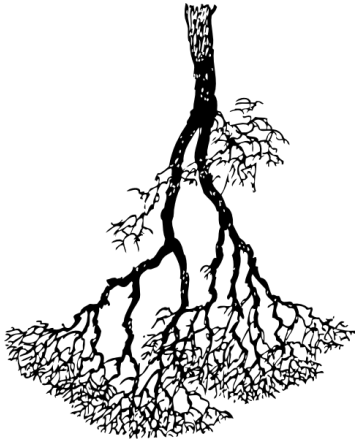
Árvores Binárias de Busca (BST)



Árvores Binária

- As árvores binárias são árvores que os nós possuem no máximo 2 filhos
- Devem possuir os atributos que representam o conteúdo do nó + dois ponteiros para os filhos:

- O campo int value, apenas ilustra um tipo de dado a ser armazenado

Árvores Binária

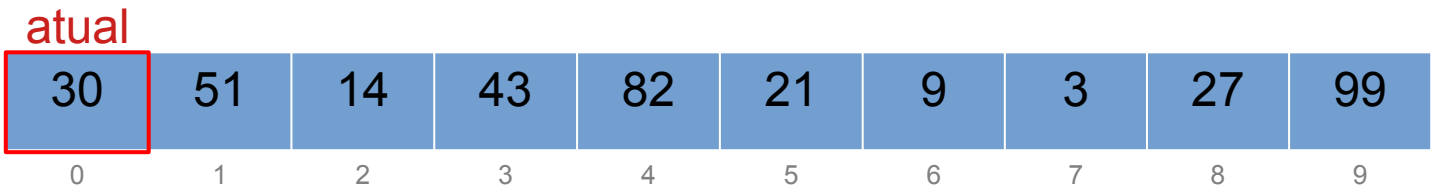
- A inserção deve seguir a forma das listas:
  - Aloca memória
  - Atribui o valor para os campos de armazenamento
  - NULLifica os ponteiros que apontam para esquerda e direita
  - Encontra a melhor posição na árvore para o novo nó

```
newnodo=(Node *) malloc(sizeof(Node));
newnodo->value=value;
newnodo->left=NULL;
newnodo->right=NULL;
```

Árvores de busca

- Uma árvore binária de busca é uma árvore binária que restringe a forma que os nós são inseridos:
  - Binary Search Tree (BST)
- Para todo nó de uma árvore de busca binária:
  - O elemento à esquerda deve ser menor ou igual ao pai
  - O elemento à direita deve ser maior ou igual ao pai
  - A igualdade deve ser escolhida ou para a direita ou para a esquerda

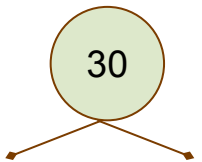
Árvores de busca (Ex)



Árvores de busca (Ex)

atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

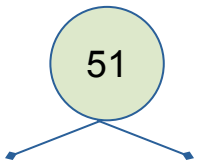


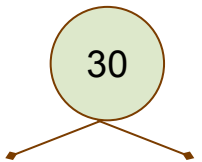
Raiz

Árvores de busca (Ex)

atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



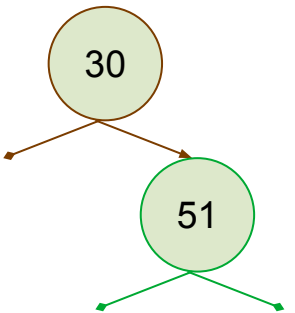


Raiz

Árvores de busca (Ex)

atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

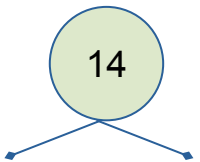


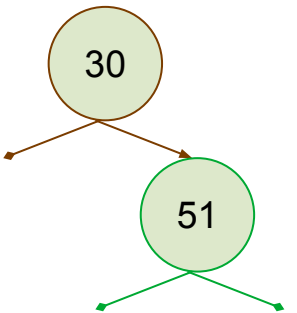
Raiz

Árvores de busca (Ex)

atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



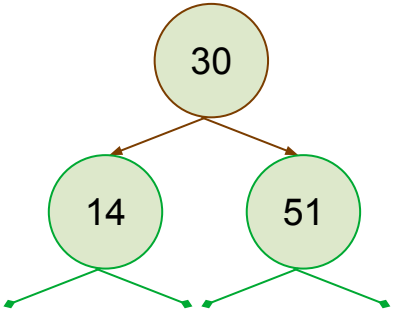


Raiz

Árvores de busca (Ex)

atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

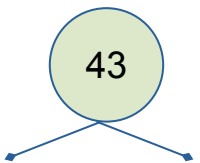


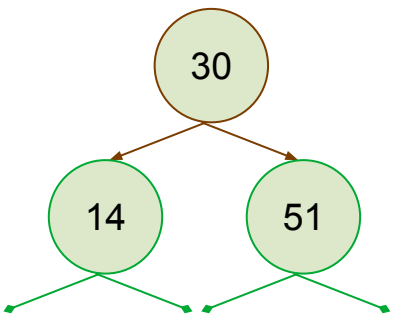
Raiz

Árvores de busca (Ex)

atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



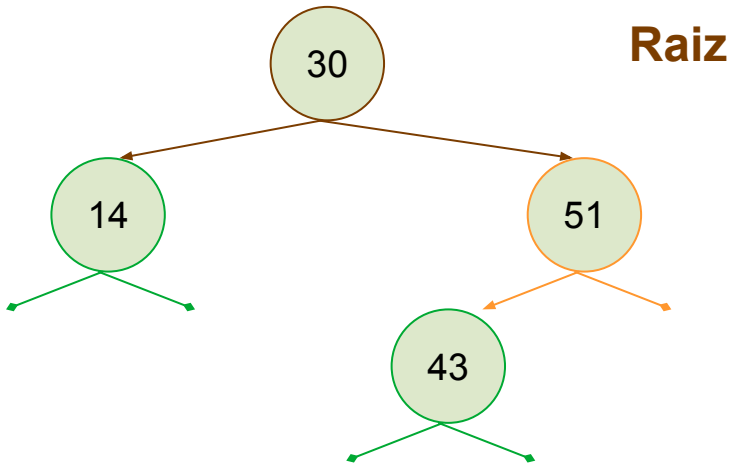


Raiz

Árvores de busca (Ex)

atual

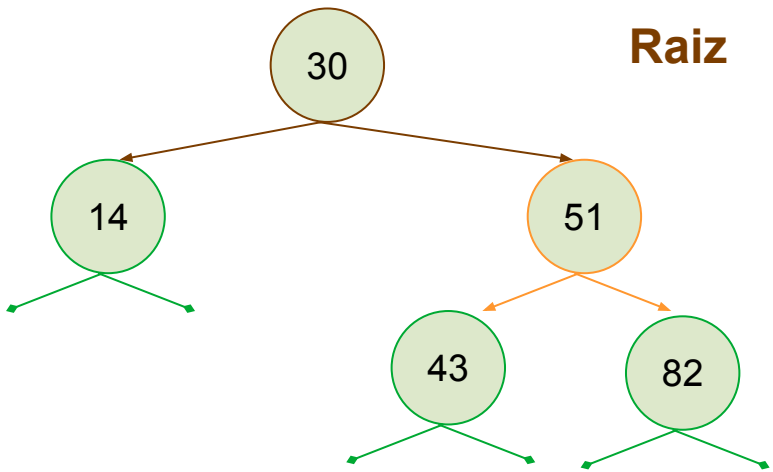
30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Árvores de busca (Ex)

atual

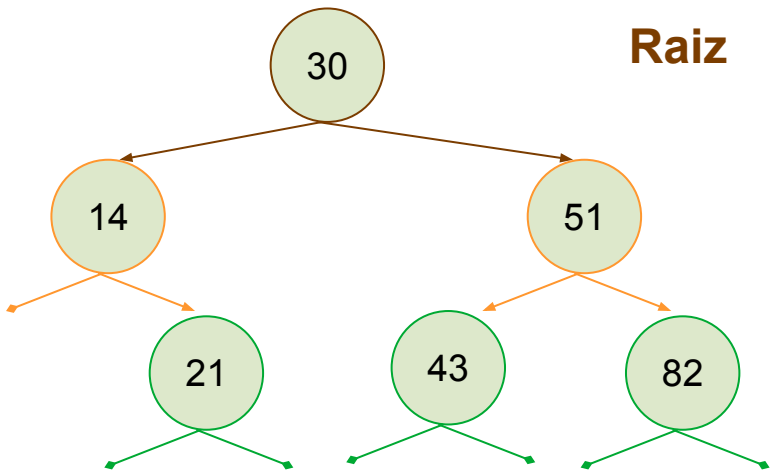
30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



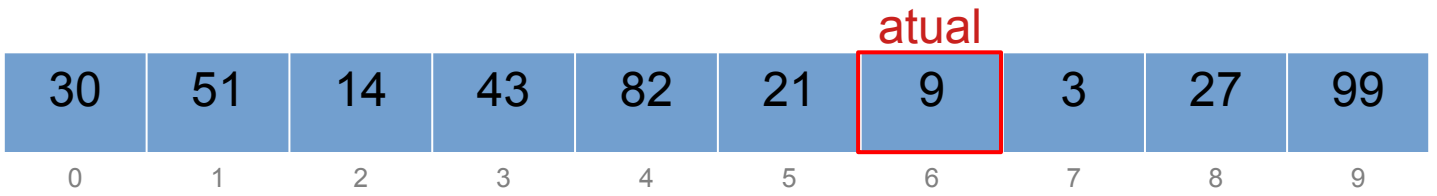
Árvores de busca (Ex)

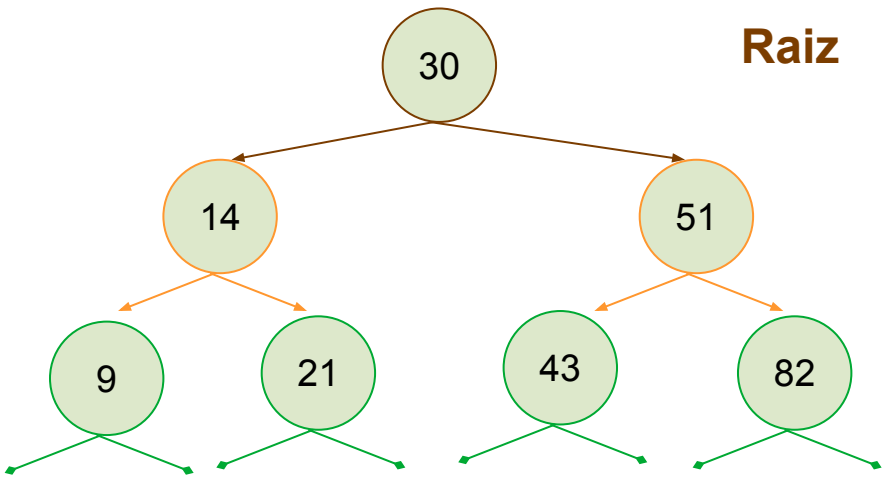
atual

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

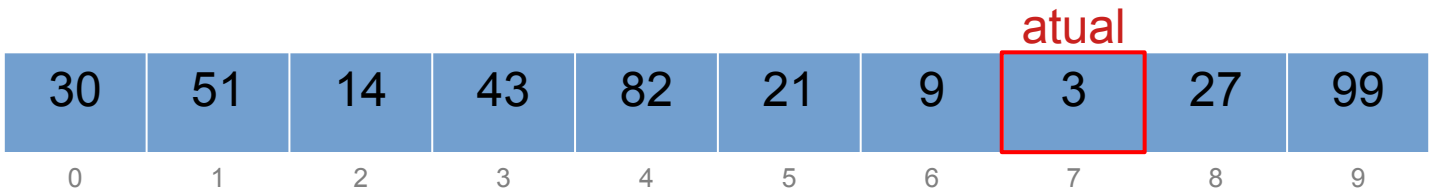


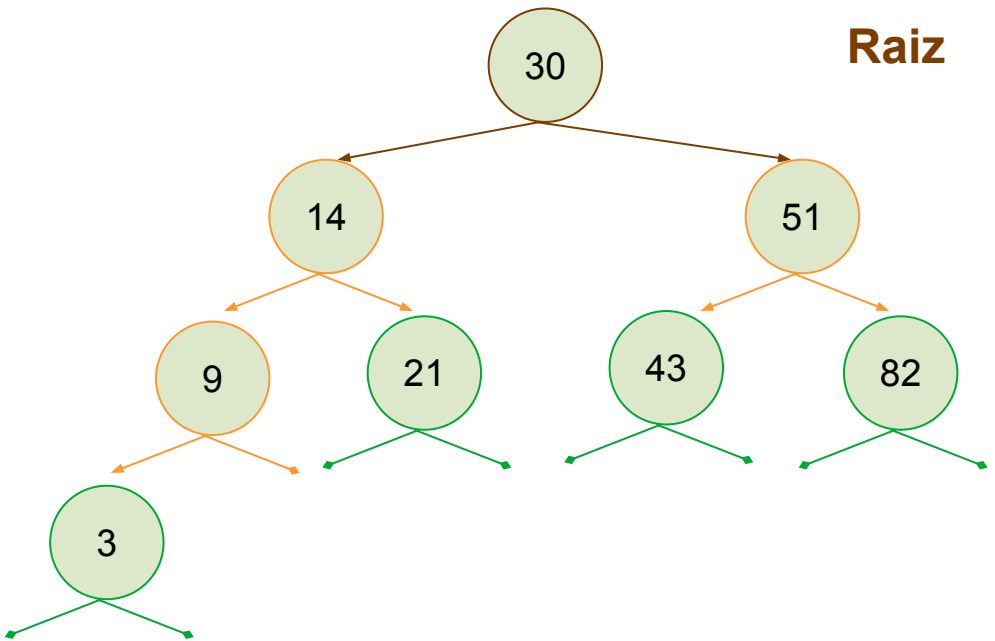
Árvores de busca (Ex)



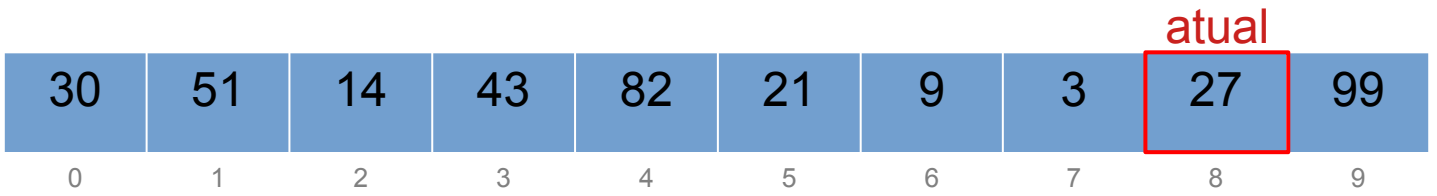


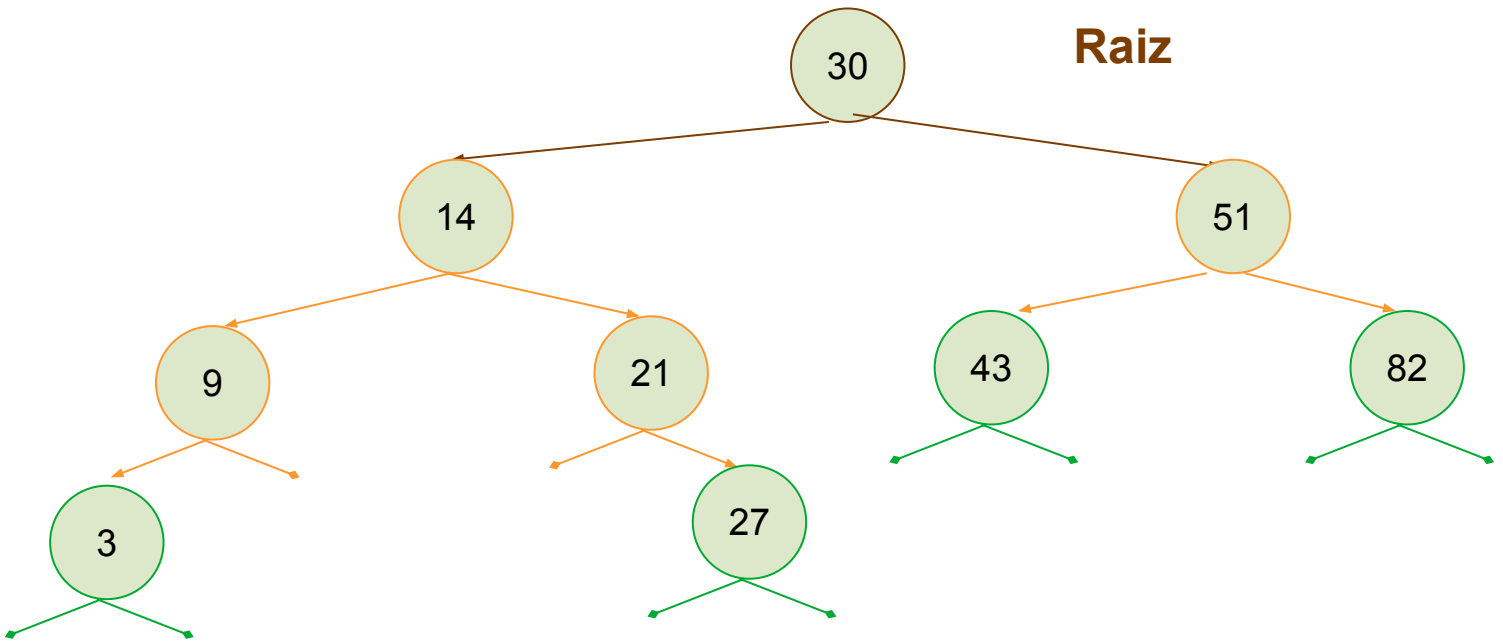
Árvores de busca (Ex)



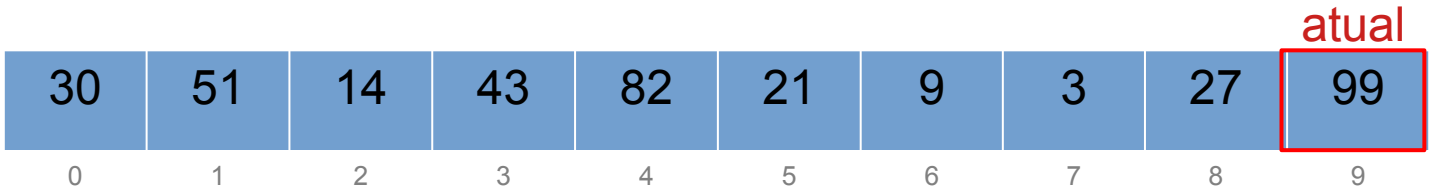


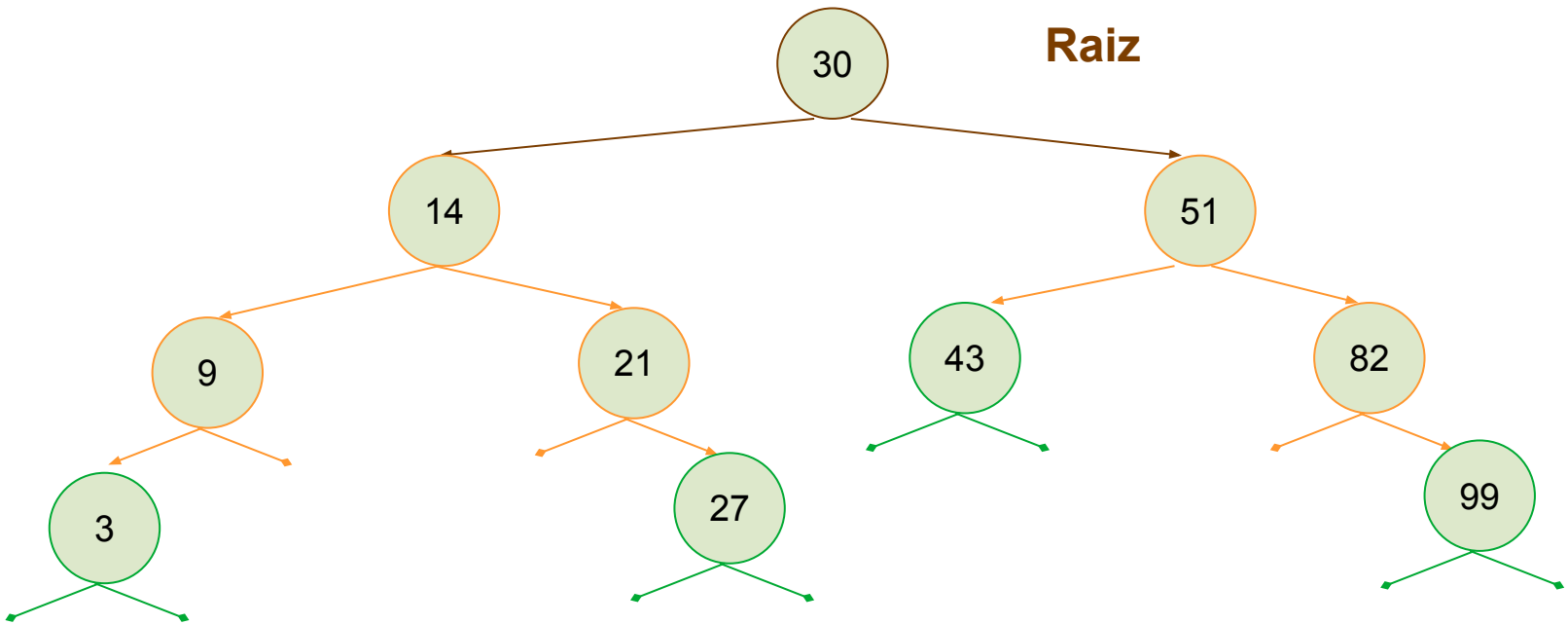
Árvores de busca (Ex)





Árvores de busca (Ex)



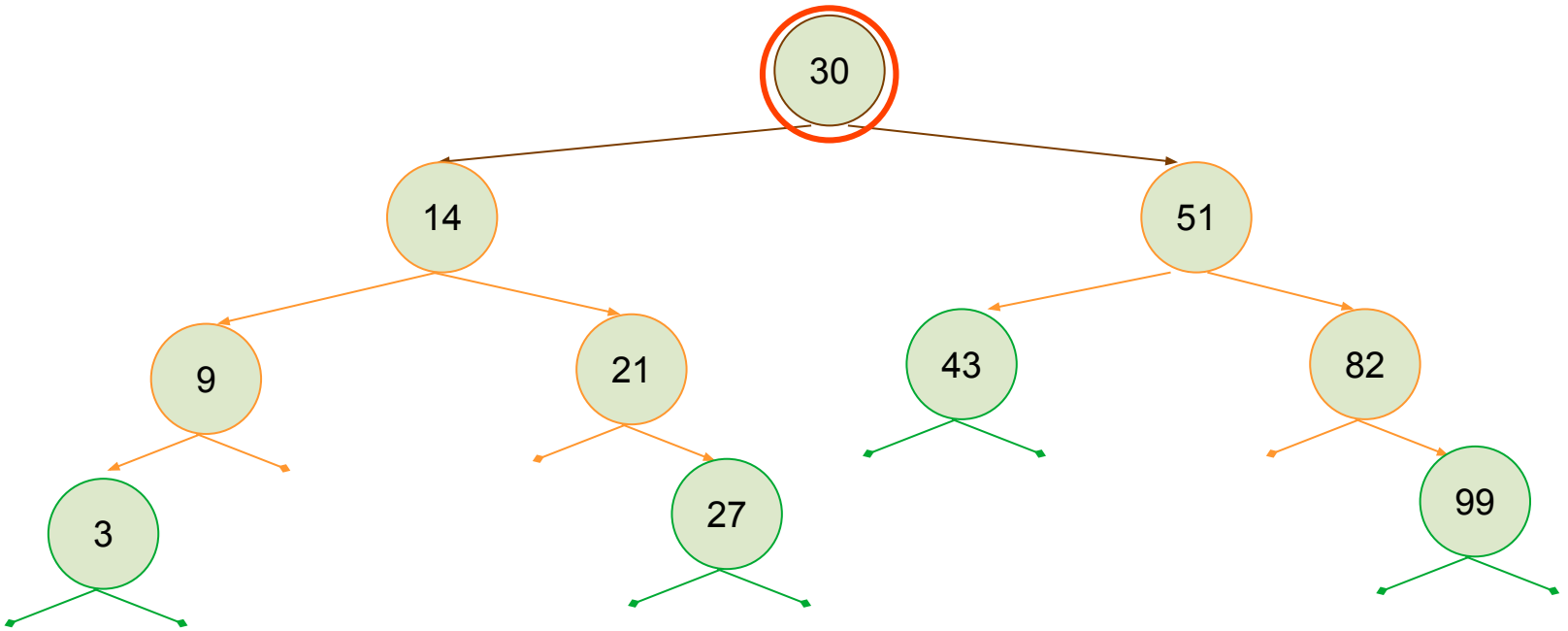


Árvores de busca

```
Algoritmo adicionaNo(Node *raiz, Node *new)
Início
    if (raiz == NULL)
       return new;
    else
       If (raiz→valor >= new→valor)
         raiz→left = adicionaNo(raiz→left, new);
       else
         raiz→right =  adicionaNo(raiz→right, new);
        fim se
    fim se
    return raiz;
fimAlgoritmo
```

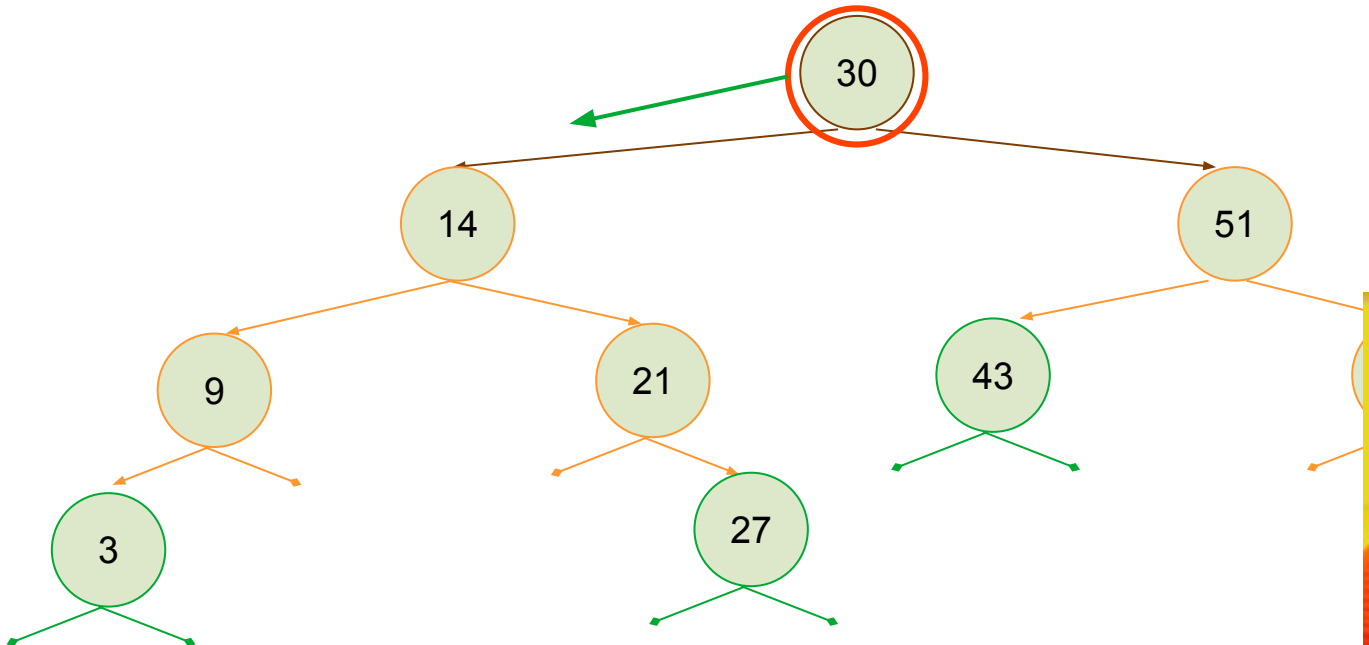
Árvores de busca (Busca)

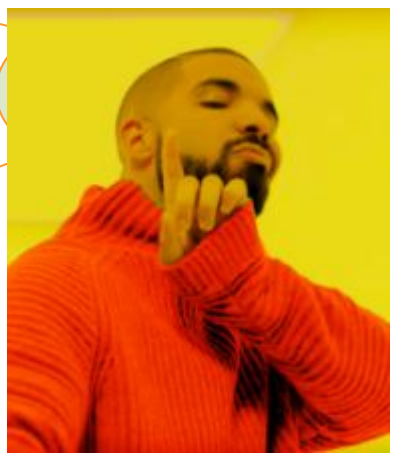
K = 21



Árvores de busca (Busca)

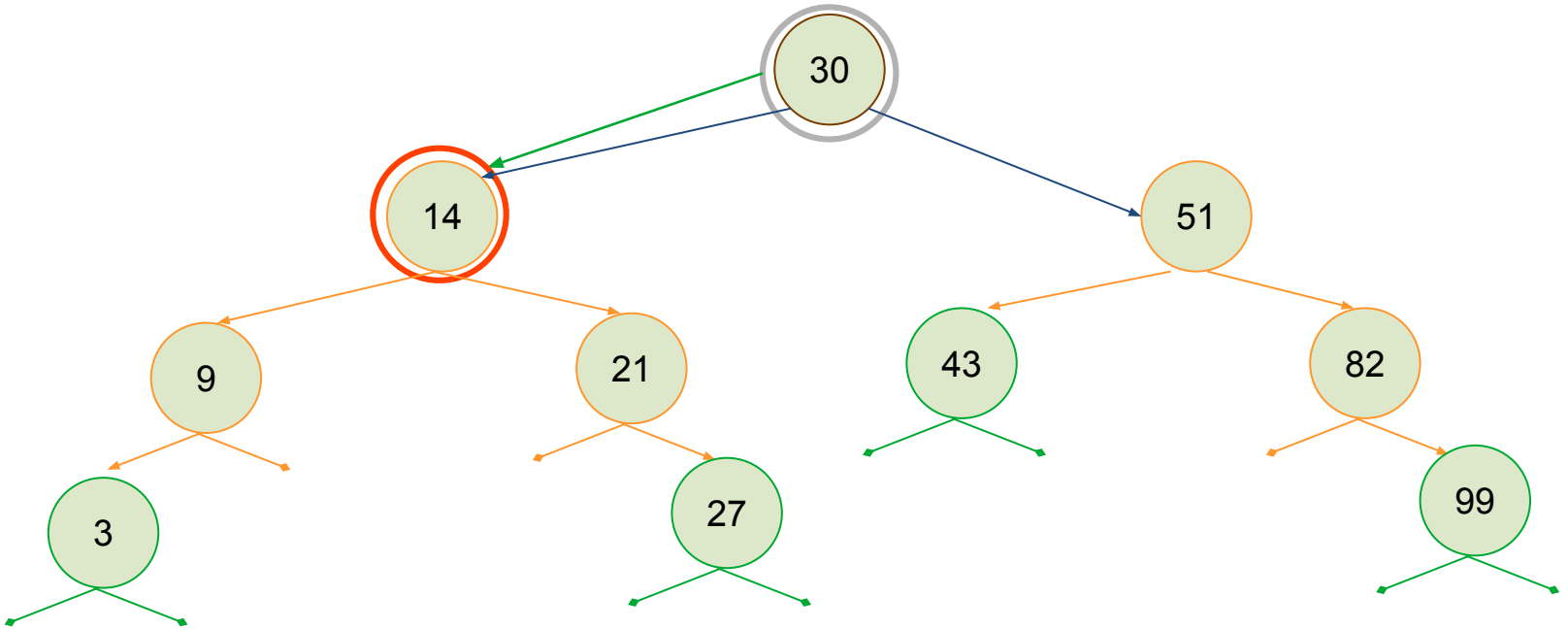
K = 21





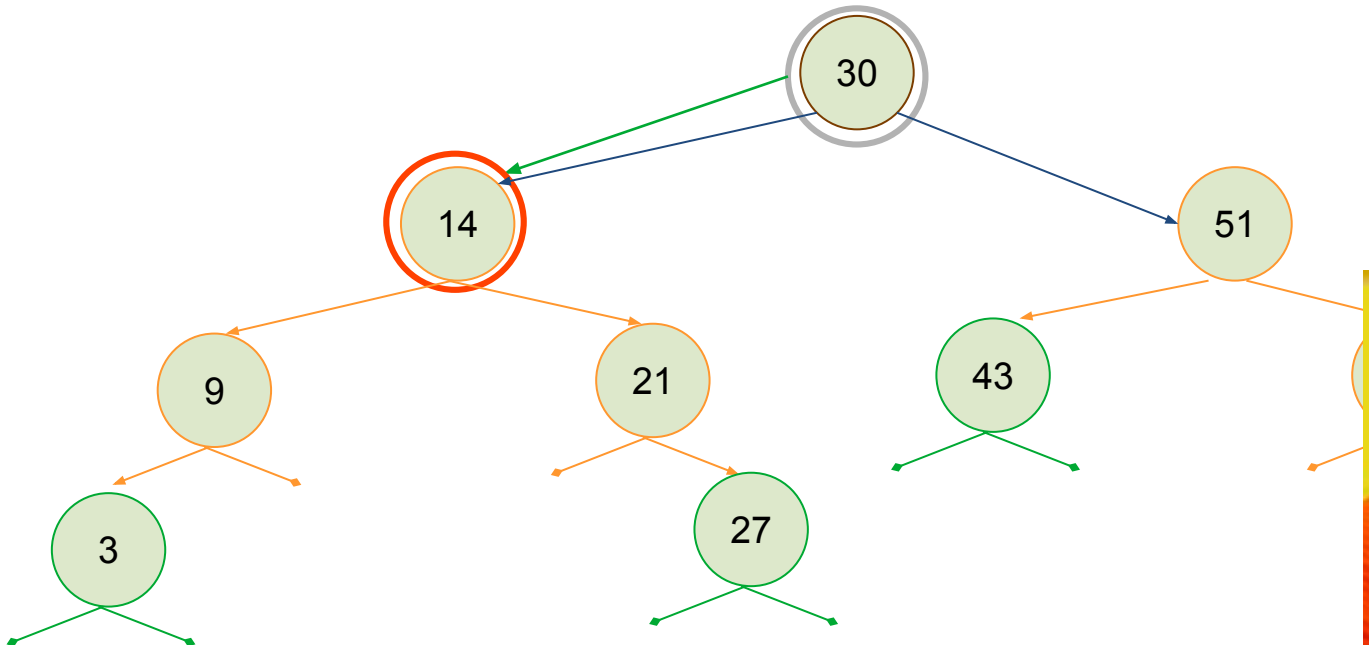
Árvores de busca (Busca)

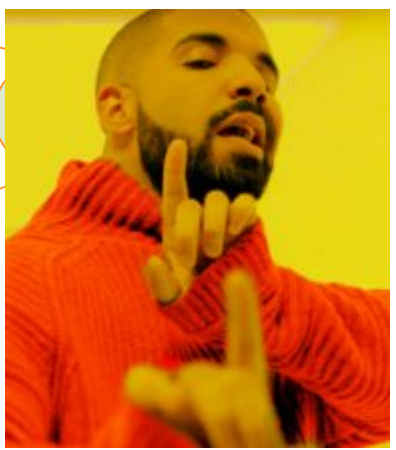
K = 21



Árvores de busca (Busca)

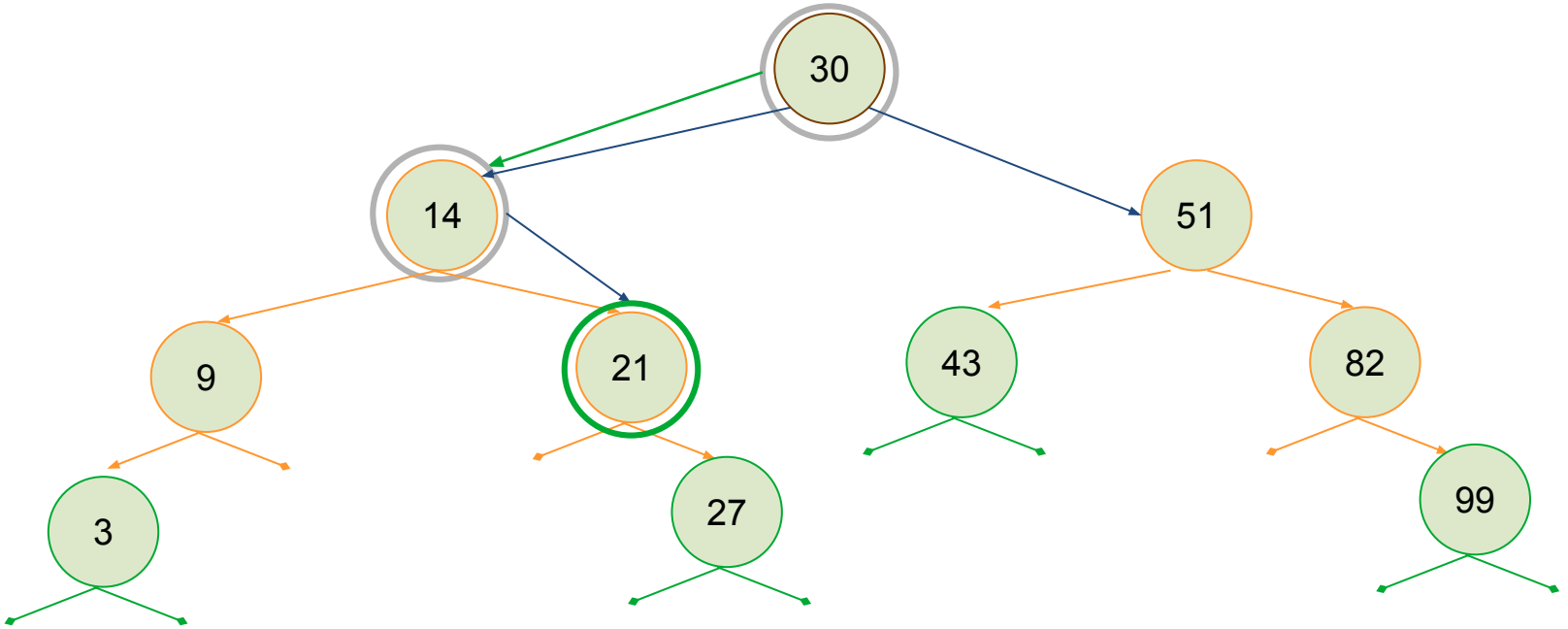
K = 21





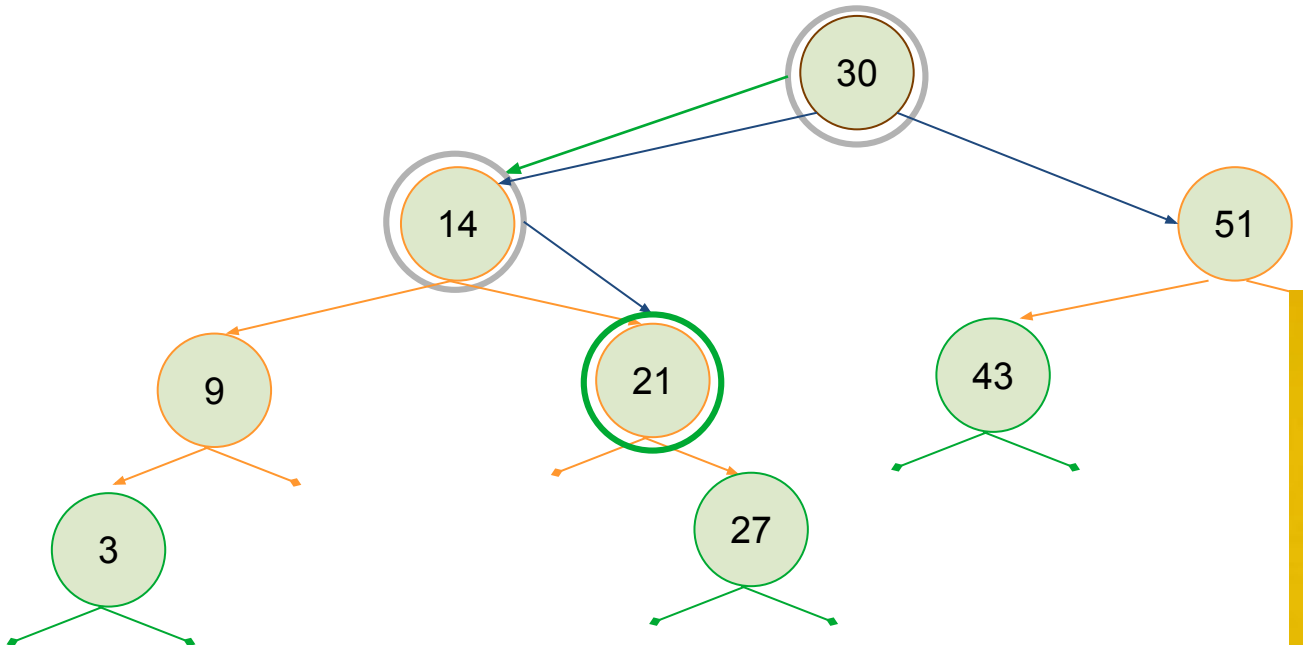
Árvores de busca (Busca)

K = 21



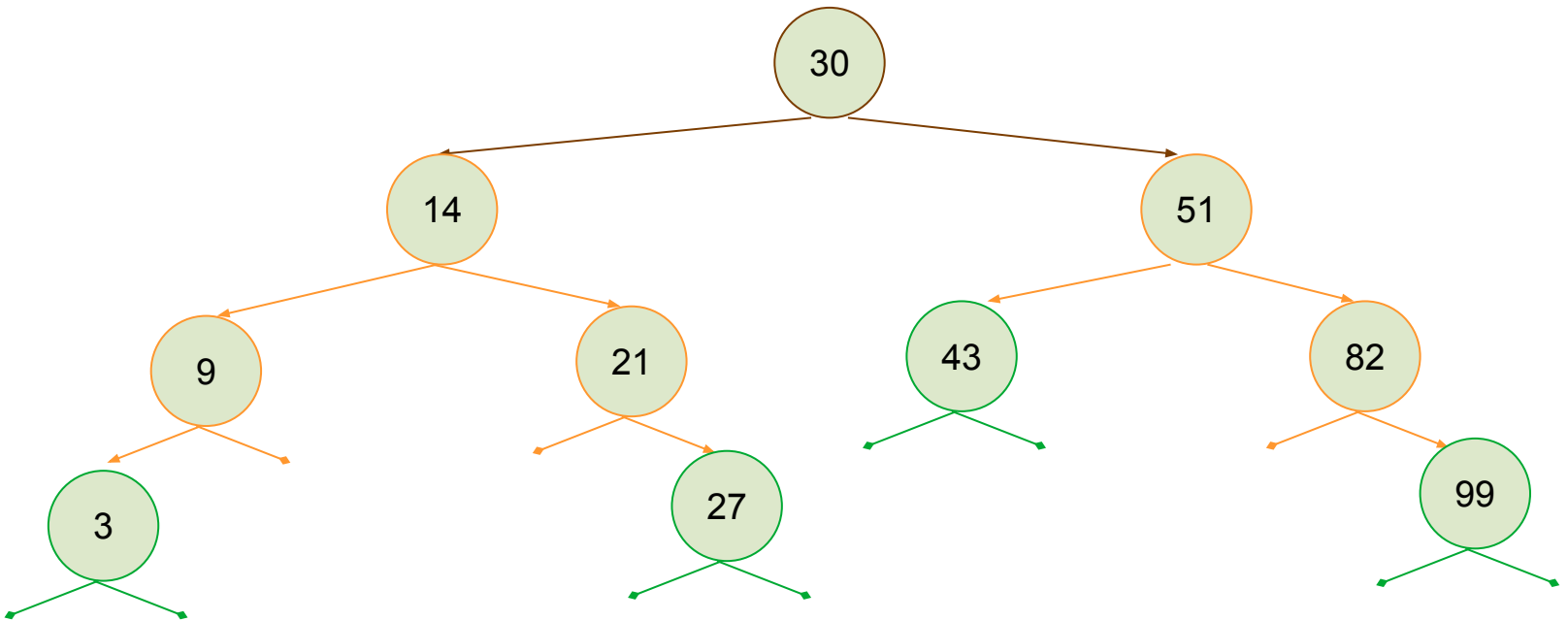
Árvores de busca (Busca)

K = 21



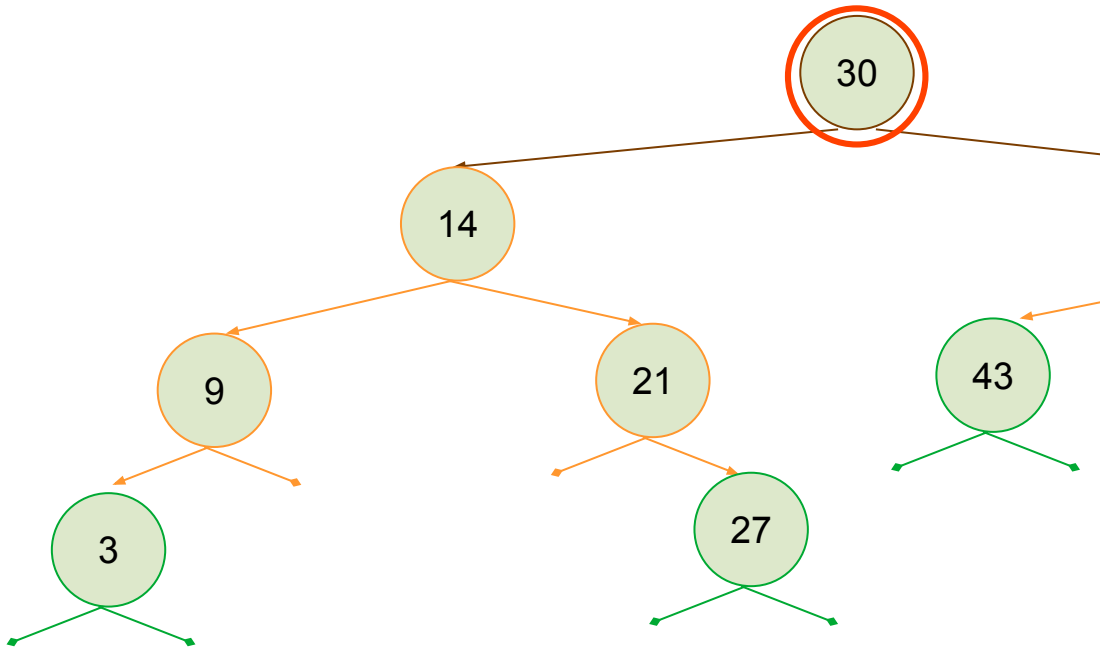
Árvores de busca (Busca 2)

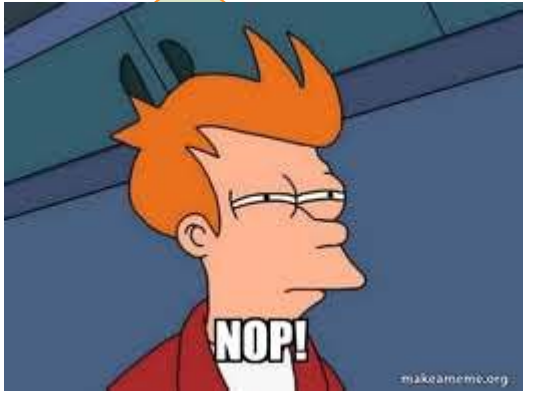
K = 96



Árvores de busca (Busca 2)

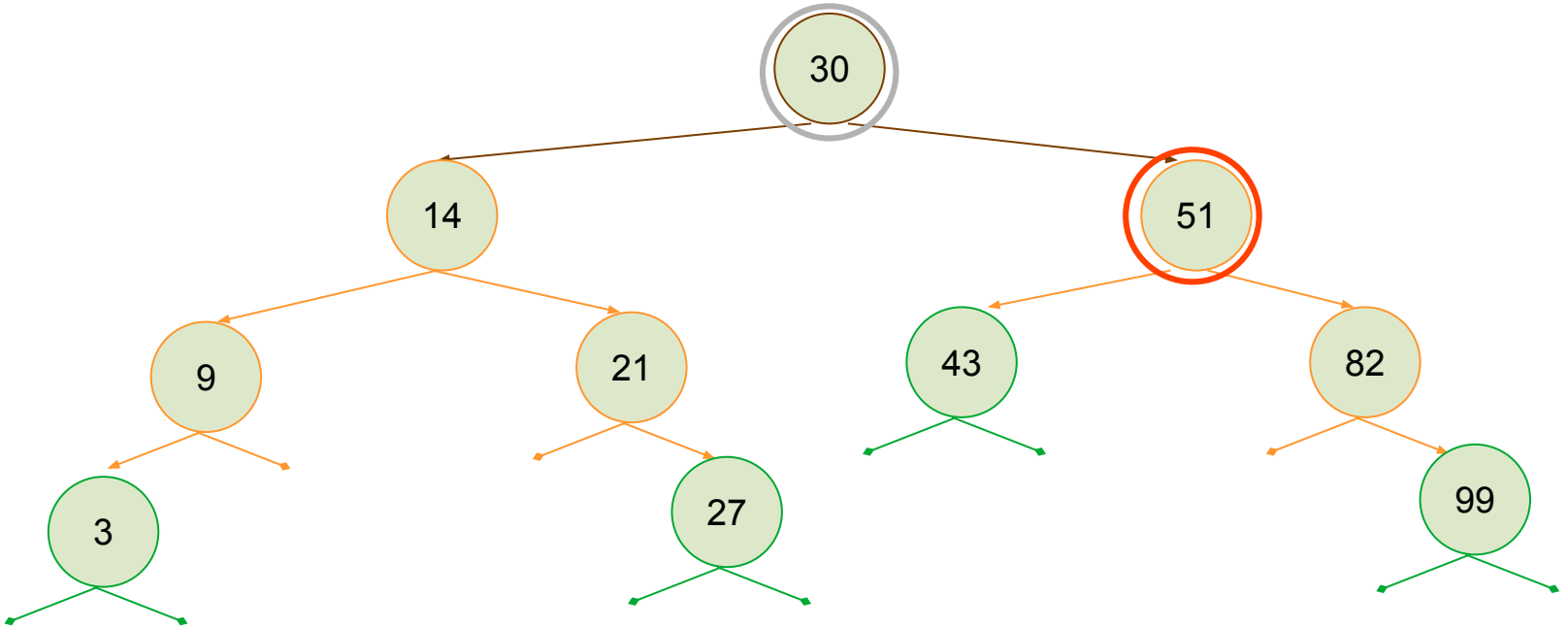
K = 96





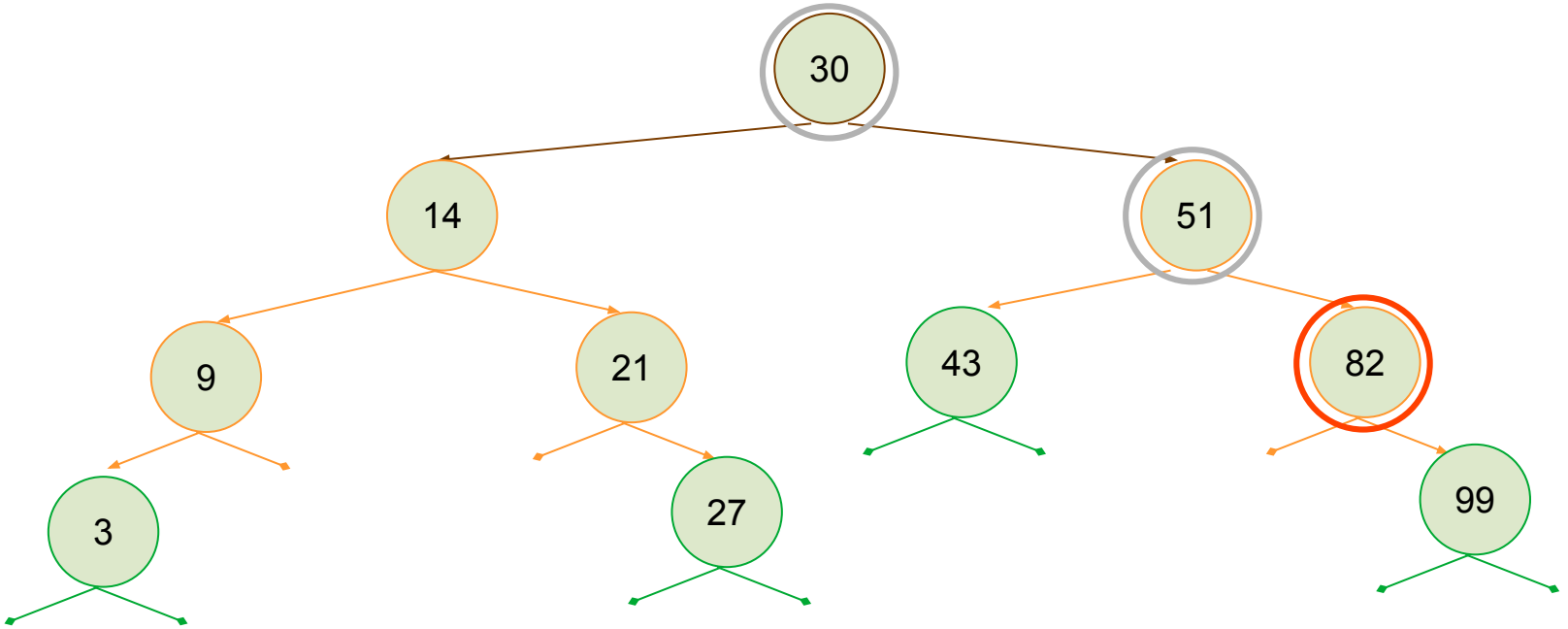
Árvores de busca
(Busca 2)

K = 96



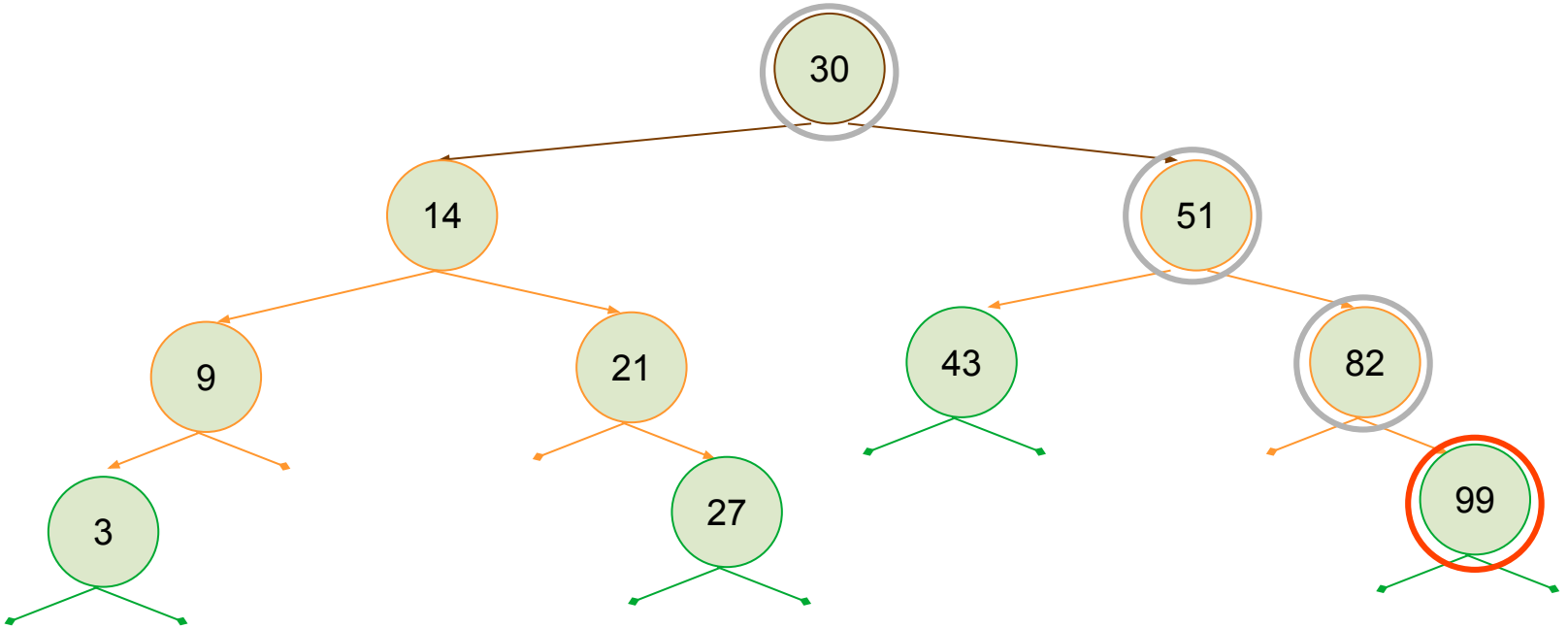
Árvores de busca
(Busca 2)

K = 96



Árvores de busca
(Busca 2)

K = 96



Árvores de busca (Busca 2)

K = 96

Árvores de busca

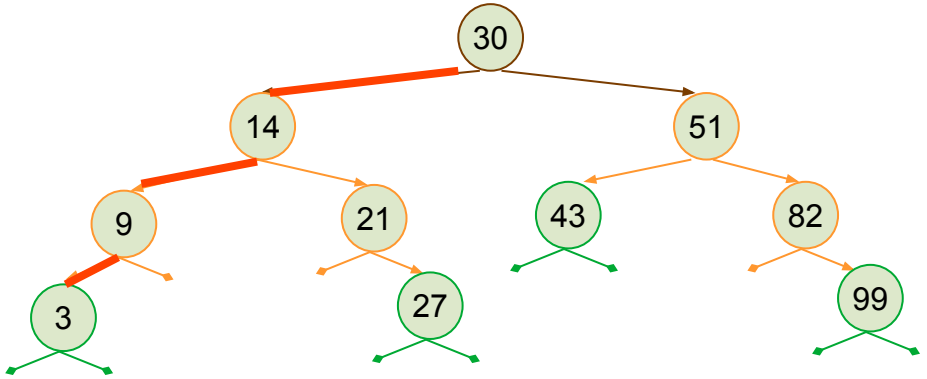
Algoritmo buscaChave(Node *raiz, key)
Inicio

fimAlgoritmo

Árvores de busca

- A **altura** de um nó n em uma árvore binária é a distância entre n e o seu descendente mais afastado (maior caminho).
  - Mais precisamente, a altura de n é o número de passos no mais longo caminho que leva de n até uma folha.
  - Os caminhos a que essa definição se refere são os obtidos pela iteração das instruções n = n→left e n = n→right, em qualquer ordem.
  - A altura da árvore é dada pela distância da raiz até as folhas

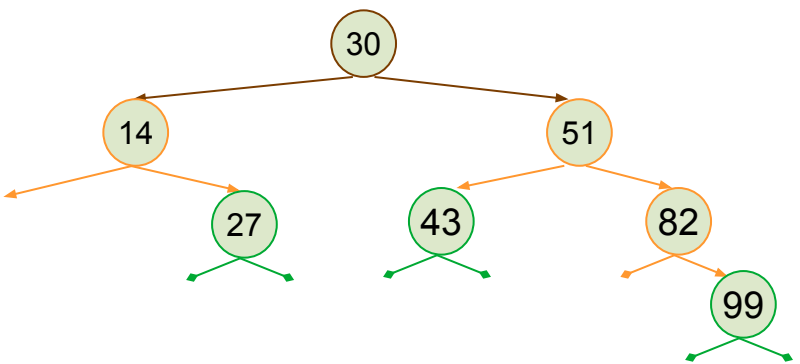
Altura = 4



Árvores de busca

- A **altura** de um nó n em uma árvore binária é a distância entre n e o seu descendente mais afastado (maior caminho).
  - Mais precisamente, a altura de n é o número de passos no mais longo caminho que leva de n até uma folha.
  - Os caminhos a que essa definição se refere são os obtidos pela iteração das instruções n = n→left e n = n→right, em qualquer ordem.
  - A altura da árvore é dada pela distância da raiz até as folhas

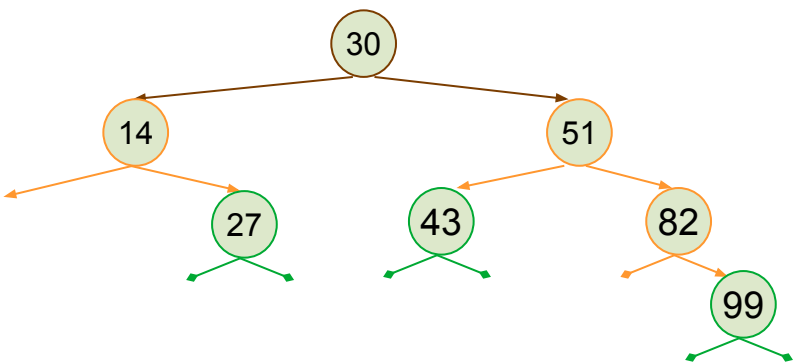
Altura = ?



Árvores de busca

- A **profundidade** de um nó é a distância deste até a raiz
  - É um forma semelhante ao cálculo da altura, mas agora não consideramos a folha mais afastada e sim o número de passos para chegar do elemento raiz até o elemento procurado.

- Ex. Qual a profundidade do elemento 82?



Árvores de busca

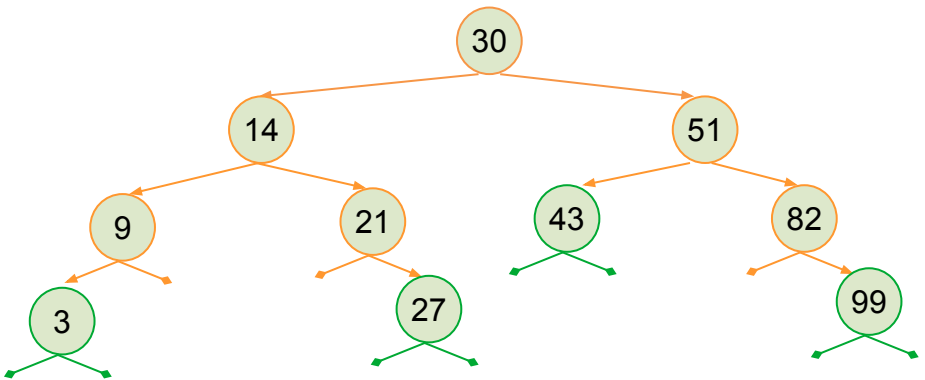
- Existem diversas aplicações onde devemos percorrer uma árvore de maneira sistemática, visitando todos os nós da árvore, um a um.
- Existem três formas de percorrer uma árvore binária:
  - Pré-order
  - In-Order
  - Pós-Order

Árvores de busca

- Existem diversas aplicações onde devemos percorrer uma árvore de maneira sistemática, visitando todos os nós da árvore, um a um.
- Existem três formas de percorrer uma árvore binária:
  - **Pré-ordem**
  - In-ordem
  - Pós-ordem

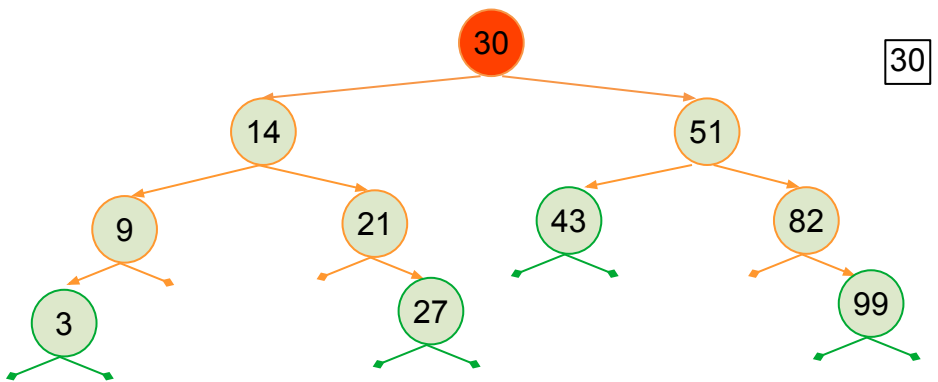
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



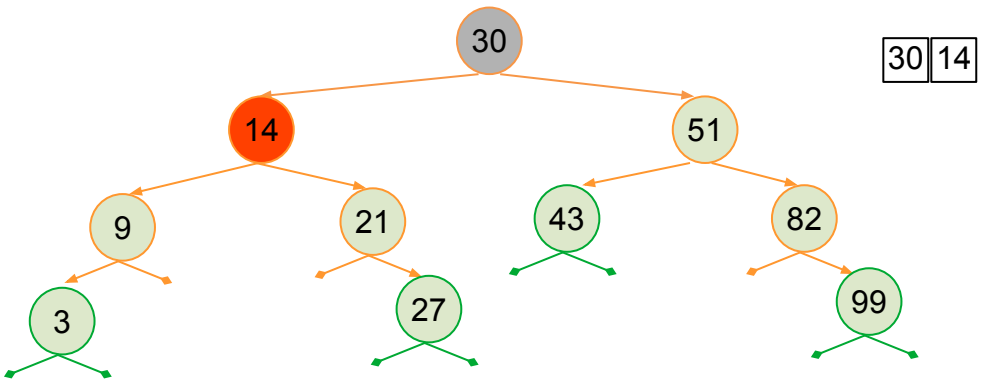
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



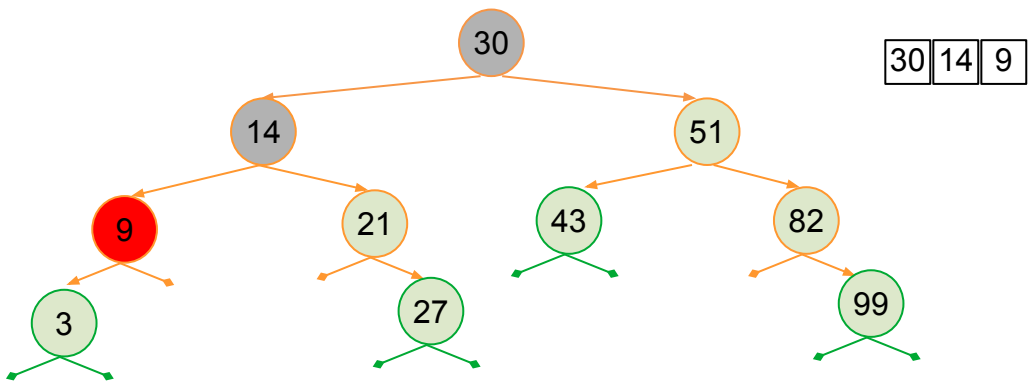
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



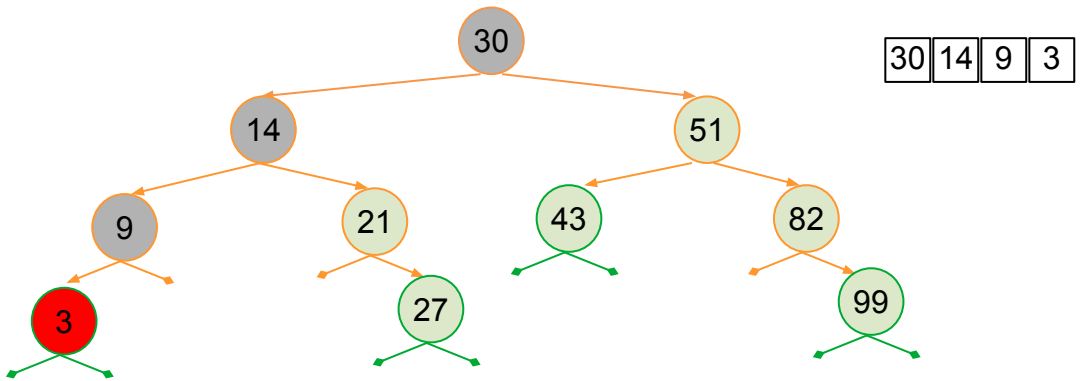
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



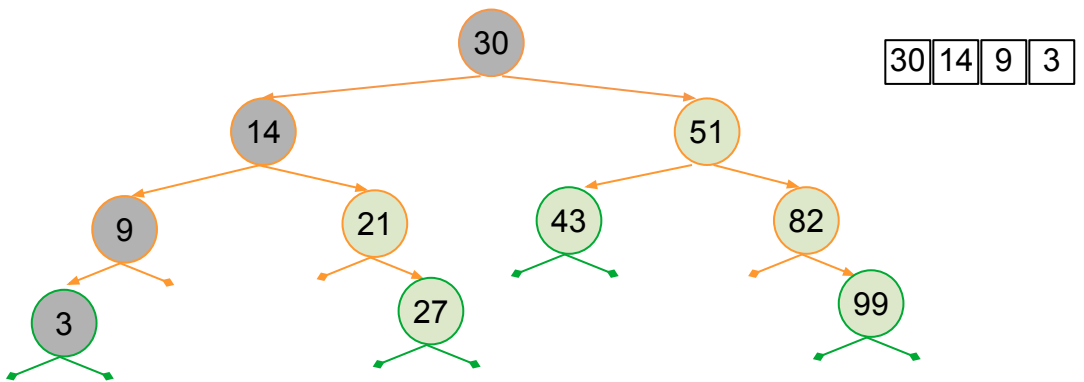
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



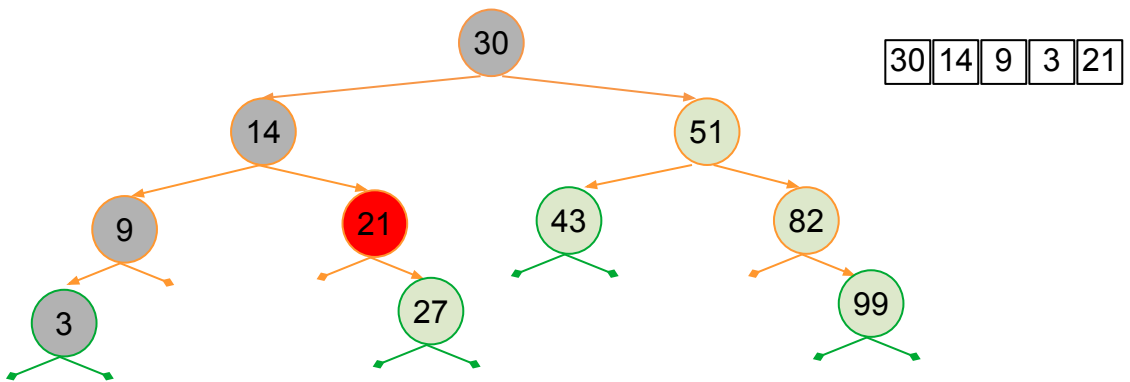
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



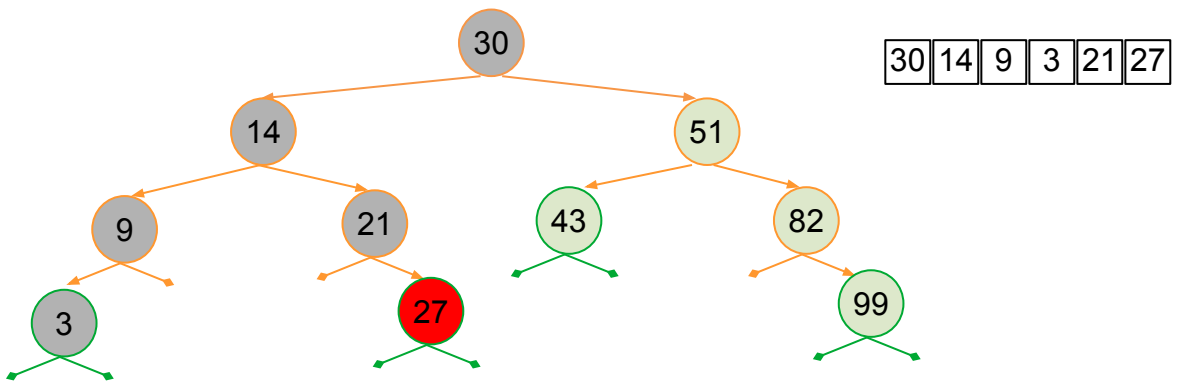
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



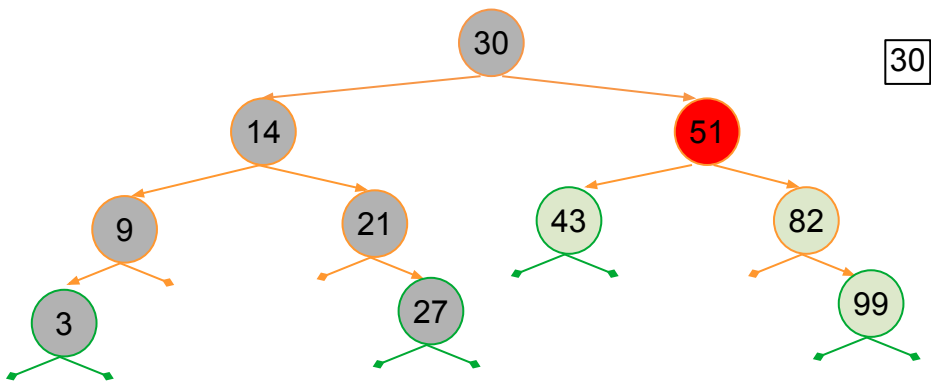
Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



Árvores de busca

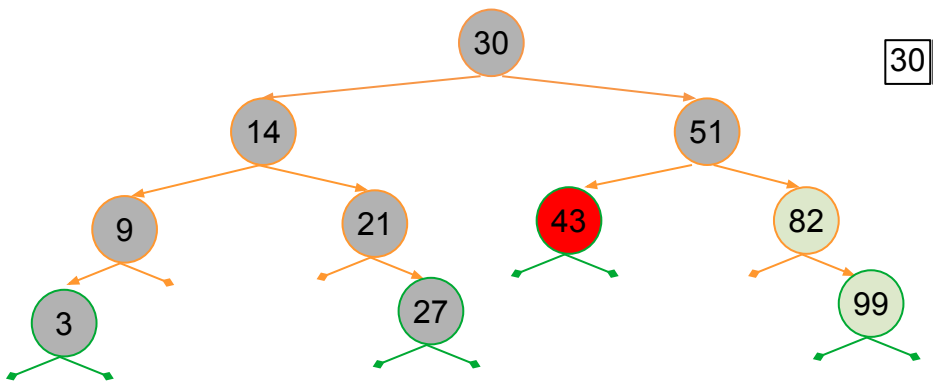
- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



30	14	9	3	21	27	51

Árvores de busca

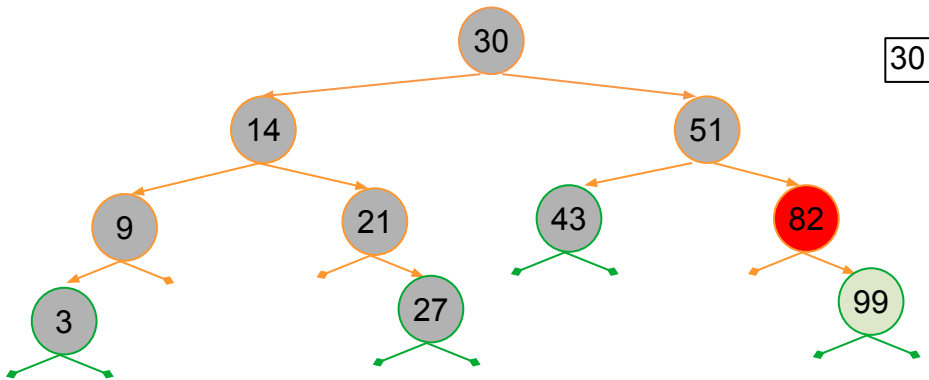
- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



30	14	9	3	21	27	51	43

Árvores de busca

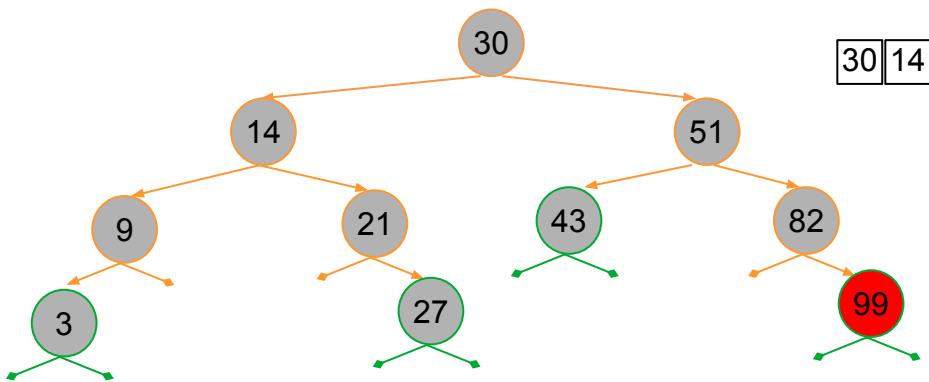
- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



30	14	9	3	21	27	51	43	82

Árvores de busca

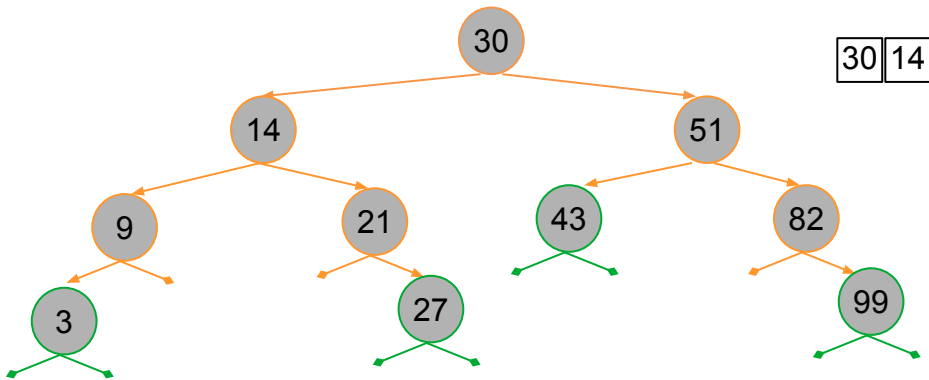
- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



30	14	9	3	21	27	51	43	82	99

Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita



30	14	9	3	21	27	51	43	82	99

Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita

```
void showPreOrder (Tree *root)
{
     if (root==NULL) return;
     printf("%d ",root->value);
     showPreOrder(root->left);
     showPreOrder(root->right);
}
```

Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita

```
void showPreOrder (Tree *root)
{
     if (root==NULL) return;
     printf("%d ",root->value);
     showPreOrder(root->left);
     showPreOrder(root->right);
}
```

Árvores de busca

- Pré-ordem
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita

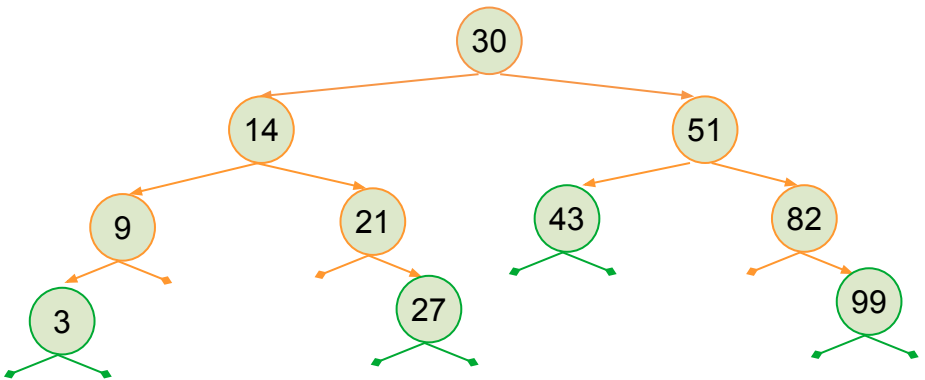
```
void showPreOrder (Tree *root)
{
     if (root==NULL) return;
     printf("%d ",root->value);
     showPreOrder(root->left);
     showPreOrder(root->right);
}
```

Árvores de busca

- Existem diversas aplicações onde devemos percorrer uma árvore de maneira sistemática, visitando todos os nós da árvore, um a um.
- Existem três formas de percorrer uma árvore binária:
  - Pré-ordem
  - **In-ordem**
  - Pós-ordem

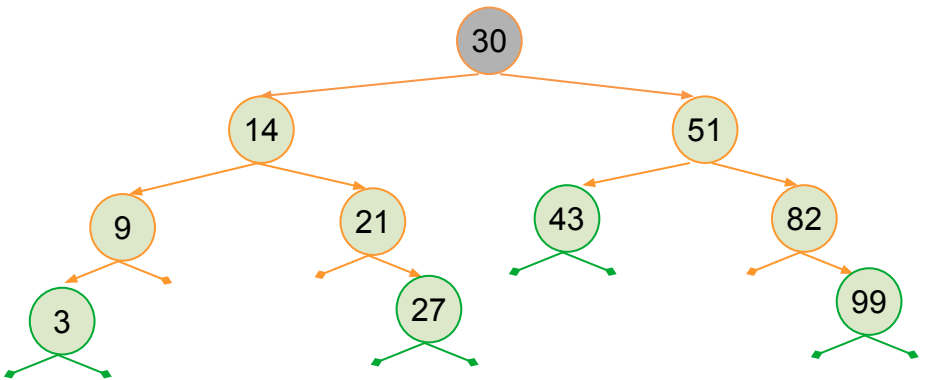
Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita



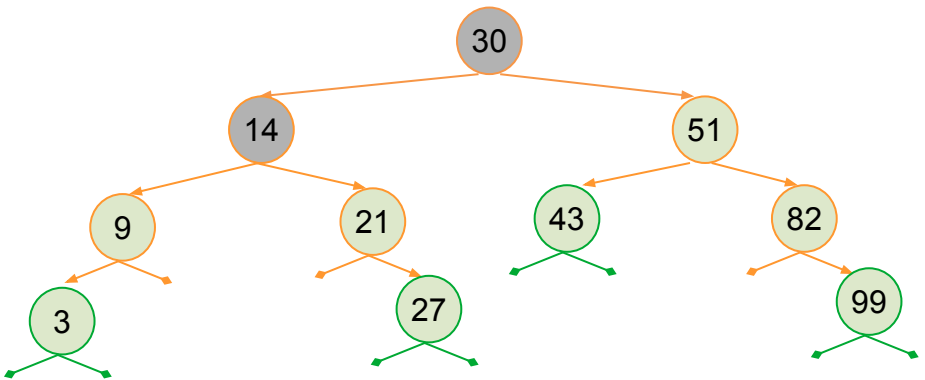
Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita



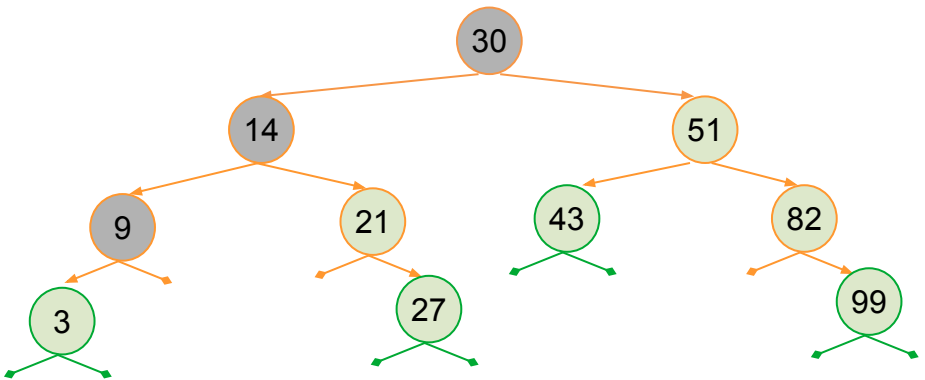
Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita



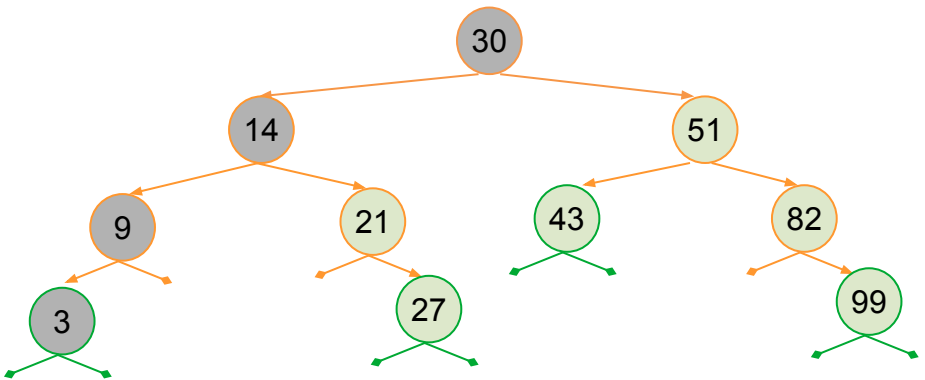
Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita



Árvores de busca

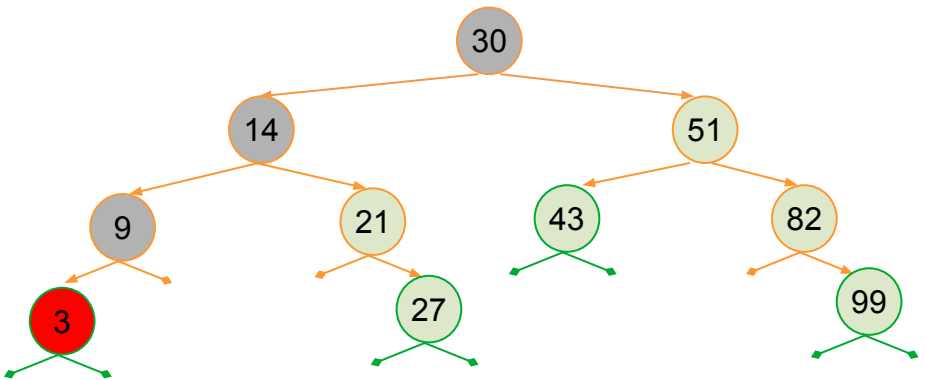
- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

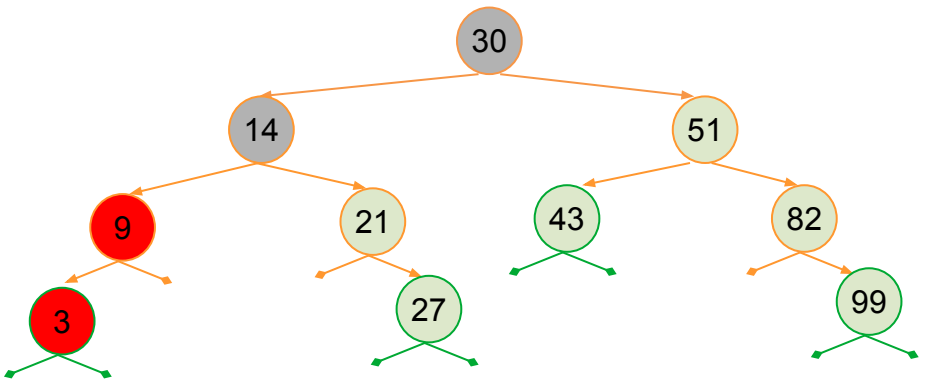
3								



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

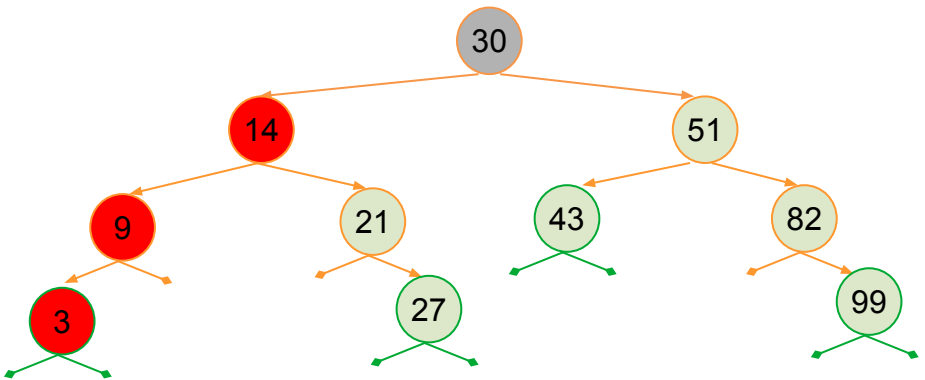
3	9							



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

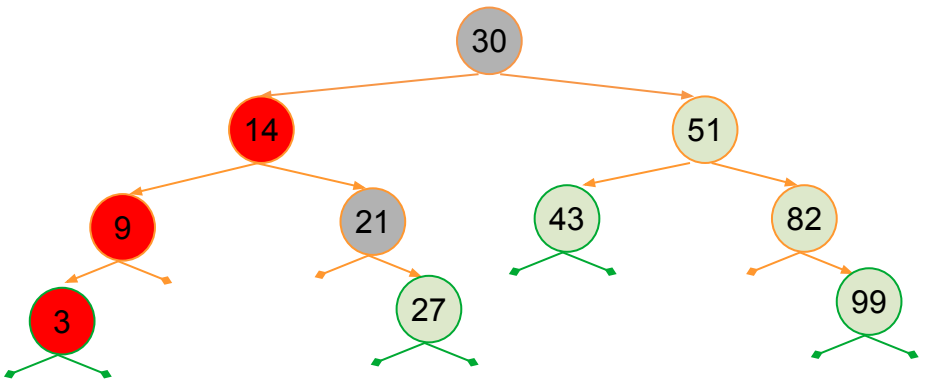
3	9	14						



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

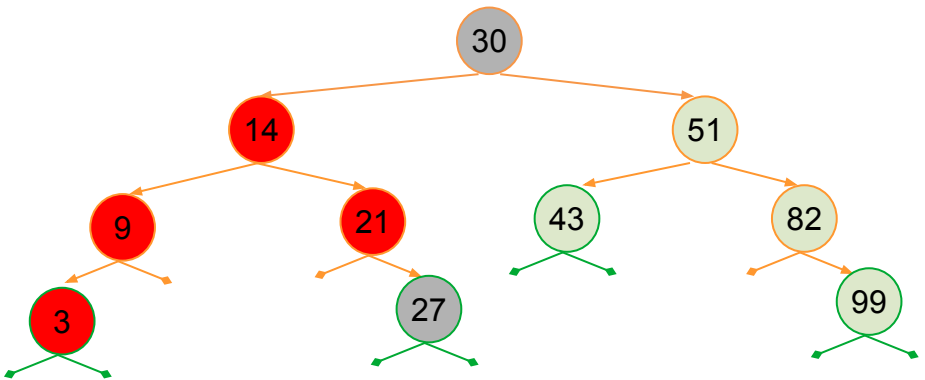
3	9	14						



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

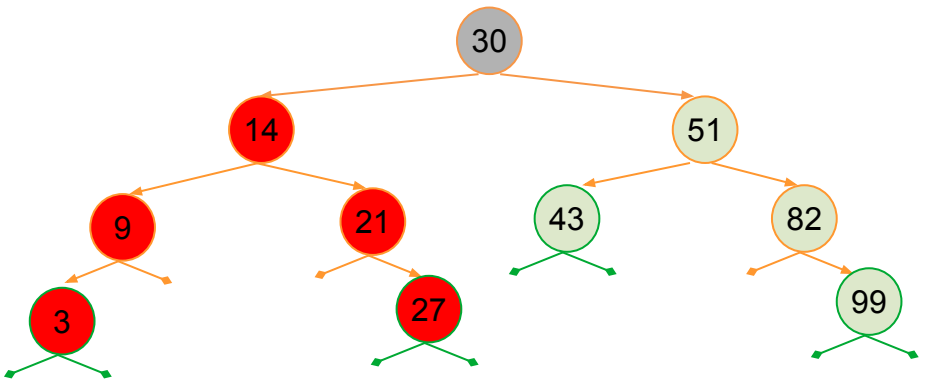
3	9	14	21					



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

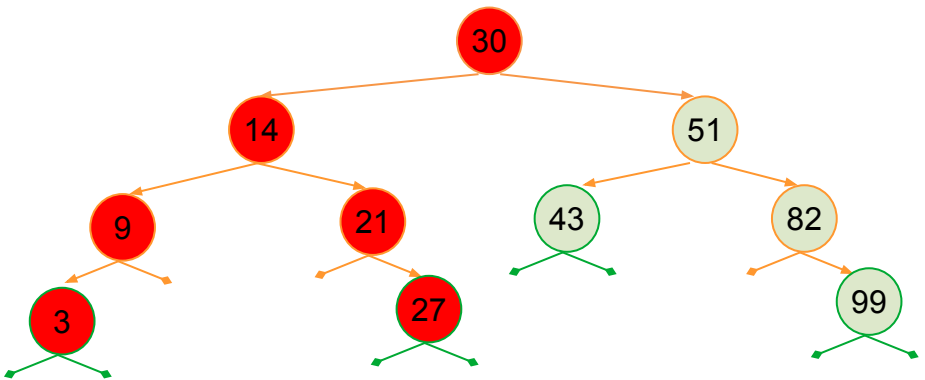
3	9	14	21	27				



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

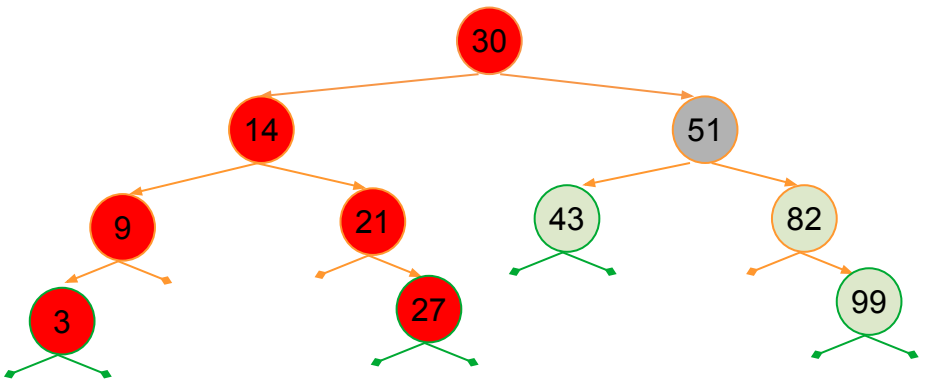
3	9	14	21	27	30			



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

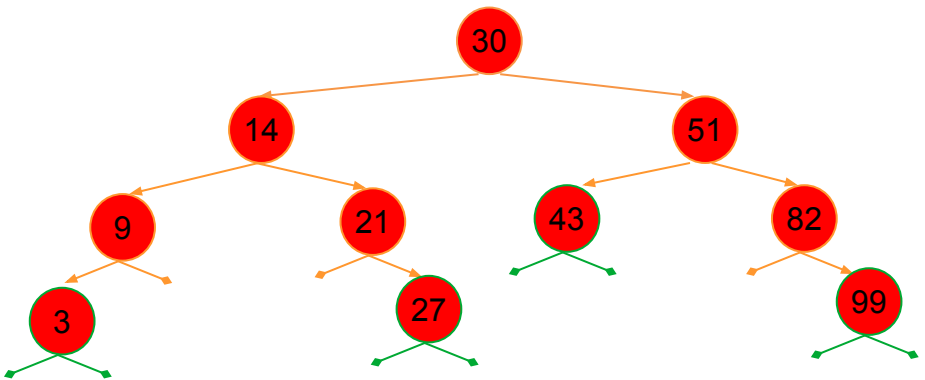
3	9	14	21	27	30			



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

3	9	14	21	27	30	43	51	82	99



Árvores de busca

- In-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Visita a raiz
  - Percorre a subárvore direita

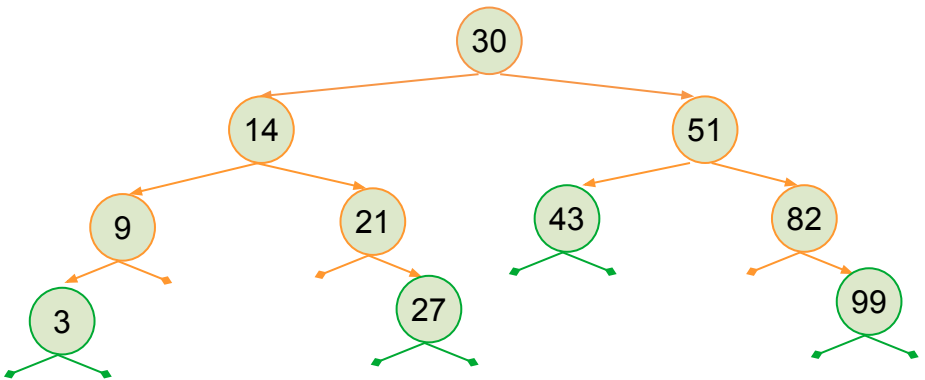
```
void showInOrder (Tree *root)
{

   /// Como seria???

}
```

Árvores de busca

- Existem diversas aplicações onde devemos percorrer uma árvore de maneira sistemática, visitando todos os nós da árvore, um a um.
- Existem três formas de percorrer uma árvore binária:
  - Pré-ordem
  - In-ordem
  - **Pós-ordem**

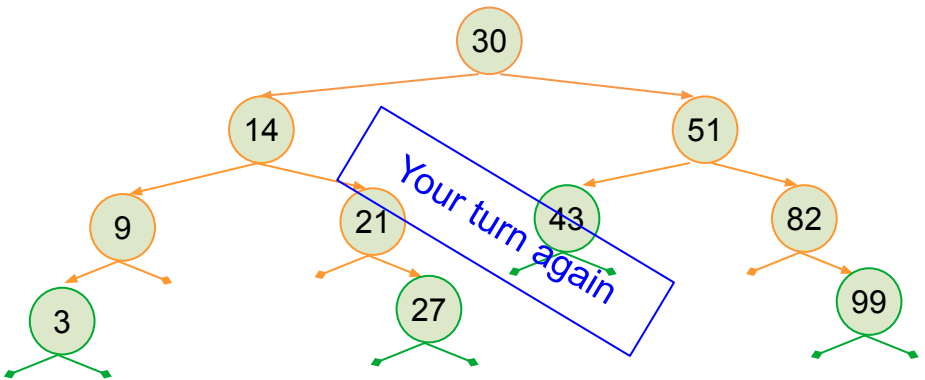
Árvores de busca

- Pós-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita
  - Visita a raiz



Árvores de busca

- Pós-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita
  - Visita a raiz



Saída?

Árvores de busca

- Pós-ordem
  - Percorre a subárvore esquerda
  - Percorre a subárvore direita
  - Visita a raiz

```
void showPosOrder (Tree *root)
{

   /// Como seria???

}
```

Árvores de busca

- Árvores representam um ótima otimização de performance para o acesso a informações
  - A complexidade é da ordem logarítmica já que temos uma árvore
    - $\log_2$ pois a árvore é binária

Árvores de busca

- Árvores representam um ótima otimização de performance para o acesso a informações
  - A complexidade é da ordem logarítmica já que temos uma árvore
    - $\log_2$ pois a árvore é binária

Árvores de busca

- Árvores representam um ótima otimização de performance para o acesso a informações
  - A complexidade é difícil e depende da organização da árvore
    - Árvores balanceadas mantém uma complexidade de acesso na ordem de $\log_b n$ (b é a ordem da árvore), pois mantém seu crescimento controlado
  - A construção da árvore pode gerar dois tipos de árvores
    - Balanceadas: as folhas estão quase na mesma altura
    - Desbalanceadas (ou degeneradas): as alturas das folhas divergem muito. Neste caso a complexidade pode chegar a ser linear.

Árvores de busca

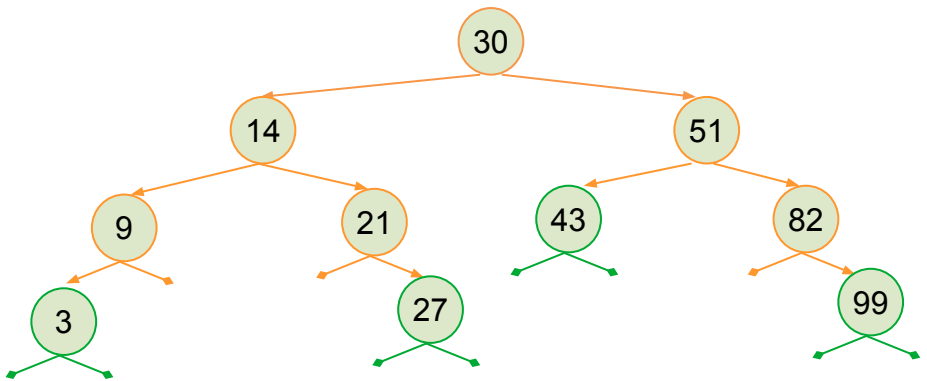
- Árvores degeneradas

Árvores de busca

- Dada a entrada

30	51	14	43	82	21	9	3	27	99
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Utilizando o nosso algoritmo (menor ou igual à esquerda, maior à direita):



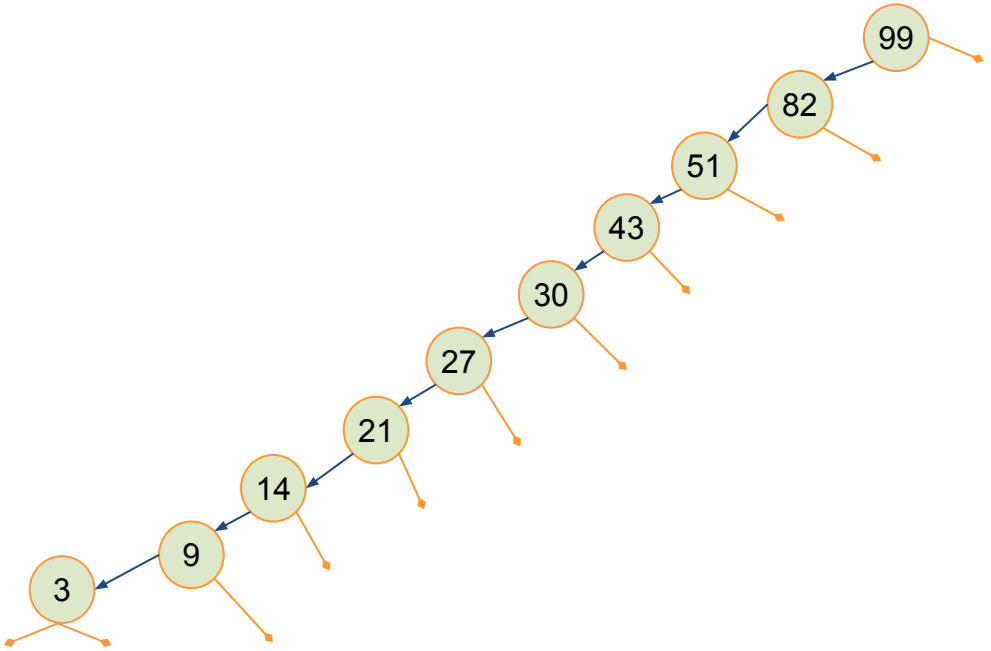
- Resultado: árvore balanceada, folhas quase na mesma altura

Árvores de busca

- Dada a entrada:

99	82	51	43	30	27	21	14	9	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Resultado: árvore degenerada



Árvores de busca

- Dada a entrada:

99	82	51	43	30	27	21	14	9	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Resultado: árvore degenerada
- Tem solução?
  - Algoritmos de balanceamento: AVL e Red-Black

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html