Contrôle PG12 – 1ère session **16/03/2009**
Durée : 1h30

Les documents (polycopiés) et calculatrices sont autorisés.

<u>Instructions :</u> Afin de faciliter la correction, il vous est demandé de remettre sur des copies distinctes la première et deuxième partie.

Par ailleurs, 1 point de bonification est accordé à la qualité de présentation de votre copie.

Indiquez sur chaque copie (en haut à gauche) votre nom et prénom et encadrez vos résultats s.v.p.

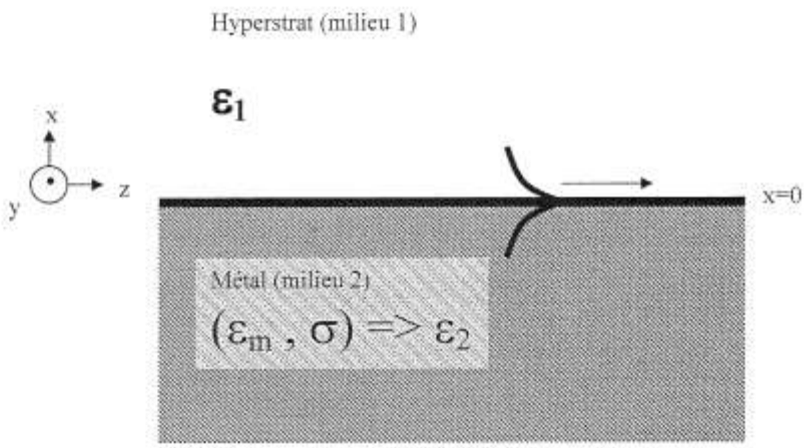
Exercice 1 : (6 points)

Dans cet exercice on cherche à déterminer si des modes guidés sont susceptibles d'exister à la surface d'un métal homogène non magnétique ($\mu=\mu_0$) et non parfait occupant l'espace x<0. Il vous est naturellement proposé de suivre la démarche employée au cours des BE d'optique guidée.

Les calculs se feront en polarisation TM (c.a.d. seule la composante Hy de **H** est non nulle). Pour cet état de polarisation, on peut montrer et on admettra que la composante du champ Ey est nulle en tout point de l'espace. Toutes les composantes des champs comporteront le terme $e^{j(\omega t-\beta z)}$. Du fait de l'invariance du problème par toute translation suivant l'axe y, il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial y}=0$$

On appellera $\vec{E}^{(i)}$ et $\vec{H}^{(i)}$ les champs dans le milieu i (i=1,2).



1) Rappeler les équations de Maxwell pour des problèmes physiques ne comportant ni courant ni charge.

2) Les deux premières équations de Maxwell dans un métal non magnétique en régime harmonique sont :

$rot\ (\vec{E}^{(2)}) + i\omega\mu_0\vec{H}^{(2)} = \vec{0}$ **(1)**

$rot(\vec{H}^{(2)}) - i\omega\varepsilon_m\vec{E}^{(2)} - \vec{j} = \vec{0}$ **(2)**

avec $\vec{j} = \sigma\vec{E}^{(2)}$ où ε_m est la permittivité associée au métal et σ sa conductivité.

Montrer que dans le métal, l'équation (2) peut se rapporter à une équation de Maxwell harmonique **(2')** identique à celle d'un diélectrique (c.a.d. un milieu sans courant et similaire à celle que vous avez indiquée en question 1) à condition d'introduire une permittivité ε_2 que vous définirez (qui dépend de ε_m, ω et σ).

3) Grâce à un développement de l'équation (2'), et l'utilisation de la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$, montrez que

$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial Hy}{\partial x}$ est continu à la traversée métal/hyperstrat. Remarquez et justifiez très succinctement que Hy est également continu à la traversée du métal/hyperstrat.

4) Exprimez l'équation différentielle que vérifie $H_y^{(i)}$ (Equation d'Helmholtz) en introduisant $\chi_i^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2$ (avec β la constante de propagation) dans chaque milieu. Résolvez l'équation différentielle trouvée en 4). Pour cela introduisez α_i dans chaque milieu. Du fait de l'ambigüité associée à la définition de la racine carrée d'un nombre complexe on choisira par définition $\alpha_i = \sqrt{\chi_i^2}$ avec α_i choisi de façon à avoir $Re(\alpha_i)>0$ (β sera à priori considéré comme complexe).
5) Parmi les solutions générales, précisez dans chacun des milieux la forme des solutions acceptables physiquement et permettant l'existence d'une onde guidée (donc localisée) au voisinage de l'interface métal/hyperstrat. Dessinez l'allure générale du champ H (en fonction de x)
6) On recherche les modes guidés dans une fenêtre spectrale située dans l'infrarouge. On peut alors négliger la partie réelle de ε_2 devant sa partie imaginaire. En utilisant les résultats des questions 3) et 5), déterminez analytiquement β, solution des modes guidés.
7) Ce guide, dit plasmonique, peut il avoir un comportement bi-mode ?

Exercice 2 (4 points): On considère un empilement de 3 couches diélectriques d'indice n2/n1/n3 avec n1=3.5, n2=2, n3=1.5. L'épaisseur de la couche d'indice n1 est 0.7µm

1) Tracez approximativement le diagramme de dispersion TE de ce guide d'onde en précisant toutefois les valeurs des trois premières épaisseurs normalisées de coupure et le domaine de définition de la constante de propagation (sur le graphique). Vos calculs seront détaillés et argumentés sur votre copie.
2) Définir et calculez le domaine de longueurs d'onde pour lequel le guide est monomode en TE.

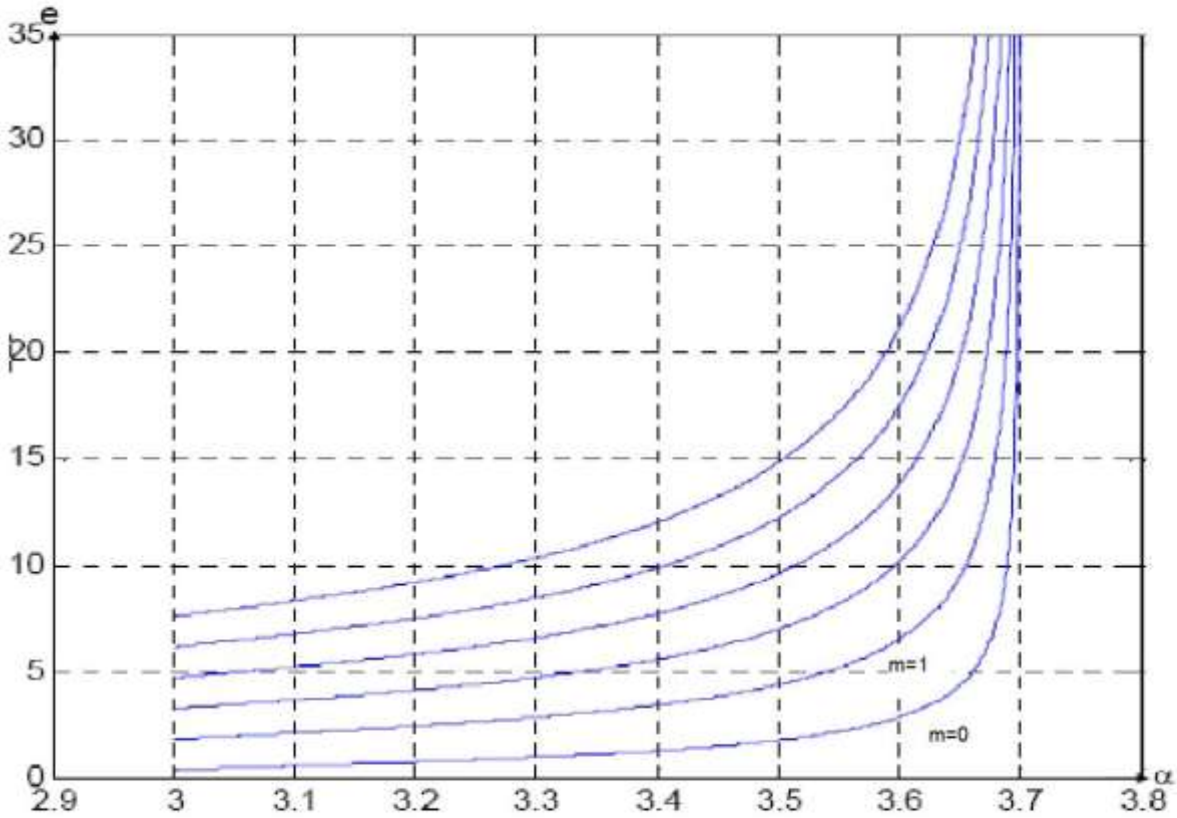
Exercice 1 : Diagramme de dispersion

Exercice un peu spéciale qui nécessitait d’avoir sous le coude le polycopié de corrigés d’exercices : au premier BE question3.7 on calculait une équation de dispersion en mode TE assez horrible :

$$e = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - \alpha^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2 - {n_2}^2}{{n_1}^2 - \alpha^2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2 - {n_3}^2}{{n_1}^2 - \alpha^2}} + m\pi \right]$$

Le graphe est fait pour différentes valeurs de m.

La question 3.8 de ce BE donnait alors les réponses recherchées.



1. On remarque que si α tend vers 3.7 toutes les courbes tendent vers +∞ :

Normal il y a le facteur $\frac{1}{\sqrt{{n_1}^2-\alpha^2}}$. Donc $n_1 = 3.7$

Ensuite $n_2 = 3$: les courbes s’arrêtent il n’y a plus de mode guidés.

2. D'après le cours, les épaisseurs normalisées de coupures correspondent aux valeurs de e auquelles apparaissent les modes respectifs TE_i
   Par ailleurs, on sait qu'à la coupure $\alpha(=\frac{\beta}{k_0})= n_2$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{{n_2}^2 - {n_3}^2}{{n_1}^2 - {n_2}^2}}$$

$${n_2}^2 - ({n_1}^2 - {n_2}^2)\left[\tan(e_0\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2})\right]^2 = {n_3}^2$$

$$n_3 = \sqrt{{n_2}^2 - ({n_1}^2 - {n_2}^2)\left[\tan(e_0\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2})\right]^2}$$

J'ai trouvé n_3 =2.759 on a bien $n_1 > n_2 > n_3$

3. e=$\frac{2\pi d}{\lambda_0}$.
   Sur le graphe si je trace pour une valeur de e fixée une ligne horizontale, j'aurai le nombre de modes guidées TE et quels modes.
   On veut le monomode. Nécessairement il faut que nous coupions la courbe m=0 et donc pas la courbe m=1.
   Ça définit un intervalle de valeurs pour e et donc pour λ =$\frac{2\pi d}{e}$
   Reste à calculer où à relever e1 :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{{n_2}^2 - {n_3}^2}{{n_1}^2 - {n_2}^2}} + \pi\right]$$

Je trouve $e_1 = 1.067$

Donc il n'y aura de monomode que pour 5.8μm<λ <22.5μm

Exercice 2 : onde de surfaces //le gras c'est de vecteurs

1. cf cours pour les eq de Maxwell mais avec **J**=0 (pas de courants) et ρ=0 (pas de charges.

   Ces équations ne sont valables que dans l'hyperstrat 1 (en gros c'est de l'air ou du vide) : il y a des charges surfaciques et un courant non nuls dans le metal 2.

   Notation conseillé : travailler avec **E** et **H** pour cet exo) :

   a) **rot**(**H**)=$\varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
   b) **rot**(**E**)=$-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$
   c) div(**H**)=0
   d) div(**E**)=0
   rq : a) ⇔ **rot**(**H**)=$\varepsilon_1 i\omega\mathbf{E}$

2.1 on réécrit l'equation 2' pour obtenir une équation similaire à ce qui fut obtenu en 1/ **rot**($\mathbf{H}^{(2)}$)= $\varepsilon_m i\omega\mathbf{E}^{(2)} + \sigma\mathbf{E}^{(2)}$

D'où ε_2=$i\varepsilon_m\omega + \sigma$

2.2 les composantes tangentielles de E et H sont continues donc pour Hy c'est ok.

rot(**H**)= $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{pmatrix}$ (un rotationel, c'est juste un determinant..)

On projette sur l'axe (Oz) et on obtient :

$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial H_y}{\partial x}$=$E_z$

Comme Ez est continue à la surface (x=0), $\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial H_y}{\partial x}$ est bien continue.

2.3 le grand classique mais on va le refaire, appliquez ce qu'on vous dit à la formule 1' : d'un coté

rot(rot(H))=rot($\varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$)= $\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}$ **rot(**E) : j'ai le droit le rotationel, c'est des derivées spatiales.

Et **rot(**E) $= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ d'après Maxwell => **rot(rot(H))**= $-\varepsilon_i \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

De l'autre **rot(rot(H))=grad**(div(**H**))- **∇²(H)=** - **∇²(H)**

- $\varepsilon_i \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$ **+∇²(H)=0**

Rq: d'habitude $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ et $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

∇²(H)= $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2}+i^2\beta^2\mathbf{H}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = i^2\omega^2\, \mathbf{H}$$

$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2}+(\varepsilon_i \mu_0 \omega^2 - \beta^2)\mathbf{H}=0$

2.4 On pose $\chi_i{}^2 = \varepsilon_i \mu_0 \omega^2 - \beta^2$

On projette sur l'axe Oy :

$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\chi_i{}^2 H_y=0$

et $\alpha_i=\sqrt{\chi_i{}^2}$ puisqu'a priori ε_i est complexe .

Les solutions sont du type :

$H_y = Ae^{\alpha_i x}+Be^{-\alpha_i x}$

(Oui, c'est long mais c'est toujours pareil).

On cherche des ondes guidées : il faut donc que l'énergie reste confinée à a surface du métal donc que les ondes soit à décroissance exponentielle dans le substrat ET que dans le métal pour qu'elle reste confinée à la surface.

Donc : milieu1. décroissance exponetielle χ_1 est imaginaire pur

milieu2. Décroissance exponentielle χ_2 est imaginaire pur aussi.

donc $\chi_2{}^2 < 0$

2.5 $\chi_2{}^2 = \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 - \beta^2$

Et $\varepsilon_2 = i\varepsilon_m \omega + \sigma$

D'après le sujet on néglige σ devant $i\varepsilon_m \omega$.

$\beta^2 \approx \sigma\mu_0 \omega^2 - \chi_2{}^2$