系級............... 學號 .... 姓名.........................

微積分 (I) Quiz #2 (50 minutes) 2024/03/11

1. (3+4=7 points) 如果級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-4)^n$ 收斂，但是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 6^n$ 發散，詳細說明以下級數收斂或者發散? (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{2n} a_n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: 收斂半徑 R: $4 \le R \le 6$，$x\in(-R,R)$ 必收斂

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: 令 $x=1$ 代入 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\because x\in(-R,R)$ 故收斂

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{2n} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n a_n$; 令 $x=-9$ 代入 power series $\Rightarrow$ 發散

2. (8 points) 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$ 的收斂半徑。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}\right|}{\left|\frac{n!\,x^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = |x|\cdot\left(\frac{1}{2}\right) < 1$$

$\Rightarrow |x| < 2$

$\Rightarrow$ 收斂半徑 $=2$

3. (7+8=15 points) (a) 用積分的方法推導以下級數: $\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 並且求其收斂半徑。

$$\tan^{-1}x = \int\frac{dx}{1+x^2} = \int\frac{1}{1-(-x^2)}dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{2n}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

令 $x=0$ 代入上式: $\tan^{-1}(0)=0=C$; $\therefore \tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

(b) 求函數 $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ 的 power series 與其收斂半徑。

$$f(x) = 1+\frac{-3}{x+2} = 1+\frac{-3}{2(1+x/2)} = 1-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+x/2}\right)$$

$$= 1-\frac{3}{2}\frac{1}{1-(-x/2)} = 1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n$$

$$= 1-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n\right) = \frac{-1}{2}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}$$

$$= \frac{-1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3x^n}{2^{n+1}},$$

$\left|\frac{-x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<2$

$\Rightarrow$ 收斂半徑 $=2$

4. (10 points) 用微分的方法（類似 § 11.9 Example 4）求函數 $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ 的 power series.

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = (-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Rightarrow (1-x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n}$$

$$\therefore f(x) = (1+x)\cdot(1+x)^{-2} = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n$$

$$= \underline{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n}$$

5. (10 points) 用 power series 計算不定積分: $\int x^2 \ln(1+x)\ dx$

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{dx}{1-(-x)} = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$\Rightarrow \int x^2 \ln(1+x)\,dx = \int x^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\,dx = \int \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n}\,dx$$

$$= C + \sum_{n=1}^{\infty}\int (-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n}\,dx = \underline{C + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n+3}}{n(n+3)}}$$

6. (10 points) 求函數 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 2$ 處展開的 Taylor 級數。

$f(x) = \ln x$, $\quad f(2) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $\quad f'(2) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = (-1)x^{-2}$, $\quad f''(2) = \frac{-1}{2^2}$

$f''' = (-1)(-2)x^{-3}$, $\quad f'''(2) = \frac{(-1)(-2)}{2^3}$

$f^{(4)} = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$, $\quad \vdots$

$\vdots$

$f^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}$, $\Rightarrow f^{(n)}(2) = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n+1)}{2^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!\,2^n}(x-2)^n$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$$