Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso de Ciência da Computação
Campus Chapecó

Circuitos Aritméticos

Prof. Luciano L. Caimi
lcaimi@uffs.edu.br

Adição Binária

Adição de números sem sinal

	A	0	1	0	0			**Transporte (*carry*)**
+	**B**		0	1	0	0	(4)	
		+	0	1	1	0	(6)	
	S		1	0	1	0	(10)	**resultado**

O maior número binário que podemos representar com 4 bits é 15

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Adição de números sem sinal

	1	1	0	0			**Transporte (*carry*)**
overflow		1	1	0	0	(12)	
+		0	1	1	0	(6)	
		0	0	1	0	(18)	**resultado**

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Outro exemplo (8 bits)

	0	1	1	0	1	1	0	0		
		0	1	1	0	1	1	0	1 (109)	→ A
+		0	1	1	0	0	1	1	0 (102)	→ + B
		1	1	0	1	0	0	1	1 (211)	→ S

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Adição de números sem sinal

	0	1	1	0	1	1	0	0		
		0	1	1	0	1	1	0	1	(109)
+		0	1	1	0	0	1	1	0	(102)
		1	1	0	1	0	0	1	1	(211)

		a_0	**adição de 2 bits**
+		b_0	
	c_1	s_0	**resultado em 2 bits**

Adição Binária

A partir do 2º bit

	0	1	1	0	1	1	0	0		
		0	1	1	0	1	1	0	1	(109)
+		0	1	1	0	0	1	1	0	(102)
		1	1	0	1	0	0	1	1	(211)

		c_1	
		a_1	**adição de 3 bits**
+		b_1	
	c_2	s_1	**resultado em 2 bits**

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Generalizando, a partir do 2º bit

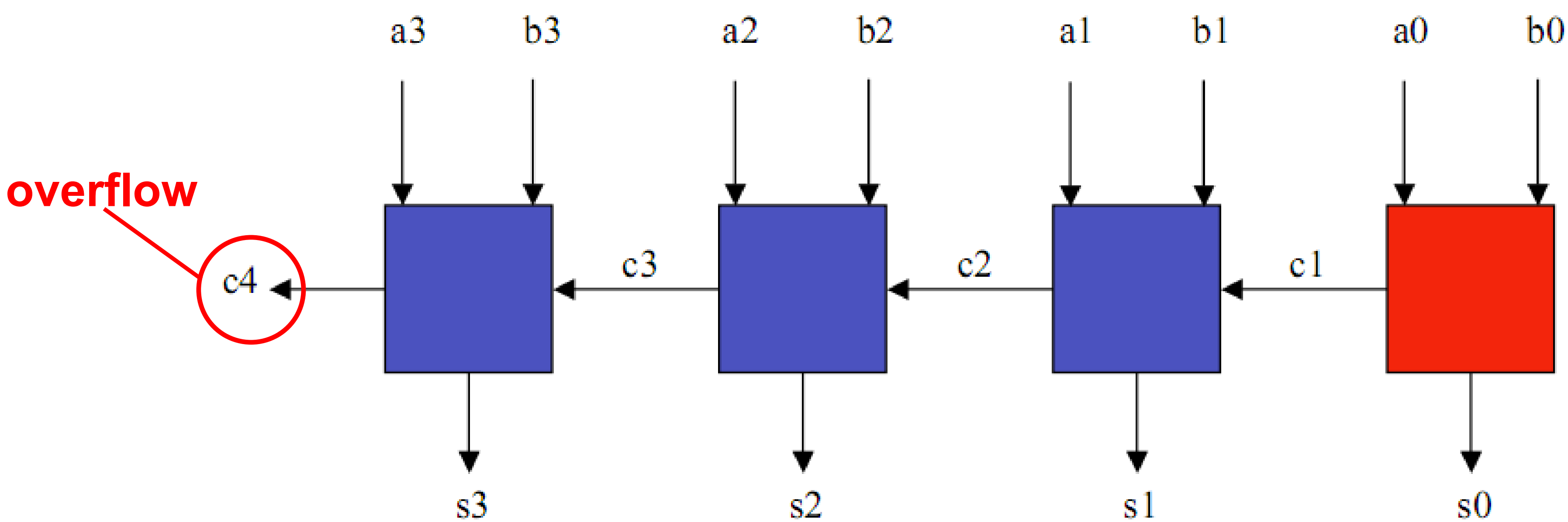
	0	1	1	0	1	1	0	0		
		0	1	1	0	1	1	0	1	(109)
+		0	1	1	0	0	1	1	0	(102)
		1	1	0	1	0	0	1	1	(211)

		c_i	
		a_i	**adição de 3 bits**
+		b_i	
	C_{i+1}	s_i	**resultado em 2 bits**

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Esquema para soma paralela



Observe:

- Existe um elemento para cada coluna da soma
- O sinal de *overflow* será o *carry* mais significativo

Adição Binária

Projetando o circuito para primeira coluna:

Meio-Somador (Half-Adder)

entradas		saídas	
a_0	b_0	c_1	s_0
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

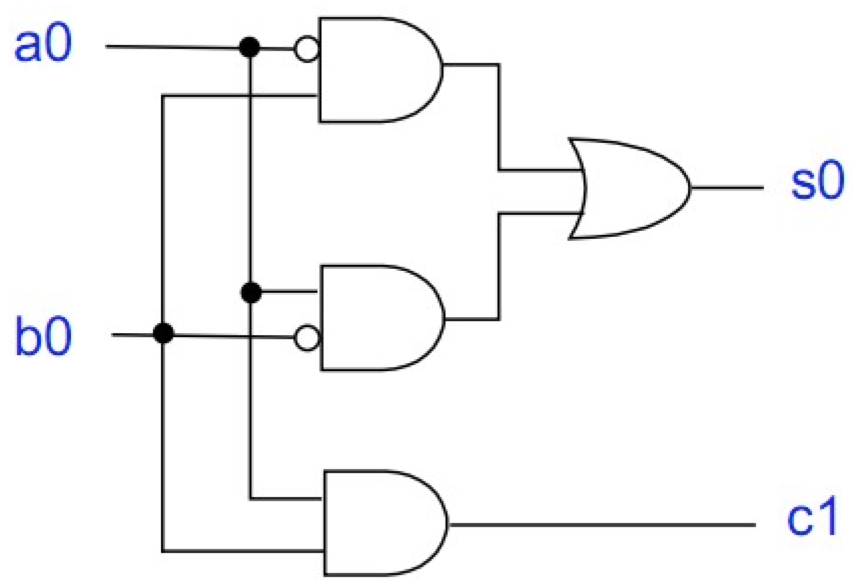
Projetando o circuito para primeira coluna:

Meio-Somador (Half-Adder)

$$s_0 = \overline{a_0} . b_0 + a_0 . \overline{b_0}$$

$$c_1 = a_0 . b_0$$

entradas		saídas	
a_0	b_0	c_1	s_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

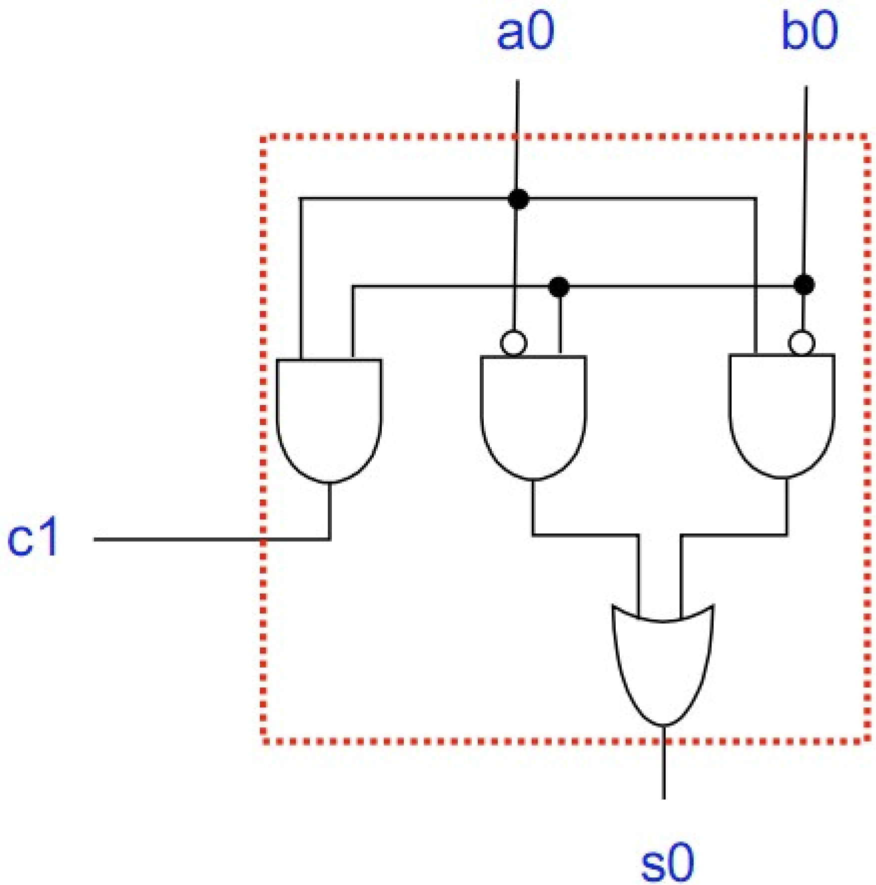


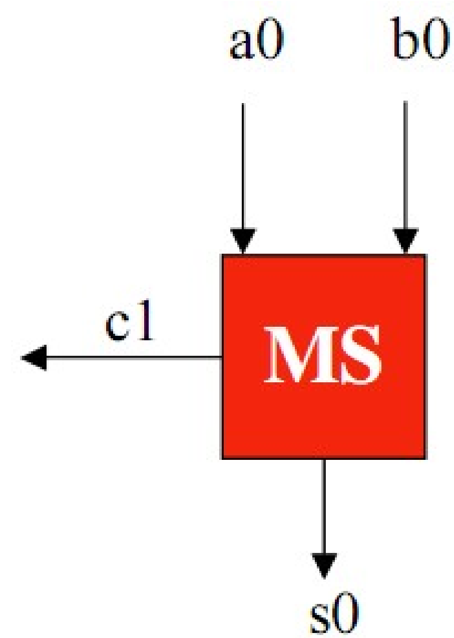
Circuitos Aritméticos

▶ Adição Binária

Meio-Somador (Half-Adder)

...se preferir





$$s_0 = \overline{a_0} . b_0 + a_0 . \overline{b_0}$$

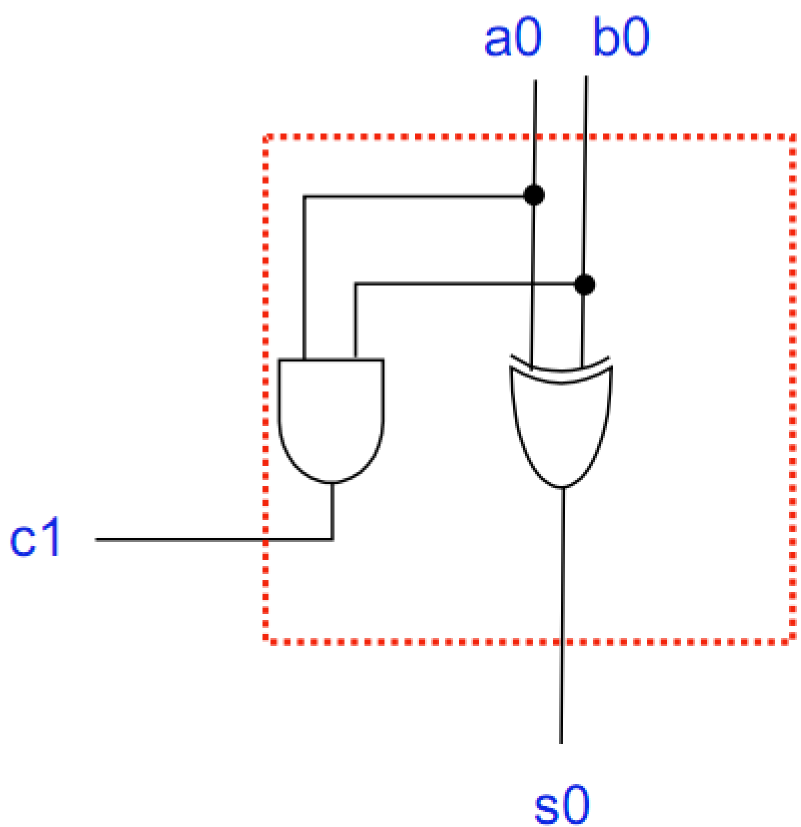
$$c_0 = a_0 . b_0$$

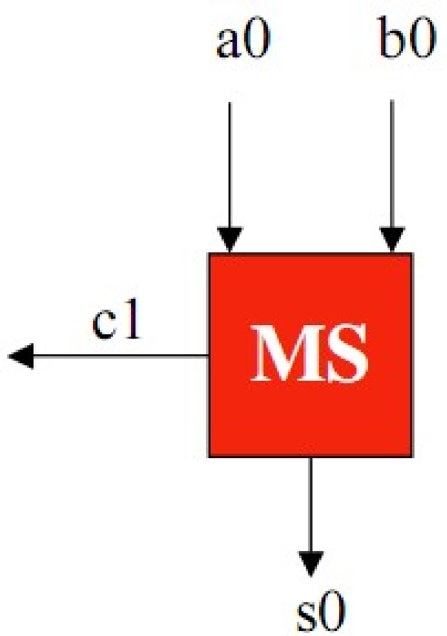
Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Meio-Somador (Half-Adder)

...ou ainda





$$s_0 = \overline{a_0} . b_0 + a_0 . \overline{b_0}$$

$$a_0 \oplus b_0$$

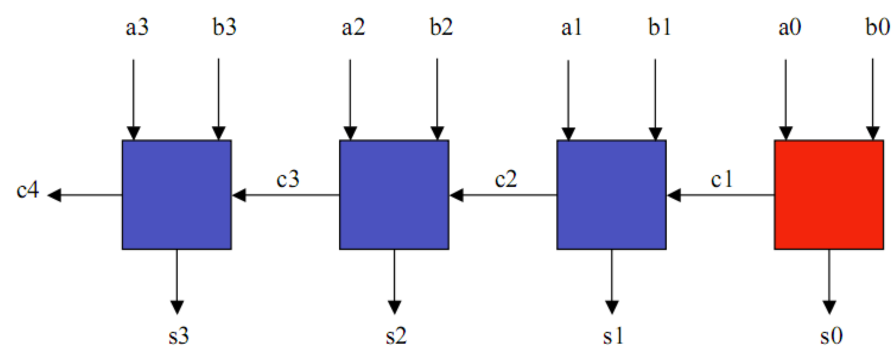
$$c_0 = a_0 . b_0$$

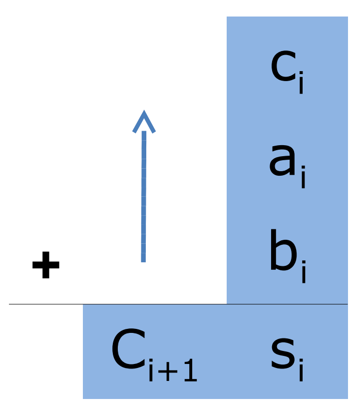
Adição Binária

Projetando as demais colunas:

Somador-Completo (Full-Adder)

	0	1	1	0	1	1	0	0	
		0	1	1	0	1	1	0	1
+		0	1	1	0	0	1	1	0
		1	1	0	1	0	0	1	1





adição de 3 bits

resultado em 2 bits

Circuitos Aritméticos

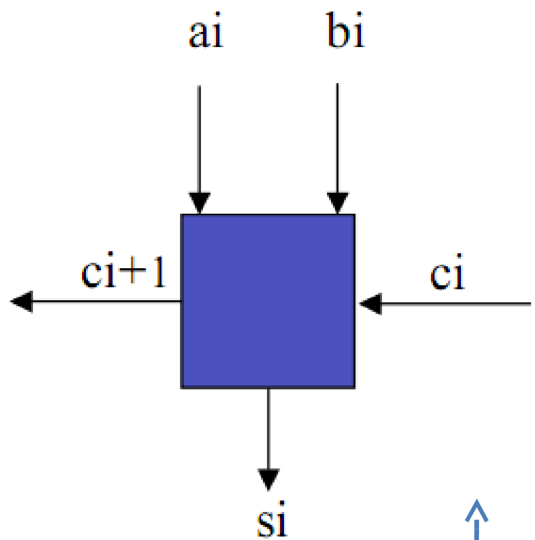
Adição Binária

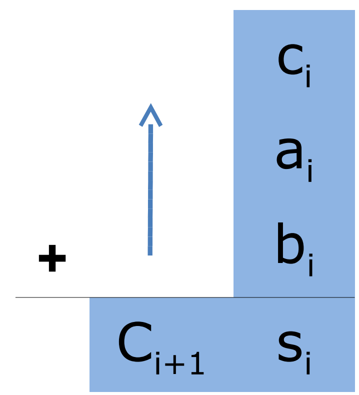
Projetando as demais colunas:

Somador-Completo (Full-Adder)

entradas | saídas

a_i	b_i	c_i	C_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1





adição de 3 bits

resultado em 2 bits

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Projetando as demais colunas:

Somador-Completo (Full-Adder)

entradas | saídas

a_i	b_i	c_i	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para c_{i+1}

c_{i+1}	$\overline{b_i}\,\overline{c_i}$	$\overline{b_i}\,c_i$	$b_i\,c_i$	$b_i\,\overline{c_i}$
$\overline{a_i}$	0	0	1	0
a_i	0	1	1	1

$$c_{i+1} = a_i . b_i + a_i . c_i + b_i . c_i$$

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Projetando as demais colunas:

Somador-Completo (Full-Adder)

entradas			saídas	
a_i	b_i	c_i	C_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para s_i

s_i	$\overline{b_i}$	$\overline{b_i}$	b_i	b_i
$\overline{a_i}$	0	1	0	1
a_i	1	0	1	0
	$\overline{c_i}$	c_i	c_i	$\overline{c_i}$

Não é possível simplificar, logo:

$$s_i = \overline{a_i}.\overline{b_i}.c_i + \overline{a_i}.b_i.\overline{c_i} + a_i.\overline{b_i}.\overline{c_i} + a_i.b_i.c_i$$

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Projetando as demais colunas:

Somador-Completo (Full-Adder)

entradas **saídas**

a_i	b_i	c_i	C_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para s_i

	$\overline{b_i}$		b_i	
$\overline{a_i}$				
a_i				
	$\overline{c_i}$	c_i		$\overline{c_i}$

Não é possível simplificar, logo:

$$s_i = \overline{a_i}.\overline{b_i}.c_i + \overline{a_i}.b_i.\overline{c_i} + a_i.\overline{b_i}.\overline{c_i} + a_i.b_i.c_i$$

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

manipulando através da álgebra de boole:

$$s_i = \overline{a}_i . \overline{b}_i . c_i + \overline{a}_i . b_i . \overline{c}_i + a_i . \overline{b}_i . \overline{c}_i + a_i . b_i . c_i$$

$$s_i = \overline{a}_i . \left(\overline{b}_i . c_i + b_i . \overline{c}_i \right) + a_i . \left(\overline{b}_i . \overline{c}_i + b_i . c_i \right)$$

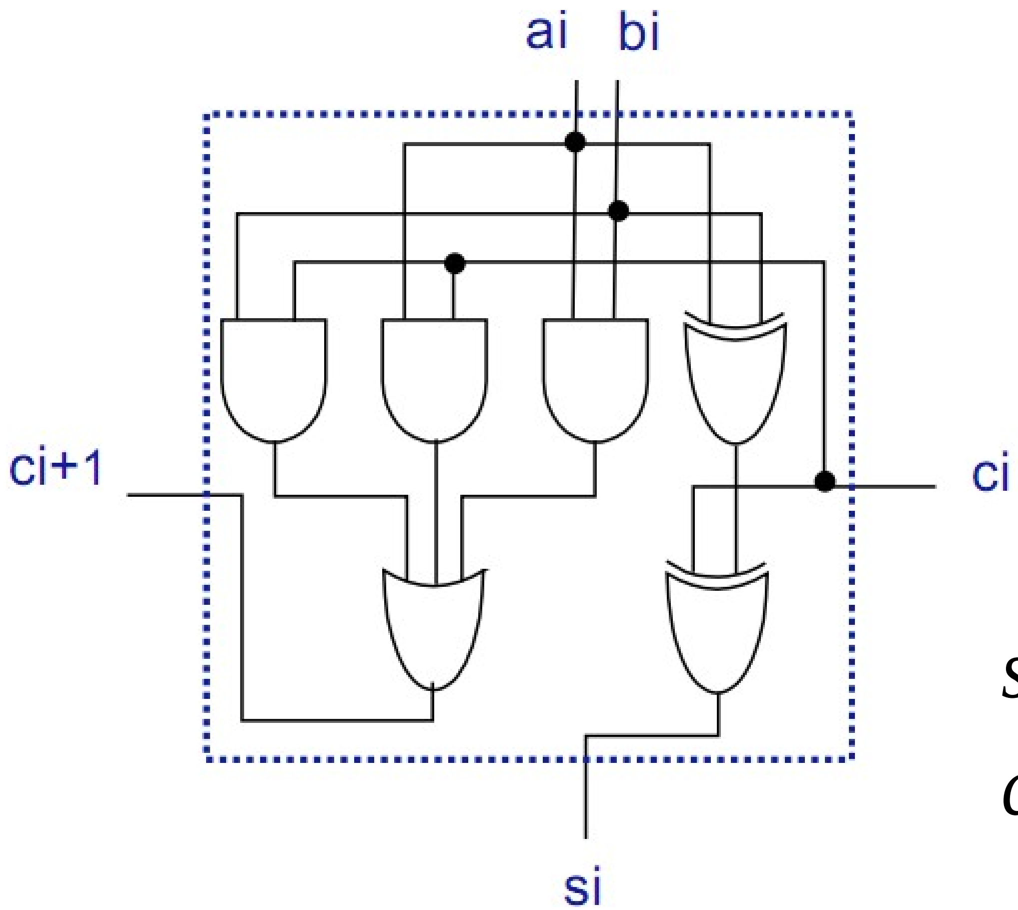
$$s_i = \overline{a}_i . \left(b_i \oplus c_i \right) + a_i . \left(\overline{b_i \oplus c_i} \right)$$

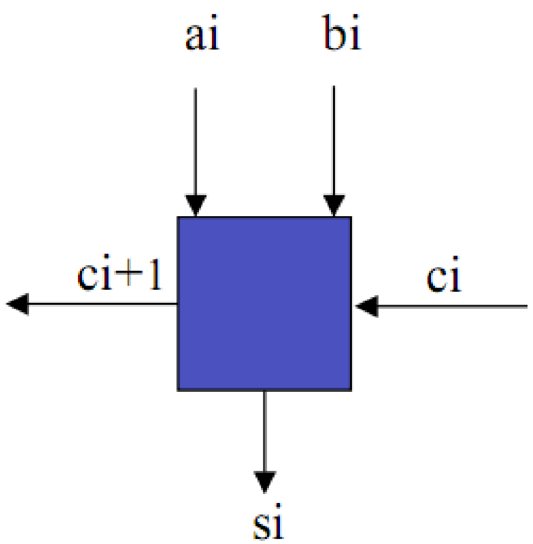
$$s_i = a_i \oplus \left(b_i \oplus c_i \right)$$

a	b	xor	$\overline{\text{xor}}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Adição Binária

Somador-Completo (Full-Adder)





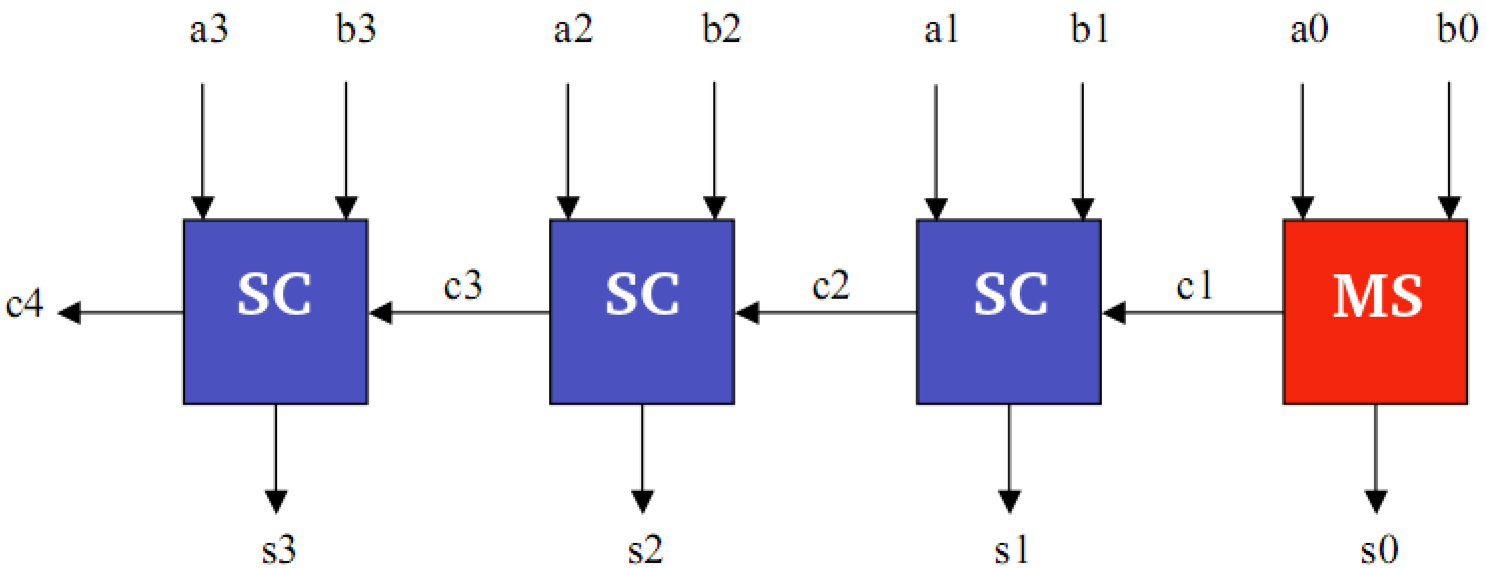
$$s_i = a_i \oplus (b_i \oplus c_i)$$

$$c_{i+1} = a_i . b_i + a_i . c_i + b_i . c_i$$

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Considerando dois números (A e B) de 4 bits cada

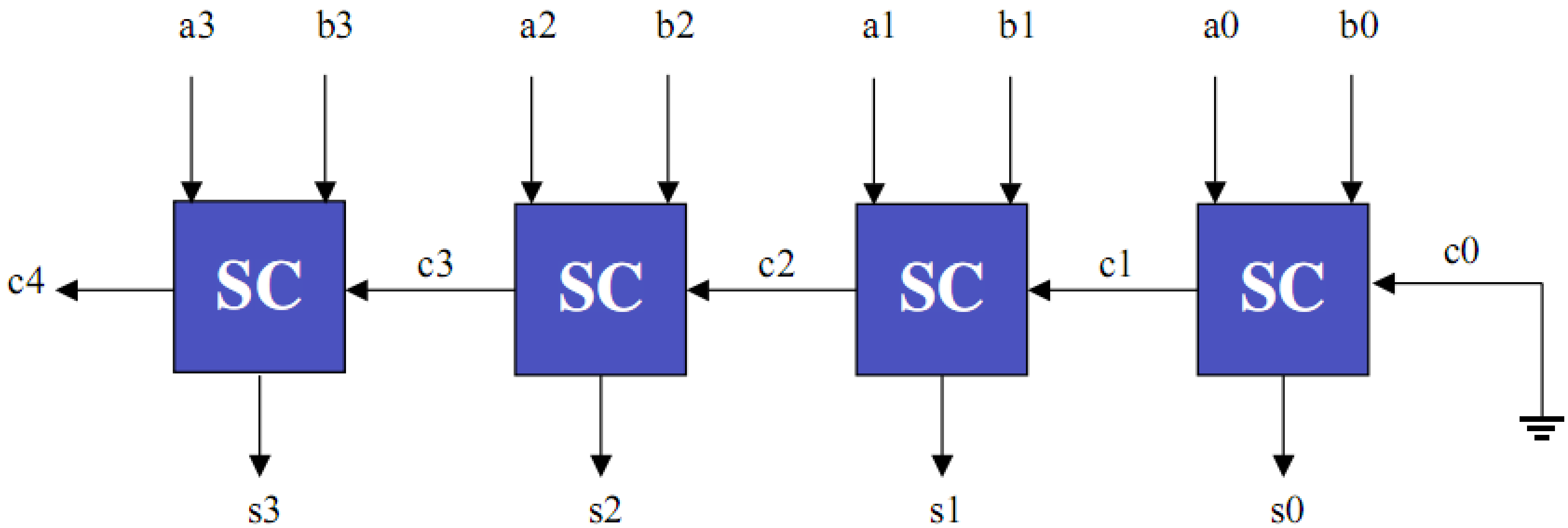


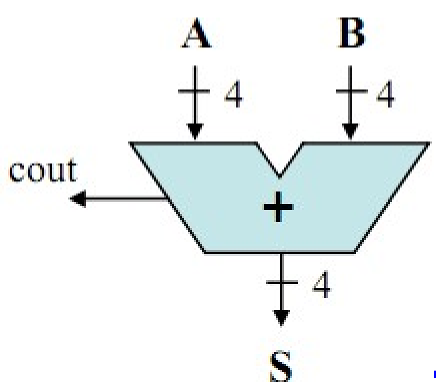
Chamado somador *ripple-carry*

Circuitos Aritméticos

Adição Binária

Versão utilizando somente somador-completo





usto é ligeiramente maior.

Subtração Binária

Subtração de números sem sinal

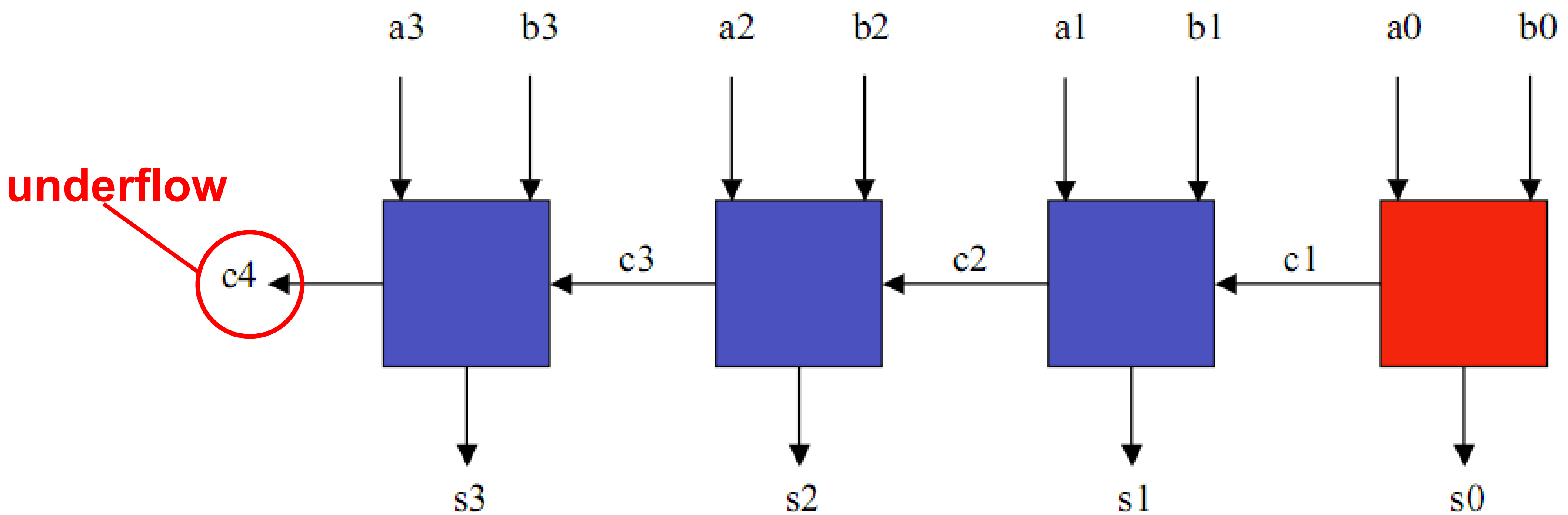
	A
-	**B**
	S

	0	0	2	2 1	2		**(*borrow*)**
		1	1	0	0	(12)	
-		0	1	0	1	(5)	
		0	1	1	1	(7)	**resultado**

Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

Esquema para subtração paralela



Observe:

- Existe um elemento para cada coluna da soma
- O sinal de *underflow* será o *borrow* mais significativo

Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

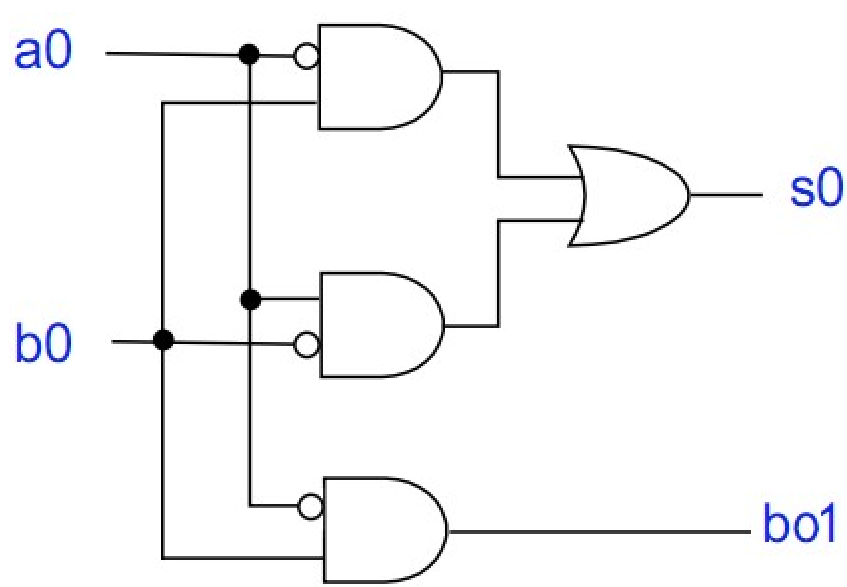
Projetando o circuito para primeira coluna:

Meio-Substrator (half-sub)

$$s_0 = \overline{a_0} . b_0 + a_0 . \overline{b_0}$$

$$c_1 = \overline{a_0} . b_0$$

entradas		saídas	
a_0	b_0	bo_1	s_0
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0



Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

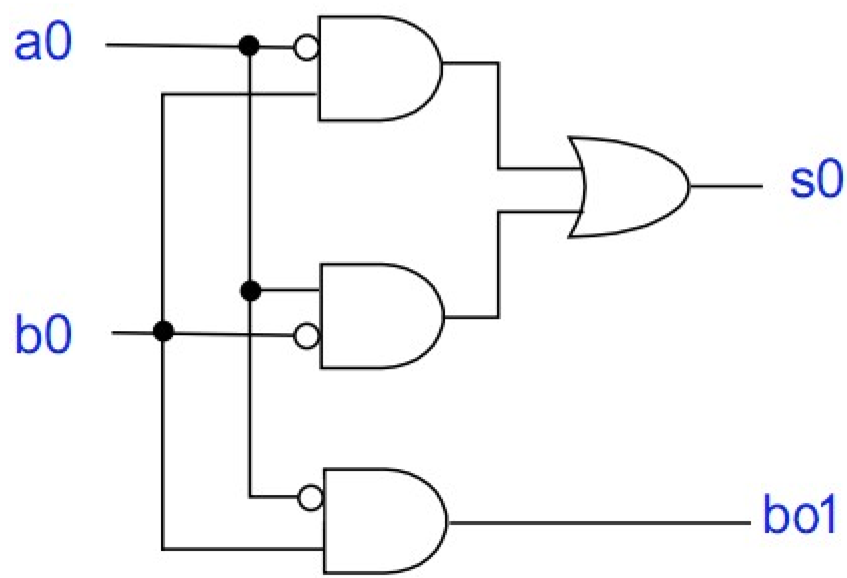
Projetando o circuito para primeira coluna:

Meio-Substrator (half-sub)

$$s_0 = \overline{a_0} . b_0 + a_0 . \overline{b_0}$$

$$c_1 = \overline{a_0} . b_0$$

entradas		saídas	
a_0	b_0	bo_1	s_0
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		



Circuitos Aritméticos

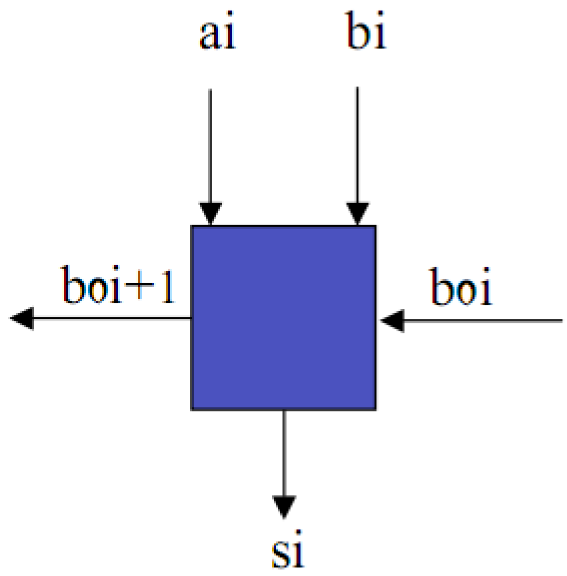
Subtração Binária

Projetando as demais colunas:

Subtrator-Completo (full-sub)

entradas **saídas**

a_i	b_i	c_i	bo_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



		bo_i
		a_i
-		b_i
	bo_{i+1}	s_i

subtração de 3 bits

resultado em 2 bits

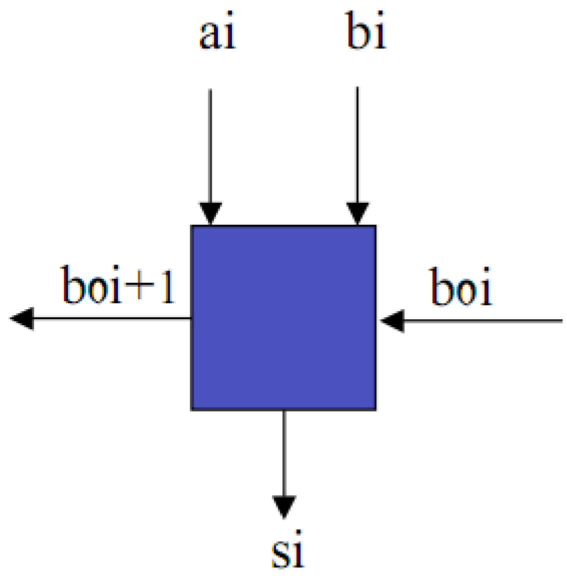
▶ Subtração Binária

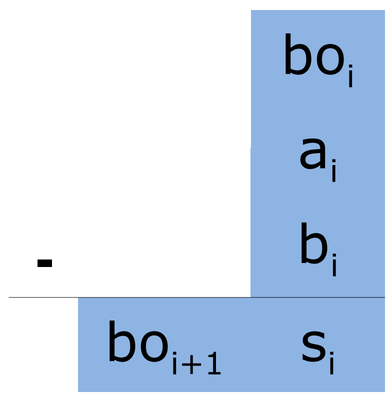
Projetando as demais colunas:

Subtrator-Completo (full-sub)

entradas saídas

a_i	b_i	c_i	bo_{i+1}	s_i
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		





subtração de 3 bits

resultado em 2 bits

Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

Subtrator-Completo (full-sub)

entradas			saídas	
a_i	b_i	c_i	bo_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para bo_{i+1}

bo_{i+1}	$\overline{b_i}$	$\overline{b_i}$	b_i	b_i
$\overline{a_i}$	0	1	1	1
a_i	0	0	1	0
	$\overline{c_i}$	c_i	c_i	$\overline{c_i}$

$$c_{i+1} = \overline{a}_i . b_i + \overline{a}_i . c_i + b_i . c_i$$

Subtração Binária

Projetando as demais colunas:

Subtrator-Completo (full-sub)

entradas **saídas**

a_i	b_i	c_i	C_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh para s_i

s_i	$\overline{b_i}\,\overline{c_i}$	$\overline{b_i}\,c_i$	$b_i\,c_i$	$b_i\,\overline{c_i}$
$\overline{a_i}$	0	1	0	1
a_i	1	0	1	0

Não é possível simplificar, logo:

$$s_i=\overline{a_i}.\overline{b_i}.c_i+\overline{a_i}.b_i.\overline{c_i}+a_i.\overline{b_i}.\overline{c_i}+a_i.b_i.c_i$$

Subtração Binária

manipulando através da álgebra de boole:

$$s_i = \overline{a}_i . \overline{b}_i . c_i + \overline{a}_i . b_i . \overline{c}_i + a_i . \overline{b}_i . \overline{c}_i + a_i . b_i . c_i$$

$$s_i = \overline{a}_i . \left(\overline{b}_i . c_i + b_i . \overline{c}_i \right) + a_i . \left(\overline{b}_i . \overline{c}_i + b_i . c_i \right)$$

$$s_i = \overline{a}_i . \left(b_i \oplus c_i \right) + a_i . \left(\overline{b_i \oplus c_i} \right)$$

$$s_i = a_i \oplus \left(b_i \oplus c_i \right)$$

a	b	xor	$\overline{\text{xor}}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Adição de números inteiros

E se quisermos realizar operações sobre números com sinal???

- Precisaremos considerar uma representação que sirva tanto para binários positivos quanto binários negativos
- A representação mais usada, neste caso, é complemento de 2
- Porque mesmo?!?!?!?

Circuitos Aritméticos

Adição de números inteiros

Representação em complemento de 2

Sinal	Regra de formação	exemplo
positivo	igual a sinal-maginitude	+13 = 00001101
negativo	1. toma-se a representação em sinal e magnitude 2. faz-se o complemento de 1 (inverte o número bit a bit) 3. soma-se 1	+13 = 00001101 11110010 + 1 -13 = 11110011

-128	64	32	16	8	4	2	1

-128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Circuitos Aritméticos

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Considere valor binários de 4 bits, portanto, com faixa de representação de [-8:+7]

Exemplo 1: números positivos com soma ≤ 7

	0	0	0	0		**Transporte (*carry*)**
		0	1	0	0	(+4)
+		0	0	1	0	(+2)
		0	1	1	0	(+6) **Resultado correto**

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Exemplo 2: nros negativos com soma ≥ -8

	1	1	0	0		Transporte (*carry*)
		1	1	0	0	(-4)
+		1	1	1	0	(-2)
		1	0	1	0	(-6) Resultado correto

Apesar deste último carry valer 1, não houve "overflow"

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Exemplo 3: um número positivo e outro negativo com resultado positivo

	1	1	0	0		**Transporte (*carry*)**
		0	1	0	0	(+4)
+		1	1	1	0	(-2)
		0	0	1	0	(+2) **Resultado correto**

Novamente...

Circuitos Aritméticos

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Exemplo 4: um número positivo e outro negativo com resultado negativo

	0	0	1	0		**Transporte (*carry*)**
		0	0	1	1 (+3)	
+		1	0	1	0 (-6)	
		1	1	0	1 (-3)	**Resultado correto**

Circuitos Aritméticos

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Exemplo 5: um número positivo e outro negativo iguais em módulo

	1	1	1	1		**Transporte (*carry*)**
		0	1	0	1 (+5)	
+		1	0	1	1 (-5)	
		0	0	0	0 (-0)	**Resultado correto**

Circuitos Aritméticos

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Exemplo 6: dois números positivos

	0	1	0	0		**Transporte (*carry*)**
		0	1	0	1	(+5)
+		0	1	0	0	(+4)
		1	0	0	1	(+9)

Resultado Errado

Em complemento de 2 o resultado foi -7

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

Exemplo 7: dois números negativos

	1	0	0	0		**Transporte (*carry*)**
		1	1	0	0	(-4)
+		1	0	1	1	(-5)
		0	1	1	1	(-9) **Resultado Errado**

Em complemento de 2 o resultado foi 7

Circuitos Aritméticos

	0	1	0	0	( )
+	0	0	1	0	( )
					( )

	0	0	1	1	( )
+	1	0	1	0	( )
					( )

	0	1	0	1	( )
+	0	1	0	0	( )
					( )

	1	1	0	0	( )
+	1	1	1	0	( )
					( )

	0	1	0	1	( )
+	1	0	1	1	( )
					( )

	1	1	0	0	( )
+	1	0	1	1	( )
					( )

Circuitos Aritméticos

Resultados Corretos

	0	0	0	0	
		0	1	0	0 (+4)
+		0	0	1	0 (+2)
		0	1	1	0 (+6)

	1	1	0	0	
		1	1	0	0 (-4)
+		1	1	1	0 (-2)
		1	0	1	0 (-6)

	0	0	1	0	
		0	0	1	1 (+3)
+		1	0	1	0 (-6)
		1	1	0	1 (-3)

	1	1	1	1	
		0	1	0	1 (+5)
+		1	0	1	1 (-5)
		0	0	0	0 (-0)

Resultados Errados

	0	1	0	0	
		0	1	0	1 (+5)
+		0	1	0	0 (+4)
		1	0	0	1 (+9)

	1	0	0	0	
		1	1	0	0 (-4)
+		1	0	1	1 (-5)
		0	1	1	1 (-9)

Adição de números inteiros

Resultados Corretos

	0	0	0	0	
		0	1	0	0 (+4)
+		0	0	1	0 (+2)
		0	1	1	0 (+6)

	1	1	0	0	
		1	1	0	0 (-4)
+		1	1	1	0 (-2)
		1	0	1	0 (-6)

	0	0	1	0	
		0	0	1	1 (+3)
+		1	0	1	0 (-6)
		1	1	0	1 (-3)

	1	1	1	1	
		0	1	0	1 (+5)
+		1	0	1	1 (-5)
		0	0	0	0 (-0)

Resultados Errados

	0	1	0	0	
		0	1	0	1 (+5)
+		0	1	0	0 (+4)
		1	0	0	1 (+9)

	1	0	0	0	
		1	1	0	0 (-4)
+		1	0	1	1 (-5)
		0	1	1	1 (-9)

Circuitos Aritméticos

Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2

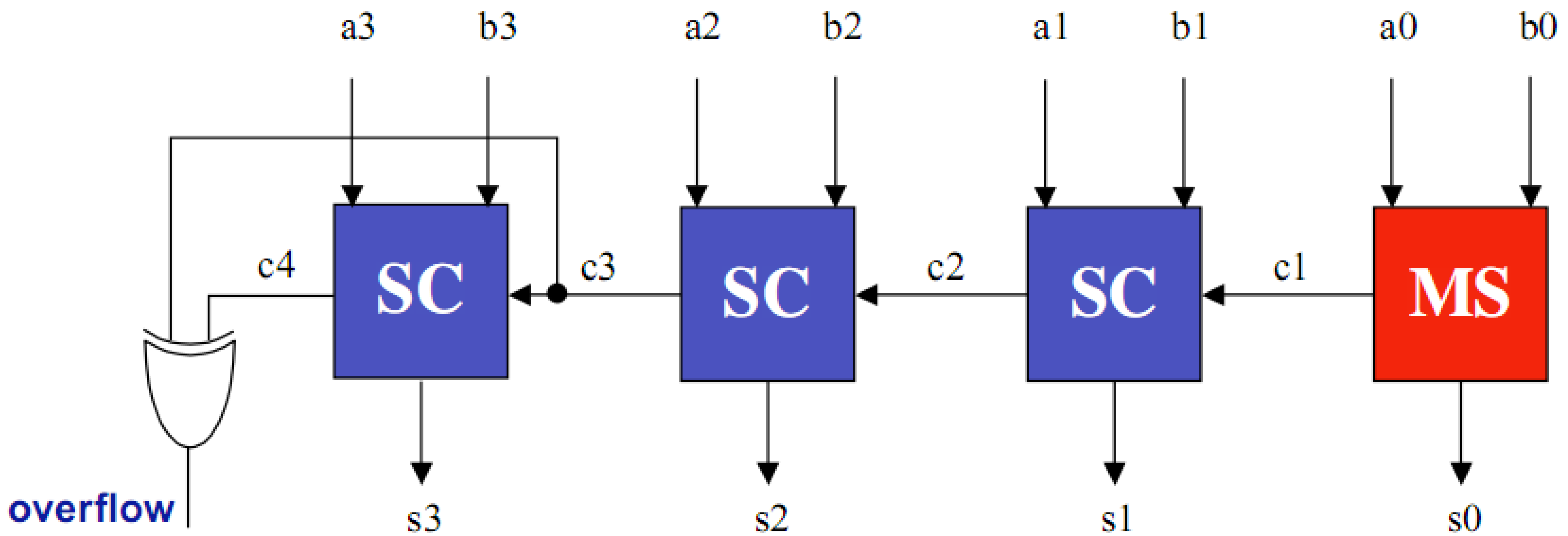
Conclusões:

- Números binários em complemento de 2 podem ser adicionados como se fossem número binários sem sinal
- Neste caso, a detecção de overflow se dá comparando-se os dois últimos sinais de carry

Circuitos Aritméticos

▶ Adição de números inteiros

Adição de números em complemento de 2



esquemático de blocos

Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

Princípio Básico

$$A - B = A + (-B)$$

Onde –B é o número B com o sinal trocado

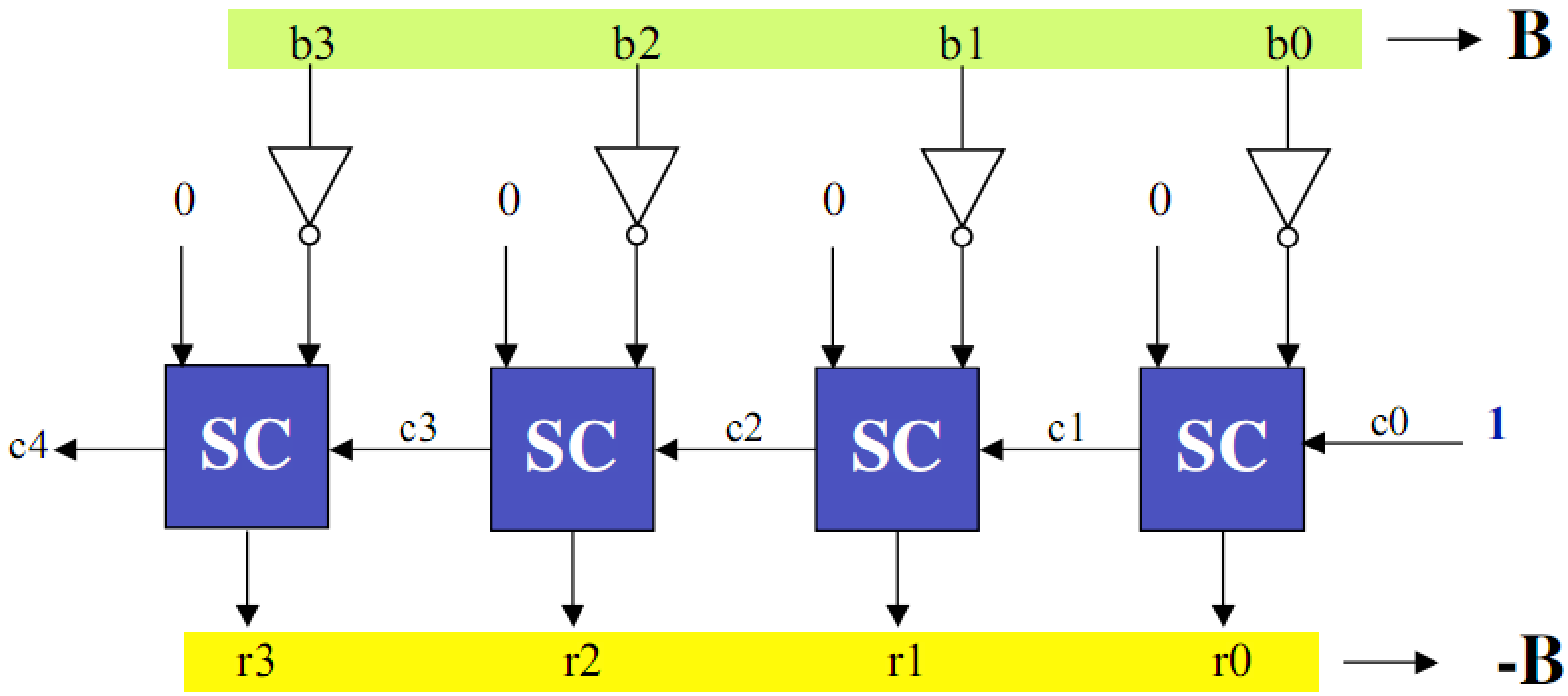
Em complemento de 2:

a) faz o complemento do número

b) soma 1 unidade

Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

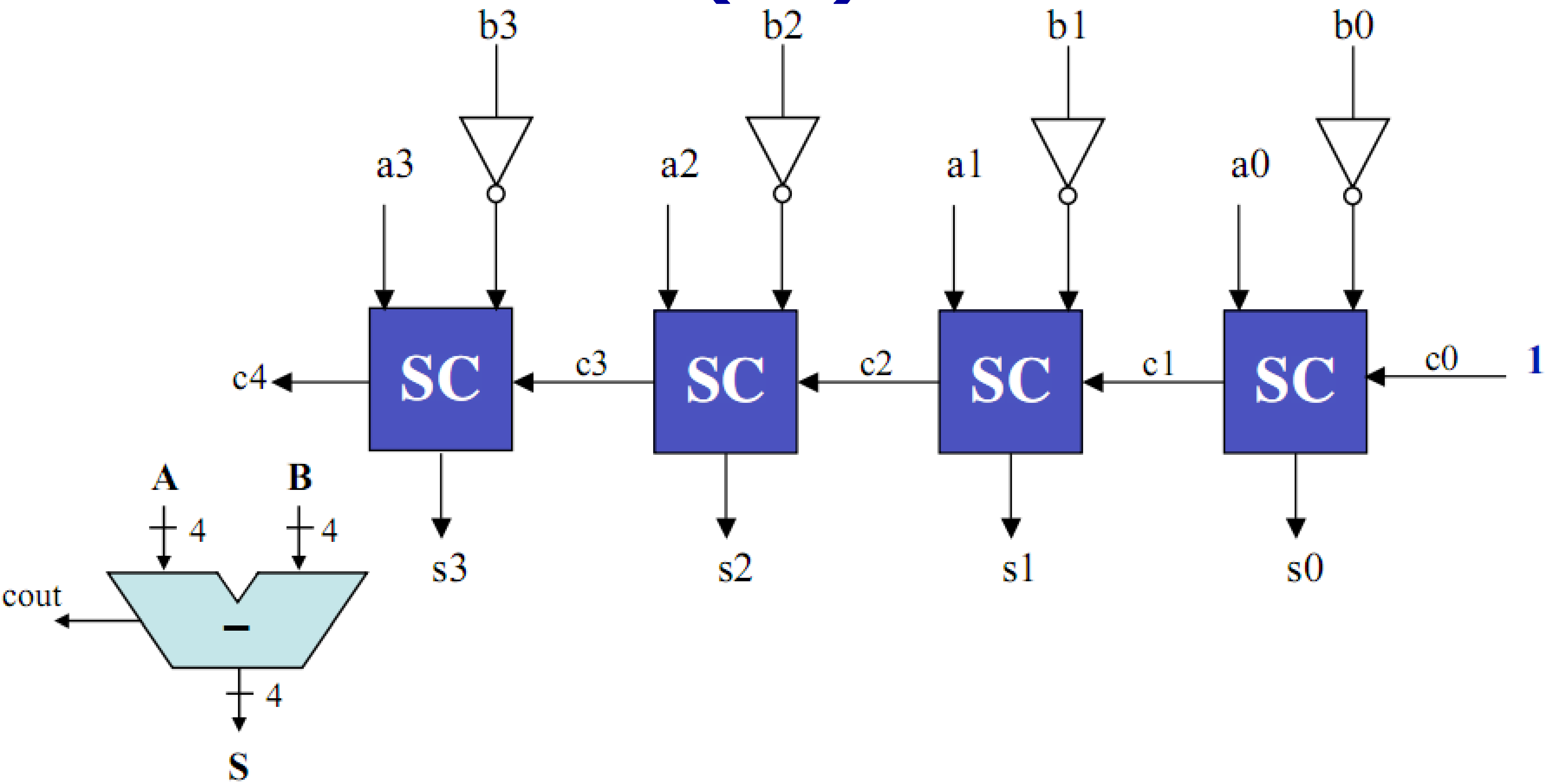


Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

Considerando a operação completa

A – B = A + (-B)



Circuitos Aritméticos

Subtração Binária

Mas com tanta semelhança entre os circuitos de adição e subtração não será possível "programar" as 2 operações com o "mesmo" hardware???

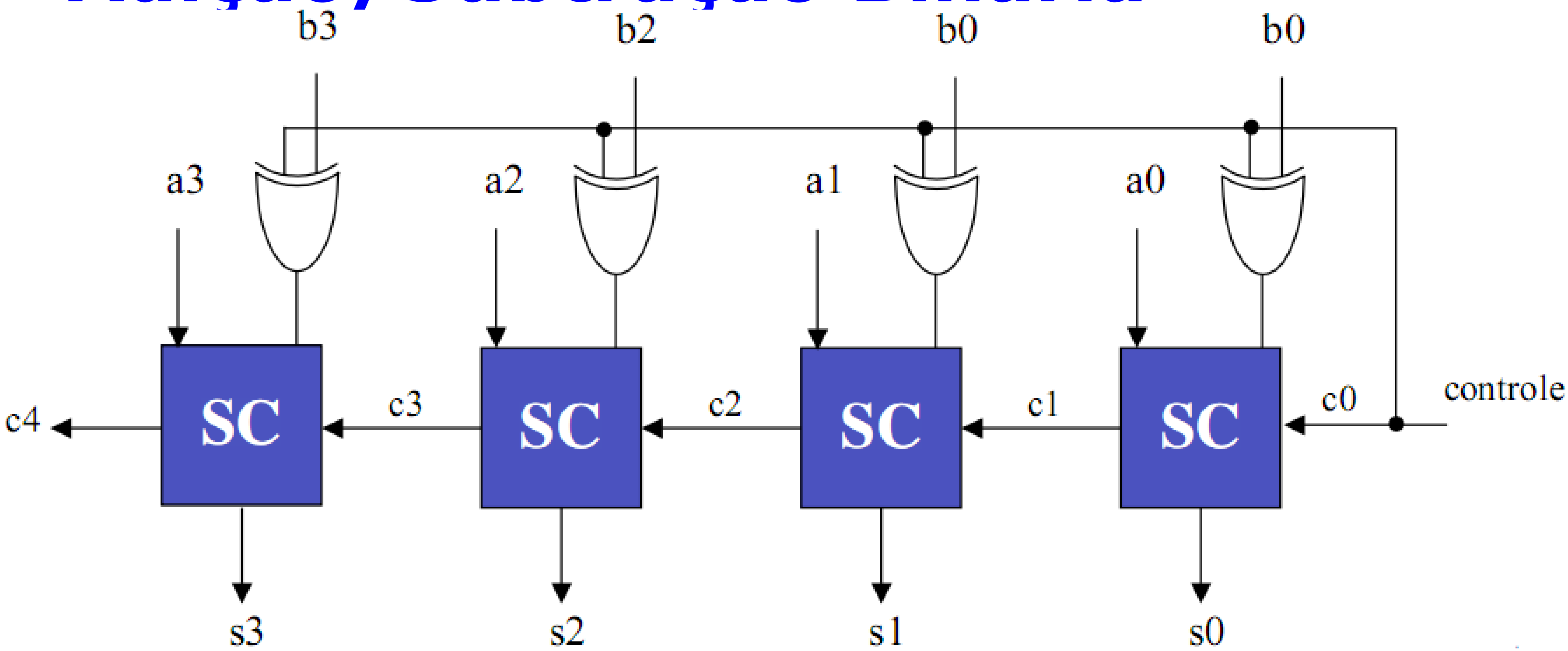
Sim, modificações necessárias:

a) Substituir os inversores por "negadores controlados" (xors);

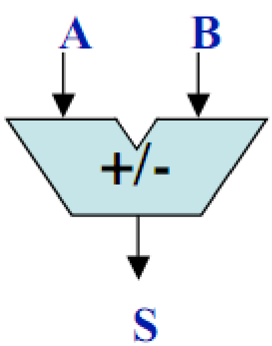
b) Controlar o valor de c0 (0 para adição/1 para subtração)

Circuitos Aritméticos

Adição/Subtração Binária



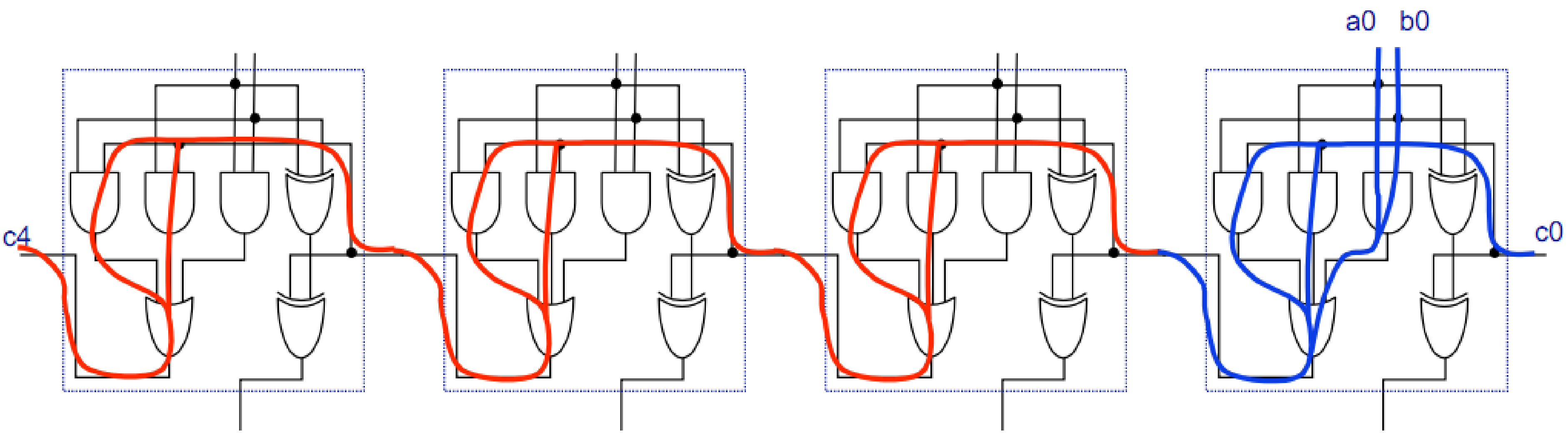
controle	operação
0	**S= A + B**
1	**S= A - B**



Circuitos Aritméticos

Analisando o *carry*

Problema da propagação do *carry*



Sinal c_4 estabiliza somente depois de c_1, c_2 e c_3 estabilizarem:

Caminho de maior atraso de a_0 e b_0 ou c_i até c_{i+1}

Caminho de maior atraso de c_i até c_{i+1}