TD PROPAGATION GUIDEE

Exercice 1 : Le guide rectangulaire

On souhaite établir l'équation de dispersion dans le milieu, dont on nous donne la forme :
$\varepsilon_r k_0^2 = \kappa + \gamma^2$

La vitesse de phase est donnée par : $k_0 = \frac{\omega}{c}$

D'autres formules dont on se sert souvent : $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$k_0\sqrt{\varepsilon_r} = k = \frac{\omega}{v}$ avec $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

On va partir de l'équation de Helmholtz, on va exprimer les conditions aux limites, pour arriver aux conditions de séparation …

Soit u une composante quelconque des champs :

l'équation de Helmholtz est alors $\boxed{\Delta u + k^2 u = 0 \text{ avec } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$

Résolution via la méthode de séparation des variables :

on cherche $u(x, y, z)$ de la forme $u(x, y, z) = u_x(x) u_y(y) u_z(z)$

On reporte la forme de la solution dans l'équation de Helmholtz :

$$u_y(y)u_z(z)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + k^2 u_x(x) u_y(y) u_z(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u_x(x)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + k^2 = 0$$

Ainsi on obtient l'équation différentielle suivante, ce pour les trois coordonnées :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + k_x^2 u_x$$

La forme générale de la solution selon z est alors $u_z(z) = A_z e^{-jk_z z} + B_z e^{jk_z z}$

Comme on s'intéresse à la propagation dans le sens des z croissants :

$$\Rightarrow u_z(z) = u e^{-jk_z z} \text{ avec } \Re(k_z) > 0$$

Selon les deux autres directions, la forme générale des solutions est :

$$\begin{Bmatrix} u_x(x) = A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x) \\ u_y(y) = A_y \cos(k_y y) + B_y \sin(k_y y) \end{Bmatrix}$$

Par hypothèse, on a supposé le conducteur parfait, ce que signifie que les composantes tangentielles du champ E sont nulles : $\vec{E}_{tang} = \vec{0}$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0 \\ u_x(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k_x a) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \end{Bmatrix}}$$

On obtient de même pour y : $\boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}, n \in \mathbb{N}}$

La constante de propagation s'écrit alors :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2$$

Le mode est « propagatif » ce qui impose que :

$$k_z^2 \geq 0, k_z \text{ réel} \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_r}{c^2} \geq \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\boxed{f \geq f_c \text{ avec } f_c = \left(\frac{c}{2\pi}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right)}$$

Ainsi, pour un mode (m, n) donné, il y a évanescence quand z augmente car :

$k < k_c \quad \Leftrightarrow \quad k_z = -j\alpha \quad \Leftrightarrow \quad e^{-jk_z z} = e^{-\alpha z}$ donc atténuation de l'onde selon z.

(m, n)	$f_c(m,n)$
$m = 1$, $n = 0$	$\frac{c}{2a}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$
$m = 2$, $n = 0$	$\frac{c}{a}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$
$m = 3$, $n = 0$	$\frac{3c}{2a}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

Le cas le plus favorable (bande passante la plus large, fréquence de coupure la plus faible) est : m = 1, n = 0. C'est le « mode fondamental ».

Application numérique :

a = 15,8 mm, b = 7,9 mm

$$\boxed{\Rightarrow \begin{Bmatrix} f_c(1{,}0) = 9{,}49\,\text{GHz} \\ f_c(2{,}0) = 19\,\text{GHz} \end{Bmatrix}}$$

Pour le guide standard, la bande passante est 12 – 18 GHz … Alors pourquoi ne peut-on pas utiliser le guide entre 9,5 et 12 et 18 et 19 GHz ?

C'est à cause de la dispersion pour les modes inférieurs (9,5 – 12 GHz) et à l'atténuation trop lente (due à la faible évanescence) pour les modes supérieurs (18 – 19 GHz)

<u>Modes TM</u> : $H_z = 0$

Via le cours (équations 2.17 et 2.18) :

$$E_z(x,y) = \left[A\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + B_x \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \left[A_y \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + B_y \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]$$

<u>Modes TE</u> : $E_z = 0$

Pareil, via les équations 2.1.7 et 2.1.8 du cours :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon\mu - k_z^2} j\omega\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Ainsi on obtient tout en fonction des composantes selon z de H.

On applique alors les conditions aux limites :

$E_x(x,y) = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = b \quad \Rightarrow \quad B_y = 0$

$E_y(x,y) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = a \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} E_x(x,y)=\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ E_y(x,y)=\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{array}\right\}$$

<u>Exercice 2 : Ligne équivalente au mode fondamental d'une ligne coaxiale (encore appelée câble coaxial)</u>

La constante de propagation vaut :

$\gamma=jk_z$ avec $k_z=k=k_0\sqrt{\varepsilon_r}$

On pose une base unitaire en coordonnées cylindriques : $(\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{z})$

On va utiliser de nouveau la méthode de séparation des variables.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}(\rho,\varphi,z)=\vec{E}_T(\rho,\varphi)e^{-jkz} \\ \vec{H}(\rho,\varphi,z)=\vec{H}_T(\rho,\varphi)e^{-jkz}\end{array}\right\}$$

$$\vec{E}_T(\rho,\varphi)=-\vec{grad}_T U(\rho,\varphi)=-\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial\rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\end{pmatrix}$$

$$\Delta_T U=0=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

Via la méthode de séparation des variables, on va chercher une solution de la forme

$U(\rho,\varphi)=U_\rho(\rho)U_\varphi(\varphi)$

On reporte la solution dans l'équation :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\rho}{U_\rho}\left(\rho\frac{d^2U_\rho}{d\rho^2}+\frac{dU_\rho}{d\rho}\right)=\text{cste}=A \\ \frac{1}{U_\varphi}\frac{d^2U_\varphi}{d\varphi^2}=-A\end{array}\right\}$$

Ainsi, on obtient les composantes du champ E :

$$\boxed{\begin{array}{c} E_\rho=-\frac{dU}{d\rho}=-\frac{dU_\rho}{d\rho}U_\varphi(\varphi) \\ E_\varphi=-\frac{1}{\rho}U_\rho(\rho)\frac{dU_\varphi}{d\varphi}\end{array}}$$

Ensuite, on utilise les conditions aux limites :

$$E_\varphi(\rho,\varphi)=0 \quad \text{en} \quad \left\{\begin{array}{l}\rho=\rho_1,\forall\varphi \\ \rho=\rho_2,\forall\varphi\end{array}\right\}$$

On montre que U_ρ ne peut pas être nul à la fois en ρ_1 et en ρ_2

$$\Rightarrow \quad \forall\varphi \quad \frac{dU_\varphi}{d\varphi}=0 \quad \Rightarrow \quad A=0$$

D'où, pour la deuxième équation différentielle :

$$\rho\frac{d^2U_\rho}{d\rho^2}+\frac{dU_\rho}{d\rho}=0$$

$$\rho \frac{dU_\rho}{d\rho} = \text{cste} = U_0$$

$$\boxed{\vec{E}_T(\rho,\varphi) = -\frac{U_0}{\rho}\hat{\rho}}$$

L'onde est localement plane, se propageant selon *z*.

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{z}\wedge\vec{E} \text{ avec } \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\vec{H}_T(\rho,\varphi) = \frac{1}{\eta}\hat{z}\wedge\vec{E}_T(\rho,\varphi) = \frac{1}{\eta}\left(-\frac{U_0}{\rho}\right)\hat{\varphi}$$

En notant *n* la normale sortante, le flux de puissance est alors défini par :

$$\vec{j}_s = \vec{n}\wedge\vec{H}$$

$$\rho=\rho_1 \quad \vec{j}_{s_1}(\varphi,z) = \hat{\rho}\wedge\frac{1}{\eta}\left(-\frac{U_0}{\rho_1}\right)\hat{\varphi}\,e^{-jkz}$$

$$\rho=\rho_2 \quad \vec{j}_{s_2}(\varphi,z) = -\hat{\rho}\wedge\frac{1}{\eta}\left(-\frac{U_0}{\rho_2}\right)\hat{\varphi}\,e^{-jkz}$$

Le flux de puissance est :

$$\int_S \vec{\pi}.\vec{dS} \quad \text{avec } \vec{\pi} = \frac{1}{2}\Re(\vec{E}.\vec{H}^*) \quad \text{(vecteur de Poynting)}$$

Ici, à travers une section transverse en *z* :

$$P(z) = \int_{\rho=\rho_1}^{\rho_2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{\pi}(\rho,\varphi,z).\hat{z}\,\rho\,d\rho\,d\varphi \quad \text{avec } \vec{\pi}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{2\eta}\frac{|U_0|^2}{\rho^2}\hat{z}$$

Après calculs, sachant que $\eta = 120\pi$

$$\boxed{P(z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120}|U_0|^2\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

- Circulation du champ électrique du conducteur 1 vers le conducteur 2 dans un plan transverse :

$$C(M_1,M_2) = \int_C \vec{E}(\rho,\varphi,z).\vec{dl} = \int_C -\vec{grad}_T U(\rho,\varphi).\vec{dl}\,e^{-jkz}$$

$$\boxed{C(M_1,M_2) = |U(M_1) - U(M_2)|e^{-jkz} = U_0\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)e^{-jkz}}$$

- Flux de courant à travers une section transverse :
  - sur le conducteur 1 :

$$\boxed{I_1(z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{j}_{s_1}(\varphi,z).\hat{z}\,\rho_1\,d\varphi = -\frac{U_0}{\eta}2\pi e^{-jkz}}$$

  - sur le conducteur 2 :

$$\boxed{I_2(z) = \frac{U_0}{\eta}2\pi e^{-jkz} = \frac{U_0}{60}\sqrt{\varepsilon_r}\,e^{-jkz}}$$