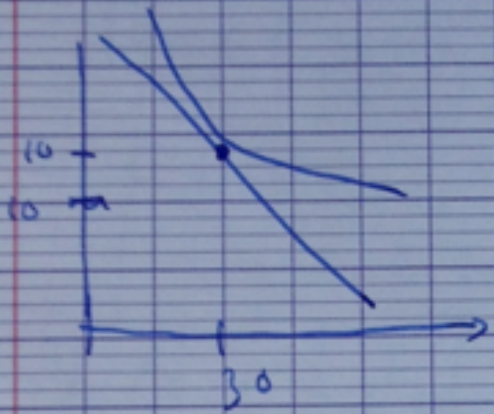
Exo 3 $u(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1 x_2$ $R = 360$ $P_1 = 6$ $P_2 = 18$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1 x_2 + \lambda (R - 6x_1 - 18 x_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_2 - 6\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{1}{3} x_1 - 18\lambda = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = R - 6x_1 - 18x_2 = 0$$



$x_1^* = 30$ $x_2^* = 10$

$$U_{max}(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1 x_2 = \frac{1}{3} 30 \times 10 = 100$$

Déf : fonction de demande = Relation entre quantité optimale demandée d'un bien et les valeurs possibles des variables qui la déterminent (prix du bien, prix des autres biens, revenu du consommateur, des goûts et préférences).

$$\frac{U_{m x_1}}{U_{m x_2}} = \frac{P_1}{P_2} \Leftrightarrow \frac{1/3\, x_2}{1/3\, x_1} = \frac{P_1}{P_2} \Leftrightarrow \boxed{x_2 = \frac{P_1}{P_2} x_1}$$

TMS = Rapport des prix

$$R = x_1 P_1 + x_2 P_2$$

$$= x_1 P_1 + \left(\frac{P_1}{P_2} x_1\right) P_2$$

$$\Leftrightarrow R = 2 x_1 P_1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^*(R, P_1) = \frac{R}{2 P_1}}$$

$$\boxed{x_2^* = \frac{R}{2 P_2}}$$

Exo 4 :

1)

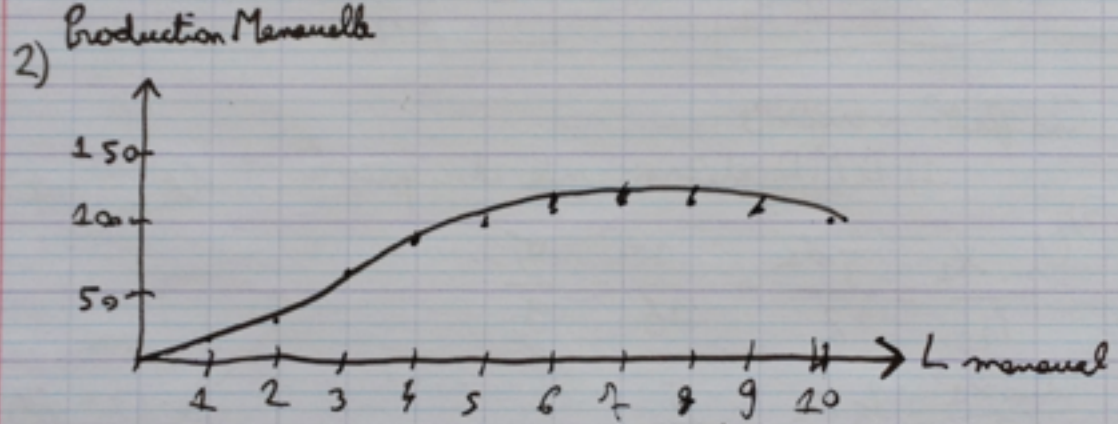
Qté de Travail	Qté de capital	Prod	PML	PmL
0	10	0		
1		10	10	10
2	"	30	15	20
3		60	20	30
4		80	20	20
5		95	19	15
		108	18	13
6	"	112	16	4
7	"	112	14	0
8				
9		108	12	-4
10		100	10	-8

Prod moyenne : Production par unité de travail $PML = \frac{q}{L} = \frac{Prod}{Travail}$

Prod marginale : Prod suplémentaire par prod supplémentaire de travail

$P_mL = \frac{\Delta q}{\Delta L} =$

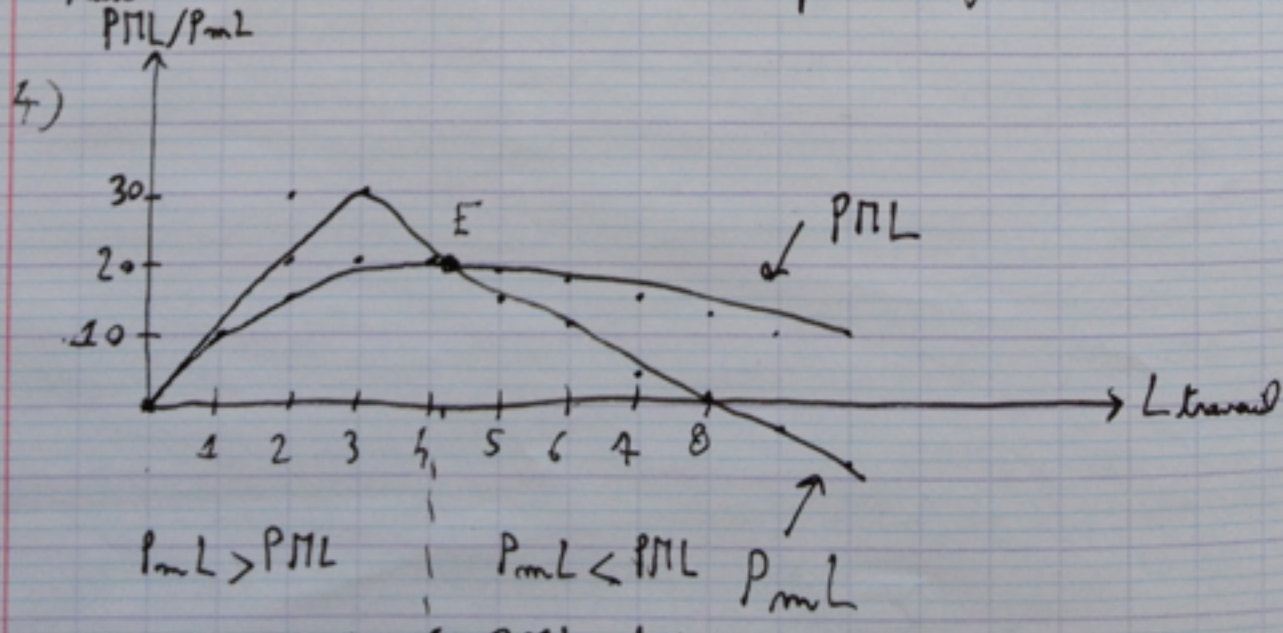
2)



La prod augmente avec le travail

3) $P_{Max} = 112$ Pour $L > 8 \Rightarrow$ contre productif

4)



Pt E : $P_mL = PML$, La PML est à son max

Exo 5:

$$Q = 4K^{\alpha}L^{\beta}$$

1) Déterminer K^* et L^*

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = 4K^{\alpha}L^{\beta} + \lambda(C - P_K K - P_L L)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{4\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}}{P_L}$$

$$L = \frac{\beta P_K}{\alpha P_L} K \qquad \boxed{K^* = \frac{C}{P_K\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)}}$$

$$\text{et } L^* = \frac{\beta C}{P_L(\alpha+\beta)}$$

K^* et L^* sont les facteurs optimaux pour ce producteur

2) $Q = 4K^{\alpha}L^{\beta}$

↳ homogène de degré $(\alpha+\beta)$

$Q(tK, tL) = t^{\alpha+\beta} Q(K, L)$ fonction homogène de degré $\alpha+\beta$

3) $\beta = \frac{1}{3}$

$\alpha > \frac{2}{3}$ alors $\alpha+\beta > 1 \Rightarrow$ rendement d'échelle ↗

$\alpha < \frac{2}{3}$ alors $\alpha+\beta > 1$ ↘

$\alpha = \frac{2}{3}$ alors $\alpha+\beta = 1$ cst

Une product° se fait à rendement croissant lorsque le coût moyen de produ

4) a) Rendement d'échelle cst

$$K^* = \frac{48}{8\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = 4 \qquad L^* = \frac{\frac{1}{3} \times 48}{4\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = 4$$

QUESTION 4.b)

b) Rendement d'échelle cst $\quad Q(tK, tL) = t\,Q(K, L)$

$t = 2$, on double le facteur K et L

c) $P_L = 8$

K^* ne dépend pas du prix du travail donc $K^* = 4$

$L^* = 2$