系級............ 組別： A / B 學號 .... 姓名.....................

微積分 (I) Quiz #7 (45 minutes) 2023/11/27

除了選擇，填充和簡答題之外，你的答案必須提供完整說明，如果只有答案沒有任何說明得零分！

1. (5+5=10 points) 求以下極限：(a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+4x^6}}{2-x^3}$ $= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+4x^6}}{x^3}}{\frac{2-x^3}{x^3}}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{1}{x^6}+4}}{\frac{2}{x^3}-1} = \frac{-\sqrt{4}}{-1} = 2$ ※

(b) $\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-1}{h}$ $\tan(\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow$ $y=\tan(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$

的導數值 $y'(\frac{\pi}{4})$，

其中 $y'(x)=\sec^2(x)=\sec^2(\frac{\pi}{4})=(\sqrt{2})^2=2$

2. (10 points) 求$c\in\mathbb{R}$ 使$f(x)$為連續函數：$f(x)=\begin{cases} cx^2+2x, & \text{if } x<2 \\ x^3-cx, & \text{if } x\geq 2\end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(cx^2+2x)=4c+4$

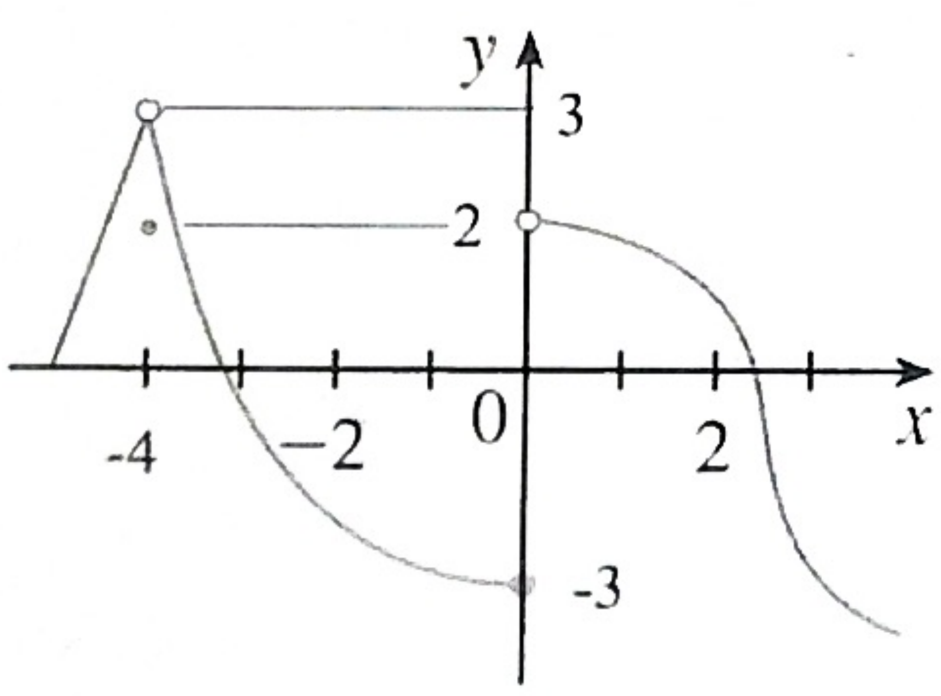
$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^3-cx)=8-2c$ $\Rightarrow$

$4c+4=8-2c$

$\Leftrightarrow$ $6c=4$，$\therefore c=\frac{2}{3}$ ※

3. (10 points) (3+4+3=10 points) 填充題. 依照以下圖形回答下列問題：求

(a) $\lim_{x\to-4}f(x)$ (b) $f(x)$為左連續的區間 (c) $f(x)$是可微分的區間



(a) 3,

(b) $(-5,-4)$, $(-4,0]$, $\{x>0\}$ $0<x\leq 4$ 亦可

(c) $(-5,-4)$, $(-4,0)$, $\{x>0\}$

4. 求以下函數圖形的所有漸進線：$y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2} = \dfrac{x^2+1}{(x+2)(x-1)}$ ，在 $x=1,-2$ 沒有定義

$x=1$：$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{(x+2)(x-1)} \oplus/\ominus = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+1}{(x+2)(x-1)} \oplus/\oplus = +\infty \end{cases}$ $x=1$ 為垂直漸近線

$x=-2$：$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+1}{(x+2)(x-1)} \oplus/\ominus = -\infty$ $x=-2$ 為垂直漸近線

$\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{(x+2)(x-1)} \oplus/\oplus = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$

$\therefore y=1$ 為水平漸近線.

5. (10 points) 令 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{if } x \le 1 \\ 3-x, & \text{if } 1 < x \le 4 \\ \sqrt{x}, & \text{if } x > 4 \end{cases}$ 求 $f'(x)$

$f'(x) = \begin{cases} 2^x \cdot (\ln 2), & x < 1 \\ -1, & 1 < x < 4 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 4 \end{cases}$

在 $x=1$：$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2^x \cdot (\ln 2) = 2 \cdot \ln 2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-1) = -1$ 不相等

$f'(1)$ 不存在

$x=4$ 處：

$\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ 不相等

$f'(4)$ 不存在

6. (10 points) 令 $f(x) = (4x+1)^{-1/2}$, $a = 6$. 用以下極限求導數：$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$$f'(6) = \lim_{h\to 0} \frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{4(6+h)+1}} - \frac{1}{\sqrt{4\cdot 6+1}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{25+4h}} - \frac{1}{\sqrt{25}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5-\sqrt{25+4h})}{h\sqrt{25}\sqrt{25+4h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(5-\sqrt{25+4h})(5+\sqrt{25+4h})}{h\cdot 5\sqrt{25+4h}(5+\sqrt{25+4h})} = \lim_{h\to 0} \frac{25-(25+4h)}{h\cdot 5\cdot\sqrt{25+4h}(5+\sqrt{25+4h})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot 5\cdot\sqrt{25+4h}(5+\sqrt{25+4h})} = \frac{-4}{5\cdot\sqrt{25}\cdot(5+\sqrt{25})}$$

$$= \frac{-4}{5\cdot 5\cdot 10} = \frac{-2}{125}$$