PROPAGATION GUIDEE
TD 1

Ce que l'on va étudier aujourd'hui : les lignes de transmission, reliées d'une part à un générateur, d'autre part à une charge.

Rappel :
On considère une ligne de transmission avec en entrée un générateur et son impédance, et en sortie une impédance Z_l.
La ligne de transmission est caractérisée par : $V(x)=V_i e^{\gamma x}+V_r e^{-\gamma x}$

$$I(x)=I_i e^{-\gamma x}+I_r e^{\gamma x}$$

$$\frac{V_i}{I_i}=\frac{V_r}{I_r}=Z_C$$

L'impédance de la ligne de transmission, constituée d'une résistance et d'une inductance r et L en série suivies d'une résistance et d'une capacité en parallèle $\frac{1}{g}$ et C vaut :

$$Z_C=\sqrt{\frac{r+jL\omega}{g+jC\omega}}$$

$$\gamma=\sqrt{(r+jL\omega)(g+jC\omega)}=\alpha+j\beta \text{ où } \begin{cases} \alpha \text{ représente les pertes} \\ \beta \text{ est une constante de propagation} \end{cases}$$

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$$

Impédance en x :

$$Z(x)=\frac{V(x)}{I(x)}=Z_C\frac{Z_0-jZ_C\,\mathrm{th}(\gamma x)}{Z_C-jZ_0\,\mathrm{th}(\gamma x)} \text{ avec } Z_0 : \text{impédance à l'origine}$$

$$Z_0=Z_C\frac{Z_L+jZ_C\,\mathrm{th}(\gamma l)}{Z_C+jZ_L\,\mathrm{th}(\gamma l)}=Z_e \text{ impédance d'entrée de la ligne}$$

Coefficient de réflexion :

$$\Gamma(x)=\frac{Z(x)-Z_C}{Z(x)+Z_C}$$

Taux d'onde stationnaire :

$$S=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

Puissance en x :

$$P(x)=\frac{1}{2}\Re(V(x)I(x)^*)$$

Exercice 1 : Expression générale de la tension et du courant le long d'une ligne

$$\begin{Bmatrix} V(x)=V_1 e^{-\gamma x}+V_2 e^{\gamma x} \\ I(x)=I_1 e^{-\gamma x}+I_2 e^{\gamma x} \end{Bmatrix}$$

On utilise la loi d'Ohm en x = 0 et l_0 :

$$E=Z_1 I(0)+V(0) \qquad (1)$$

$$V(l_0)=Z_2 I(l_0) \qquad (2)$$

Or, d'après les équations de départ :

$$V(0)=V_1+V_2$$

$$I(0)=\frac{V_1}{Z_C}-\frac{V_2}{Z_C}$$

$$U(l_0)=V_1 e^{-\gamma l_0}+V_2 e^{\gamma l_0} \qquad (3)$$

ainsi que : $I(l_0)=\frac{1}{Z_C}\left(V_1 e^{-\gamma l_0}-V_2 e^{\gamma l_0}\right) \qquad (4)$

$$E=\frac{Z_1}{Z_C}(V_1-V_2)+V_1+V_2$$

$$\Rightarrow V_1\left(\frac{Z_1}{Z_C}+1\right)+V_C\left(1-\frac{Z_1}{Z_C}\right)=E$$

$$V_1=\frac{1}{1+\frac{Z_1}{Z_C}}\left(E+V_2\left(\frac{Z_1}{Z_C}-1\right)\right)$$

$$\boxed{V_1=\frac{Z_C}{Z_C+Z_1}E+V_2\frac{Z_1-Z_C}{Z_1+Z_C} \qquad (5)}$$

En utilisant (3) :

$$V_2 e^{\gamma l_0}=V(l_0)-V_1 e^{-\gamma l_0}=Z_2 I(l_0)-V_1 e^{-\gamma l_0}=Z_2[\frac{1}{Z_C}(V_1 e^{-\gamma l_0}-V_2 e^{\gamma l_0})]-V_1 e^{-\gamma l_0}$$

$$\boxed{V_2=V_1 e^{-2\gamma l_0}\frac{Z_2-Z_C}{Z_2+Z_C}}$$

On pose :

$$\Gamma_g=\frac{Z_1-Z_C}{Z_1+Z_C}\Rightarrow 1-\Gamma_g=\frac{2Z_C}{Z_1+Z_C}$$

$$\Gamma_t=\frac{Z_2-Z_C}{Z_2+Z_C}$$

$$V_2=V_1\Gamma_t e^{-2\gamma l_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V(x)&=E_2\frac{1-\Gamma_g}{1-\Gamma_g\Gamma_t e^{-2\gamma l_0}}(e^{-\gamma x}+\Gamma_t e^{\gamma(r-2l_0)}) \\ I(x)&=\frac{E}{2Z_C}\frac{1-\Gamma_g}{1-\Gamma_g\Gamma_t e^{-2\gamma l_0}}(e^{-\gamma x}-\Gamma_t e^{\gamma(r-2l_0)}) \end{aligned}}$$

Exercice 2 : Cascade de deux lignes idéales

$$\gamma = j\beta$$

$$V_2(x) = V\left(e^{-j\beta_2 x} + \Gamma_{t_2} e^{j\beta_2(x-2l_1-2l_2)}\right)$$

$$\Gamma_{t_2} = \frac{R_{C_2} - R_{C_2}}{R_{C_2} + R_{C_2}} = 0$$

$$V_2(x) = Ve^{-j\beta_2 x}$$

Pour la ligne 2, il n'y a pas d'ondes réfléchies.

$$\Gamma_{g_1} = \frac{R_{C_1} - R_{C_1}}{R_{C_1} + R_{C_1}} = 0$$

$$\Gamma_{t_1} = \frac{Z_0 - R_{C_1}}{Z_0 + R_{C_1}}$$

Z_0 est l'impédance d'entrée de la deuxième ligne.

$$Z_0 = R_{C_2} \frac{R_{C_2} + jR_{C_2}\tan(\beta_2 l_2)}{R_{C_2} + jR_{C_2}\tan(\beta_2 l_2)} = R_{C_2}$$

$$\Gamma_{t_1} = \frac{R_{C_2} - R_{C_1}}{R_{C_2} + R_{C_1}}$$

$$V_1(x) = \frac{E}{2}\left(e^{-j\beta_1 x} + \Gamma_{t_1} e^{j\beta_1(x-2l_1)}\right) \text{avec}\, x \in [0, l_1]$$

Pour déterminer V :

$$V_1(l_1) = V_2(l_1)$$

ie $\quad Ve^{-j\beta_2 l_1} = \frac{E}{2}\left(e^{-j\beta_1 l_1} + \Gamma_{t_1} e^{-j\beta_1 l_1}\right)$

$$V = \frac{E}{2}\left(1 + \Gamma_{t_1}\right) e^{-j(\beta_1 - \beta_2) l_1}$$

$$V_2(x) = Ve^{-j\beta_2 x}$$

2) Déterminer la puissance maximale dissipée dans la résistance R_{C_2}

La puissance délivrée par le générateur est maximale lorsque : $V_1(0) = \frac{E}{2}$

Dans l'expression de V1(x), je remplace x par 0 :

$$V_1(0) = \frac{E}{2}\left(1 + \Gamma_{t_1} e^{-2j\beta_1 l_1}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{t_1} = 0$$

Or comme $\quad \Gamma_{t_1} = \frac{R_{C_2} - R_{C_1}}{R_{C_2} + R_{C_1}}$

Ainsi on obtient : $\boxed{R_{C_1} = R_{C_2}}$

Exercice 4 : Adaptation en puissance entre une charge et une source

1) Pour quelle valeur de Z la puissance est maximale ?

$$Z_g = R_g + jX_g$$
$$Z = R + jX$$
$$P = \Re(VI^*) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} I = \dfrac{E}{Z+Z_g} \\ V = \dfrac{Z}{Z+Z_g} E \end{array} \right\}$$

Ainsi la puissance s'exprime de la façon suivante :

$$P = \Re\left(\frac{Z}{Z+Z_g} E \frac{E}{(Z+Z_g)^*}\right) = E^2 \Re\left(\frac{Z}{(Z+Z_g)(Z+Z_g)^*}\right)$$

$$\boxed{P = E^2 \frac{R}{(R_g+R)^2 + (X+X_g)^2}}$$

La puissance est maximale ssi le dénominateur est minimal :

ie $\boxed{X = -X_g}$

Ainsi l'expression de la puissance est : $P = E^2 \dfrac{R}{(R+R_g)^2}$

En calculant et en annulant la dérivée, on obtient la deuxième condition : $R = R_g$

Alors la puissance est maximale pour $Z = Z_g$

$$\boxed{P_{max} = \frac{E^2}{4R_g}}$$
$$P_{max} = 50 \text{ W}$$

Dans ce cas : $\boxed{V = \dfrac{R_g}{R_g+R_g} E = \dfrac{E}{2}}$

2) On prend $l = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$

La formule générale de la puissance est : $P = E^2 \dfrac{R}{(R_g+R)^2 + (X+X_g)^2}$

$Z_e = R_e + jX_e$ impédance de la ligne chargée par Z

$$Z_e = Z_C \frac{Z + jR_C \tan(\beta l)}{R_C + jZ \tan(\beta l)}$$
$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}(2k+1)\frac{\lambda}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\tan(\beta l) = +\infty$$

D'où $Z_e = \dfrac{R_C^2}{Z}$

Cas 1 : $Z=10-20j$

$$Z_e=50+100j=Z_g^*$$

$$|\Gamma|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S=5,8$$

Cas 2 : $Z=50$

$$\Gamma=\frac{R_C-R_C}{R_C+R_C}=0$$

$$S=1$$

<u>Exercice 3 : Régime d'ondes stationnaires sur une ligne idéale</u>

$$S=1{,}4=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\Leftrightarrow|\Gamma|=\frac{S-1}{S+1}=0{,}17$$
$$P_t=\Re\left(V(0)I(0)^*\right)$$
$$\Gamma_g=\frac{Z_g-Z_C}{Z_g+Z_C}=0$$
$$V(0)=\frac{E}{2}\left(1+\Gamma e^{-2j\beta l_0}\right)$$
$$I(0)=\frac{E}{2Z_C}\left(1-\Gamma e^{-2j\beta l_0}\right)$$

D'où l'expression suivante de la puissance : $P_t=\frac{E^2}{4Z_C}\left(1-|\Gamma|^2\right)$

$\Gamma=\frac{Z-Z_C}{Z+Z_C}$ coefficient de réflexion de Z

A.N. :

$P_t=486\,\text{mW}$

$\text{si}\ \Gamma=0,\ P_t=500\,\text{mW}$

2) $Z=Z_C\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$

En considérant uniquement les Z réels :

$\text{cas 1}: \Gamma=+0{,}17$

$$Z_C=Z\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}=70\,\Omega=R_1$$

$\text{cas 2}: \Gamma=-0{,}17$

$$Z=Z_C\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}=35{,}7\,\Omega=R_2$$

3) $P_t=\frac{1}{2}\frac{V^2}{R}\Rightarrow V=\sqrt{2RP_t}$

$$V_M=\sqrt{2R_1P_t}=8{,}25\,\text{V}$$
$$V_m=\sqrt{2R_2P_t}=5{,}89\,\text{V}$$
$$P_t=\frac{1}{2}RI^2\Rightarrow I=\sqrt{\frac{2P_t}{R}}$$
$$I_m=118\,\text{mA}$$
$$I_M=165\,\text{mA}$$

4) $R=\frac{3\lambda}{4}$

$$Z_e=\frac{R_C^2}{Z}$$

cas 1 : $Z=R_1$

$Z_e=35{,}7\,\Omega$

cas 2 : $Z=R_2$

$Z_e=70\,\Omega$

5) $$\begin{cases} V(l)=V_i e^{-j\beta l}+V_r e^{j\beta l} \\ I(l)=\dfrac{V_i}{Z_C}e^{-j\beta l}-\dfrac{V_r}{Z_C}e^{j\beta l} \end{cases}$$

$$\frac{V_r}{V_i}=\Gamma e^{j\varphi}$$

$$\begin{cases} V(l)=V_i(1+\Gamma e^{j\varphi}e^{2j\beta l}) \\ I(l)=\dfrac{V_i}{Z_C}(1-\Gamma e^{j\varphi}e^{2j\beta l}) \end{cases}$$

V(l) est maximal pour $\varphi+2\beta l=2k\pi$ et ainsi *I(l)* est minimal.
I(l) est maximal pour $\varphi+2\beta l=(2k+1)\pi$ et ainsi *V(l)* est minimal.