系級............ 組別： A / B 學號 .... 姓名......................

微積分 (I) Quiz #6 (45 minutes) 2023/11/20

除了選擇，填充和簡答題之外，你的答案必須提供完整說明，如果只有答案沒有任何說明得零分！

1. (5+5=10 points) 求以下極限：(a) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+3x}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4}\frac{x(\cancel{x+3})}{(x-4)(\cancel{x+3})}$

$= \lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}$ 極限不存在 (分母=0) 分子≠0

$\lim_{x\to 4^+}\frac{x}{x-4} = +\infty$, $\lim_{x\to 4^-}\frac{x}{x-4} = -\infty$ $\Rightarrow$ 極限不存在

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{(-2+x)^{-1}+2^{-1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2+(x-2)}{2(x-2)}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x-2)} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$

2. (5+5=10 points) 求以下極限：(a) $\lim_{x\to 1/2^-}\frac{2x-1}{|2x^3-x^2|} = \lim_{\substack{x\to(\frac{1}{2})^- \\ (x<\frac{1}{2})}}\frac{\cancel{(2x-1)}}{-x^2\cancel{(2x-1)}} = \frac{1}{-(\frac{1}{2})^2} = -4$

$|2x^3-x^2| = |x^2(2x-1)|$

$= x^2|2x-1| = \begin{cases} x^2(2x-1), & 2x-1>0, (x>\frac{1}{2}) \\ -x^2(2x-1), & 2x-1<0 \ (x<\frac{1}{2}) \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 4}\frac{\ln x-\ln 4}{x-4}$ $y=\ln(x)$ 在 $x=4$ 的切線斜率，$y'=\frac{1}{x}$，

其斜率 $= y'(4) = \frac{1}{4}$

3. (10 points) 求以下函數的垂直漸進線：$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2} = \frac{x^2+1}{x(3-2x)}$，在 $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ 沒有定義

(1) $x=0$: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x(3-2x)}\ \frac{(+)}{(+)} = +\infty$
$x>0$

或 $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x(3-2x)}\ \frac{(+)}{(-)} = -\infty$

$\Rightarrow$ $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ 為其垂直漸近線

(2) $x=\frac{3}{2}$; $\lim_{x\to(\frac{3}{2})^+}\frac{(x^2+1)}{x(3-2x)}\ \frac{(+)}{(-)} = -\infty$
$x>3/2$

或 $\lim_{x\to(\frac{3}{2})^-}\frac{(x^2+1)}{x(3-2x)}\ \frac{+}{+} = +\infty$
$x<3/2$

4. (5+5=10 points) 依照以下圖形回答下列問題:

(a) $\lim_{x\to -3} A(x)$

∞

(b) $\lim_{x\to 2^-} A(x)$

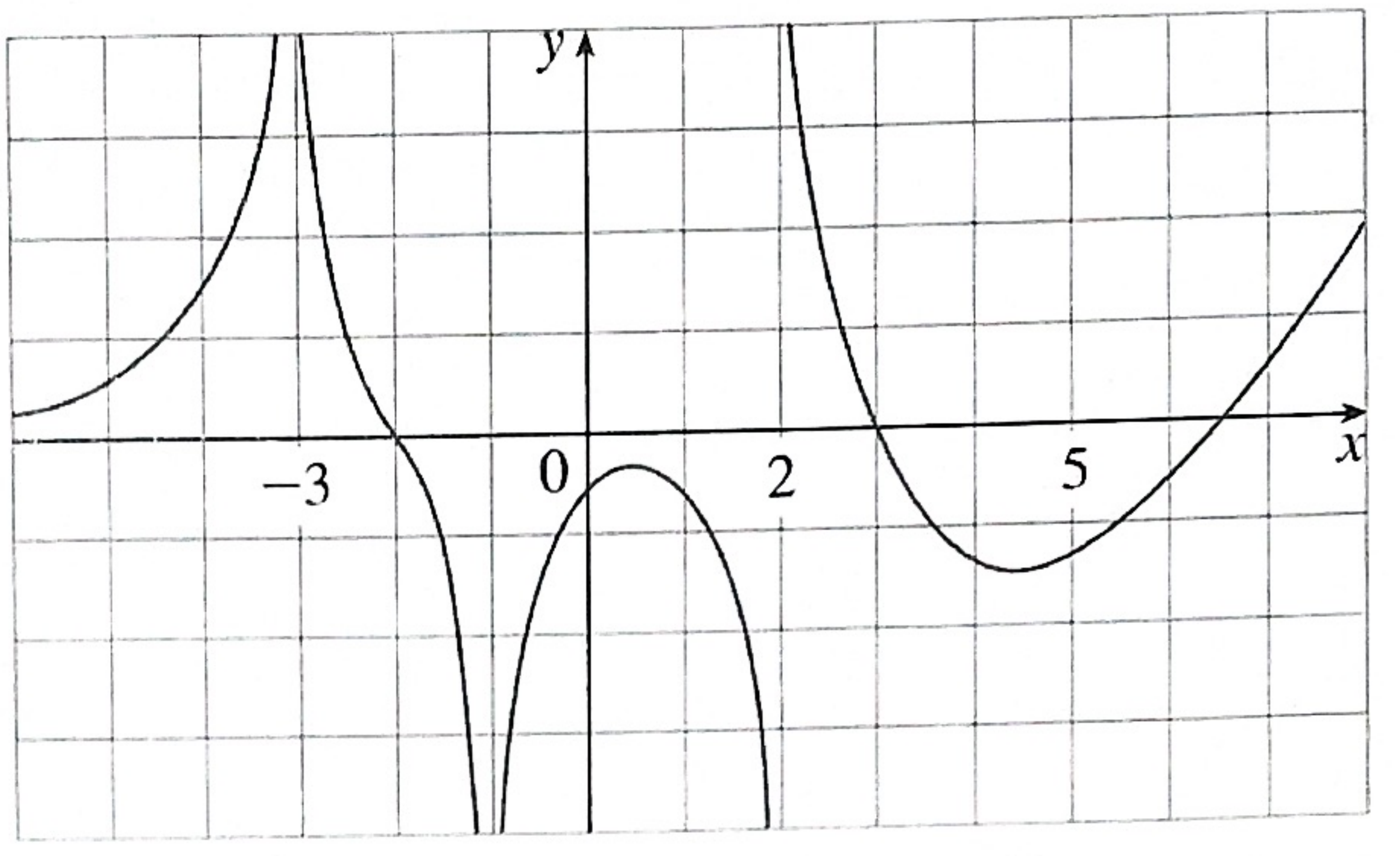
$-\infty$

(c) $\lim_{x\to 2^+} A(x)$

$+\infty$

(d) $\lim_{x\to -1} A(x)$

$-\infty$



(e) The equations of the vertical asymptotes

$x=-3,\ x=-1,\ x=2$

5. (6+7+7=20 points) 求以下函數的導數: (a) $f(x) = \sec^{-1}(e^x)$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x\sqrt{(e^x)^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot e^x = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

(b) $g(x) = \left(\tan^{-1} x^2\right)^2$, $g'(x) = 2\cdot\tan^{-1}(x^2)\cdot\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x^2)$

$$= 2\cdot\tan^{-1}(x^2)\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 2\cdot\tan^{-1}(x^2)\cdot\frac{2x}{1+x^4}$$

$$= \tan^{-1}(x^2)\cdot\frac{4x}{1+x^4}$$

(c) $F(x) = x\cdot\arcsin(1/x)$

$$F' = \arcsin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$= \arcsin\left(\tfrac{1}{x}\right) + \frac{x}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

$$= \arcsin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}$$