Universidade Federal da Paraíba – Centro de Informática

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Disciplina: Equações Diferenciais Ordinárias

Terceira Lista de Exercícios Teóricos

Exercício 1. Para cada EDO abaixo, encontre a forma geral da solução e determine o conjunto $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ que gera o conjunto de soluções. Em seguida, demonstre que tal conjunto é linearmente independente.

(a) $y'' + 4y = 0$
(b) $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
(c) $y^{(4)} - y = 0$
(d) $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 18y'' - 30y' + 25y = 0$
(e) $y^{(3)} - 3y' = 0$
(f) $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' + y' - y = 0$

Exercício 2. Considere a seguinte EDO não-homogênea:

$$y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y(x) = 3e^{2x} + 2\sin(x) - 8e^{x}\cos(x).$$

Determine a solução geral desta equação através do Método dos Coeficientes Indeterminados.

Exercício 3. O Wronskiano de duas funções é $x^2 - 4$. Tais funções são linearmente dependentes ou independentes? Por quê?

Exercício 4. Sejam a, b e c constantes estritamente positivas. Considere a equação diferencial

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{1}$$

(a) Se y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea, mostre que $\lim_{x \to +\infty} (y_1(x) - y_2(x)) = 0$. Esse resultado continua sendo verdadeiro se $b = 0$?

(b) Se $f(x)$ for constante ($f(x) = d$), mostre que toda solução de (1) tende a d/c quando $x \to= \infty$. O que acontece quando $c = 0$? E quando $b = c = 0$?

Exercício 5. Encontre a solução geral das seguintes equações de Euler-Cauchy:

(a) $x^2y''(x) + 7xy'(x) + 4y(x) = \ln(x^{-3})$

(b) $x^3y^{(3)}(x) - 3x^2y''(x) + 6xy'(x) - 6y(x) = x$

(c) $4x^2y''(x) - 5xy'(x) + y(x) = x^2$

Exercício 6. Para cada EDO abaixo, verifique que as funções dadas y_1 e y_2 satisfazem à equação homogênea correspondente e que são linearmente independentes. Em seguida, utilize o Método da Variação de Parâmetros para determinar as respectivas soluções particulares:

(a) $\begin{cases} x^2y''(x) - 2y(x) = 3x^2 - 1, \ x > 0 \\ y_1(x) = x^2, \ y_2(x) = x^{-1}. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = 2x^3, \ x > 0 \\ y_1(x) = x, \ y_2(x) = xe^x. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = x^2e^x, \ x > 0 \\ y_1(x) = 1 + x, \ y_2(x) = e^x. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (1-x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2(x-1)^2e^{-x}, \ x > 1 \\ y_1(x) = e^x, \ y_2(x) = x. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2\ln(x), \ x > 0 \\ y_1(x) = x^2, \ y_2(x) = x^2\ln(x). \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 0,25)y(x) = 3x^{3/2}\sin(x), \ x > 0 \\ y_1(x) = x^{-1/2}\sin(x), \ y_2(x) = x^{-1/2}\cos(x). \end{cases}$

Exercício 7. Verifique que no intervalo $(0, +\infty)$ as funções $y_1(x) = \sin(1/x)$ e $y_2(x) = \cos(1/x)$ são soluções LI da EDO $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0$ e encontre a solução que satisfaz às condições $y(1/\pi) = 1$ e $y'(1/\pi) = -1$.

Exercício 8. Sejam f, g e h funções diferenciáveis definidas sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $W(fg, fh) = f^2W(g, h)$.

Exercício 9. Se as funções y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes de $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, determine em que condições as funções $y_3(x) = a_1y_1(x) + a_2y_2(x)$ e $y_4(x) = b_1y_1(x) + b_2y_2(x)$ formam também um conjunto de soluções linearmente independentes.