Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso de Ciência da Computação
Campus Chapecó

Álgebra de Boole

Prof. Luciano L. Caimi
lcaimi@uffs.edu.br

Álgebra de Boole

Definida por:

- Um conjunto de operações válidas;
- Um conjunto de valores que cada variável pode assumir;

Valores das Variáveis:

Seja $A \in B \Rightarrow A \in \{0,1\}$ ({F,V}, {high, low}, {on, off}...)

De outra forma:

$$\text{Se } A \neq 0 \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Se } A \neq 1 \Rightarrow A = 0$$

Operações Básicas da Álgebra de Boole

Cada operação possui pelo três formas de representação clássicas:

- Expressão lógica (simbólica);
- Tabela-verdade;
- Circuito;

Além destes formatos clássicos existem outros:

- Diagrama de decisão binária (BDD);
- Diagrama de Venn;

Álgebra de Boole

Operações Básicas da Algebra de Boole

1) Complemento (NOT)

Também chamado inversão ou negação.

Símbolo

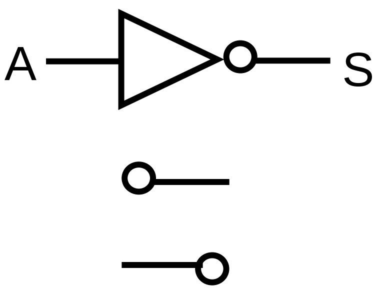
$\bar{A}$, $\neg A$, $\sim A$, A', not(A)

(lê-se “A negado”)

Tabela Verdade

A	S
0	1
1	0

Porta Lógica



- É uma operação unária (i.e. só pode ser aplicada a uma variável por vez);
- Tem como resultado na saída o valor oposto ao presente na entrada.

Álgebra de Boole

2) Operação E (AND)

Também denominada multiplicação lógica.

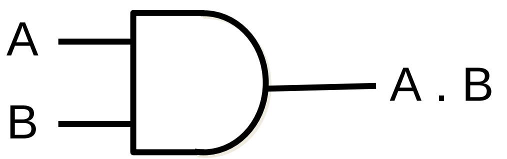
Símbolo

{ . , ˄ }

Tabela Verdade

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta Lógica



Definição 1: a operação "E" resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.

Definição 2: a operação "E" resulta 0 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 0.

Álgebra de Boole

Operação "E" para 3 variáveis

Porta Lógica

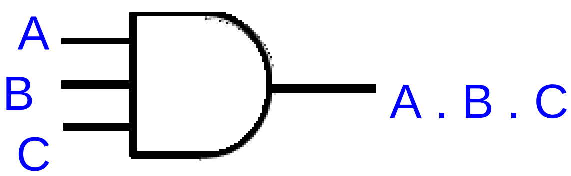


Tabela Verdade

A	B	C	A.B.C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- **Definição 1:** a operação "E" resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.

Álgebra de Boole

3) Operação OU (OR)

Também denominada adição lógica.

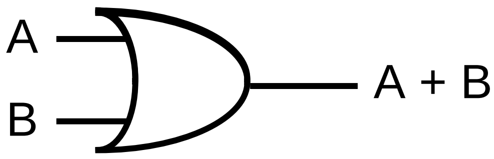
Símbolo

{ +, $^{\vee}$ }

Tabela Verdade

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

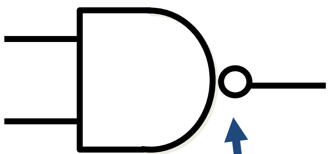
Porta Lógica



- **Definição 1:** a operação "OU" resulta 1 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 1.
- **Definição 2:** a operação "OU" resulta 0 se e somente se todas variáveis de entrada valerem 0.

Álgebra de Boole

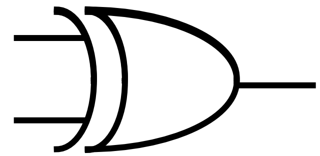
NAND



A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Indica complemento da porta

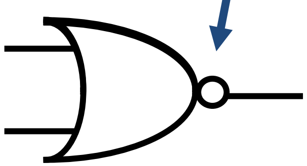
XOR



eXclusive OR
OU Exclusivo

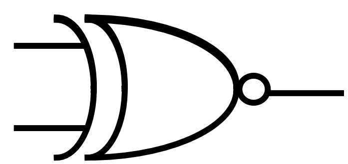
A	B	$A\oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR



A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

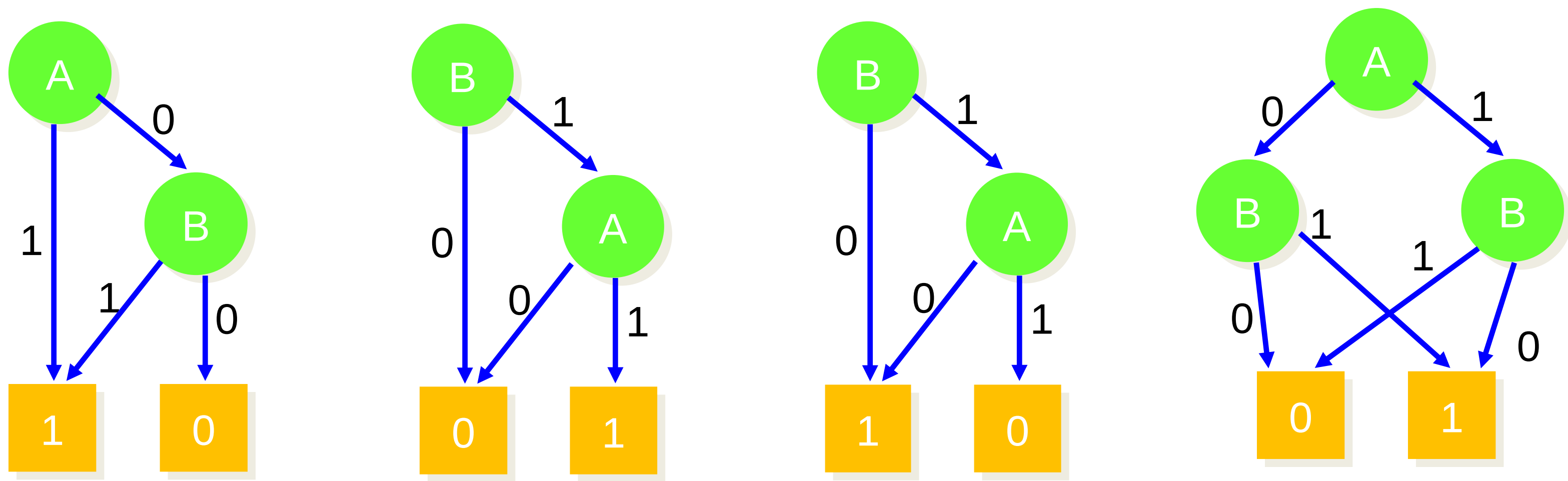
XNOR



A	B	$\overline{A\oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra de Boole

Uma outra forma de representação é o Diagrama de Decisão Binária (Bynary Decision Diagram - BDD)

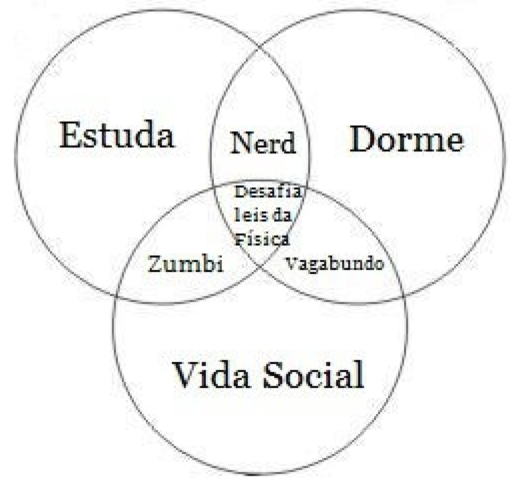


OR AND NAND XOR

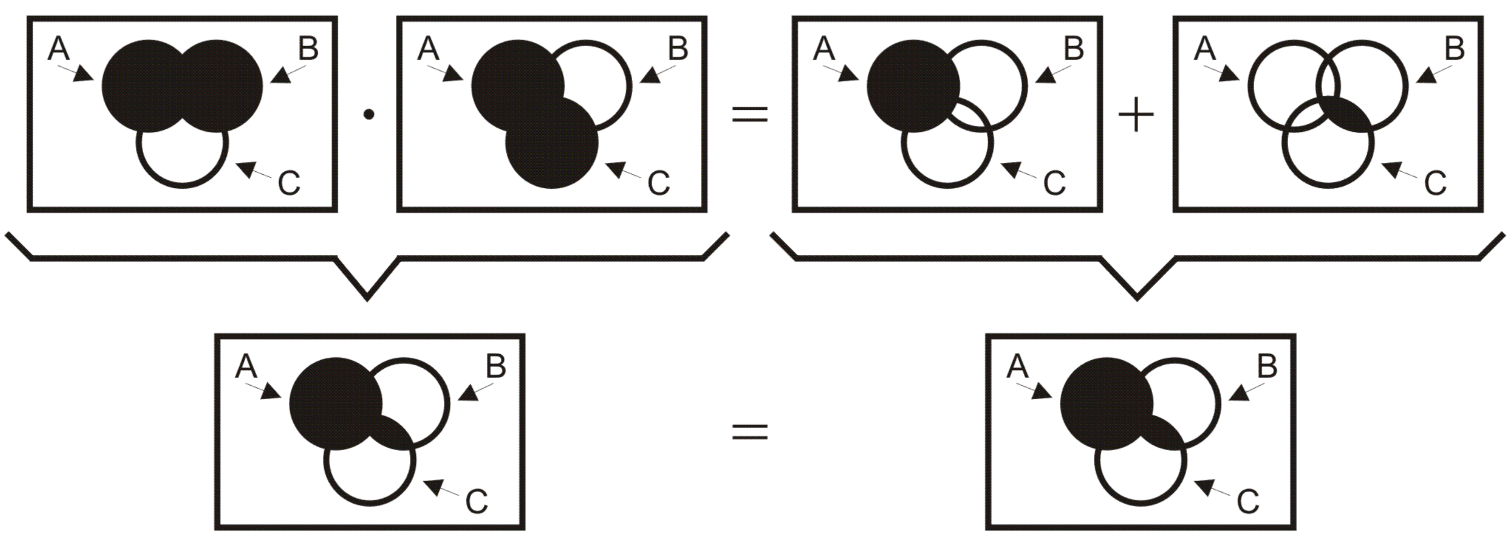
Parte-se de uma variável de entrada qualquer e chega-se ao valor da saída conforme o valor contido nas variáveis de entrada (indicadas por arcos)

Álgebra de Boole

Diagrama de Venn

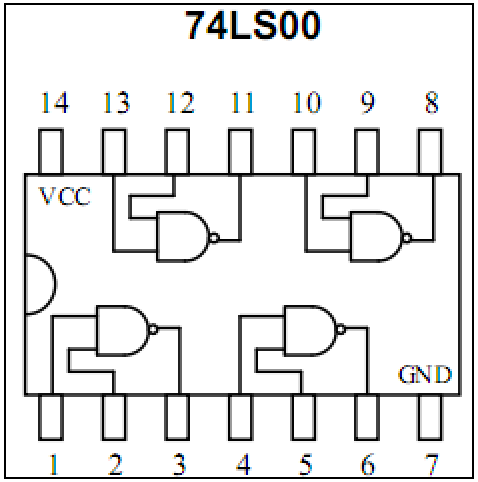


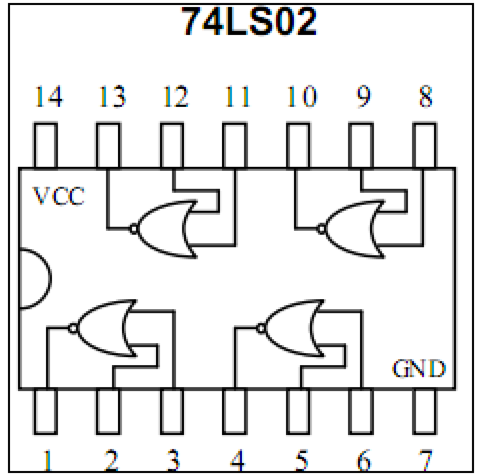
$$(A + B) \cdot (A + C) = A + BC$$

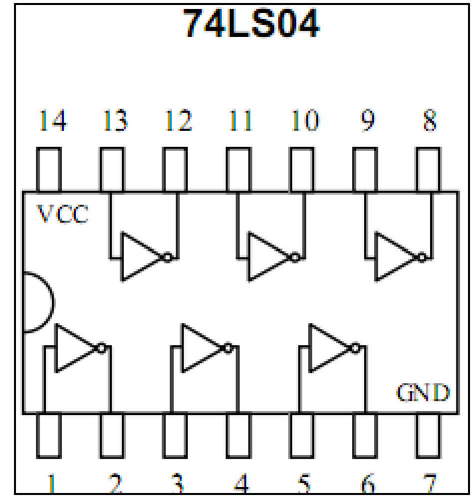


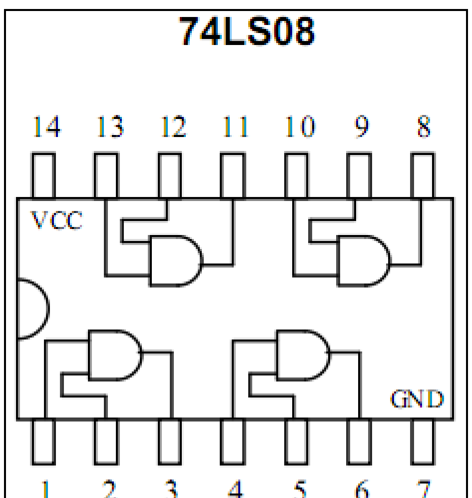
Álgebra de Boole

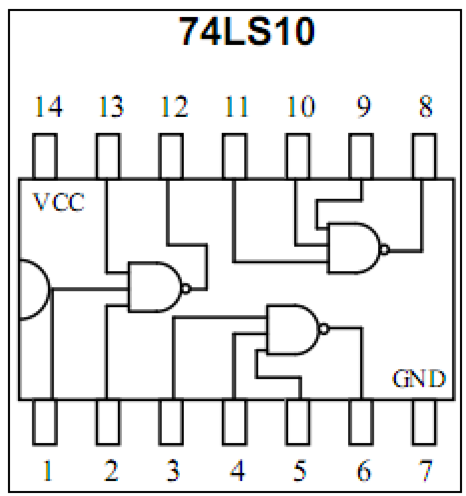
Circuitos Integrados comerciais











74LS32 – OR 2 entradas

74LS86 – XOR 2 entradas

74LS73A – Flip-Flop JK

74LS74A – Flip-Flop D

...

Álgebra de Boole

Propriedades da Álgebra de Boole

1) Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

2) Associativa

As variáveis podem ser associadas em qualquer conjunto

3) Distributiva

Em relação a operação de multiplicação booleana

Propriedades da Algebra de Boole

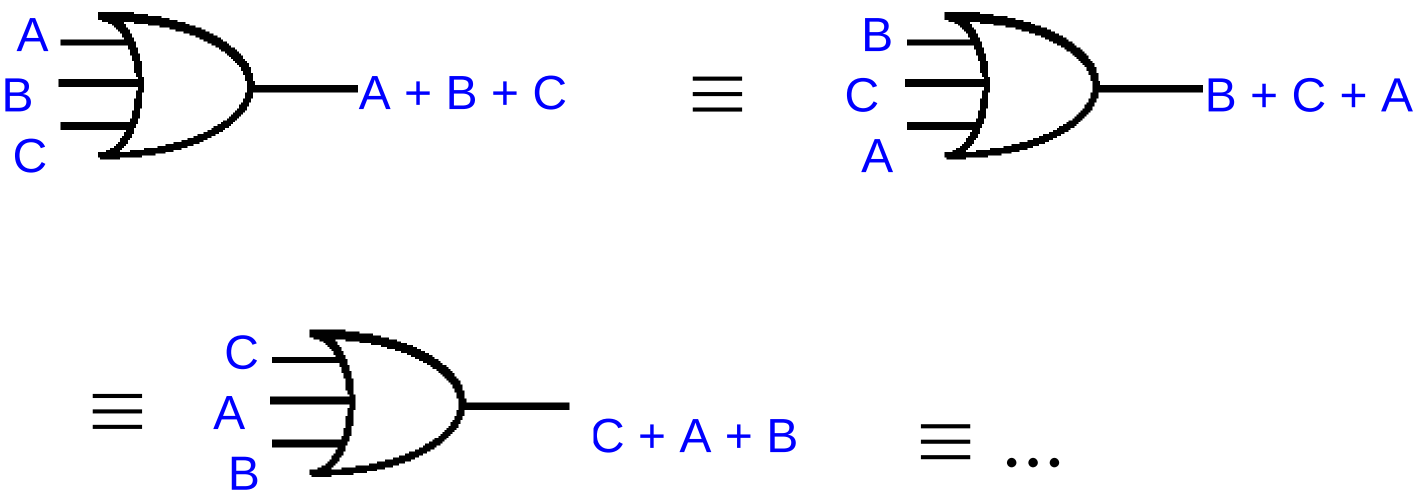
1) Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem.

Álgebra de Boole

... Comutativa

Em termos de portas lógicas, teremos...



Tal propriedade é válida para qualquer uma das portas lógicas, respeitando-se obviamente a sua função.

Álgebra de Boole

2) Associativa

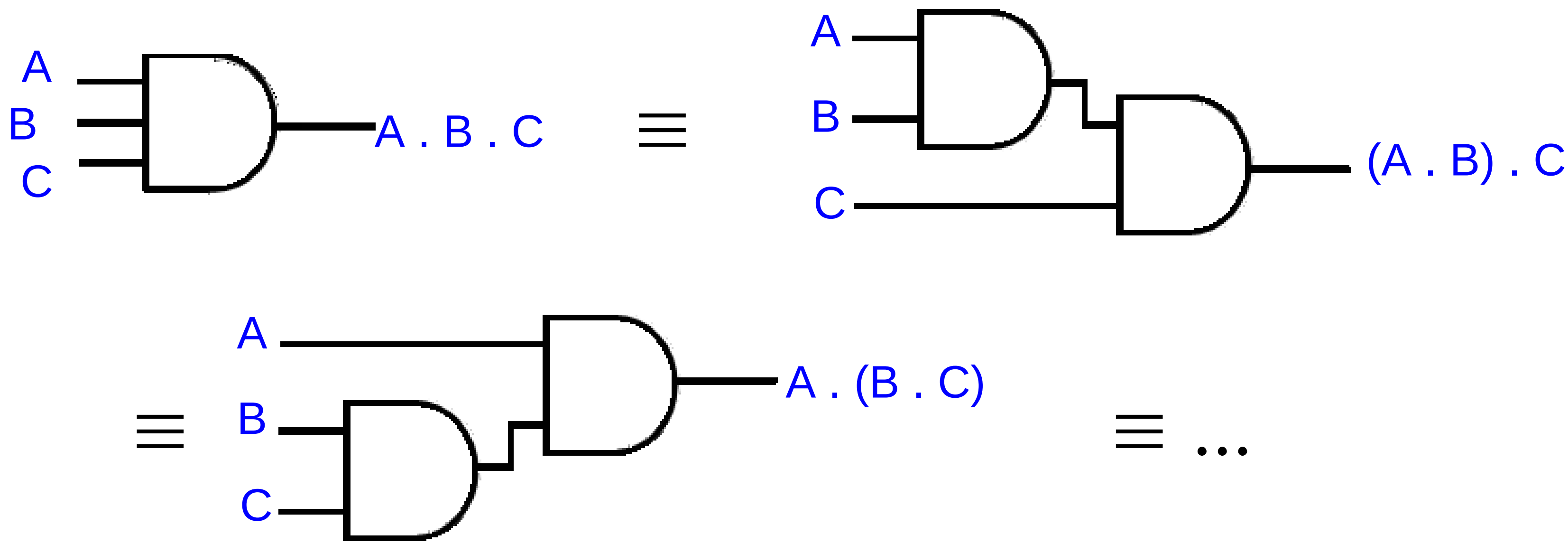
As variáveis de entrada podem ser operadas de duas em duas (ou de três em três, ou de quatro em quatro...)

Os parênteses indicam precedência.

Álgebra de Boole

... Associativa

Em termos de portas lógicas, teremos...



Tal propriedade é válida para qualquer uma das portas lógicas, respeitando-se obviamente a sua função.

Álgebra de Boole

3) Distributiva

Refere-se a operação de "multiplicação"

$$S = A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$$

Álgebra de Boole

Conversão entre formatos de representação

Considerando as três formas de representação clássicas precisamos realizar a conversão entre as mesmas

- Expressão para tabela-verdade: avaliação
- Circuito para tabela verdade: avaliação
- Expressão para Circuito: síntese
- Circuito para expressão: variáveis e operações
- Tabela-verdade para expressão: SOP ou POS
- Tabela verdade para circuito: síntese

Álgebra de Boole

Avaliação de expressões booleanas

Dada uma expressão booleana desejamos saber o comportamento da mesma:

- Montamos uma tabela-verdade com as variáveis de entrada a esquerda;
- Criar colunas à direita, conforme a ordem de precedência das operações contidas na equação que se está avaliando;
- Avaliar as expressões e obter resultados intermediários até encontrar valores finais;

Exemplo: Dada a expressão abaixo obtenha a tabela-verdade da mesma:

$$F\left(X,Y,Z\right)=X\,.\left(Y+\overline{Z}\right)$$

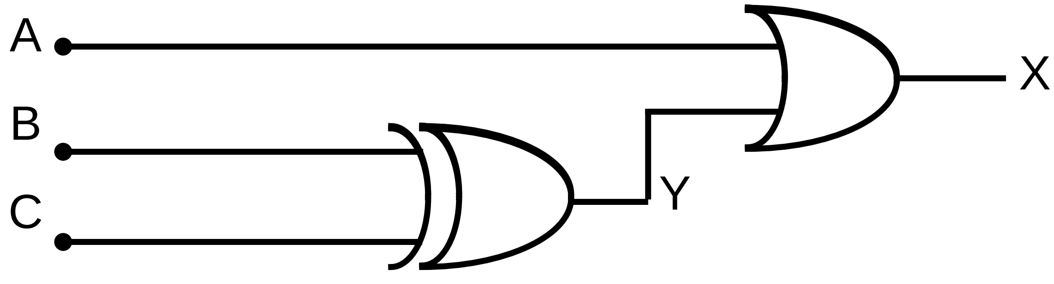
Álgebra de Boole

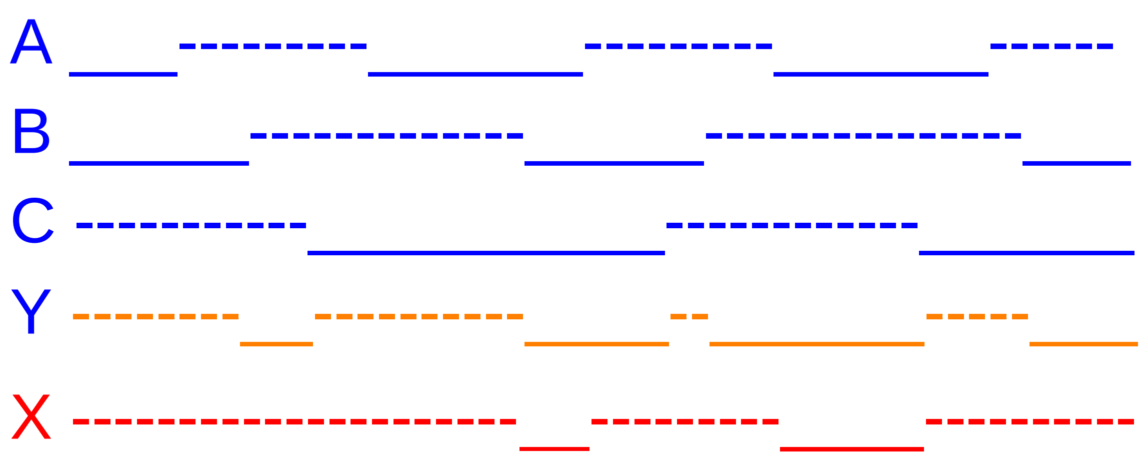
Avaliação de expressões booleanas: exemplo

$$F(X,Y,Z) = X \cdot (Y + \overline{Z})$$

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$(Y + \overline{Z})$	$X \cdot (Y + \overline{Z})$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Avaliação de expressões booleanas: exemplo





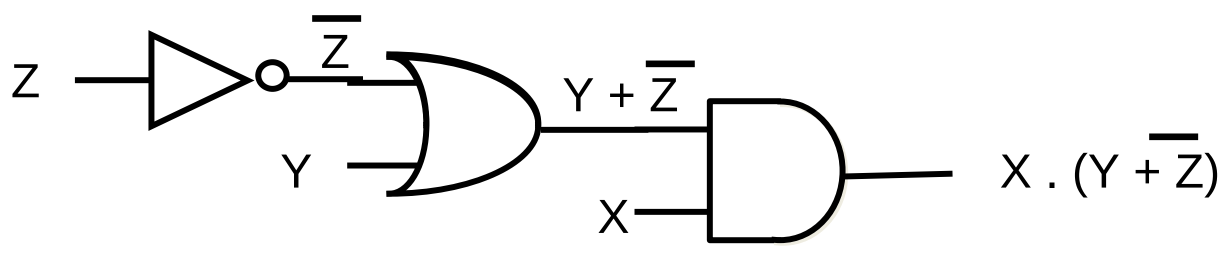
Álgebra de Boole

Circuitos Lógicos

- Dada uma equação que representa uma função Booleana, é possível representá-la graficamente, por meio de uma associação apropriada de portas lógicas.
- O desenho de um circuito lógico deve obedecer à ordem de precedência das operações mostradas na equação lógica que se deseja implementar.

Exemplo: Desenhe o circuito lógico que implementa a equação:

$$F(X,Y,Z) = X \,.\, (Y + \overline{Z})$$



Álgebra de Boole

Exercício:

Avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico

$$F\left(A,B,C\right)=\overline{A}\,.\,C+\left(\left(B\,.\,C\right)+A\,.\,\overline{B}\right)$$

Álgebra de Boole

Exercício:

Avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,.\,C + \left(\left(B\,.\,C\right) + A\,.\,\overline{B}\right)$$

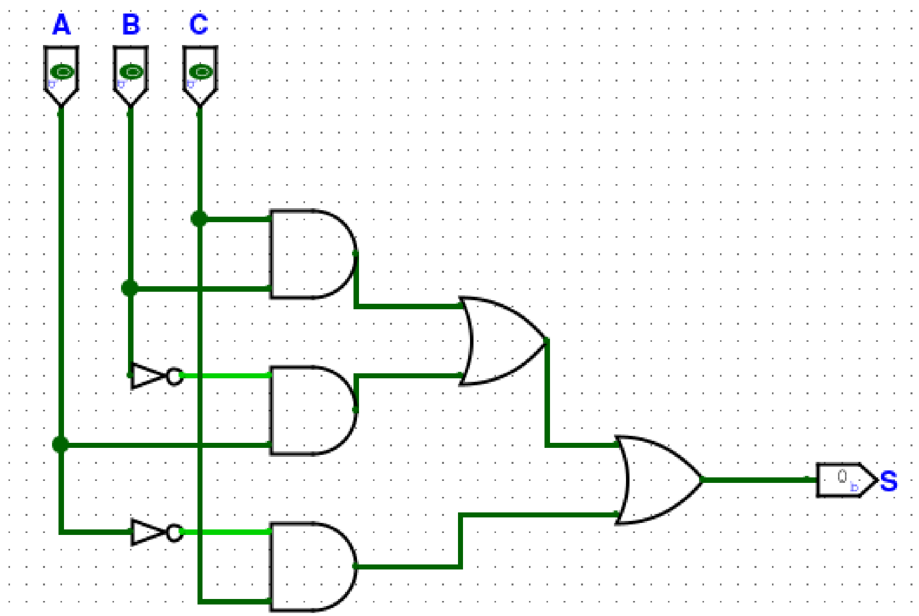
A	B	C	B.C	$A\,.\,\overline{B}$	$\left(\left(B\,.\,C\right) + A\,.\,\overline{B}\right)$	$\overline{A}\,.\,C$	$\overline{A}\,.\,C + \left(\left(B\,.\,C\right) + A\,.\,\overline{B}\right)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1

Álgebra de Boole

Exercício:

Avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico

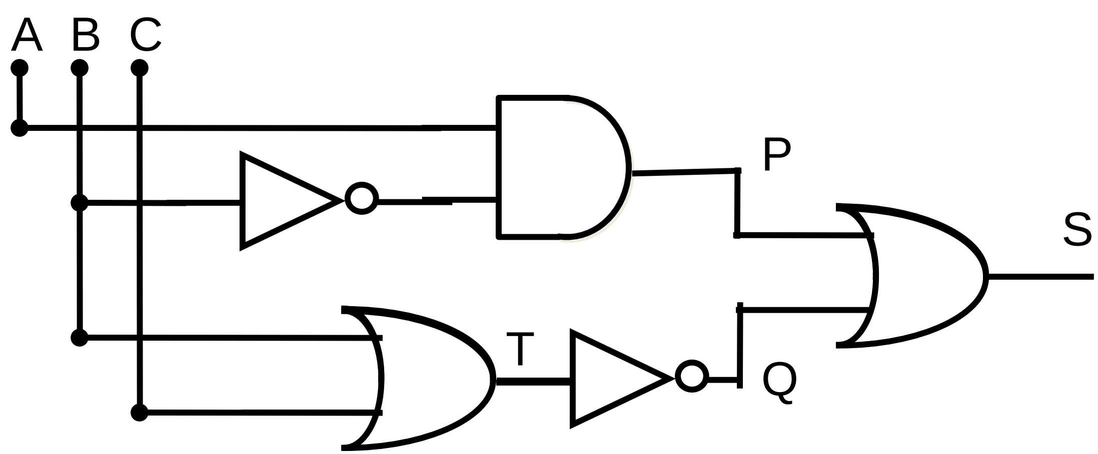
$$F\left(A,B,C\right)=\overline{A}\,.\,C+\left(\left(B\,.\,C\right)+A\,.\overline{B}\right)$$



Expressões Lógicas

- Dada um circuito lógico formado de portas lógicas básicas devemos obter a expressão lógica equivalente.
- A expressão lógica deve obedecer à ordem de precedência das operações mostradas no circuito lógico que se deseja implementar.

Exemplo: Apresente a equação lógica que descreve o circuito abaixo:



$$S = P + Q$$

$$P = A \,.\, \overline{B}$$

$$Q = \overline{T}$$

$$T = B + C$$

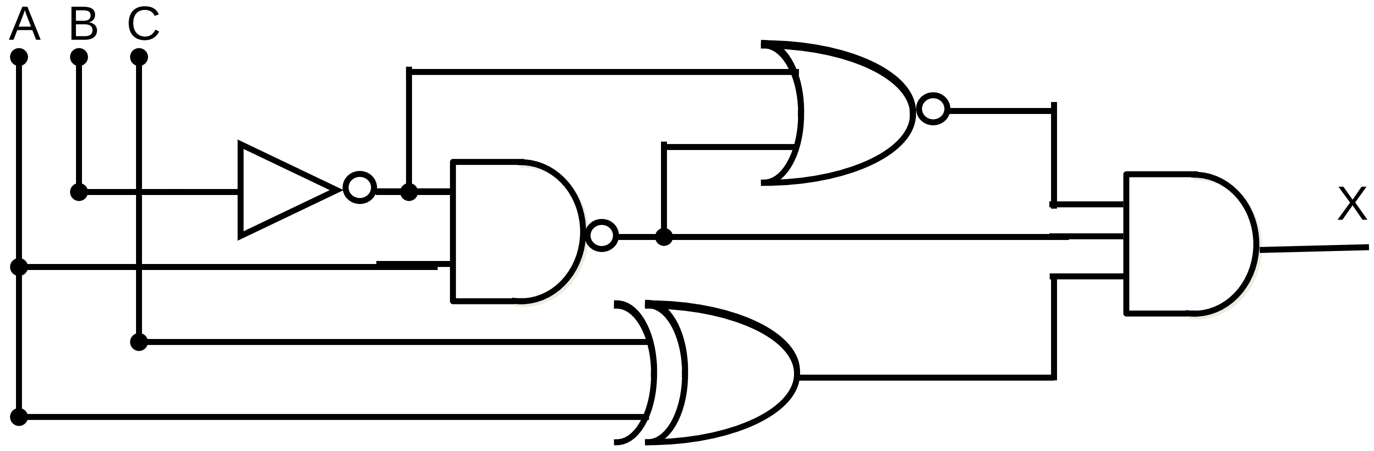
$$Q = \overline{B + C}$$

$$S = (A \,.\, \overline{B}) + \overline{B + C}$$

Álgebra de Boole

Exercício:

Dado o circuito lógico obtenha a expressão correspondente



Álgebra de Boole

Síntese com Soma de Produtos

Seja a função S, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

→ A.B.C

Qual é a expressão para esta tabela-verdade???

É a própria função E

$$S = A.B.C$$

Álgebra de Boole

Síntese com Soma de Produtos

E se o 1 estivesse em outro lugar?????

Seja a função S1, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	S1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Qual é a expressão para esta tabela-verdade???

Usaremos a própria definição da função E: o resultado é 1 se todas as entradas forem 1.

Assim, teremos que usar um termo produto tal que quando A=0, B=1 e C=0, este termo resulta em 1.

Álgebra de Boole

Síntese com Soma de Produtos

E se o 1 estivesse em outro lugar?????

Seja a função S1, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	S1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Repare que $\overline{A}.B.\overline{C} = 1$ somente se $A = 0$, $B = 1$ e $C = 0$.

$\overline{A}.B.\overline{C}$

$$S1 = \overline{A}.B.\overline{C}$$

Álgebra de Boole

Síntese com Soma de Produtos

E se houver duas posições valendo 1?????

Seja a função S, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Qual é a expressão para esta tabela-verdade???

Dividiremos em duas funções S1 e S2. Cada uma vai ficar com um 1 original

Síntese com Soma de Produtos

E se houver duas posições valendo 1?????

Seja a função S, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	S	S1	S2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Note que, se fizermos o OU da coluna S1 com a coluna S2, obteremos exatamente a coluna S. Portanto:

$$S = S1 + S2$$

$$S = \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.C$$

Álgebra de Boole

Síntese com Soma de Produtos

Conclusões:

Cada 1 de uma função pode ser representado por um produto lógico (E) no qual todas as variáveis de entrada estão presentes (tais produtos são chamados mintermos ou minitermos)

Cada mintermo é único, pois representa uma e somente uma posição que vale 1

Uma função pode ser representada por uma soma lógica (OU) dos seus mintermos.

Álgebra de Boole

Síntese com Soma de Produtos

Lista de Minitermos para funções de 3 variáveis de entrada

A	B	C	Minitermos
0	0	0	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$
0	0	1	$\overline{A}.\overline{B}.C$
0	1	0	$\overline{A}.B.\overline{C}$
0	1	1	$\overline{A}.B.C$
1	0	0	$A.\overline{B}.\overline{C}$
1	0	1	$A.\overline{B}.C$
1	1	0	$A.B.\overline{C}$
1	1	1	$A.B.C$

Álgebra de Boole

Exercício:

Dada a função F, com a seguinte tabela-verdade, faça o que se pede:

a) encontre a equação em soma de produtos (soma de minitermos) para a mesma.

b) desenhe o circuito lógico correspondente.

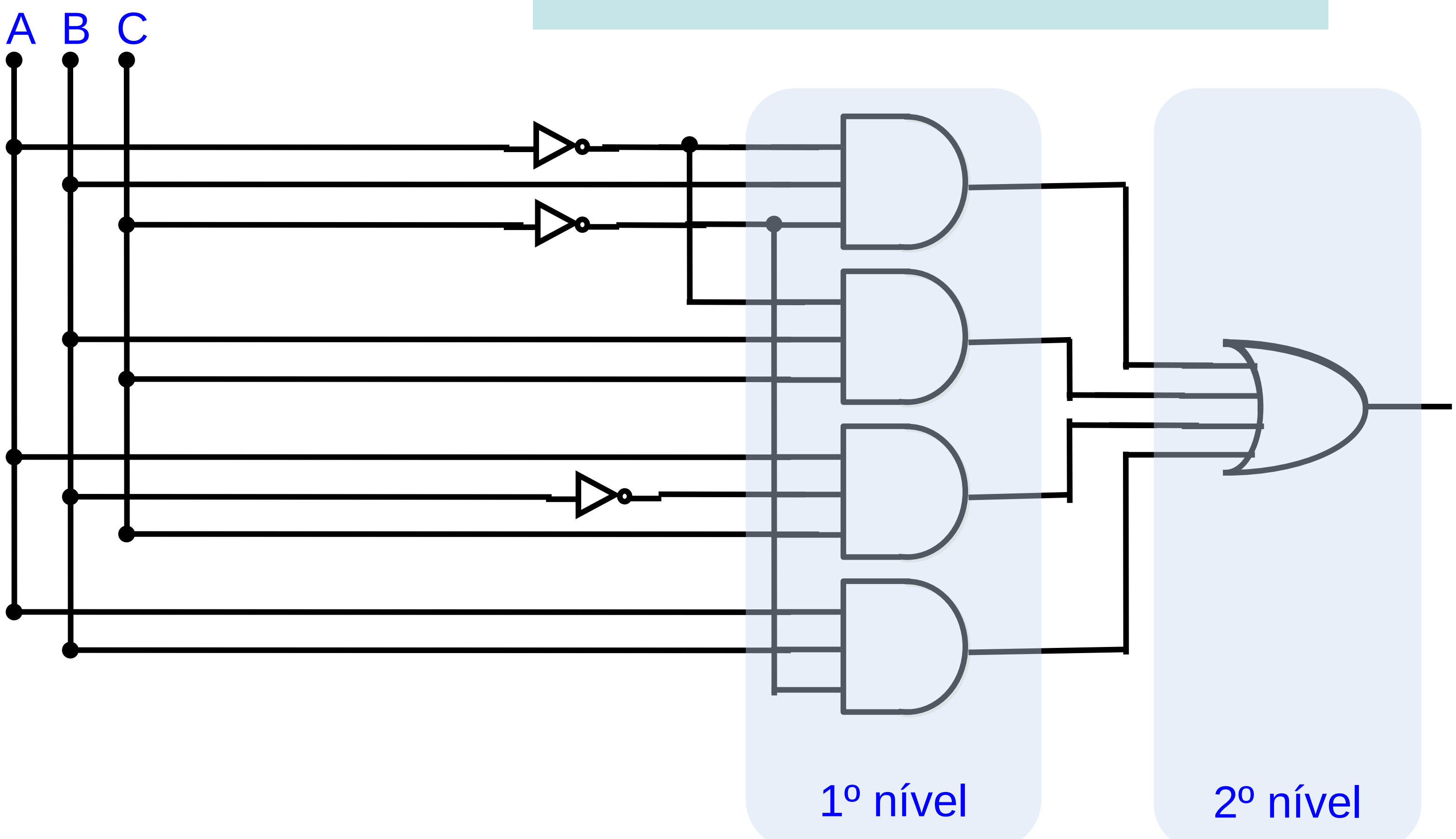
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

Álgebra de Boole

Versão 1

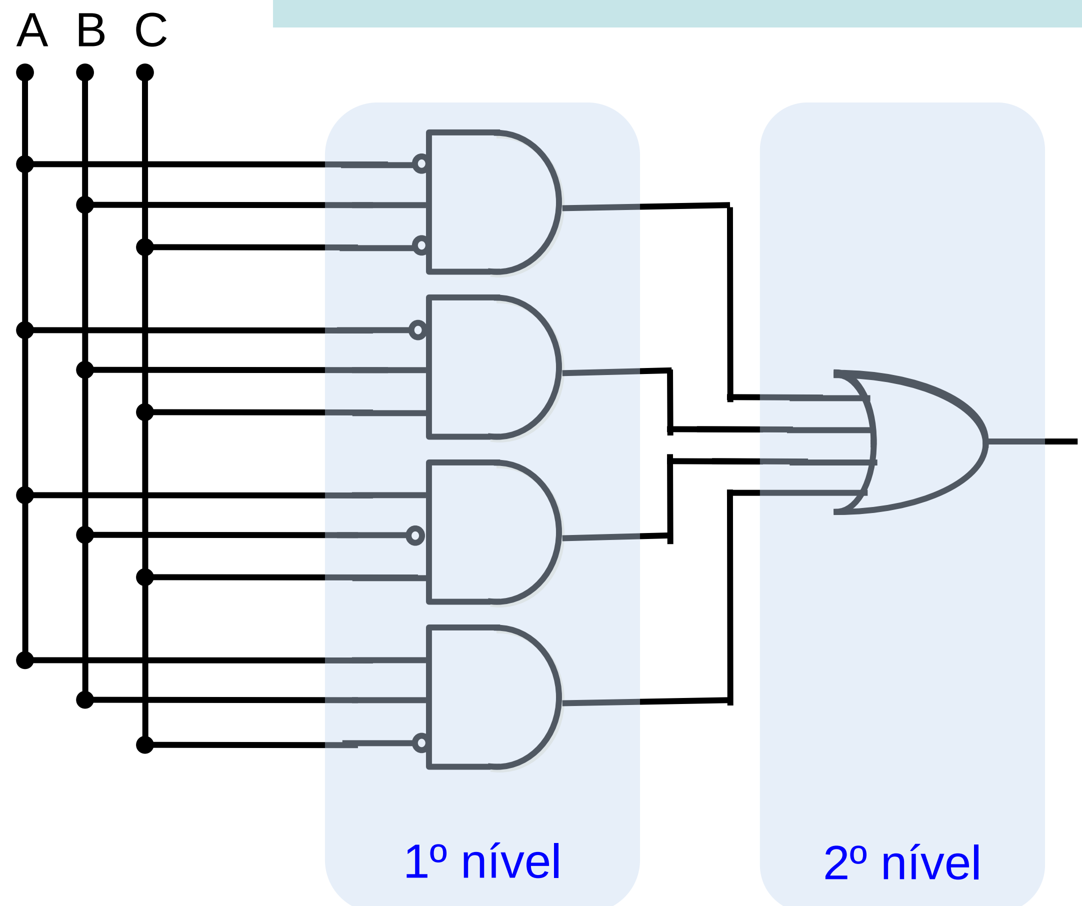
$$F = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$



Álgebra de Boole

Versão 2

$$F = \bar{A}\cdot B\cdot \bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + A\cdot \bar{B}\cdot C + A\cdot B\cdot \bar{C}$$



Custo:

Iremos considerar o somatório de todas as portas de entrada do circuito

Custo:

4 x 3 + 1 x 4 = 16

Síntese com Produto de Somas

Seja a função P, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	P
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

→ A+B+C

Qual é a expressão para esta tabela-verdade???

É a própria função OU

$$P = A+B+C$$

Álgebra de Boole

Síntese com Produto de Somas

E se o 0 estivesse em outro lugar?????

Seja a função P1, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	P1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Qual é a expressão para esta tabela-verdade???

Usaremos a própria definição da função OU: o resultado é 0 se todas as entradas forem 0.

Assim, teremos que usar um termo soma tal que quando A=1, B=0 e C=0, este termo resulta em 0.

Álgebra de Boole

Síntese com Produto de Somas

E se o 0 estivesse em outro lugar?????

Seja a função P1, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	P1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Repare que $\overline{A}+B+C = 0$ somente se $A = 1$, $B = 0$ e $C = 0$.

$\overline{A}+B+C$

$$P1 = \overline{A}+B+C$$

Álgebra de Boole

Síntese com Produto de Somas

E se houver duas posições valendo 0?????

Seja a função P, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	P
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Qual é a expressão para esta tabela-verdade???

Dividiremos em duas funções S1 e S2. Cada uma vai ficar com um 0 original.

Álgebra de Boole

Síntese com Produto de Somas

E se houver duas posições valendo 0?????

Seja a função P, com a seguinte tabela-verdade:

A	B	C	S	S1	S2
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Note que, se fizermos o E da coluna S1 com a coluna S2, obteremos exatamente a coluna S. Portanto:

$$S = S1 \, . \, S2$$

$$\mathbf{S = (A+B+C) \, . \, (\overline{A}+B+C)}$$

No produto das somas o parênteses é obrigatório

Álgebra de Boole

Síntese com Produto de Somas

Conclusões:

Cada 0 de uma função pode ser representado por uma soma lógica (OU) na qual todas as variáveis de entrada estão presentes (tais somas são chamadas maxtermos ou maxitermos)

Cada maxtermo é único, pois representa uma e somente uma posição que vale 0

Uma função pode ser representada por um produto lógico (E) dos seus maxtermos.

Álgebra de Boole

Síntese com Produto de Somas

Lista de Maxitermos para funções de 3 variáveis de entrada

A	B	C	Maxitermos
0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

Álgebra de Boole

Exercício:

Dada a função F, com a seguinte tabela-verdade, faça o que se pede:

a) encontre a equação em produto de somas (produto de maxtermos) para a mesma.

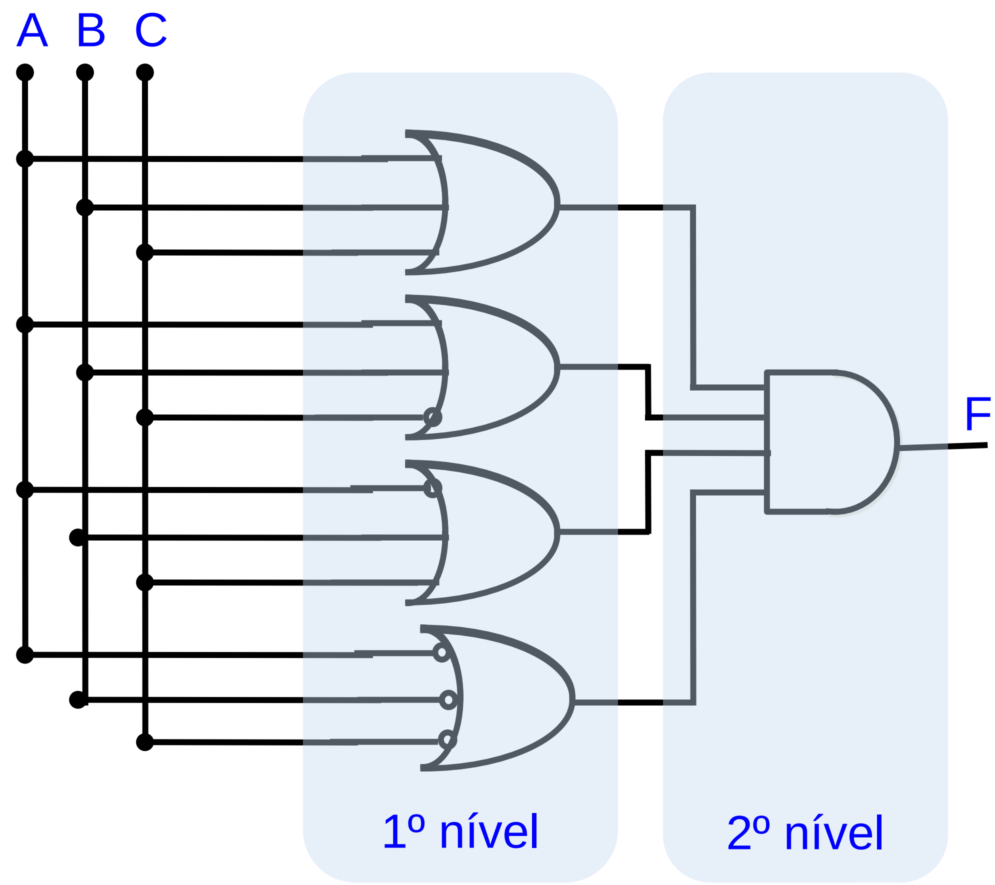
b) desenhe o circuito lógico correspondente.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Álgebra de Boole

$$F = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$



Custo:

$4 \times 3 + 1 \times 4 = 16$

Álgebra de Boole

Formas Canônicas: Resumo

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$S(A,B,C)=\overline{A}.B.\overline{C}+\overline{A}.B.C+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}$$

$$S(A,B,C)=m_2+m_3+m_5+m_6$$

$$S(A,B,C)=\sum(2,3,5,6)$$

$$S(A,B,C)=(A+B+C).(A+B+\overline{C}).(\overline{A}+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$S(A,B,C)=M_0.\ M_1.\ M_4.\ M_7$$

$$S(A,B,C)=\prod(0,1,4,7)$$

Formas Canônicas: Resumo

Conclusões:

Cada 0 de uma função pode ser representado por uma soma lógica (OU) na qual todas as variáveis de entrada estão presentes (tais somas são chamadas maxtermos ou maxitermos)

Cada maxtermo é único, pois representa uma e somente uma posição que vale 0

Uma função pode ser representada por um produto lógico (E) dos seus maxtermos.

Álgebra de Boole

✓ Simplificação Algébrica

Dificuldades na obtenção da equação mínima:

- O processo de simplificação é recursivo: após simplificar mintermos, pode ser possível continuar a simplificação com os produtos resultantes da primeira rodada de simplificação;
- A ordem na qual se procede a simplificação faz diferença!
- É difícil identificar as simplificações possíveis (e também a ordem ótima);

Álgebra de Boole

✓ Simplificação Algébrica

Faz uso:

- Propriedades da Álgebra de Boole;
- Teoremas de DeMorgan;
- Identidades Auxiliares;

Propriedades das Portas Lógicas

1) Porta NOT

$$\overline{\overline{A}} = A$$

2) Porta E (AND)

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \,.\, 0 = 0$$

$$A \,.\, 1 = A$$

$$A \,.\, A = A$$

$$A \,.\, \bar{A} = 0$$

Álgebra de Boole

3) Porta OU (OR)

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A + 0 =$? A

$A + 1 =$? 1

$A + A =$? A

$A + \bar{A} =$? 1

Fazendo Simplificações através das propriedades

$S = (\bar{A} \cdot 0) + (B \cdot B) + (A \cdot \bar{A}) + (B \cdot 1)$

$S =$???

$$\mathbf{S = B}$$

Propriedades da Algebra de Boole

1) Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem.

$S = A.B.C$ $S = A.C.B$ $S = B.A.C$

2) Associativa

As variáveis de entrada podem ser operadas de duas em duas (ou de três em três, ou de quatro em quatro...)

$S = (A+B)+C$ $S = A+B+C$ $S = A+(B+C)$

3) Distributiva

Refere-se a operação de "multiplicação".

$S = A\ (B + C)$ $S = AB + AC$

Álgebra de Boole

Exercício:

Simplifique as expressões:

$$1)\ S = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B$$

$$2)\ P = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C}$$

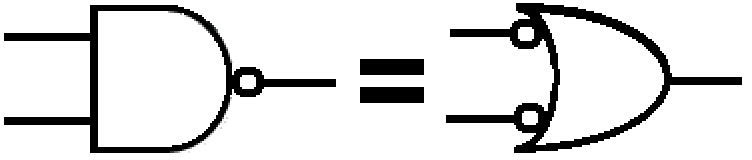
$$3)\ Q = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Álgebra de Boole

Teoremas de DeMorgan

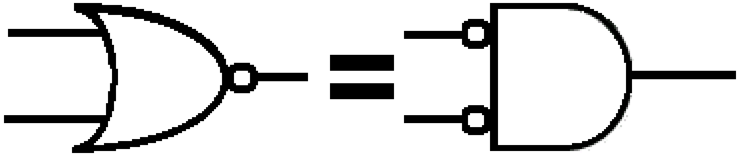
- Definição 1: O complemento do produto é igual a soma dos complementos.

$$\overline{A . B} = \overline{A} + \overline{B}$$



- Definição 2: O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$$



Álgebra de Boole

Exercício:

Simplifique as expressões:

$$1)\ S = \left(\overline{\overline{A.C} + B + D}\right) + \left(C.\left(\overline{A.C.D}\right)\right)$$

$$2)\ P = \overline{A\,\overline{B\,\overline{\mathrm{C}\mathrm{D}}}}$$

Álgebra de Boole

Identidades Auxiliares da Algebra de Boole

1) A + (A . B) = A

2) A + (Ā . B) = A + B

$$\overline{\overline{A+\left(\overline{A}.B\right)}}=\overline{\overline{A}.\left(\overline{\overline{A}.B}\right)}=\overline{\overline{A}.\left(\overline{\overline{A}}+\overline{B}\right)}$$

Aplicado – se a propriedade distributiva

$$\overline{\left(\overline{A}.A\right)+\left(\overline{A}.\overline{B}\right)}=\overline{\overline{A}.\overline{B}}=A+B$$

3) (A+B).(A+C) = A + B.C

Aplicado – se a propriedade distributiva

$$A.A+A.C+B.A+B.C$$

$$A+A.C+A.B+B.C$$

$$A\left(1+C+B\right)+B.C$$

$$A+B.C$$

Álgebra de Boole

Exercício:

Simplifique a expressão:

$$1)\ S = \overline{\left(A.\overline{C}\right) + \overline{A}} + \overline{B\,\overline{C}\,A\,\overline{C}} + \left(\overline{A}\,B\right)$$

$$2)\ X = \overline{A.\overline{C} + \overline{A}} + \overline{B.\overline{C}.A.\overline{C}} + \overline{A}.B$$

Álgebra de Boole

- ***Teoremas*** (há autores que chamam de *leis*, *propriedades*, *identidades*, *regras*)

t1)	$\overline{\overline{A}} = A$			Involução
t2)	$A \cdot 0 = 0$	t2')	$A + 1 = 1$	Elementos nulos
t3)	$A \cdot 1 = A$	t3')	$A + 0 = A$	Identidades
t4)	$A \cdot A = A$	t4')	$A + A = A$	Idempotência
t5)	$A \cdot \overline{A} = 0$	t5')	$A + \overline{A} = 1$	Complementos

---

t6)	$A \cdot B = B \cdot A$	t6')	$A + B = B + A$	Comutativa
t7)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	t7')	$(A + B) + C = A + (B + C)$	Associativa
t8)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	t8')	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	Distributiva

---

t9)	$A \cdot (A + B) = A$	t9')	$A + A \cdot B = A$	Absorção
t10)	$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$	t10')	$A + \overline{A} \cdot B = A + B$	Absorção
t11)	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	t11')	$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$	Adjacência lógica
t12)	$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$	t12')	$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$	Consenso

---

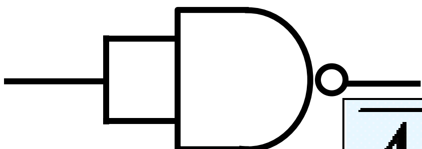
t13)	$\overline{A \cdot B \cdot \ldots \cdot Z} = \overline{A} + \overline{B} + \ldots + \overline{Z}$	t13')	$\overline{A + B + \ldots + Z} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \ldots \cdot \overline{Z}$	DeMorgan

Álgebra de Boole

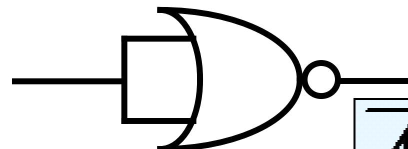
Universalidade das Portas

Com NAND/NOR é possível construir qualquer outra função

NOT

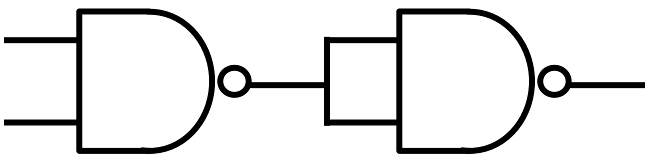


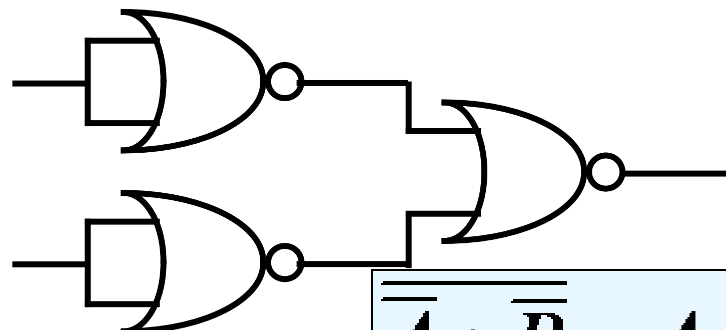
$$\overline{A\cdot A}=\overline{A}$$



$$\overline{A+A}=\overline{A}$$

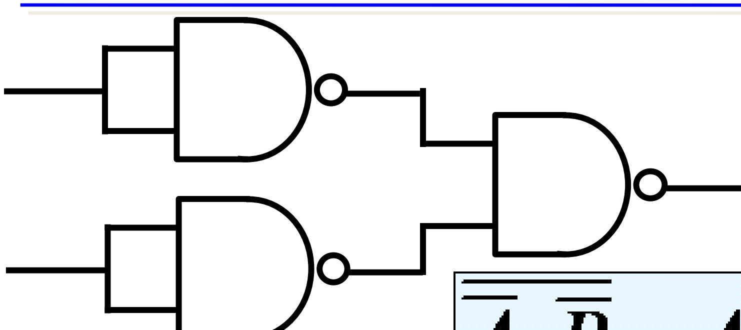
AND



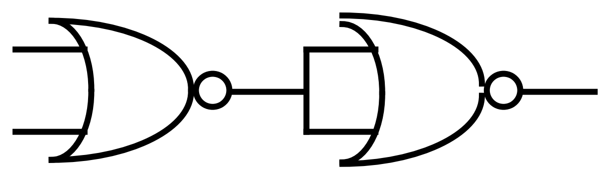


$$\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$$

OR



$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A+B$$



Mapas de Karnaugh

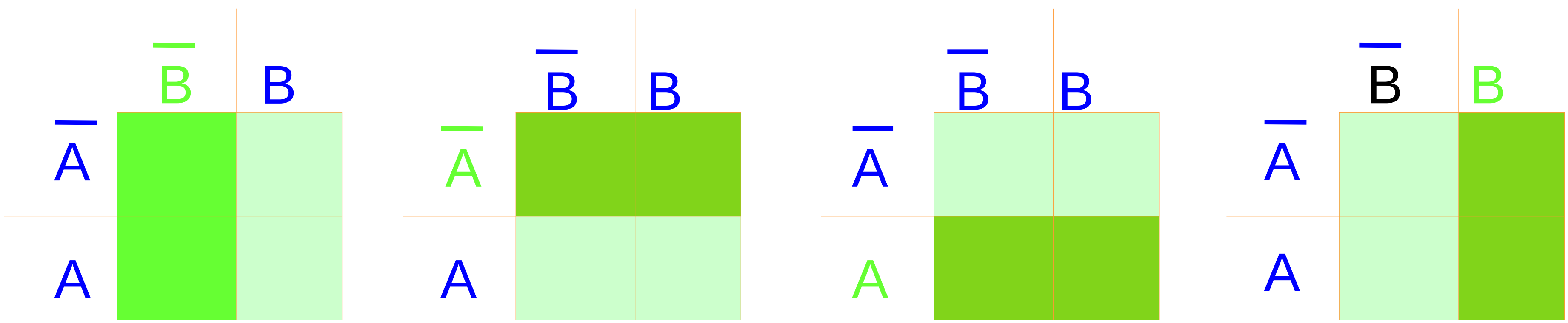
- Método gráfico para simplificação de expressões
- Processo simples, estruturado e sistemático
- Não indicado para circuitos grandes (até 5 entradas)
- Circuito obtido deve estar na forma canônica
- Construção a partir da tabela-verdade
  - Cada linha da tabela corresponde a um quadrado no mapa
  - Quadrados adjacentes diferem de apenas 1 variável (código gray)
  - A primeira linha/coluna é adjacente à última linha/coluna
  - O mapa é preenchido com 0s e 1s

Mapas de Karnaugh

- 2 Variáveis

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$		
A		

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A}.B$
A	$A.\overline{B}$	$A.B$



Mapas de Karnaugh

- 2 Variáveis

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	1	0

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	1	0

Mapas de Karnaugh

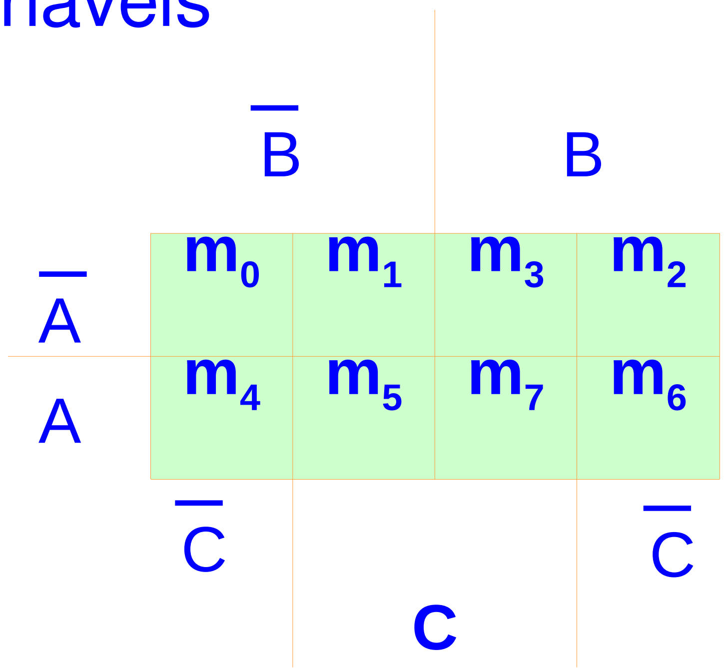
- 3 Variáveis

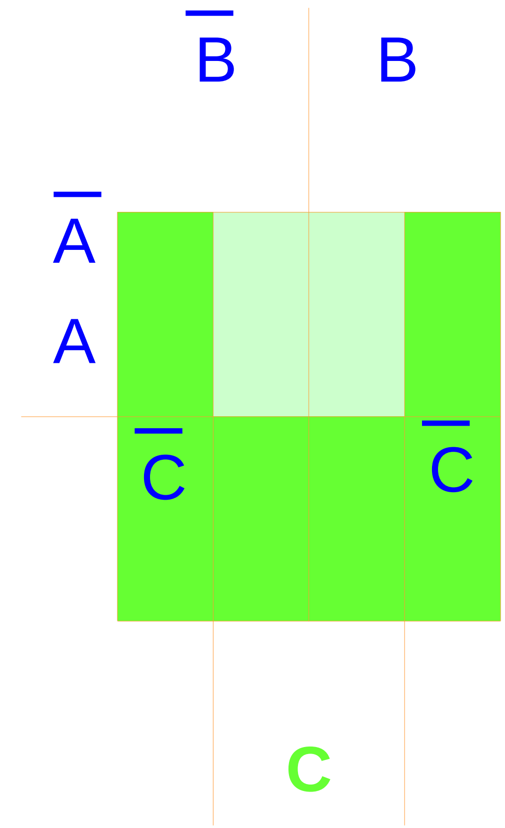
	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$				
A				
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	$\overline{A}.\overline{B}.C$	$\overline{A}.B.C$	$\overline{A}.B.\overline{C}$
A	$A.\overline{B}.\overline{C}$	$A.\overline{B}.C$	$A.B.C$	$A.B.\overline{C}$
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Mapas de Karnaugh

- 3 Variáveis

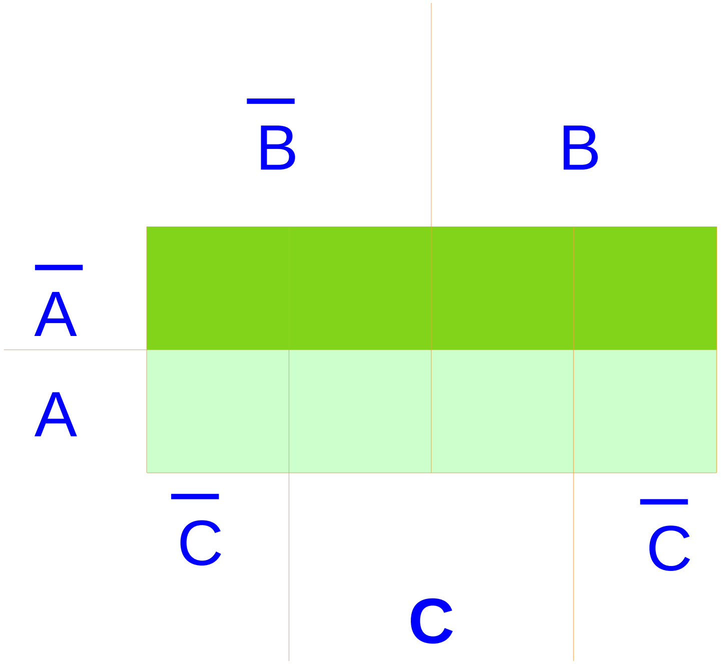




Mapas de Karnaugh

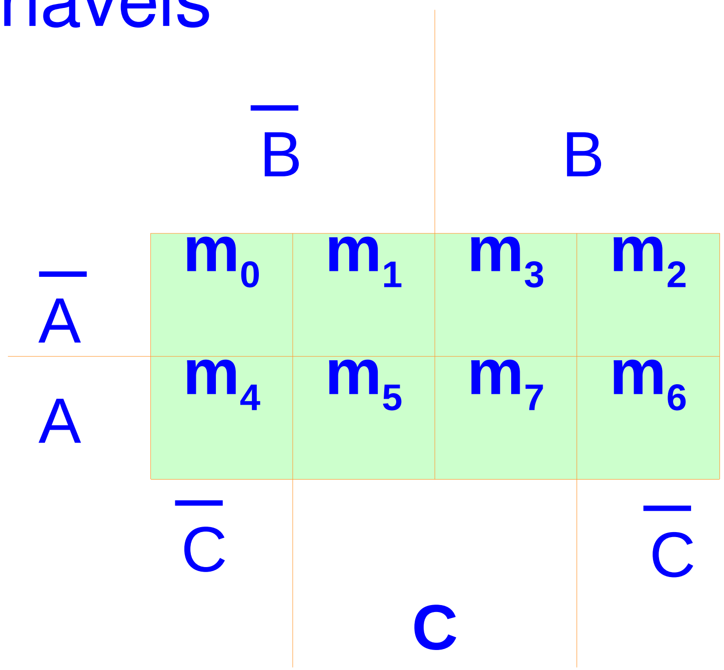
- 3 Variáveis

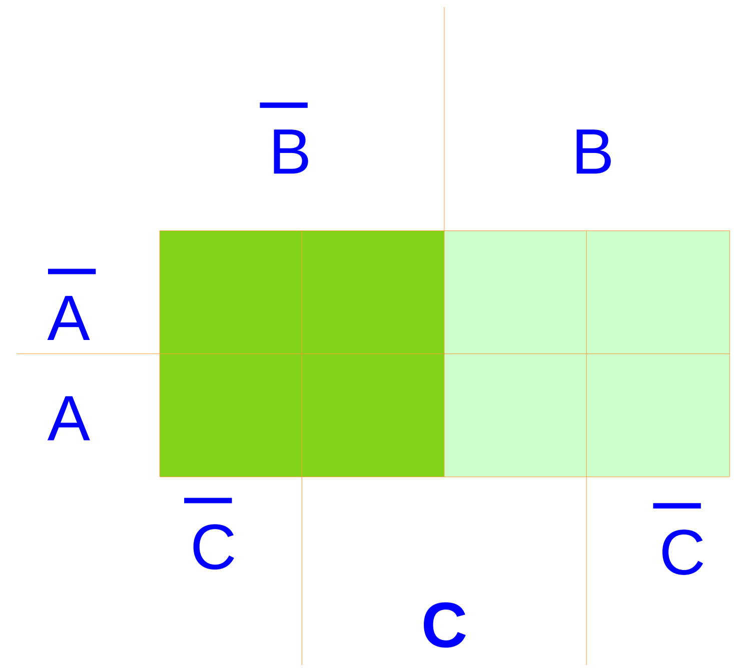
	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$



Mapas de Karnaugh

- 3 Variáveis

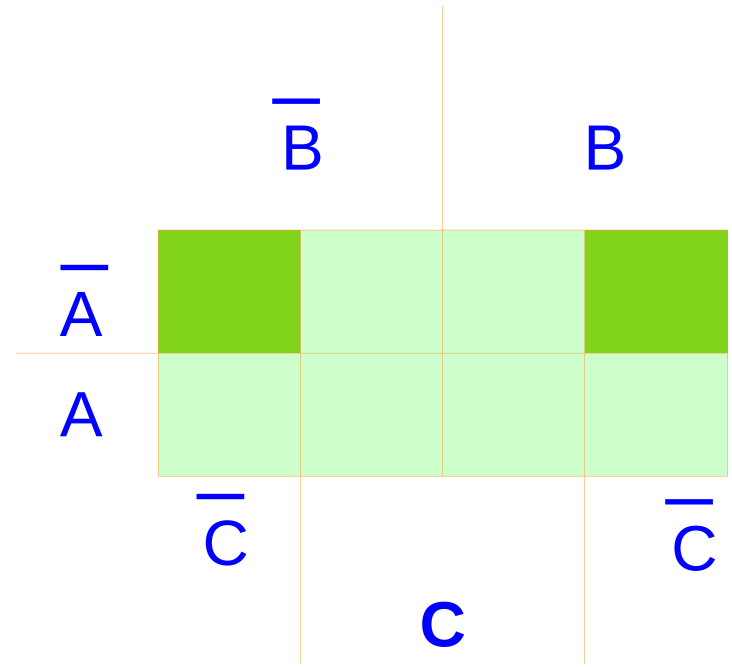




Mapas de Karnaugh

- 3 Variáveis

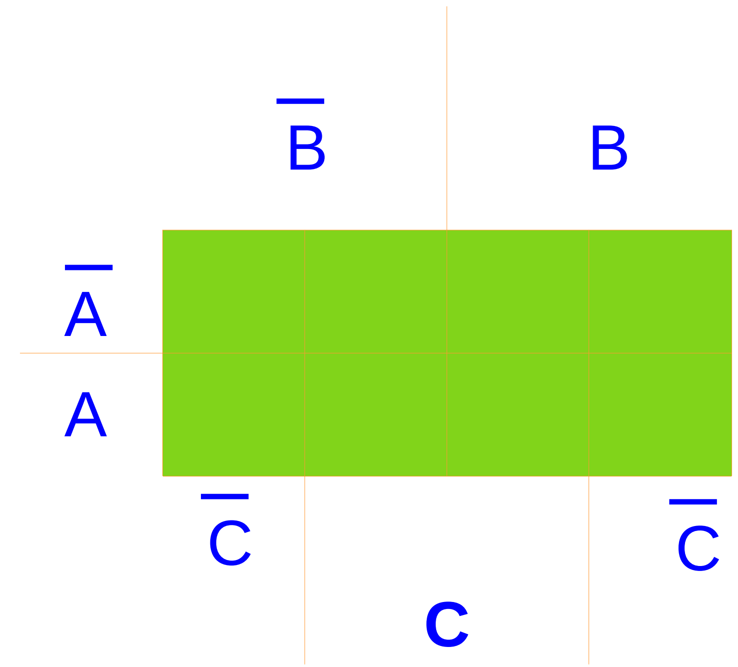
	$\bar{B}$		B	
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$
$\bar{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6



Mapas de Karnaugh

- 3 Variáveis

	$\overline{B}$	$\overline{B}$	B	B
$\overline{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$



Mapas de Karnaugh

3 Variáveis

- Devemos procurar por 1s adjascentes
  1) Agrupar em quadras
  2) Agrupar em duplas
  3) Pegar os remanescentes isoladamente
- Todos os uns devem ser utilizados;
- Pode usar o mesmo 1 mais de uma vez;

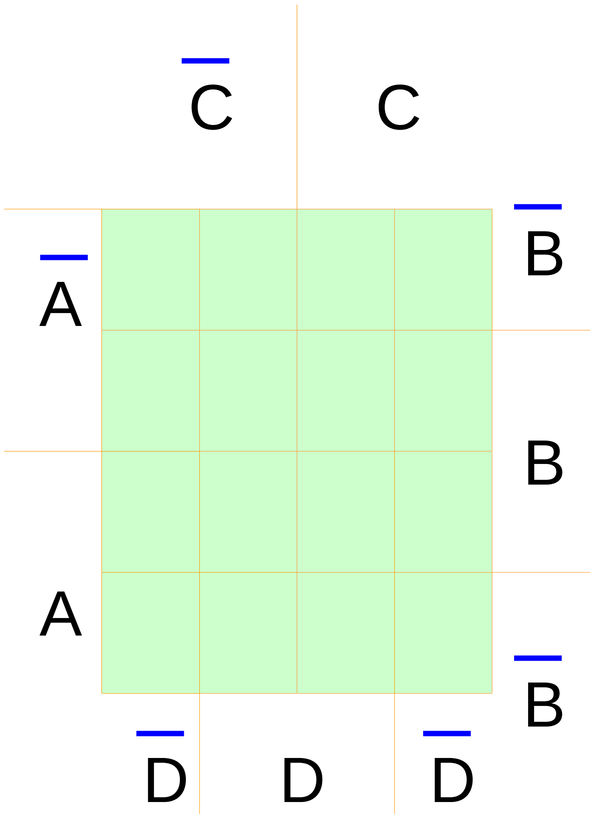
Mapas de Karnaugh

- 3 Variáveis

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	**1**	**0**	**0**	**1**
A	**1**	**0**	**1**	**1**
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Mapas de Karnaugh

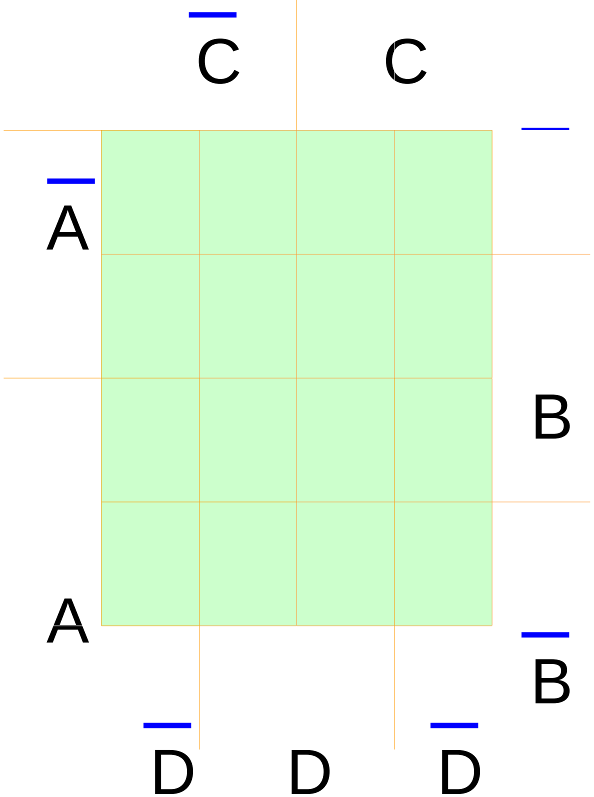
- 4 Variáveis



		$\overline{C}$		C		
$\overline{A}$		$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$	$\overline{A}.\overline{B}.C.D$	$\overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D}$	$\overline{B}$
		$\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D}$	$\overline{A}.B.\overline{C}.D$	$\overline{A}.B.C.D$	$\overline{A}.B.C.\overline{D}$	B
A		$A.B.\overline{C}.\overline{D}$	$A.B.\overline{C}.D$	$A.B.C.D$	$A.B.C.\overline{D}$	
		$A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$	$A.\overline{B}.\overline{C}.D$	$A.\overline{B}.C.D$	$A.\overline{B}.C.\overline{D}$	$\overline{B}$
		$\overline{D}$	D		$\overline{D}$	

Mapas de Karnaugh

- 4 Variáveis



	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Mapas de Karnaugh

4 Variáveis

- Devemos procurar por 1s adjacentes

  1) Agrupar em oitavas

  2) Agrupar em quadras

  3) Agrupar em duplas

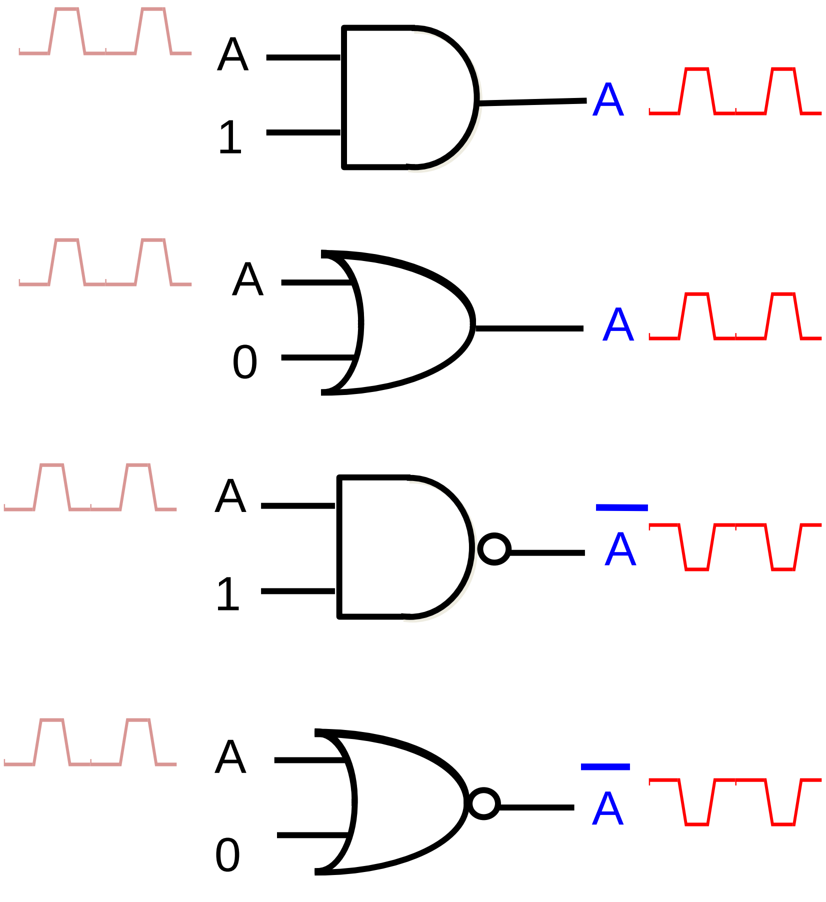
  3) Pegar os remanescentes isoladamente

- Todos os uns devem ser utilizados;

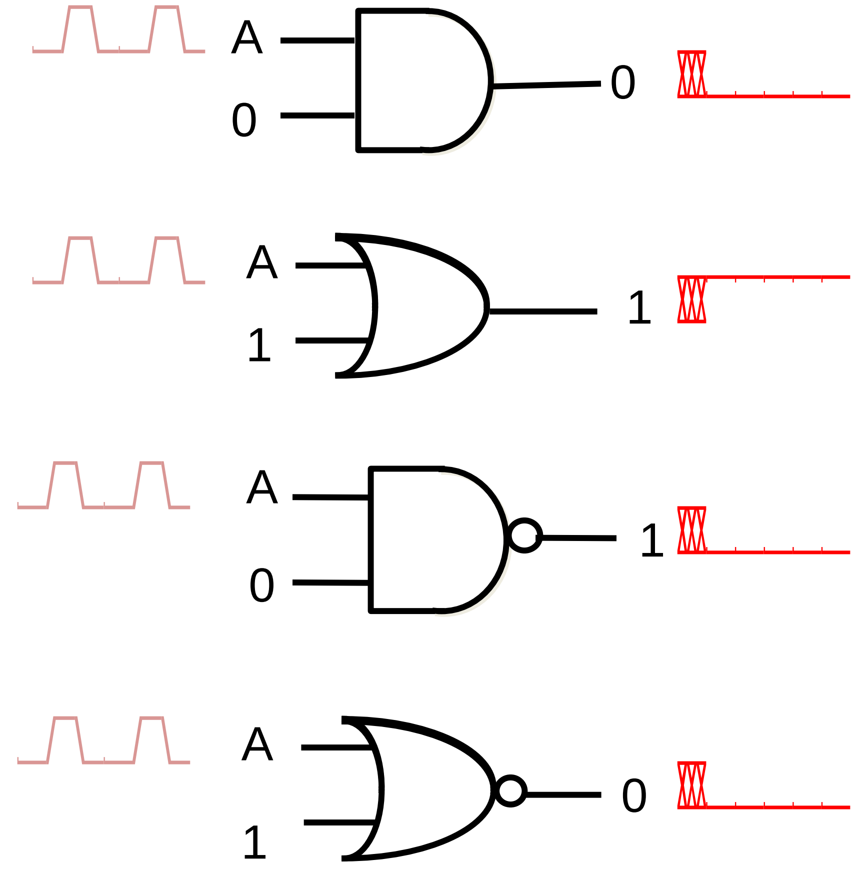
- Pode usar o mesmo 1 mais de uma vez;

Álgebra de Boole

para habilitar o sinal

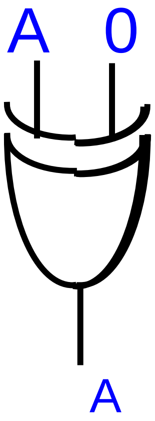


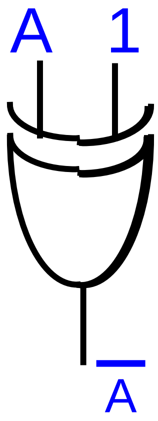
para desabilitar o sinal



Álgebra de Boole

Inversor Controlado

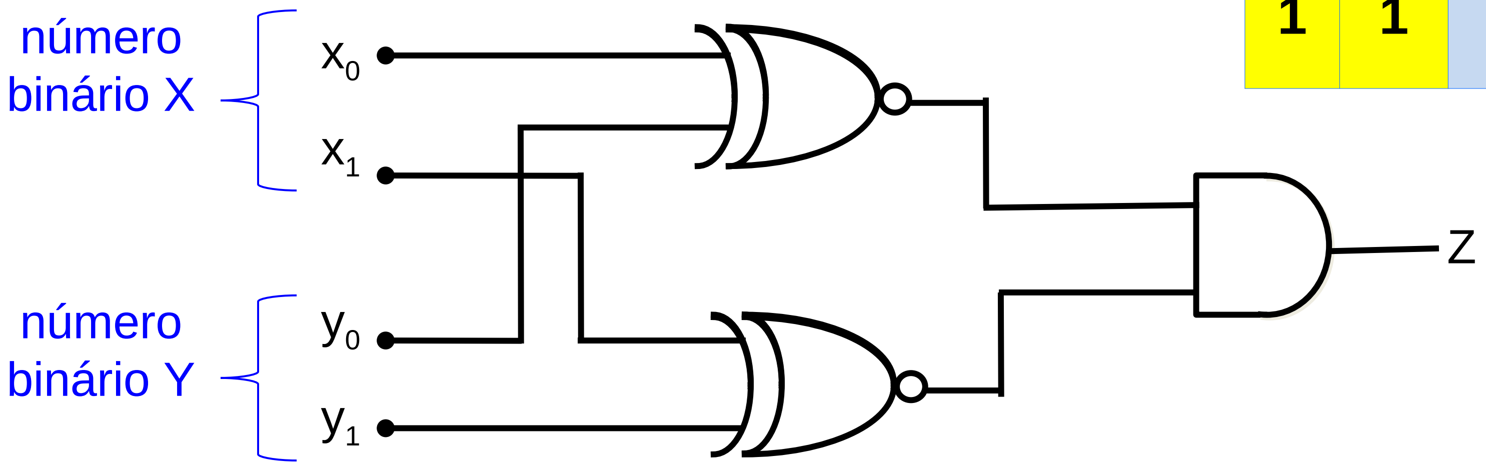




A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

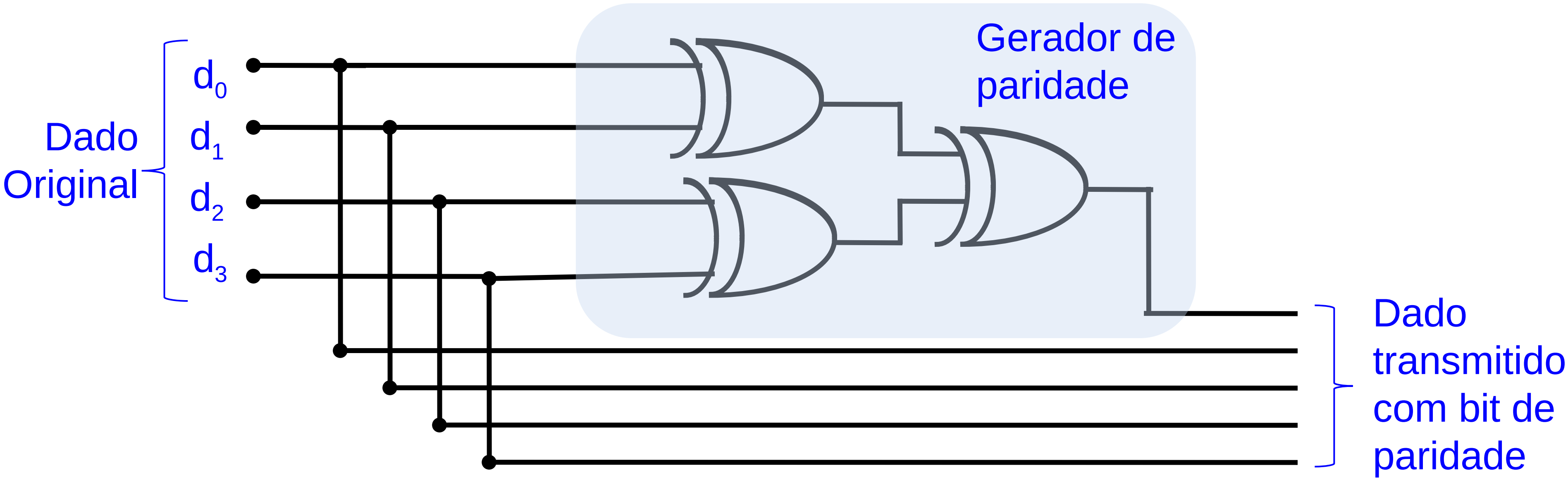
Verificador de Igualdade

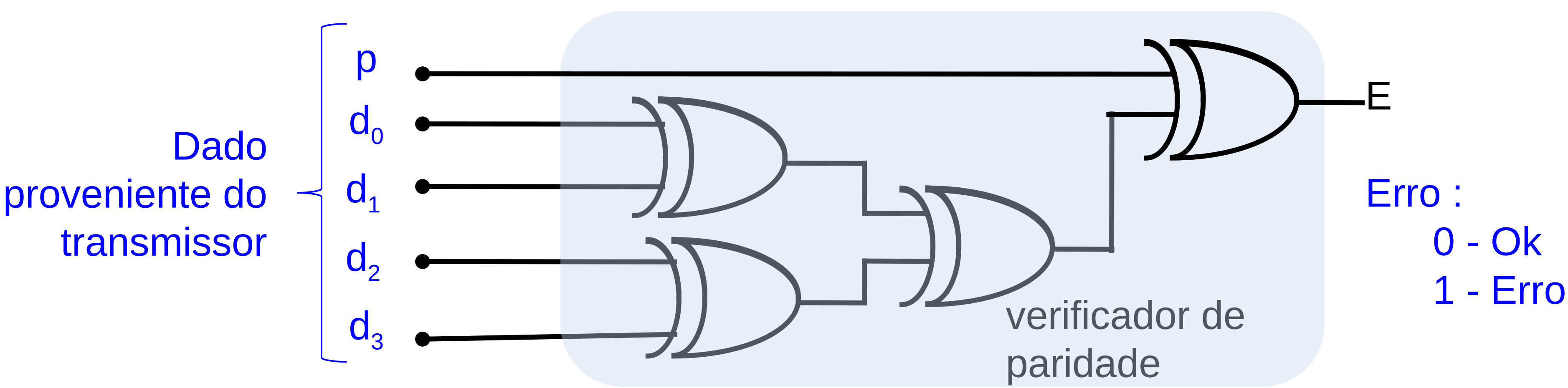
A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Álgebra de Boole

Gerador e Verificador de Paridade par





Álgebra de Boole

Representação IEEE Ansi