divergence, si } \rho>1 \end{cases}$$

$$U=\pi(1)+\pi(2)+\ldots=1-\pi(0)=\rho$$

$$E(L)=\sum_{n=0}^{\infty} n\,\pi(n)=\rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^{n-1}=\frac{\rho}{1-\rho}=E(L)$$
$$E(R)=\frac{E(L)}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

CTMC finie → convergence: $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$

$$\pi(n)=\rho\,\pi(n-1)=\rho^n\pi(0)$$
$$\pi(0)(1+\rho+\ldots+\rho^n+\ldots+\rho^N)=1 \quad \text{(vecteur d'état)}$$
$$\pi(n)=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n$$

$$E(L_s)=U \quad \text{et} \quad E(R_s)=E(S) \;\rightarrow\; U=\lambda(1-P(\text{rejet}))$$
$$P(\text{rejet})=P(\text{file pleine})=\pi(N)$$

P(un client qui arrive soit rejeté)=P(file pleine/un client arrive)=P(file pleine)
vrai si indépendance entre processus d’arrivée et état de la file
PASTA: Poisson Arrivals See Time Average

Notation de Kendall
nombre infini de serveurs, nombre de serveur > nombre de clients éventuels
=> M/M/inf

$$(N-n)\lambda\,\pi(n)=\mu\,\pi(n+1)$$
$$\frac{\mu}{\lambda}=z$$
$$\pi(n)=\frac{z}{N-n}\pi(n+1)=\frac{z^{N-n}}{(N-n)!}\pi(N)$$

M/M/1/N

$$\Pi(N)=\frac{1}{1+z+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots+\frac{z^N}{N!}}$$

modèle du réparateur