系級............ 組別： A / B 學號 .... 姓名.....................

微積分 (I) 期末考 (100 minutes) 2024/01/03

考試中禁止使用手機與3C用品. 除了選擇，填充和簡答題之外，你的答案必須提供完整說明，如果只有答案沒有任何說明得零分!

(Solution)

★ 記分欄 ★

1. (2+4+5=11分) 簡答題(~~如果有2個以上答案，每少一個答案扣一分~~)。

(i) 如果 $F(x)$ 在 $x=a$ 處連續且 $\lim_{x\to a}|F'(x)|=\infty$，則稱 $y=F(x)$ 在 $x=a$ 處有 vertical tangent. 討論 $(x)=x^{2/3}$ 是否有 vertical tangent?

$F'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}$

$\lim_{x\to 0}|F'(x)|=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3|x|^{1/3}}=\infty$，$\therefore$ 在 $x=0$ 處有 vertical tangent

(ii) 令 $f_1(x)=\begin{cases} x^{2/3} & \text{if } x\le 1 \\ Ax^2+B & \text{if } x>1 \end{cases}$

求 A, B 使得 $f_1(x)$ 為可微分函數($\forall x\in\mathbb{R}$).

(連續性)
$\lim_{x\to 1^-}x^{2/3}=1=\lim_{x\to 1^+}Ax^2+B=A+B$

$f_1'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^{-1/3}\\ 2Ax\end{cases}$ $\quad f_{1-}'(1)=\frac{2}{3}=f_{1+}'(1)=2A$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1 & —① \\ 2A=\frac{2}{3} & —②\end{cases}\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{3}}$ 代入①式得 $\boxed{B=1-A=\frac{2}{3}}$

$\therefore f_1(x)=\begin{cases}x^{2/3}, & x\le 1\\ \frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}, & x>1\end{cases}$

(iii) 令 $F(x)=\int_0^x (e^{2t}+e^{-t})dt$，找出 $y=F(x)$ 圖形中 concave upward 的區間。

$F'(x)=e^{2x}+e^{-x}$

$F''(x)=2\cdot e^{2x}-e^{-x}=\frac{2\cdot e^{3x}-1}{e^x}=0$

$\Rightarrow 2e^{3x}-1=0\Rightarrow e^{3x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3x=\ln(\frac{1}{2})=-\ln 2$

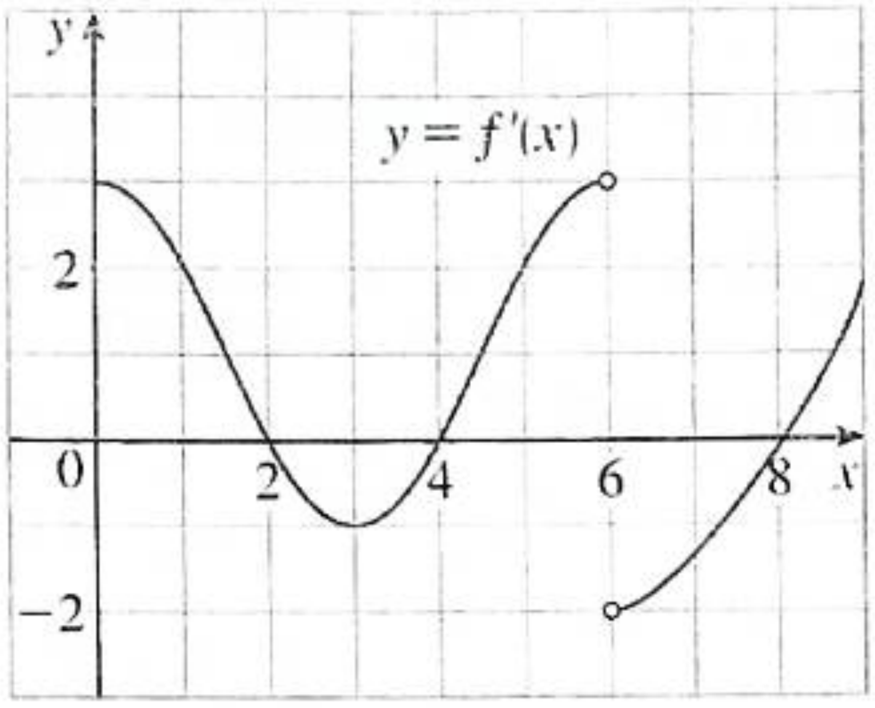
$\Rightarrow x=\frac{-\ln 2}{3}$

$x>\frac{-\ln 2}{3}$ 時 $F''(x)>0$ (concave upward)

或 $\left(\frac{-\ln 2}{3},\infty\right)$

①

2. (3+8+5=16 points) 簡答題(如果有2個以上答案，每少一個答案扣一分)。



(a) 左圖為某連續函數 $y=f(x)$ 的導數圖形。回答下列問題:

此函數是否有相對極大值?為什麼? 這些極值的 x 座標?

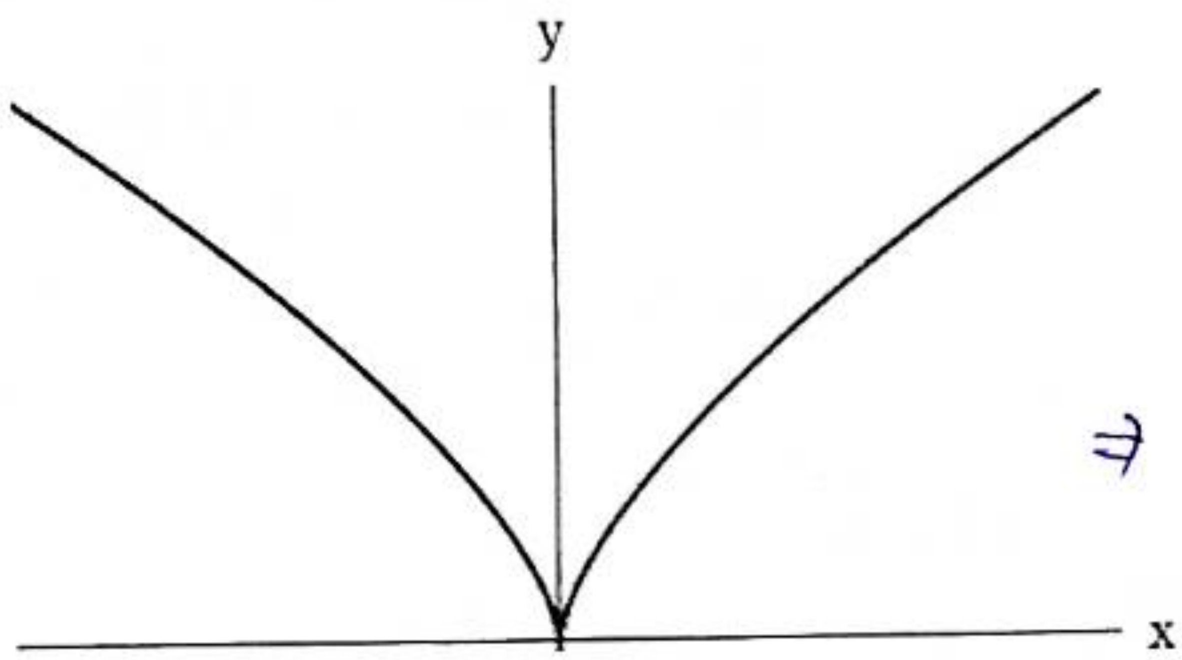
local max處: f'從正數轉變成負數

$f'>0$ | $f'<0$

$x=a$

$x=2,6$ 處為 local max

(c) 以下為 $y^3=x^2$ 的圖形，令 L 為(0,0)到(1,1)的曲線長。以下列兩種方式設定積分計算曲線長:



(I) $L=\int_a^b f(x)\ dx$

$y=x^{2/3},\ y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}$

$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+\frac{4}{9}(x^{-1/3})^2}\,dx$

(II) $L=\int_c^d g(y)\ dy$

$x=y^{3/2},\ \frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}\cdot y^{1/2}$

$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+(\frac{3}{2}y^{1/2})^2}\,dy$

(III) 計算曲線長L:

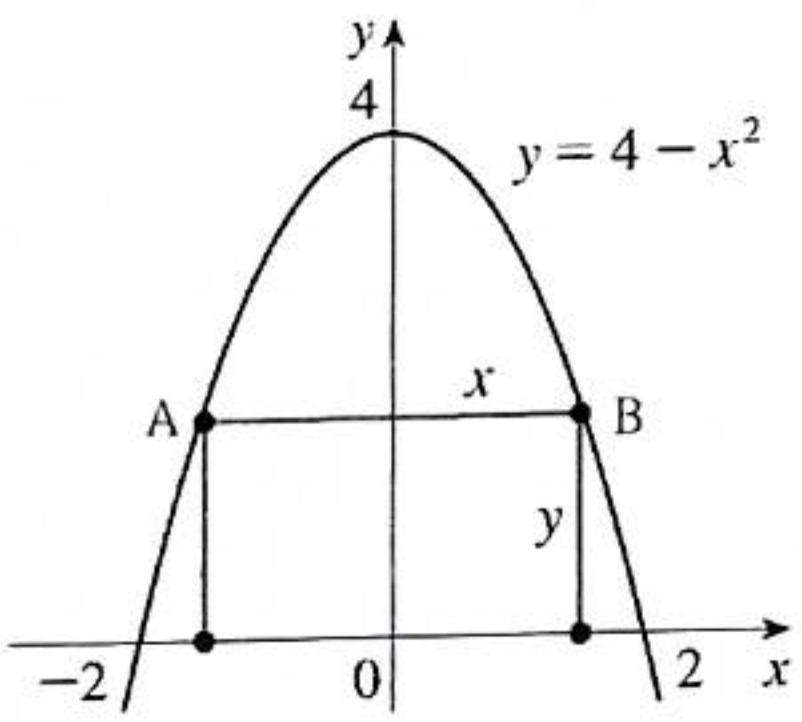
$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy=\frac{4}{9}\int_1^{\frac{13}{4}}u^{\frac{1}{2}}du=\left(\frac{4}{9}\right)\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

令 $u=1+\frac{9}{4}y \Rightarrow dy=\frac{4}{9}du$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{(2^2)^{3/2}}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{8}-1\right)$$

$$=\frac{(13^{\frac{3}{2}}-8)}{27}$$

(c) 矩形的兩個頂點 A, B 在parabola $y=4-x^2$ 上移動(如下圖), 用 §4.7 的方法求此矩面積之最大值,並且用 the First Derivative Test 驗證此最大值。



$A(x)=(2x)y=2x(4-x^2)=8x-2x^3$

$0\leqslant x\leqslant 2$

$A'(x)=8-6x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$A'(1)=8-6=2>0$

$A'(\frac{3}{2})=8-6(\frac{3}{2})^2=8-6\cdot\frac{9}{4}=8-\frac{54}{4}=\frac{32-54}{4}<0$

(一階導數檢定)

2

3. (6+7+7=20 points) 求極限: (a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\cos^2\left(3+\frac{2i}{n}\right)$

$\int_0^2 \cos^2(3+x)\,dx$ 或 $\int_3^5 \cos^2(x)\,dx \Rightarrow \int_3^5 \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \int_3^5 \frac{1+\cos(2x)}{2}dx$

令 $u=3+x$
$du=dx$

$\int_3^5 \cos^2(u)\,du$

$= \frac{x}{2}\Big|_3^5 + \frac{1}{2}\int_3^5 \cos(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_3^5$

$= 1 + \frac{1}{4}\left(\sin(10)-\sin(6)\right)$

求極限:(b) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1-2/x)}$

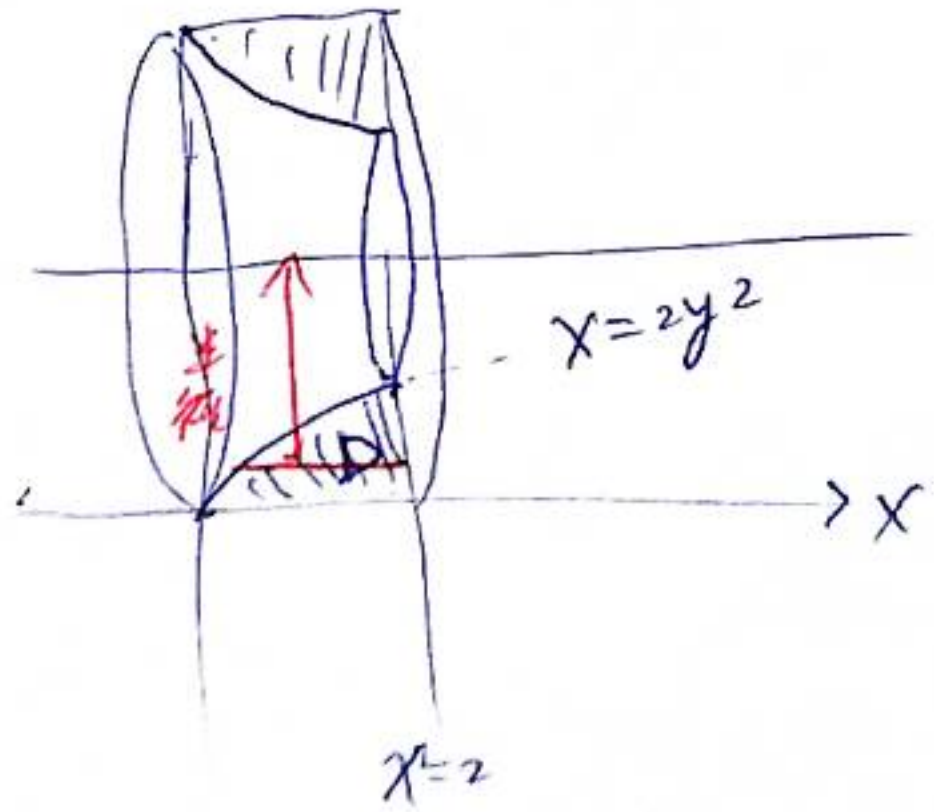
$= e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln(1-2/x)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-2/x)}{1/x}}$, 令 $y=\frac{1}{x}$,

$= e^{\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(1-2y)}{y}}\left(\frac{0}{0}\right) = e^{\lim_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{1-2y}\cdot(-2)}{1}} = e^{\lim_{y\to0^+}\frac{-2}{1-2y}}$

$= e^{-2}$ ※

(c) 令 D 為直線 $x=2$, 曲線 $x=2y^2$ 與 x-軸所圍成的區域, E 是將 D 對 $y=2$ 旋轉產生的3D物體. 描繪 E 的圖形並且使用 §6.3 的 method of cylindrical shells 計算 E 的體積。(設定積分即可，不必計算積分值).

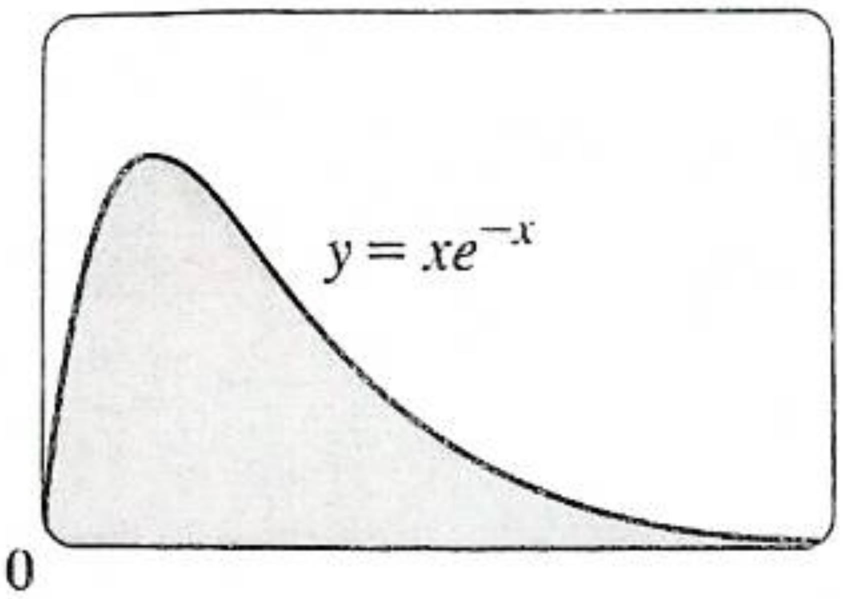
半徑 $(2-y)$
高: $2-(2y^2)$



$\int_0^1 2\pi(2-y)\left[2-2y^2\right]dy$

③

4. (8+5=13 points) Let $S = \{(x, y):\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq xe^{-x}\}$. Find the area of S.



$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x}dx \quad 其中$$

$$\int xe^{-x}dx \quad = -xe^{-x}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x}dx$$

$u = x,\ dv = e^{-x}dx$

$\Rightarrow du = dx,\ v = -e^{-x}$

$$= te^{-t} - e^{-x}\Big|_0^t$$

$$= te^{-t} - (e^{-t} - 1)$$

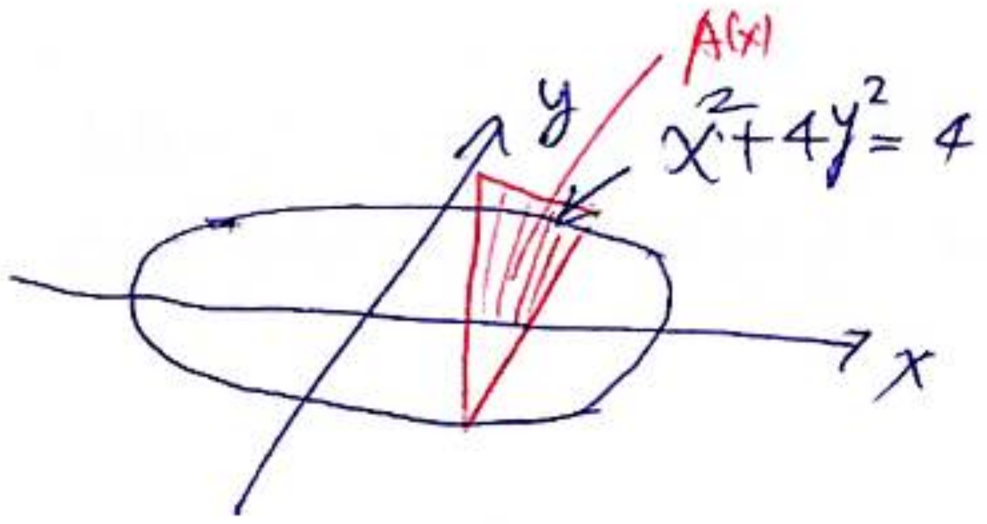
$$= te^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$\therefore \int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}(te^{-t} - e^{-t} + 1) = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} - \cancel{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}} + 1$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} + 1 = 1$$

(b) 3D物體 E 的底座為 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的橢圓， 垂直 x軸切開的截面為等腰直角三角形計算 E 的體積。



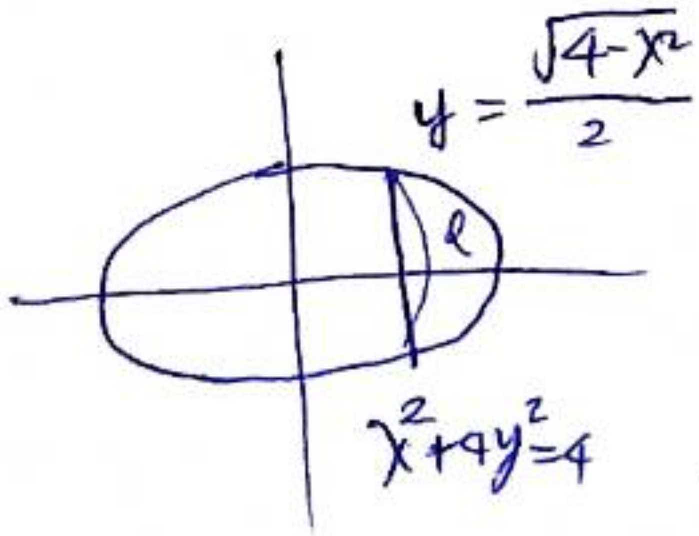
$$\int_{-2}^{2} A(x)dx = \int_{-2}^{2}\frac{4-x^2}{4}dx$$

$$= 2\int_0^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

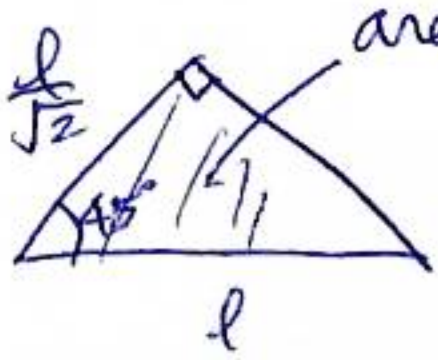
$$= 4 - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= 4 - \frac{8}{6} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$



$$l = 2y = \sqrt{4-x^2}$$



$$\text{area} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{l^2}{4} = \frac{4-x^2}{4} = A(x)$$

4

5. (5+9=14) (a) $\int_1^e \frac{\tan^{-1}(\ln x)}{x}\,dx$. $u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx$

$$=\int_0^1 \tan^{-1}(u)\,du \quad (P.\ 489)(EX5) \quad = u\tan^{-1}(u)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,du$$

令 $t=1+u^2$, $dt=2u\,du$

$$\begin{pmatrix} y=\tan^{-1}(u), & dz=du \\ dy=\frac{1}{1+u^2}du, & z=u \end{pmatrix} \quad = 1\cdot\tan^{-1}(1) - \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}dt}{t}$$

$$=\tan^{-1}(1) - \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

(b) 計算定積分: $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-x-2}$. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x+(A-2B)}{〃}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \ —① \\ A-2B=1 \ —② \end{cases} \quad A=-B\text{代入②} \quad -B-2B=-3B=1,\ \Rightarrow B=-\tfrac{1}{3} \Rightarrow A=\tfrac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{x^2-x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-2} - \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-x-2} = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{x^2-x-2} = \lim_{t\to 2^-}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{3}\left(\lim_{t\to 2^-}\left|\frac{t-2}{t+1}\right| - \lim_{t\to 2^-}\left|\frac{-2}{1}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{3}(-\infty - 2) = -\infty \quad \text{發散}$$

5

6. (6+8=14 分) 求不定積分: (a) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(\sqrt{x})\cos^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

$u=\sqrt{x}$, $du=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2du$

$= \int \tan^2(u)\cos^3(u)\,2\cdot du = 2\int \tan^2(u)\cdot\cos^3(u)du$

(Quiz #8) #3(b)

$=2\int \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}\cdot\cos^3(u)$

$=2\int \sin^2(u)\cos(u)du$, 令 $y=\sin(u)$, $\Rightarrow dy=\cos(u)du$

$=2\int y^2dy = 2\cdot\frac{y^3}{3}+C = \frac{2}{3}\sin^3(u)+C$

$=\frac{2}{3}\sin^3(\sqrt{x})+C$

(b) 推導reduction公式: $\displaystyle\int \sec^n x dx = \frac{\tan x\cdot\sec^{n-2}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}dx.$

$u=\sec^{n-2}x \quad dv=\sec^2 x dx$

$\Rightarrow du=(n-2)\sec^{n-3}x\cdot\sec x\cdot\tan x\,dx$, $v=\tan x$

$\int\sec^n x dx = \tan x\cdot\sec^{n-2}x-(n-2)\int\sec^{n-2}x\cdot\tan^2 x\,dx$

$=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int\sec^{n-2}x(\sec^2x-1)dx$

$=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\left[\int\sec^n x dx-\int\sec^{n-2}x dx\right]$

$=\tan x\sec^{n-2}x-\underbrace{(n-2)\int\sec^n x dx}_{\text{搬到等號左邊}}+(n-2)\int\sec^{n-2}x\,dx$

$\Rightarrow (n-1)\int\sec^n x\,dx=\tan x\sec^{n-2}x+(n-2)\int\sec^{n-2}x dx$

$\therefore \int\sec^n x dx=\frac{1}{(n-1)}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{(n-2)}{(n-1)}\int\sec^{n-2}x dx$

6

7.（6+8=14 分）求積分：(a) $\int \cos\sqrt{2x}\ dx$

令 $u=\sqrt{2x}$, $u^2=2x \Rightarrow dx=\frac{1}{2}2u\,du=u\,du$

$$= \int u\cdot\cos(u)\,du$$

令 $y=u$, $dz=\cos(u)\,du$

$\Rightarrow dy=du$, $z=\sin(u)$

$$= u\sin(u)-\int \sin(u)\,du$$

$$= u\sin(u)+\cos(u)+C$$

$$= \sqrt{2x}\,\sin(\sqrt{2x})+\cos(\sqrt{2x})+C$$

(b) $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx.$ (類似 p. 504 EX7)

$$3-2x-x^2=-(x^2+2x+1-1)+3=-(x+1)^2+4$$

$$= \int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$$

令 $u=x+1$

$du=dx$

$$= \int\sqrt{4-u^2}\,du$$

，令 $u=2\sin\theta$，$du=2\cos\theta\,d\theta$，$\sin\theta=\frac{u}{2}$

$\sqrt{4-u^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$

$$= \int 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\int\cos^2\theta\,d\theta = 4\int\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 2\theta+2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\theta)+C$$

$$= 2\theta+2\sin\theta\cos\theta+C$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+2\cdot\frac{u}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-u^2}}{2}+C$$

$$= 2\sin\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C$$

7