



Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso de Ciência da Computação
Campus Chapecó

Sistemas de Numeração

Prof. Luciano L. Caimi
lcaimi@uffs.edu.br

O número é um conceito abstrato que representa a idéia de quantidade.

Um **Sistema de Numeração (SN)** é o conjunto de símbolos utilizados para a representação de quantidades e as regras que definem a forma de representação. Os SN podem ser:

- Não posicional
- Posicional

► Sistema de Numeração Não Posicional

Cada símbolo representa um valor fixo, independente de sua posição relativa ao número.

Exemplo: sistema de algarismos romanos.

Símbolos: I, V, X, L, C, D, M.

Regras:

- Cada símbolo colocado à direita de um maior é adicionado a este.
- Cada símbolo colocado à esquerda de um maior tem o seu valor subtraído do maior.

► Sistema de Numeração Posicional

O valor de cada símbolo é determinado de acordo com a sua posição no número.

Um sistema de numeração é determinado fundamentalmente pela BASE, que indica a quantidade de símbolos e o valor de cada símbolo.

Todos os sistemas posicionais, independentemente da BASE, possuem as mesmas regras de formação, contagem e operações aritméticas básicas.

► Teorema Fundamental da Numeração

O teorema fundamental da numeração expressa a característica principal dos sistemas posicionais:

$$N^o = \sum_{i=-d}^n (digito)_i * (base)^i$$

expandindo

$$\dots + a_3 * B^3 + a_2 * B^2 + a_1 * B^1 + a_0 * B^0 + a_{-1} * B^{-1} + \dots$$

Onde:

i = posição em relação à vírgula,

d = nº de dígitos à direita da vírgula,

n = nº de dígitos à esquerda da vírgula – 1,

dígito = cada um símbolos dos que compõem o número.

► Teorema Fundamental da Numeração

O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo (decimal).

$$735=700+30+5$$

O algarismo 5 representa 5 unidades, o algarismo 3 representa 3 dezenas, e por último que o algarismo 7 representa 7 centenas ...

$$573=500+70+3$$

Já no 2º exemplo é diferente

Sistemas de Numeração



► Base Decimal: 10 símbolos

Elementos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Contagem:

..00

..01

..02

..03

..04

..05

..06

..07

..08

..09

“encheu a casa menos significativa:
reinicia a contagem nesta casa e
usa o próximo símbolo na casa a sua
esquerda”

assim: ..10

..20

..100

..11

..21

.....

.....

..19

..99

Esta “regra” é válida
independente da
base de numeração
utilizada

► Base Decimal

cada casa decimal possui um peso 10 vezes maior do que a casa a sua direita

...	100	10	1
-----	-----	----	---

Considerando um número com N dígitos (ou casas) teremos capacidade de representar

B^N valores diferentes (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos decimais teremos:

$$10^3 = 1000 \text{ valores}$$

► Base Decimal

O maior valor a ser representado com N dígitos será:

$B^N - 1$ (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos decimais teremos:

$$10^3 - 1 = 999$$

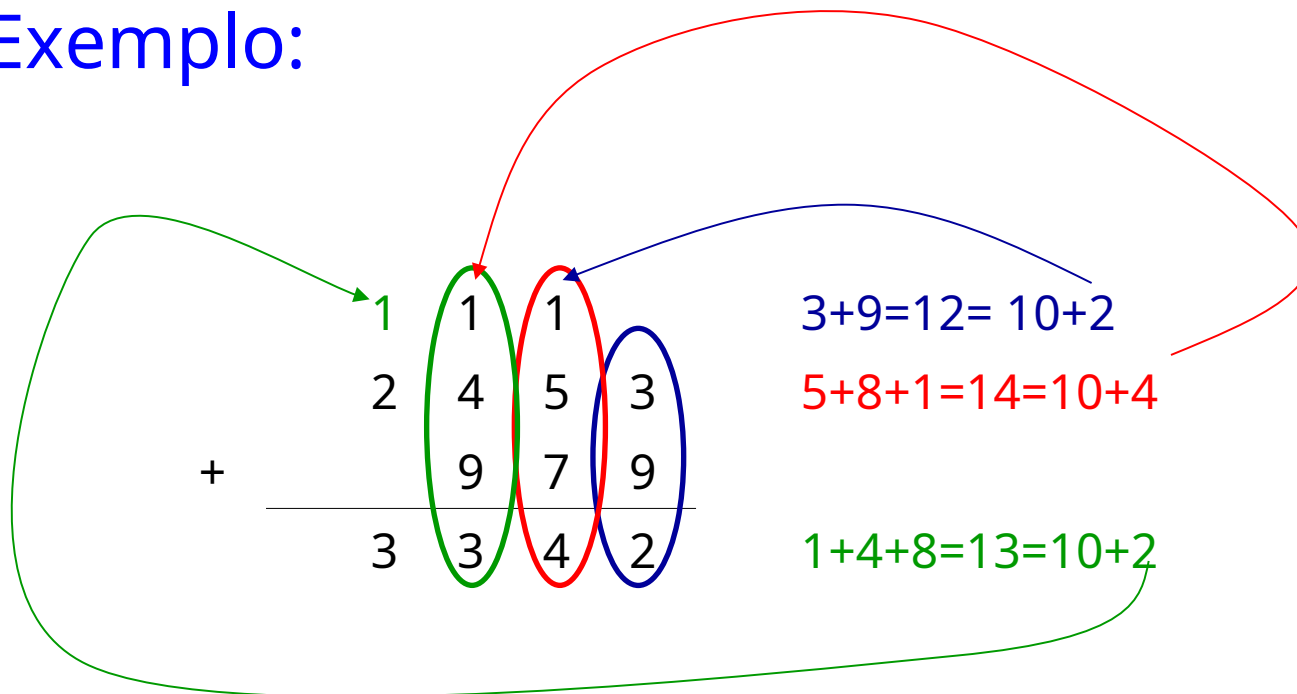
Considerando o maior símbolo possível



► Base Decimal:

Adição: quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1.

Exemplo:



► Base Decimal:

Subtração: quando uma determinada casa necessita “pedir emprestado” a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base (10).

Exemplo:

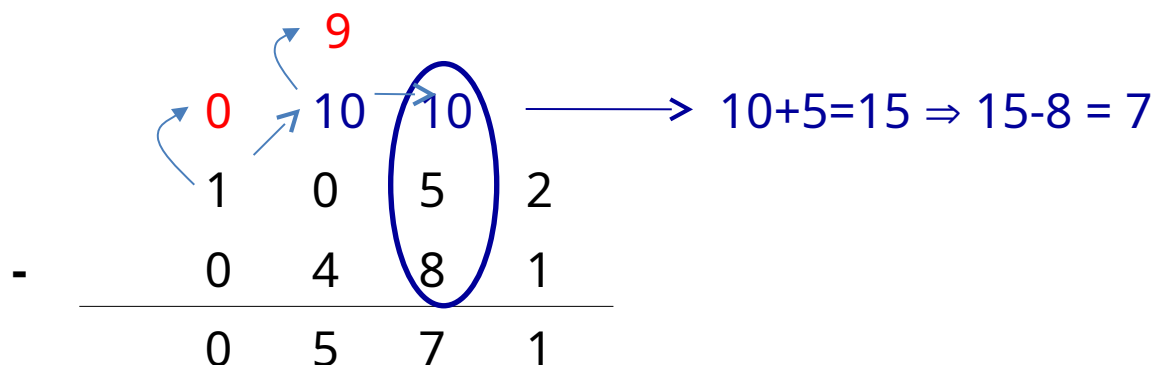

$$\begin{array}{r} 1052 \\ - 0481 \\ \hline 0571 \end{array}$$

Diagram illustrating borrowing in decimal subtraction. The digits 1, 0, 5, 2 are in the top row, and 0, 4, 8, 1 are in the bottom row. The result 0, 5, 7, 1 is shown below a horizontal line. The digit 5 in the tens place is circled. Arrows indicate borrowing: from the hundreds place (1) to the tens place (0), and from the tens place (0) to the units place (5). A red '9' is written above the tens place. To the right, the calculation $10 + 5 = 15 \Rightarrow 15 - 8 = 7$ is shown.

► Base Binária: 2 símbolos

Elementos: 0,1

Contagem:

.000
← “encheu a casa menos significativa:
.001 reinicia a contagem nesta casa e
.010 usa o próximo símbolo na casa a sua
.011 esquerda”
.100
.101
.110
.111
↗
.1000

► Base Binária

- Cada casa ou dígito binário é chamado de bit (do inglês **B**inary **D**igit)
- Um agrupamento de 8 bits é chamado de Byte
- Pelo T.F.N. cada casa binária possui um peso 2 vezes maior do que a casa a sua direita

...	8	4	2	1
-----	---	---	---	---

Sistemas de Numeração



Com n bits podemos representar: $B^n \Rightarrow 2^n$

Para 3 casas binárias (ou 3 bits) teremos:

$$2^3 = 8 \text{ valores}$$

O maior valor a ser representado com N dígitos será:
 $B^N - 1$

Para 5 bits teremos:

$$2^5 - 1 = 31$$

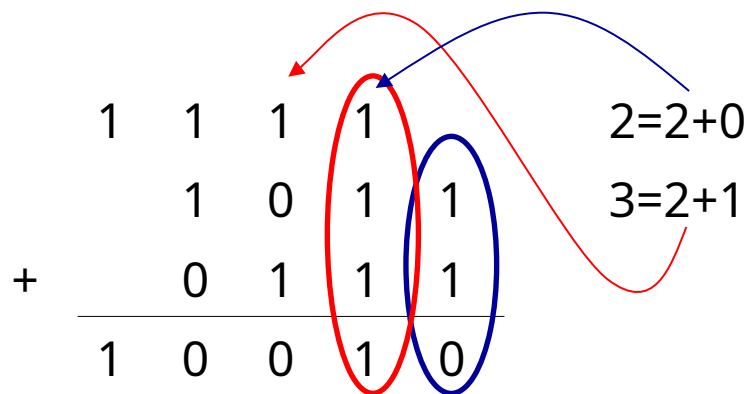
Considerando o maior símbolo possível:

1	1	1	1	1
---	---	---	---	---

► Base Binária:

Adição: quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1.

Exemplo:



The diagram illustrates the binary addition of 1111 and 0111. The numbers are aligned vertically, with the first number having an implicit leading zero. The addition is performed from right to left. The first three columns (ones, twos, and fours) result in 1, 0, and 0 respectively. In the eights column, 1 + 1 = 2, which is circled in red. A red arrow points from this 2 to the next column (sixteens), indicating a carry of 1. In the sixteens column, 0 + 1 + 1 (the carry) = 3, which is circled in blue. A blue arrow points from this 3 to the next column (thirty-twos), indicating a carry of 1. The final result is 10010.

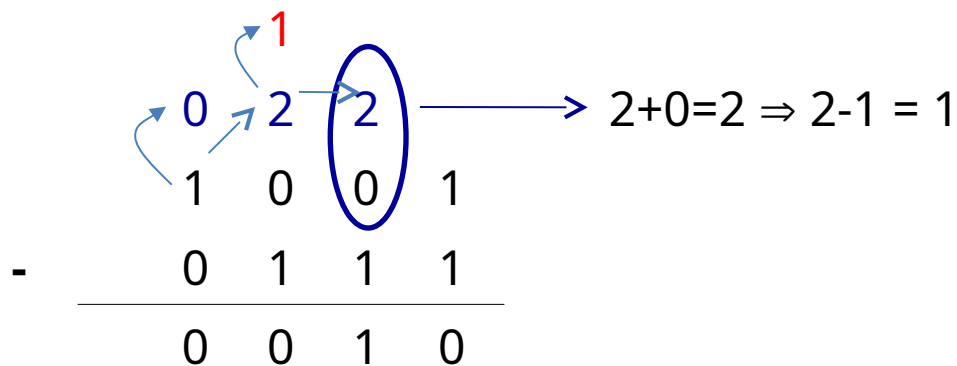
1	1	1	1	
		1	0	1
+		0	1	1
<hr/>				
1	0	0	1	0

2=2+0
3=2+1

► Base Binária:

Subtração: quando uma determinada casa necessita “pedir emprestado” a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base(2).

Exemplo:



The diagram illustrates a binary subtraction problem: $1001 - 0111$. The result is 0010 . A borrowing process is shown where the third digit from the right (the first '0' in the minuend) is circled in blue. A red '1' is written above it, and a blue arrow points from the second digit (the '0') to the circled '0', indicating a borrow. To the right of the circled '0', an arrow points to the calculation $2+0=2 \Rightarrow 2-1=1$, showing how the borrowed value is used to perform the subtraction in that column.

$$\begin{array}{r} 1001 \\ - 0111 \\ \hline 0010 \end{array}$$

$2+0=2 \Rightarrow 2-1=1$

Sistemas de Numeração



Considerando o peso de cada casa teremos:

$2^0 = 1$	$2^{10} = 1024 = 1K$	$2^{20} = 1024K = 1M$
$2^1 = 2$	$2^{11} = 2048 = 2K$	$2^{21} = 2048K = 2M$
$2^2 = 4$	$2^{12} = 4096 = 4K$	$2^{22} = 4096K = 4M$
$2^3 = 8$	$2^{13} = 8192 = 8K$	$2^{23} = 8M$
$2^4 = 16$	$2^{14} = 16K$	$2^{24} = 16M$
$2^5 = 32$	$2^{15} = 32K$	$2^{25} = 32M$
$2^6 = 64$	$2^{16} = 64K$	$2^{26} = 64M$
$2^7 = 128$	$2^{17} = 128K$	$2^{27} = 128M$
$2^8 = 256$	$2^{18} = 256K$	$2^{28} = 256M$
$2^9 = 512$	$2^{19} = 512K$	$2^{29} = 512M$

Para valores entre 2^{30} e 2^{39} : Giga

Para valores entre 2^{40} e 2^{49} : Tera

Exemplos de conversão

Considerando que 1 byte é um agrupamento de 8 bits teremos:

a) $56 \text{ bits} = ? \text{ Bytes} \Rightarrow 56/8 \text{ Bytes} = 7 \text{ Bytes}$

b) $9 \text{ Bytes} = ? \text{ bits} \Rightarrow 9 \times 8 \text{ bits} = 72 \text{ bits}$

c) $32 \text{ KBytes} = ? \text{ bits} \Rightarrow 32 * 8 \text{ Kbits}$

$$\Rightarrow 256 * 1024 \text{ bits}$$

$$\Rightarrow 262144 \text{ bits}$$

d) $131072 \text{ Kbits} = ? \text{ MBytes} \Rightarrow 131072/8 \text{ KBytes}$

$$\Rightarrow 16384 / 1024 \text{ KB}$$

$$\Rightarrow 16 \text{ MBytes}$$

► Base Octal: 8 símbolos

Elementos: 0,1,2,3,4,5,6,7

Contagem:

..00

..01

..02

..03

..04

..05

..06

..07

“encheu a casa menos significativa:

reinicia a contagem nesta casa e

usa o próximo símbolo na casa a sua esquerda”

assim: ..10

..20

..100

..11

..21

.....

.....

..17

..77

Sistemas de Numeração



cada casa octal possui um peso 8 vezes maior do que a casa a sua direita

...	64	8	1
-----	----	---	---

Considerando um número com N dígitos (ou casas) teremos capacidade de representar B^N valores diferentes (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos octais teremos:

$$8^3 = 512 \text{ valores}$$

O maior valor a ser representado com N dígitos será:

$B^N - 1$ (onde B é a base de numeração).

Para 4 dígitos octais teremos:

$$8^4 - 1 = 4095$$

Considerando o maior símbolo possível

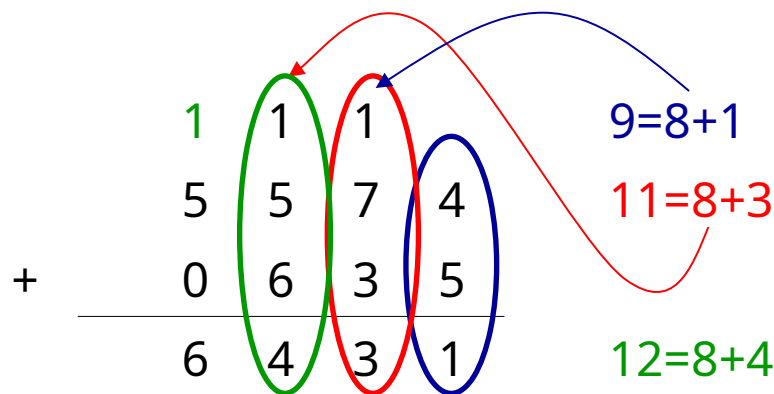
7	7	7	7
---	---	---	---

 4095

► Base Octal:

Adição: Quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1.

Exemplo:



The diagram illustrates an octal addition problem. The numbers are arranged in columns, with the first column on the left being the carry-over. The columns are grouped by color: green for the first column, red for the second, and blue for the third. The numbers are as follows:

Carry	Column 1 (Green)	Column 2 (Red)	Column 3 (Blue)
1	1	1	
5	5	7	4
0	6	3	5
6	4	3	1

The addition is performed from right to left. The results of the additions in each column are shown to the right of the columns, with the carry-over for the next column indicated by a curved arrow:

- Column 1: $4 + 3 = 7$ (no carry)
- Column 2: $3 + 3 = 6$ (no carry)
- Column 3: $1 + 5 = 6$ (no carry)
- Column 4: $6 + 4 = 10$ (carry 1, result 2)
- Column 5: $0 + 6 = 6$ (no carry)
- Column 6: $5 + 1 = 6$ (no carry)
- Column 7: $1 + 5 = 6$ (no carry)

The final result is 1234567.

► Base Binária:

Subtração: quando uma determinada casa necessita “pedir emprestado” a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base(8).

Exemplo:

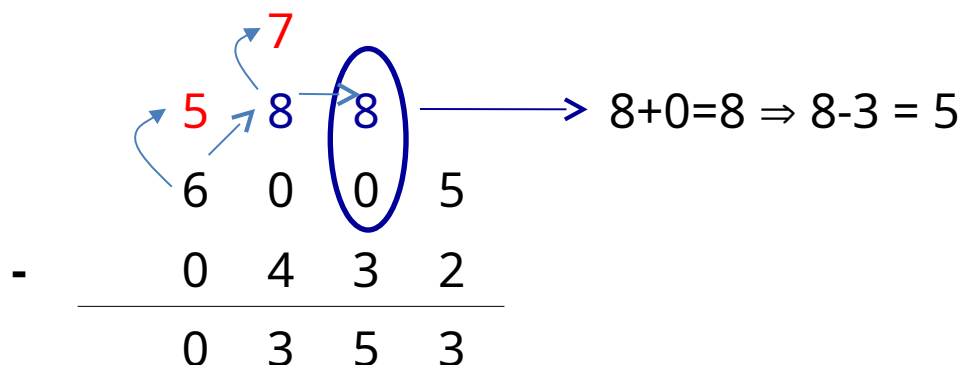

$$\begin{array}{r} 6005 \\ - 0432 \\ \hline 0353 \end{array}$$

Diagram illustrating borrowing in base 8 subtraction. The third column from the right (the '0' in 6005 and '3' in 0432) is circled. An arrow points from this '0' to the '8' in the second column from the right, indicating a borrow. Another arrow points from the '8' in the second column to the '5' in the first column from the right, indicating a borrow. A red '7' is written above the '8' in the second column. To the right of the diagram, the calculation $8+0=8 \Rightarrow 8-3=5$ is shown.

► Base Hexadecimal: 16 símbolos

Elementos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Contagem:

..00

..01

..02

..03

..04

..05

..06

..07

..08

..09

..0A

..0B

..0C

..0D

..0E

..0F

**“encheu a casa menos significativa:
reinicia a contagem nesta casa e usa
o próximo símbolo na casa a sua
esquerda”**

..10

..11

..12

....

..19

..1A

..1B

.....

..1F

..20

....

Sistemas de Numeração



cada casa hexadecimal possui um peso 16 vezes maior do que a casa a sua direita

...	256	16	1
-----	-----	----	---

Considerando um número com N dígitos (ou casas) teremos capacidade de representar B^N valores diferentes (onde B é a base de numeração).

Para 3 dígitos hexadecimais teremos:

$$16^3 = 4096 \text{ valores}$$

Sistemas de Numeração



O maior valor a ser representado com N dígitos será:

$B^N - 1$ (onde B é a base de numeração).

Para 4 dígitos hexa, teremos:

$$16^4 - 1 = 65535$$

Considerando o maior símbolo possível

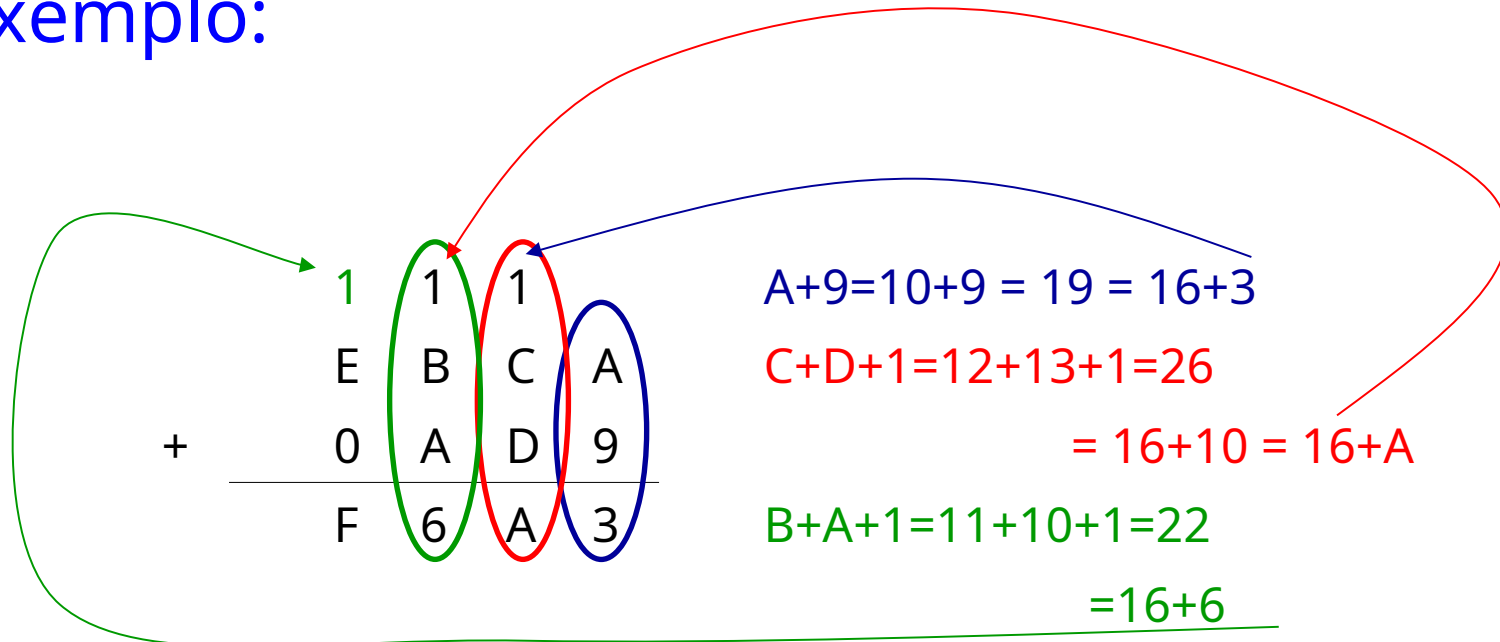
F	F	F	F
---	---	---	---

 55535

► Base Hexadecimal:

Adição: Quando a soma em uma determinada casa excede o maior símbolo da base, devemos deixar o excedente e levar o peso da base para a casa mais a esquerda valendo 1.

Exemplo:



► Base Hexadecimal:

Subtração: quando uma determinada casa necessita “pedir emprestado” a casa a sua esquerda fica com um a menos e a casa solicitante recebe o peso da base (16).

Exemplo:

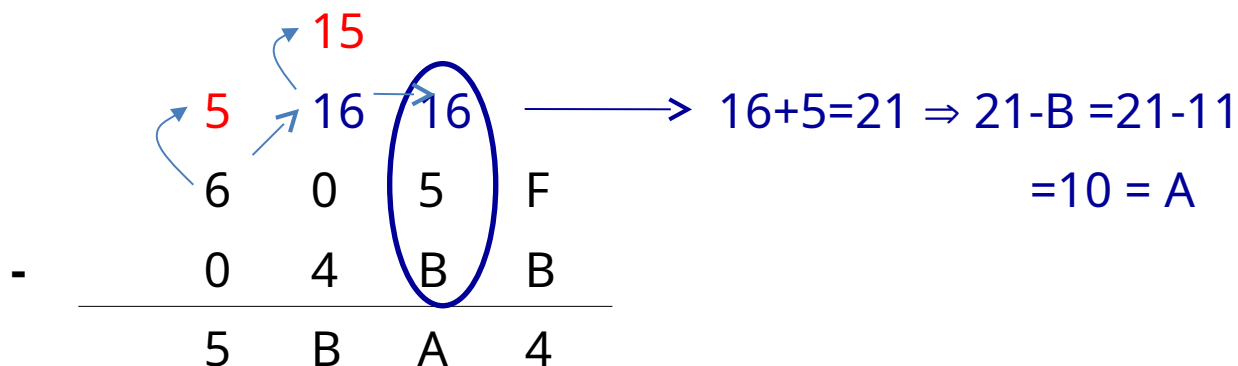

$$\begin{array}{r} 6 5 \\ - 0 4 B \\ \hline 5 B A 4 \end{array}$$

Diagram illustrating the borrowing process in hexadecimal subtraction:

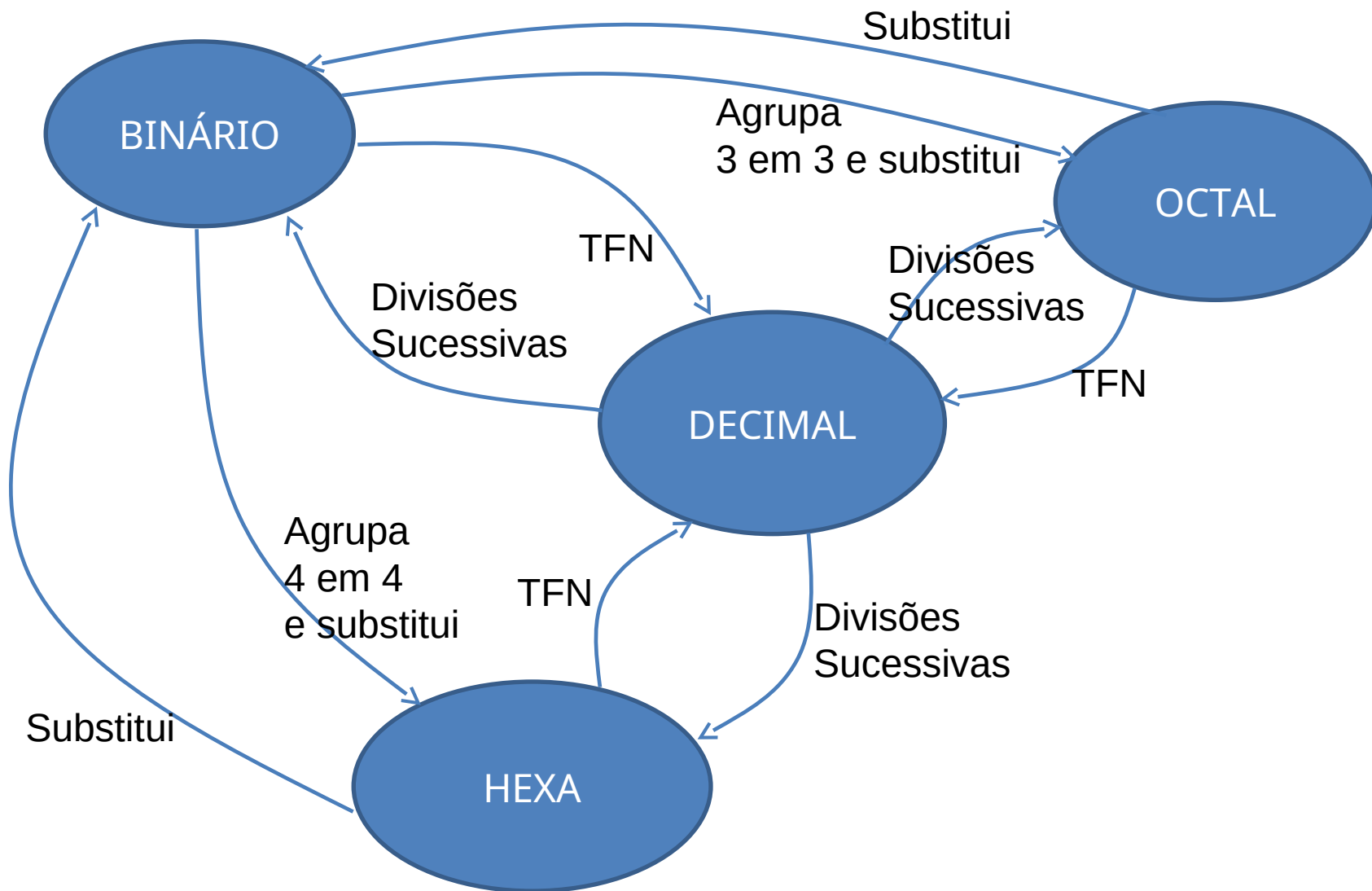
- The digit 5 in the third column from the right is circled.
- An arrow points from the 0 in the second column to the 5, indicating borrowing.
- The borrowed value is 16 (indicated by a red 16 and an arrow).
- The calculation shown is: $16 + 5 = 21 \Rightarrow 21 - B = 21 - 11 = 10 = A$.

► São 4 técnicas básicas

Base Origem	Base Destino	Técnica
Base Qualquer → Decimal		Teorema Fundamental da Numeração
Decimal → Base Qualquer		Divisões Sucessivas
Octal/Hexa → Binário		Substituir de 3 em 3 / 4 em 4
Binário → Octal/Hexa		Agrupar de 3 em 3 / 4 em 4 e substituir

Conversão entre Bases

► São 4 técnicas básicas



► Codificação de Números Decimais

• Código BCD (Binary Coding Decimal)

O código BCD é um sistema de representação dos dígitos decimais desde 0 até 9 com um código binário de 4 bits. Esse código BCD usa o sistema de pesos posicionais 8421 do código binário puro.

Apesar de usar 4 bits existem apenas dez códigos válidos. Os números binários de 4 bits representando os números decimais desde 10 até 15 são inválidos no sistema BCD.

Ex: 238 = 001000111000

Decimal	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

- **Código excesso 3**

Características

- valor binário + 3
- mantém faixa central de valores

Ex:

691 = 100111000100

Decimal	Excesso 3
0	0011
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1001
7	1010
8	1011
9	1100

- **Código Johnson**

Características

- variação de 1 bit de um código para o seguinte

Ex:

417 = 011110000111100

Decimal	Johnson
0	00000
1	00001
2	00011
3	00111
4	01111
5	11111
6	11110
7	11100
8	11000
9	10000

- **Códigos 2 em 5**

Características

- Grupo de códigos onde 2 entre 5 dígitos recebem o valor 1
- Cada posição tem um peso associado
- O zero tem codificação especial

Ex:

804 = 001010110001010

= 100101100001001

Código	2 em 5	
Decimal	01236	74210
0	01100	11000
1	11000	00011
2	10100	00101
3	10010	00110
4	01010	01001
5	00110	01010
6	10001	01100
7	01001	10001
8	00101	10010
9	00011	10100

- **Código GRAY**

Características

- Palavras adjacentes variam apenas 1 bit
- Cíclico
- Refletido
- Bit mais significativo é igual ao código binário natural

Conversão Gray → Binário??

Conversão Binário → Gray???

Decimal	GRAY
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1101
9	1001
10	1111
11	1110
...	