系級............... 學號 .... 姓名.........................

微積分 (I) Quiz #1 (50 minutes) 2024/03/04

1. (5+5=10 points) 求級數收斂的 x 的值並且計算該級數的總和。 (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n(x-5)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-4(x-5)\right)^n$，公比 $r=-4(x-5)$

$|r| = 4|x-5| < 1$，$|x-5| < \frac{1}{4}$ 時 級數收斂

級數和 $= \frac{首項}{1-r} = \frac{1}{1-(-4(x-5))} = \frac{1}{1+4(x-5)} = \frac{1}{4x-19}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{2}\right)^n$；公比 $r=\frac{\sin x}{2}$，$|r| = \left|\frac{\sin(x)}{2}\right| < 1$ 時，級數收斂

$\Leftrightarrow |\sin(x)| < 2$，∴ 此級數對所有 $x \in \mathbb{R}$ 皆收斂.

級數和：$\frac{首項}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{\sin x}{2}} = \frac{2}{2-\sin x}$

2. (6+4=10 points) 判斷級數是收斂或發散(必須詳述原因):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

部分和 $S_k = \sum_{n=1}^{k}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{k}\left[\ln n - \ln(n+1)\right]$

$= (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + [\ln k - \ln(k+1)]$

$= -\ln(k+1) + \ln 1 = -\ln(k+1)$

$\lim_{k\to\infty}(S_k) = \lim_{k\to\infty} -\ln(k+1) = -\infty$

故級數發散

(b) $10-2+0.4-0.08+0.016-\ldots$

$\frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$

$\frac{0.4}{-2} = \frac{-1}{5}$

$\vdots$

公比 $r = \frac{-1}{5}$ 的等比級數 (幾何級數) 故級數收斂

3. 使用等比級數和公式將 $7.\overline{12345}$ 表示成分數. (帶分數或假分數)

$= 7.\underbrace{12345}\,\underbrace{12345}\,\underbrace{12345}\cdots$

$= 7 + \frac{12345}{10^5} + \frac{12345}{10^{10}} + \frac{12345}{10^{15}} + \cdots$

$= 7 + \frac{12345}{10^5}\left[1 + 10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \cdots\right]$

$= 7 + \frac{12345}{10^5}\cdot\left(\frac{1}{1-10^{-5}}\right)$

$= 7 + \frac{12345}{\cancel{10^5}}\,\frac{1}{\frac{99999}{\cancel{100000}}} = 7 + \frac{12345}{99999}$

$= 7\frac{4115}{33333}$ 或 $\frac{237,446}{33333}$

4. (5+5=10 points) 判斷以下數列是收斂或發散(必須詳述原因)，如果收斂求其極限:

(a) $\left\{a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+n+11}\right\}$　　(b) $\{\sqrt[n]{n+1}\}$

$|a_n| = \dfrac{n}{n^2+n+11}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n+11} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n+1)^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln(n+1)^{\frac{1}{n}}}$

其中, $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1} = 0$

$\therefore$ 原式之極限為 $e^0 = 1$

5. (10 points) 判斷以下數列是否為遞增、遞減或非單調? 另外，此數列是否有界(bounded)? 為什麼? 請詳述理由。 $\left\{a_n = n + \dfrac{1}{n}, n \geq 2\right\}$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f' = 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

故此數列為遞增數列.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) = \infty$

故數列 $\{a_n\}$ 沒有上界.

故此數列不是有界

6. (10 points) 利用積分檢定法判斷級數 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ 是收斂或發散。

計算積分 $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x^2}{e^x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_3^t x^2 e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} -(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_3^t$

$= \lim_{t\to\infty} -(t^2+2t+2)e^{-t} + (9+6+2)e^{-3}$

$= \lim_{t\to\infty} \dfrac{-(t^2+2t+2)}{e^t} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) + \dfrac{17}{e^3}$

$= \lim_{t\to\infty} \dfrac{-(2t+2)}{e^t} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) + \dfrac{17}{e^3}$

$= \lim_{t\to\infty} \dfrac{-2}{e^t} + \dfrac{17}{e^3}$

$= 0 + \dfrac{17}{e^3}$, 故級數收斂!

用 integration by parts

$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$

$u = x^2,\ dv = e^{-x}dx$

$du = 2x\,dx,\ v = -e^{-x}$

$= -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right)$

$u = x,\ dv = e^{-x}dx$

$du = dx,\ v = -e^{-x}$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} dx$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

$= -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$