Análise e Complexidade de Algoritmos

UFFS
Ciência da Computação
Estrutura de Dados

Prof. Denio Duarte
duarte@uffs.edu.br
Prof. Claunir Pavan
claunir.pavan@uffs.edu.br

Algoritmos

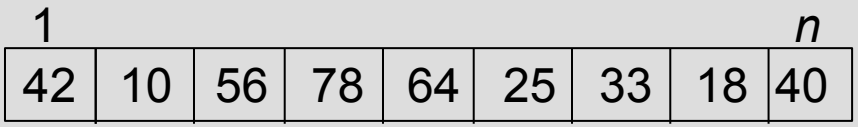
- Informalmente, um algoritmo é um procedimento computacional bem definido que:
  - Recebe um conjunto de valores como entrada.
  - Produz um conjunto de valores como saída
- Assim, um algoritmo é uma ferramenta para resolver um problema computacional.

Algoritmos

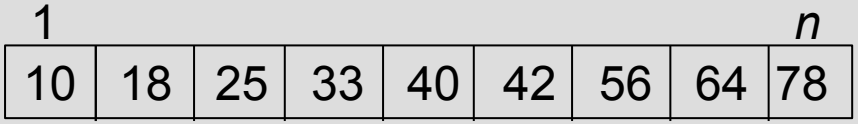
- Problema
  - Primalidade (determinar se um número é primo):
    - Entrada: 9411461
    - Saída: é primo
    - Entrada: 8411461
    - Saída: Não é primo

Algoritmos

- Problema:
  - Ordenação: A[1..n] é crescente se A[1] ≤ ... ≤ A[n][1]
  - Rearranjar o vetor A de modo que fique ordenado.
    - Entrada:



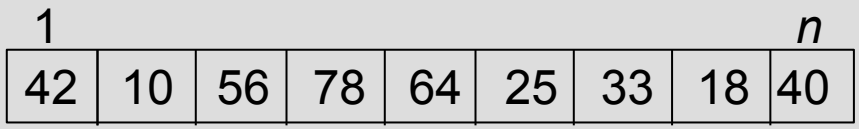
    - Saída:



[1] Por simplificação, a primeira posição do vetor será considerada a 1

Algoritmos

- Instância de um problema: conjunto de valores que serve de entrada para um determinado problema:
  - Os números *9411461* e *8411461* são instâncias para o problema de primalidade.
  - O vetor



é uma instância para o problema de ordenação.

Algoritmos

- Descrição de algoritmos:
  - Linguagem de programação (C, Pascal, Java, etc)
  - Implementado como um *hardware*
  - Pseudo-Código

Algoritmos

- Razões para o estudo:
  - Evitar reinventar a roda:
    - Existem bons algoritmos que solucionam problemas importantes.
  - Ajudar no desenvolvimento de seus algoritmos:
    - Nem sempre existe um algoritmo de prateleira que sirva para resolver o seu problema.

Complexidade

- Muitas vezes, não é suficiente saber que um determinado algoritmo produz uma saída correta.
  - Um algoritmo extremamente lento em geral não tem muita utilidade.

- Queremos projetar/desenvolver algoritmos eficientes (=rápidos).

Complexidade

- Mas o que seria uma boa medida da eficiência de um algoritmo?
  - Uma possibilidade: estimar através de uma análise matemática o tempo que o algoritmo gasta em função do **tamanho da entrada**.

Complexidade

- Exemplo
  - O tamanho do problema de ordenação corresponde ao tamanho do vetor a ser ordenado.
  - Dado um vetor de *n* posições, o tamanho do problema será *n*.

Complexidade

- O comportamento limite de um algoritmo (em tempo ou espaço) conforme o crescimento da entrada é chamado *comportamento assintótico*.
- Ou seja, o comportamento de um algoritmo para uma entrada GRANDE.
- Podemos dizer que o *comportamento assintótico* representa o “pior caso” para um algoritmo.

Complexidade

- A complexidade é dada por uma fórmula matemática:
  - *3+n+4n*, onde *n* é o tamanho da entrada.
  - Como estamos interessados em n_s GRANDES, na fórmula acima o termo dominante é *4n*, assim podemos simplificar a complexidade para *4n*.
  - Chamamos de notação assintótica

entrada	complexidade real	notação assintótica
n	*3+n+4n*	*4n*
10	53	40
50	253	200
100	503	400
5000	25003	20000

Complexidade

- Se um algoritmo *A* processa uma entrada *n* no tempo kn^2 (onde *k* é uma constante), dizemos que a complexidade de *A* é n^2.
- Formalmente escrevemos $A \in O(n^2)$, ou seja, *A* pertence a classe dos algoritmos quadráticos
- Dizemos também que *A* é da Ordem de n^2 (daí o símbolo *O*)

Complexidade

- Exemplo de cálculo:

```
procedimento teste (inteiro n)
variaveis
    inteiros b, c, i;
inicio
    b:=n*2;
    c:=0;
    para i de 1 ate n faça
       c:=b+n;
    fim para;
fim;
```

Complexidade

	custo	vezes
`procedimento teste (inteiro n)`		
`variaveis`		
`    inteiros b, c, i;`		
`inicio`		
`    b:=n*2;`	c_1	1
`    c:=0;`	c_2	1
`    para i de 1 ate n faça`	c_3	n
`       c:=b+n;`	c_4	n
`    fim para;`		
`fim;`		

A constante c_k representa o custo (tempo) de cada instrução.

Complexidade

`procedimento teste (inteiro n)`	`custo`	`vezes`
`variaveis`		
`    inteiros b, c, i;`		
`inicio`		
`    b:=n*2;`	c_1	1
`    c:=0;`	c_2	1
`    para i de 1 ate n faça`	c_3	n
`       c:=b+n;`	c_4	n
`    fim para;`		
`fim;`		

T(n), tempo de execução com entrada de tamanho *n*, é de:
$T(n)=1*c_1+1*c_2+n*c_3+n*c_4$, ou $c_1+c_2+nc_3+nc_4$.

Complexidade

```
procedimento teste (inteiro n)      custo       vezes
variaveis
    inteiros b, c, i;
inicio
    b:=n*2;                         c1          1
    c:=0;                           c2          1
    para i de 1 ate n faça          c3          n
       c:=b+n;                      c4          n
    fim para;
fim;
```

T(n), tempo de execução com entrada de tamanho *n*, é de:

$T(n)=1*c_1+1*c_2+n*c_3+n*c_4$, ou $c_1+c_2+nc_3+nc_4$.

Para o pior caso (*comportamento assintótico*) podemos resumir a complexidade de tempo em $O(n)$.

Complexidade

- A importância de medir a complexidade nasce da necessidade de comparar algoritmos.

- Exemplo:

Algoritmo	Complexidade Tempo
A_1	n
A_2	$n \log n$
A_3	n^2
A_4	n^3
A_5	2^n

Complexidade

Suponhamos que o custo da instrução é 1 milisegundo, o tamanho do problema que pode ser resolvido por cada algoritmo é:

Algoritmo	O	1seg	1min	1h
A_1	n	1000	$6*10^4$	$3,6*10^6$
A_2	$n \log n$	140	4893	$2,0*10^5$
A_3	n^2	31	244	1897
A_4	n^3	10	39	153
A_5	2^n	9	15	21

Qual é o melhor?

Complexidade

- Por que se importar com a complexidade de tempo se os computadores aumentam seus poderes de processamento?
  - Por exemplo: GPU’s e multicores

Complexidade

- Por que se importar com a complexidade de tempo se os computadores aumentam seus poderes de processamento?

Algoritmo		Máquina Atual	10 vezes mais rápida
A_1	n	v_1	$10v_1$
A_2	$n \log n$	v_2	$\cong 10v_2$
A_3	n^2	v_3	$3{,}16v_3$
A_4	n^3	v_4	$2{,}15v_4$
A_5	2^n	v_5	$v_5+3{,}3$

Complexidade

- Armadilhas da notação assintótica:
  - Se temos um algoritmo *A* cujo $T(n)=100n$ podemos dizer que *A* é $O(n)$.
  - Se temos um algoritmo *B* cujo $T(n)=n \log_{10} n$ podemos dizer que *B* é $O(n \log_{10} n)$.
  - Assim *A* é assintoticamente mais eficiente que *B*, certo?

Complexidade

- Armadilhas da notação assintótica:
  - Se temos um algoritmo *A* cujo $T(n)=100n$ podemos dizer que *A* é $O(n)$.
  - Se temos um algoritmo *B* cujo $T(n)=n \log_{10} n$ podemos dizer que *B* é $O(n \log_{10} n)$.
  - Assim *A* é assintoticamente mais eficiente que *B*, certo?
  - **Errado**, *A* só e mais eficiente que *B* quando $n=10^{100}$

Aviso: cuidado com as constantes no momento da análise assintótica

Cálculo

- Valor dominante da direita VDD:
  - *L = (*10*;* 9*;* 5*;* 13*;* 2*;* 7*;* 1*;* 8*;* 4*;* 6*;* 3*)*
  - *VDD=(13,8,6,3)*

```
//Entrada: Vetor L[1..n]
//Retorno: Vetor com os elementos dominantes à direita
   DominanteADireita(L) {
      D = vetor vazio
      for (i = 1 to n) {
         isDominante = true
         for (j = i+1 to n)
            if (L[i] <= L[j]) isDominante = false
         if (isDominante) acrescenta L[i] em D
      }
      return L
   }
```

Cálculo

```
// Entrada: Vetor L[1..n]
// Retorno: Vetor com os elementos dominantes à direita
    DominanteADireita(L) {
       D = vetor vazio
       for (i = 1 to n) {
          isDominante = true
          for (j = i+1 to n)
             if (L[i] <= L[j]) isDominante = false
          if (isDominante) acrescenta L[i] em D
       }
       return L
    }
```

- Temos o bloco do `for (`variável *i*) executado *n* vezes
- O bloco do `for(`variável *j*) é executado de *i+1* até *n* vezes, totalizando n-(i+1)+1 vezes que é igual à *n-i* (pois a constante 1 não tem grande influência no resultado).

Cálculo

- Temos o bloco do `for` (variável *i*) executado *n* vezes
- O bloco do `for`(variável *j*) é executado de *i+1* até *n* vezes, totalizando n-(i+1)+1 vezes que é igual à *n-i*.
- Assim temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)=(n-1)+(n-2)+\ldots+1+0=\frac{(n-1)*(n+1)}{2}=\frac{n^2-1}{2}$$

Assintoticamente o algoritmo *DominanteADireita* é $O(n^2)$.

Ordens de Complexidade

- Melhor caso, notação Ω (limite assintótico inferior)
- Caso médio, notação Θ (limite assintótico médio)
- Pior caso, notação O (limite assintótico superior)

Ordens de Complexidade

- Cola:

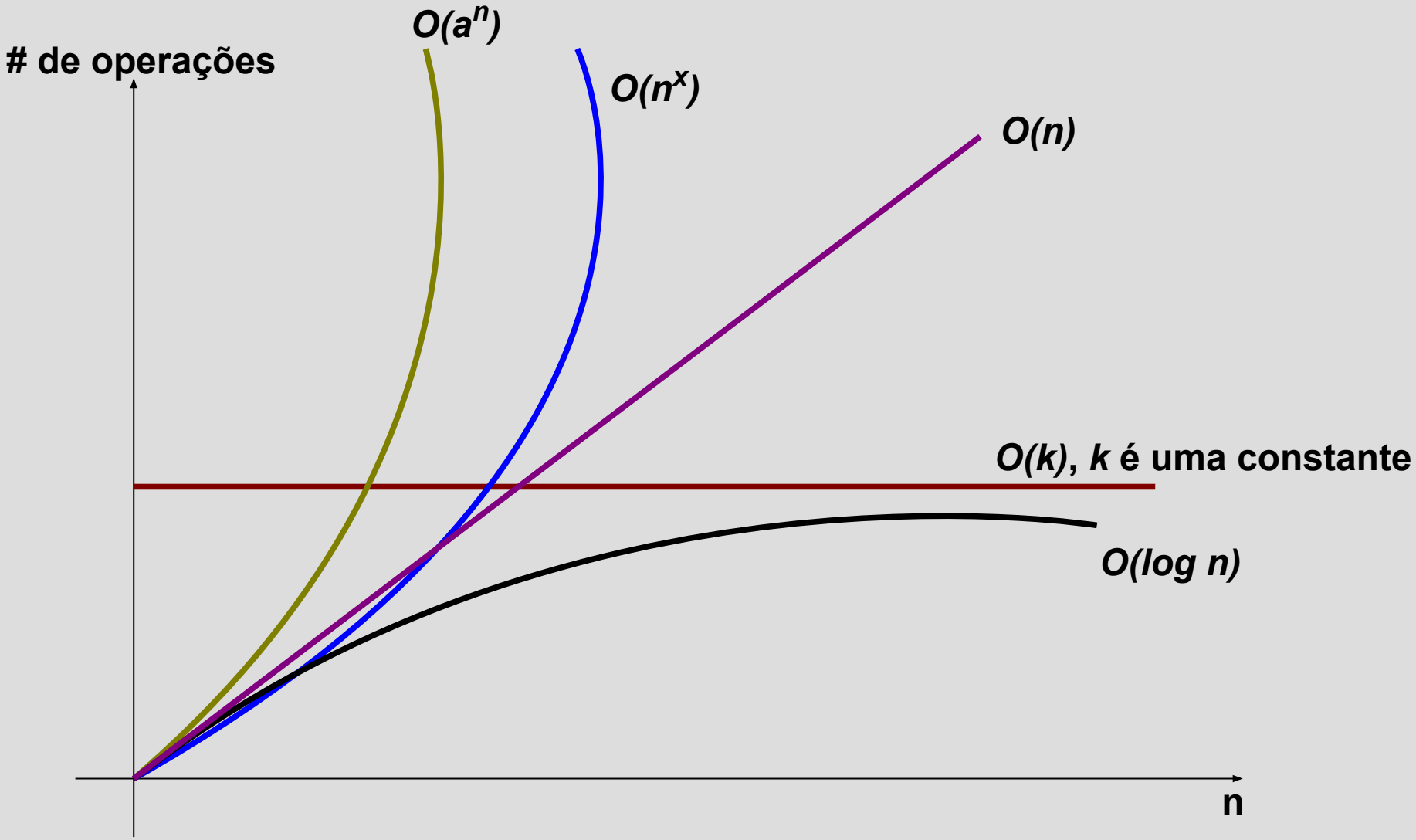
f é ...	significa que f cresce	e se escreve[1]
... *O* de *g*	não mais depressa que g	*f=O(g)*
... *theta* de *g*	aproximadamente como g	*f=Θ(g)*
... *ômega* de *g*	não mais devagar	*f=Ω(g)*

[1] **Lembrem-se o correto é utilizar o sinal ∈ pois as ordens são classes e *f* é um elemento da classe**

Classes do Comportamento Assintótico

CLASSE	NOME
$O(1)$	constante
$O(\log n)$	logarítmica
$O(n)$	linear
$O(n \log n)$	$n \log n$
$O(n^2)$	quadrática
$O(n^3)$	cúbica
$O(n^k)$ com k >= 1	polinomial
$O(2^n)$	exponencial
$O(a^n)$ com a > 1	exponencial

Crescimento das Classes



Exemplos

- Primo – Versão 1

```
int IsPrimeV1(int n)
{
    int i;
    for (i=2;i<n;i++)
        if (n%i==0)
            return 0;
    return 1;
}
```

$\in O(n)$

Exemplos

- Primo – Versão 2

```
int IsPrimeV2(int n)
{
    int i;
    for (i=2;i<n/2;i++)
    if (n%i==0)
        return 0;
    return 1;
}
```

$\in O(n/2)$

Exemplos

- Primo – Versão 2

```
int IsPrimeV2(int n)
{
    int i;
    for (i=2;i<sqrt(n);i++)
        if (n%i==0)
        return 0;
    return 1;
}
```

$\in O(\sqrt{n})$

Testar: 524.287 9.369.319 21.47.483.647

Exemplos

- Valor dominante da direita VDD:
  - Versão anterior $O(n^2)$
  - É possível fazer uma versão O(n)?

Exemplos

- Valor dominante da direita VDD:
  - Versão anterior $O(n^2)$
  - É possível fazer uma versão O(n)?

```
//Entrada: Vetor L[1..n]
//Retorno: Vetor com os elementos dominantes à direita
   DominanteADireita(L) {
      D,bigger = L[n]
      for (i = n-1 to 1) {
         if (L[i]>bigger)
         {
            acrescenta L[i] em D
            bigger=L[i]
         }
      }
      return L
   }
```