307-05-直径

直径的性质

1. 任意两条直径必定相交
2. 所有直径必交于一点

找直径

任意一个点出发，找出最远点，从最远点，在找到最远点，连起来就是直径（两次dfs）。证明从略（反证法）。

P1099 树网的核

题目描述

设$T=(V,E,W)$是一个无圈且连通的无向图（也称为无根树），每条边到有正整数的权，我们称T为树网（`treebetwork`），其中V，E分别表示结点与边的集合，W表示各边长度的集合，并设T有n个结点。

路径：树网中任何两结点a，b都存在唯一的一条简单路径，用$d(a,b)$表示以a,b为端点的路径的长度，它是该路径上各边长度之和。我们称$d(a,b)$为a,b两结点间的距离。

$D(v,P)=mind(v,u)$, u为路径P上的结点。

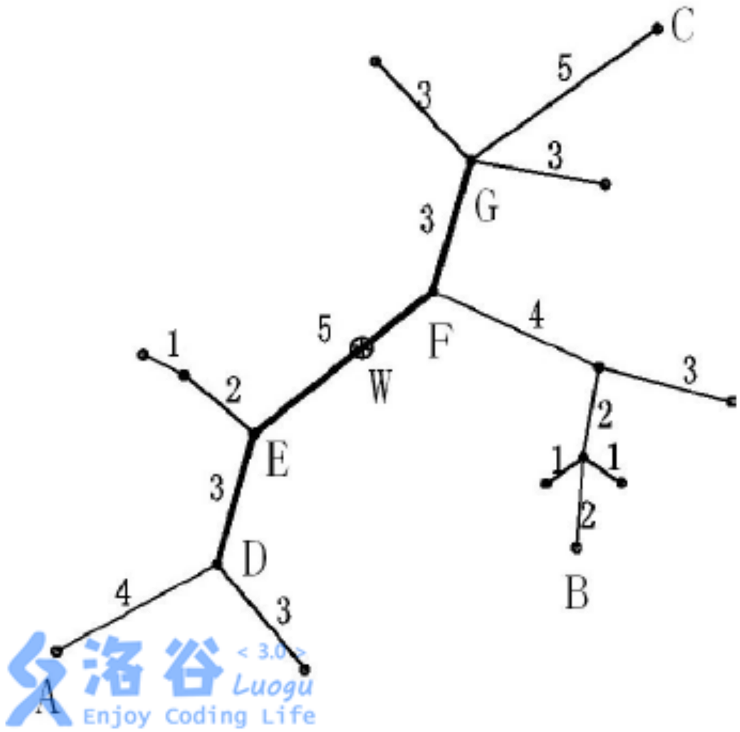
树网的直径：树网中最长的路径成为树网的直径。对于给定的树网T，直径不一定是唯一的，但可以证明：各直径的中点（不一定恰好是某个结点，可能在某条边的内部）是唯一的，我们称该点为树网的中心。

偏心距$ECC(F)$：树网T中距路径F最远的结点到路径F的距离，即

$ECC(F)=\max\{d(v,F),v\in V\}$

任务：对于给定的树网$T=(V,E,W)$和非负整数s，求一个路径F，他是某直径上的一段路径（该路径两端均为树网中的结点），其长度不超过s（可以等于s），使偏心距$ECC(F)$最小。我们称这个路径为树网$T=(V,E,W)$的核（`Core`）。必要时，F可以退化为某个结点。一般来说，在上述定义下，核不一定只有一个，但最小偏心距是唯一的。

下面的图给出了树网的一个实例。图中，$A-B$与$A-C$是两条直径，长度均为20。点W是树网的中心，EF边的长度为5。如果指定$s=11$，则树网的核为路径`DEFG`（也可以取为路径`DEF`），偏心距为8。如果指定$s=0$（或$s=1$、$s=2$），则树网的核为结点F，偏心距为12。



输入输出格式

输入格式：

共n行。

第1行，两个正整数n和s，中间用一个空格隔开。其中n为树网结点的个数，s为树网的核的长度的上界。设结点编号以此为$1,2,\dots,n$。

从第2行到第n行，每行给出3个用空格隔开的正整数，依次表示每一条边的两个端点编号和长度。例如，“$2\ 4\ 7$”表示连接结点2与4的边的长度为7。

输出格式：

一个非负整数，为指定意义下的最小偏心距。

输入输出样例

输入样例#1： 复制

```
5 2
1 2 5
2 3 2
2 4 4
2 5 3
```

输出样例#1： 复制

```
5
```

输入样例#2： 复制

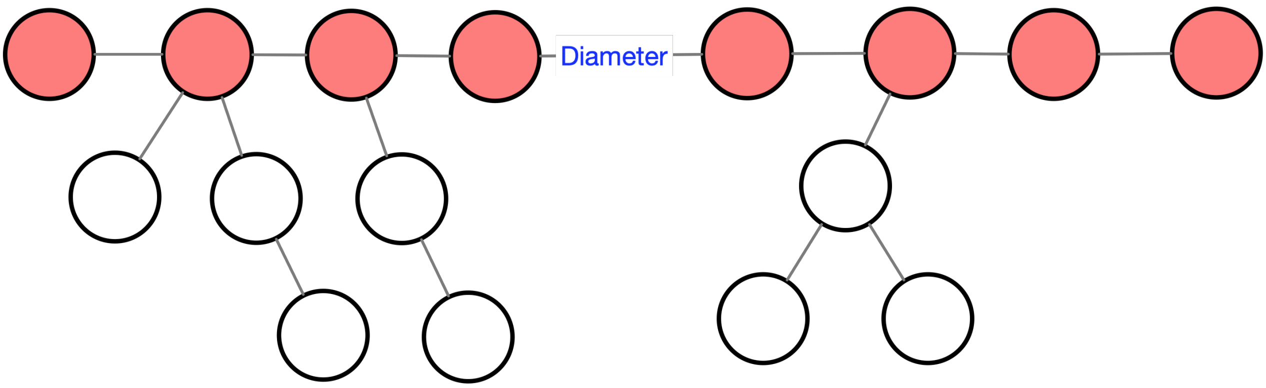
```
8 6
1 3 2
2 3 2
3 4 6
4 5 3
4 6 4
4 7 2
7 8 3
```

输出样例#2： 复制

```
5
```

题解

由于某些原因，这条路径必定会在直径上，所以不妨找出直径然后暴力枚举。但是显而易见，对每一个点都进行暴力肯定是不行的，所以我们需要向一些办法。可以将直径当做一条链，考虑下图这样的情况：



求出在这种情况之下的子树的最深深度，即为$secd[i]$，其中i为直径上的点，之所以这么表示，因为这个深度是在一个节点所有子树当中第二深的深度，最深的深度$best[i]$为直径所在的那颗子树的深度。

在这种情况下，可以在直径上选定一段F后，列出$ECC(F)$的方程：

$$ECC(F) = \max \begin{cases} \text{left of } F \text{ in diameter} \\ \max\{secd[i],\ i \in F\} \\ \text{right of } F \text{ in diameter} \end{cases} \tag{2}$$

首先在找直径和求子树深度这些环节其实写法都是一样的，使用两次的dfs，代码：

```
// x[u]: 高度，即u到顶的距离，secd[u]: 最深子树(处直径外的子树)，dim[u]: 直径上u的后继
```

```
ll dfs_1(ll u, ll p) {
    ll alpha = u;
    for (ll e = h[u]; e != 0; e = g[e].next) {
        ll v = g[e].to;
        if (v != p) {
            f[v] = f[u] + g[e].w;
            ll a = dfs_1(v, u);
            if (f[a] > f[alpha])
                alpha = a;
        }
    }
    return alpha;
}

void dfs_2(ll u, ll p) {
    for (ll e = h[u]; e != 0; e = g[e].next) {
        ll v = g[e].to;
        if (v != p) {
            x[v] = x[u] + g[e].w;
            dfs_2(v, u);
            ll newd = g[e].w + maxd[v];
            if (newd >= maxd[u]) {
                secd[u] = maxd[u];
                maxd[u] = newd;
                dim[u] = v;
            } else if (newd > secd[u]) {
                secd[u] = newd;
            }
        }
    }
}
```

后面的暴力判断哪一段最佳则可以有两种做法:

1. RMQ:

```
namespace RMQ {
    void init() {
        for (ll i = 1; i <= n; i ++) d[i][0] = i;
        for (ll j = 1; (1 << j) <= n; j ++)
            for (ll i = 1; i + (1 << j) - 1 <= n; i ++) {
                ll x = d[i][j - 1], y = d[i + (1 << (j - 1))][j - 1];
                d[i][j] = secd[Z[x]] > secd[Z[y]] ? x : y;
            }
    }
    ll query(ll l, ll r) {
        ll k = log2(r - l + 1);
        ll x = d[l][k], y = d[r - (1 << k) + 1][k];
```

```cpp
        return secd[Z[x]] > secd[Z[y]] ? x : y;
    }
}

int main() {
    cin >> n >> L;
    for (ll i = 1; i < n; i ++) {
        ll u, v, w; cin >> u >> v >> w;
        add_edge(u, v, w); add_edge(v, u, w);
    }
    ll a = dfs_1(1, 0);
    dfs_2(a, 0);
    ll k = 0;
    for (ll p = a; p != 0; p = dim[p])
        Z[++ k] = p;
    ll diameter = x[Z[k]];
    RMQ::init();
    ll ans = 1LL << 62;
    for (ll i = 1, j = 1; i <= k; i ++) {
        ll u = Z[i], v = Z[j];
        while (j + 1 <= k) {
            ll v_1 = Z[j + 1];
            if (x[v_1] - x[u] <= L) {
                v = v_1;
                j ++;
            } else break;
        }
        ll ecc = secd[Z[RMQ::query(i, j)]];
        ecc = max(ecc, x[u]);
        ecc = max(ecc, diameter - x[v]);
        ans = min(ans, ecc);
    }
    cout << ans << endl;
    return 0;
}
```

2. 单调队列：

```cpp
void inc(ll &i) {
    i ++;
    if (head <= tail && q[head] == Z[i - 1]) {
        head ++;
    }
}

void adv(ll &j) {
    j ++;
    while (head <= tail) {
        int last = q[tail];
```

```
        if (secd[last] < secd[Z[j]]) {
            tail --;
        } else break;
    }
    tail ++;
    q[tail] = Z[j];
}

int main() {
    cin >> n >> L;
    for (ll i = 1; i < n; i ++) {
        ll u, v, w; cin >> u >> v >> w;
        add_edge(u, v, w); add_edge(v, u, w);
    }
    ll a = dfs_1(1, 0);
    dfs_2(a, 0);
    ll k = 0;
    for (ll p = a; p != 0; p = dim[p]) {
        Z[++ k] = p;
    }
    ll diameter = x[Z[k]];

    ll ans = 1LL << 62;
    // 单调队列，其中inc(i)和adv(j)为对i,j分别加一，但是加的过程中需要调整单调队列的队首和队尾的指针，所以写成void
    for (ll i = 1, j = 1; i <= k; inc(i)) {
        ll u = Z[i], v = Z[j];
        while (j + 1 <= k) {
            ll v_1 = Z[j + 1];
            if (x[v_1] - x[u] <= L) {
                v = v_1;
                adv(j);
            } else break;
        }
        ll ecc = max(secd[q[head]], x[u]);
        ecc = max(ecc, diameter - x[v]);
        ans = min(ans, ecc);
    }
    cout << ans << endl;
    return 0;
}
```

HDU-2196-Computers

题目大意

对于一张给定的图（是树），有边权，输出每个点的到树上末梢的最远距离。

题解

这道题可以通过找出直径，每个点的最远距离就是这个点对于直径两个点的距离中较大的那个，可以很快的通过3遍dfs解决。

但是由于这是一道HDU的题，还是multiple test cases，怎么死的都不知道，还需要额外的优化，所以这里用的是$vector$建图，删的时候直接$erase()$就可以了。

代码:

```cpp
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <stdio.h>
#include <cstdio>
#include <vector>

using namespace std;

typedef long long ll;

const int maxn = 10005;
int val[maxn], end_of_diameter, max_length, ans[maxn];
int n;

struct node {
    int to; int w;
    node(int to, int w) : to(to), w(w) {}
};

vector < vector <node> > g;

// 这里开len可以省掉一个数组，每次dfs开始时计算答案
void DFS(int u, int fa, int len) {
    if (len >= max_length) {
        max_length = len; end_of_diameter = u;
    }
    for (int i = 0; i < g[u].size(); i ++) {
        int v = g[u][i].to;
        if (v == fa) continue;
        int w = g[u][i].w;
        DFS(v, u, len + w);
        ans[v] = max(ans[v], len + w); // 这样做可以将两个数组化为一个数组
    }
}

void init() {
    g.clear();
    g.resize(n + 2);
```

```
    memset(ans, 0, sizeof(ans));
    max_length = 0;
    end_of_diameter = 0;
}

int main() {
    int v, w;
    while (scanf("%d", &n) != EOF) {
        init();
        for (int i = 2; i <= n; i ++) {
            scanf("%d%d", &v, &w);
            g[i].push_back({v, w});
            g[v].push_back({i, w});
        }
        DFS(1, -1, 0);
        DFS(end_of_diameter, -1, 0);
        DFS(end_of_diameter, -1, 0);
        for (int i = 1; i <= n; i ++)
            printf("%d\n", ans[i]);
    }
    return 0;
}
```