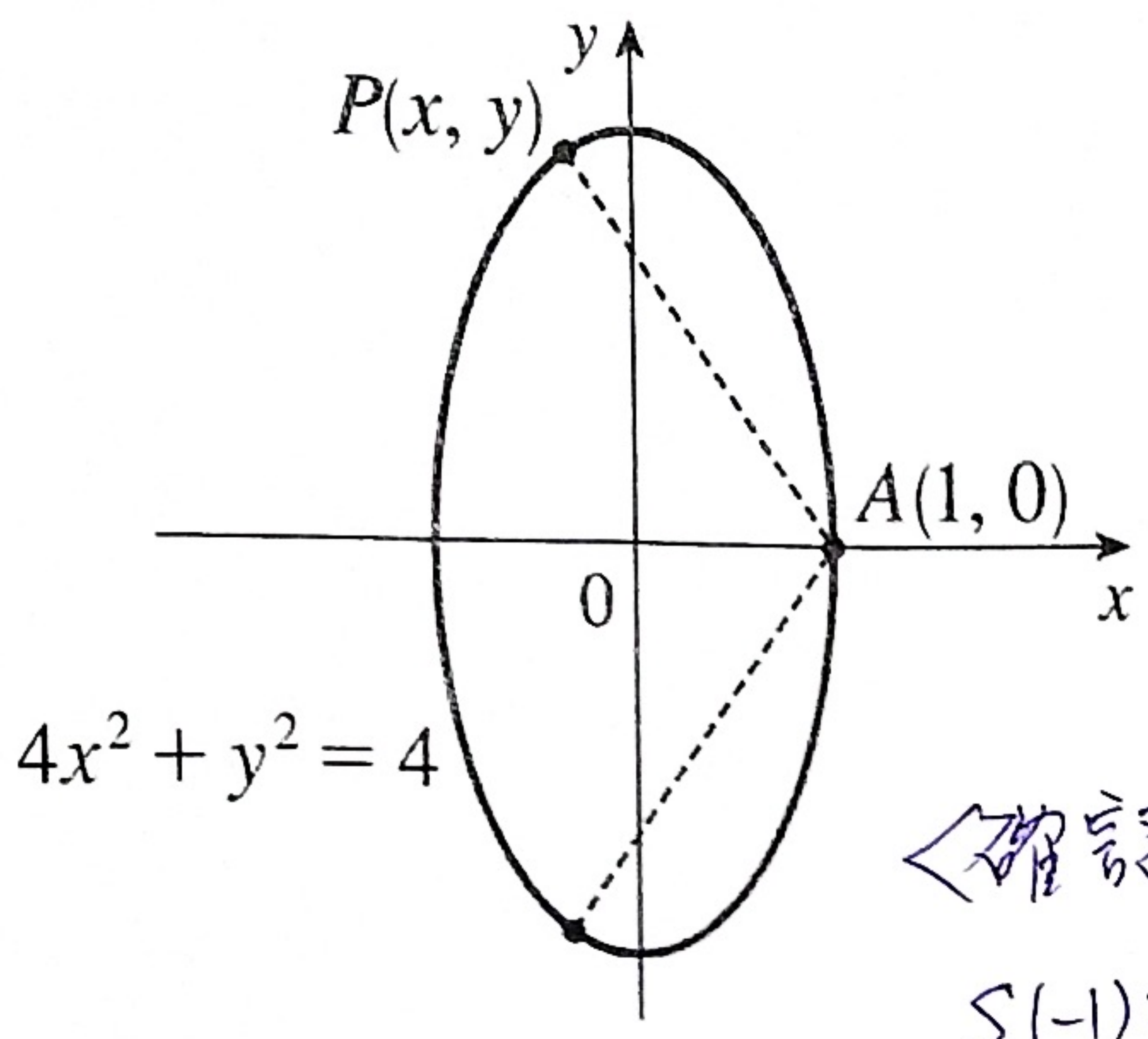
系級............ 組別： A / B 學號 .... 姓名.....................

微積分 (I) Quiz #10 (45 minutes) 2023/12/18

除了選擇，填充和簡答題之外，你的答案必須提供完整說明，如果只有答案沒有任何說明得零分！

1. (10 points) 用微分求下圖中，在橢圓$4x^2+y^2=4$上與$A(0,1)$點距離最遠位置之座標.



$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$，令 $S=d^2=(x-1)^2+y^2$

(x,y) 滿足 $4x^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=4-x^2$ 代入 S 中

$\Rightarrow S(x)=(x-1)^2+(4-4x^2)=-3x^2-2x+5$, $-1\le x\le 1$

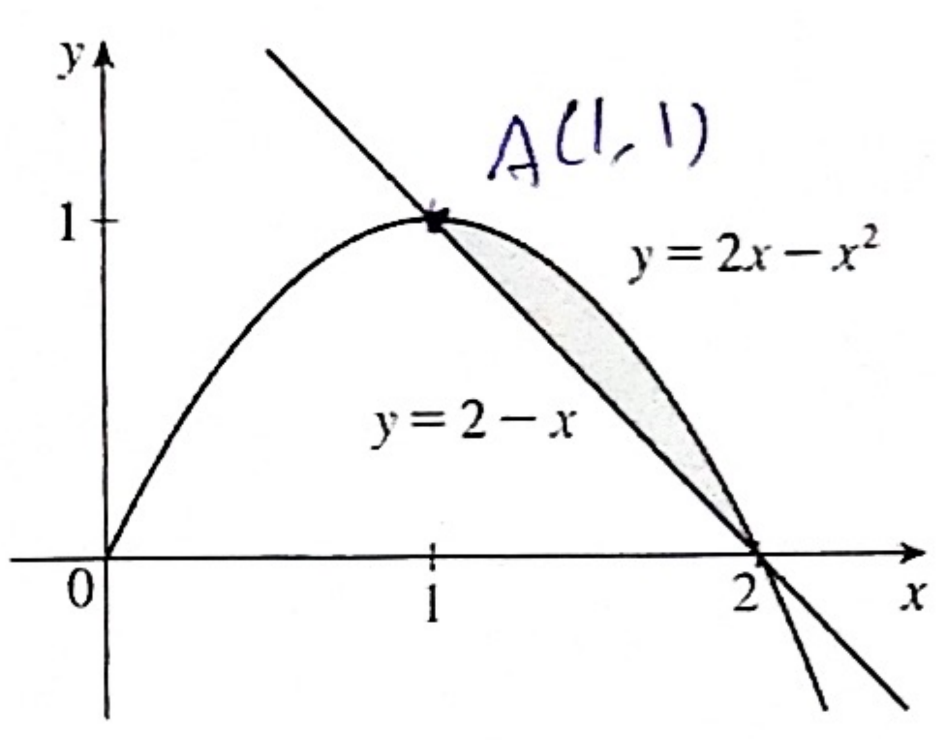
$S'(x)=-6x-2=0 \Rightarrow x=-1/3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-(\frac{1}{3})^2}=\pm\sqrt{\frac{32}{9}}$

〈確認為絕對極大值〉 $S(-1/3)=-3\cdot(-\frac{1}{3})^2-2(-\frac{1}{3})+5$
$=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}+5=\frac{1}{3}+5=\frac{16}{3}$ #

$S(-1)=-3+2+5=4$, $S(1)=-3-2+5=0$

座標 $(-1/3, \pm\sqrt{\frac{32}{9}})=(-1/3, \pm\frac{\sqrt{32}}{3})=(-1/3, \pm\frac{4\sqrt{2}}{3})$

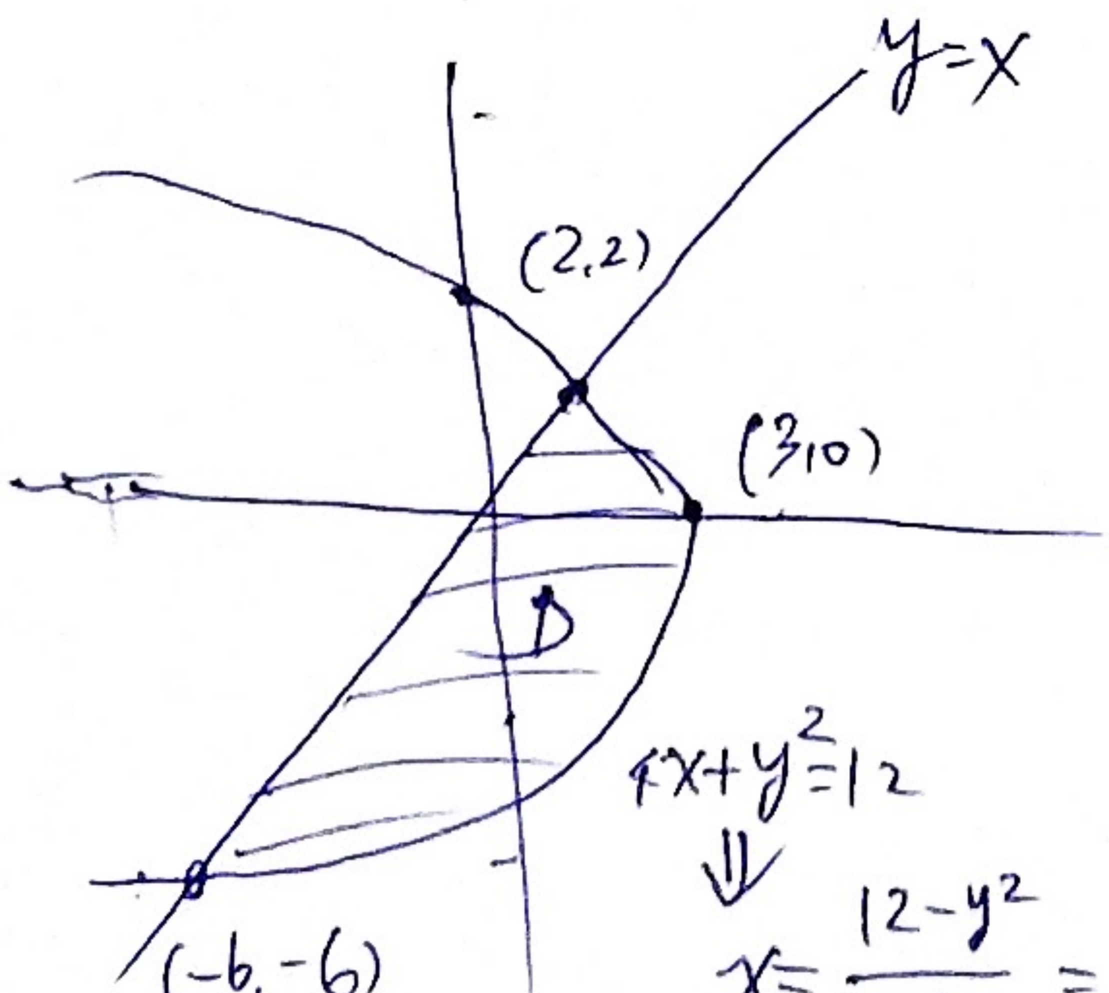
2. (10 points) 求以下圖形中的陰影面積:



先求交點 A： $y=2-x=2x-x^2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$
$\therefore (x-1)(x-2)=0$, $x=1,2$

$$\text{Area}=\int_1^2[(2x-x^2)-(2-x)]dx=\int_1^2(-2+3x-x^2)dx$$
$$=-2x\Big|_1^2+\frac{3}{2}x^2\Big|_1^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2$$
$$=-2+\frac{9}{2}-\frac{7}{3}=\frac{1}{6}$$

3. (10 points) 令D為由曲線$4x+y^2=12$與$y=x$所圍成的有界區域，描繪D之圖形 並且計算D的面積.



$\begin{cases}4x+y^2=12\\ y=x\end{cases} \Rightarrow y^2+4y-12=0$, $(y+6)(y-2)=0$
$\therefore y=2,-6$
$\Rightarrow x=2,-6$

$4x+y^2=12$
$\Downarrow$
$x=\frac{12-y^2}{4}=3-\frac{y^2}{4}$

x_R-x_L

$$\int_{-6}^{2}\left(\left(3-\frac{y^2}{4}\right)-y\right)dy$$
$$=\int_{-6}^{2}\left(\frac{-y^2}{4}-y+3\right)dy=\left(\frac{-y^3}{12}-\frac{y^2}{2}+3y\right)\Big|_{-6}^{2}$$
$$=\left(\frac{-8}{12}-\frac{4}{2}+6\right)-\left(\frac{+216}{12}-\frac{36}{2}+(-18)\right)$$
$$=\left(\frac{-2}{3}-2+6\right)-(18-18-18)$$
$$=\frac{-2}{3}+4+18=22-\frac{2}{3}=21\frac{1}{3}=\frac{64}{3}$$

4. (7+7+6=20 points) 計算不定積分: (a) $\int \ln\sqrt{x}\, dx$ (b) $\int \tan^{-1}(2x)\, dx$.

(a) $u=\ln\sqrt{x}$, $dv=dx$

$du=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, $v=x$

$=x\ln\sqrt{x}-\int\left(\frac{1}{2x}\cdot x\right)dx$

$=x\ln\sqrt{x}-\int\frac{1}{2}dx$

$=x\ln\sqrt{x}-\frac{x}{2}+C$

(b) $u=\tan^{-1}(2x)$, $dv=dx$

$du=\frac{2}{1+(2x)^2}dx$, $v=x$

$=x\tan^{-1}(2x)-\int\frac{2x}{1+(2x)^2}dx$ $\quad 1+4x^2$

$y=1+4x^2$

$dy=8x\,dx$

$\therefore 2x\,dx=\frac{1}{4}dy$

$=x\tan^{-1}(2x)-\int\frac{\frac{1}{4}dy}{y}$

$=x\tan^{-1}(2x)-\frac{1}{4}\ln|y|+C$

$=x\tan^{-1}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$

(c) $\int \frac{x}{10^x}\, dx.$ $=\int x\,10^{-x}dx$

$u=x$, $dv=10^{-x}dx$

$\Rightarrow du=dx$, $v=\frac{10^{-x}}{\ln 10}\cdot(-1)$

$=\frac{-x\cdot 10^{-x}}{\ln 10}-\int\frac{-10^{-x}}{\ln 10}dx=\frac{-x}{10^x\cdot\ln 10}+\int\frac{10^{-x}}{\ln 10}dx$

$=\frac{-x}{10^x(\ln 10)}+\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{-10^{-x}}{\ln 10}+C=\frac{-x}{\ln 10\cdot 10^x}-\frac{10^{-x}}{(\ln 10)^2}+C$

5. (10 points) 求 $\frac{x^3}{(x+1)(x-1)^2}$ 之部分分式(partial fraction)。

$(x+1)(x-1)^2$: x^2-2x+1 times $x+1$ gives x^3-2x^2+x plus x^2-2x+1, total x^3-x^2-x+1

$x^3 \div (x^3-x^2-x+1) = 1$, remainder $x^3-(x^3-x^2-x+1)=x^2+x-1$

$=1+\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-1)^2}=1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$

$(x^2+x-1)=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$

令 $x=1\Rightarrow 1+1-1=C(1+1)\Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}$

令 $x=-1\Rightarrow 1-1-1=A(-1-1)^2=4A\Rightarrow 4A=-1,\ \boxed{A=-\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow (x^2+x-1)=\frac{-1}{4}(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+\frac{1}{2}(x+1)$

令 $x=0$, $-1=\frac{-1}{4}-B+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}}$