Universidade Federal da Paraíba
Discente: Jefferson Bezerra dos Santos
Docente: José Miguel Aroztegui Massera

Lista de EDO aplicada

1. Questão:

De fato, o método de Runge-Kutta é definido como,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= h\phi(x_n, y_n, h) \\
\phi(x, y, h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_R k_R \\
k_1 &= f(x, y) \\
k_2 &= f(x + a_2 h, y + h b_{21} k_1) \\
&\vdots \\
k_R &= f(x + a_R h, y + h b_{R1} k_1 + h b_{R2} k_2 + \cdots + h b_{RR-1} k_{R-1})
\end{aligned}$$

onde:

- $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$;
- a, c são vetores do $\mathbb{R}^R$;
- B é uma matriz de diagonal inferior em $\mathbb{R}^{\mathrm{RxR}}$.

para que o método seja consistente deve-se ter o índice de erro q maior ou igual a 1. Pela definição do métod de Runge-Kutta segue que

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 = -1 + 1 = 0$$

pela definição de consistência segue que,

$$\begin{aligned}
C_1 = 0 &\Rightarrow \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n) = 0 \\
&\Rightarrow 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_R) = 0 \\
&\Rightarrow 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_R) = 0 \\
&\Rightarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_R = 1
\end{aligned}$$

Universidade Federal da Paraíba
Discente: Jefferson Bezerra dos Santos
Docente: José Miguel Aroztegui Massera

2. Questão:

O método de Runge-kutta de ordem 3 é definido como,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= h\phi(x_n, y_n, h) \\ \phi(x, y, h) &= c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 \\ k_1 &= f(x, y) \\ k_2 &= f(x + a_2h, y + hb_{21}k_1) \\ k_3 &= f(x + a_3h, y + hb_{31}k_1 + hb_{32}k_2). \end{aligned}$$

onde:

- $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$;
- a, c são elementos do $\mathbb{R}^R$;
- b é uma matriz de diagonal superior em $\mathbb{R}^{\mathrm{RxR}}$.

sobre o vetor a é imposta a seguinte condição,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= b_{21} \\ a_3 &= b_{31} + b_{32} \end{aligned}$$

os dados do vetores a, c e da matrix B podem ser organizados da seguinte maneira,

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

finalmente o Runge-Kutta de ordem 3 deve satisfazer as seguintes relações,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_2a_2 + c_3a_3 &= \frac{1}{2} \\ c_2{a_2}^2 + c_3{a_3}^2 &= \frac{1}{3} \\ c_3b_{32}a_2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Universidade Federal da Paraíba
Discente: Jefferson Bezerra dos Santos
Docente: José Miguel Aroztegui Massera

3. questão:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}$$

verificando as relações para (Heun),

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= \frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} = 1\,(\text{válida}) \\ c_2 a_2 + c_3 a_3 &= 0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\,(\text{válida}) \\ c_2 {a_2}^2 + c_3 {a_3}^2 &= 0\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\,(\text{válida}) \\ c_3 b_{32} a_2 &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\,(\text{válida}). \end{aligned}$$

verificando as relações para (Nystron),

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1\,(\text{válida}) \\ c_2 a_2 + c_3 a_3 &= \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,(\text{válida}) \\ c_2 {a_2}^2 + c_3 {a_3}^2 &= \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,(\text{válida}) \\ c_3 b_{32} a_2 &= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\,(\text{válida}) \end{aligned}$$

Universidade Federal da Paraíba
Discente: Jefferson Bezerra dos Santos
Docente: José Miguel Aroztegui Massera

4. Questão:

O método de Runge-Kutta de 4 ordem é definido por,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= h\phi(x_n, y_n, h)\\
\phi(x, y, h) &= c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4\\
k_1 &= f(x, y)\\
k_2 &= f(x + a_2h, y + hb_{21}k_1)\\
k_3 &= f(x + a_3h, y + hb_{31}k_1 + hb_{32}k_2)\\
k_4 &= f(x + a_4h, y + hb_{41}k_1 + hb_{42}k_2) + hb_{43}k_3).
\end{aligned}$$

onde:

- $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$;
- a, c são elementos do $\mathbb{R}^R$;
- b é uma matriz de diagonal superior em $\mathbb{R}^{\mathrm{RxR}}$.

sobre o vetor a é imposta a seguinte condição,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0\\
a_2 &= b_{21}\\
a_3 &= b_{31} + b_{32}\\
a_4 &= b_{41} + b_{42} + b_{43}
\end{aligned}$$

os dados do vetores a, c e da matrix b podem ser organizados da seguinte maneira,

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
a_2 & b_{21} & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & \\
a_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & \\
\hline
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4
\end{array}$$

finalmente o Runge-Kutta de ordem 3 deve satisfazer as seguintes relações,

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1 \\
c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 &= \frac{1}{2} \\
c_2{a_2}^2 + c_3{a_3}^2 + c_4{a_4}^2 &= \frac{1}{3} \\
c_3b_{32}a_2 + c_4b_{42}a_2 + c_4b_{43}a_3 &= \frac{1}{6} \\
c_2{a_2}^3 + c_3{a_3}^3 + c_4{a_4}^3 &= \frac{1}{4} \\
c_3a_3b_{32}a_2 + c_4a_4b_{42}a_2 + c_4a_4b_{43}a_3 &= \frac{1}{8} \\
c_4b_{43}b_{32}a_2 &= \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

5. Questão:

Dada a configuração 3 abaixo, vamos verificar as relações do Runge-Kutta de 4 ordem.

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

verificando,

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1 \,(\text{válida}) \\
c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,(\text{válida}) \\
c_2{a_2}^2 + c_3{a_3}^2 + c_4{a_4}^2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(\text{válida}) \\
c_3b_{32}a_2 + c_4b_{42}a_2 + c_4b_{43}a_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}(0)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}\,(\text{válida}) \\
c_2{a_2}^3 + c_3{a_3}^3 + c_4{a_4}^3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}(\text{válida}) \\
c_3a_3b_{32}a_2 + c_4a_4b_{42}a_2 + c_4a_4b_{43}a_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 0\frac{1}{12} + = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}(\text{válida}) \\
c_4b_{43}b_{32}a_2 &= \frac{1}{6}(1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}(\text{válida})
\end{aligned}
$$

Universidade Federal da Paraíba
Discente: Jefferson Bezerra dos Santos
Docente: José Miguel Aroztegui Massera

Dada a configuração 4 abaixo, vamos verificar as relações do Runge-Kutta de 4 ordem.

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

verificando,

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1(\text{válida}) \\
c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}(\text{válida}) \\
c_2{a_2}^2 + c_3{a_3}^2 + c_4{a_4}^2 &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{3}(\text{válida}) \\
c_3b_{32}a_2 + c_4b_{42}a_2 + c_4b_{43}a_3 &= \frac{3}{8}(1)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}(-1)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}(1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}(\text{válida}) \\
c_2{a_2}^3 + c_3{a_3}^3 + c_4{a_4}^3 &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}(\text{válida}) \\
c_3a_3b_{32}a_2 + c_4a_4b_{42}a_2 + c_4a_4b_{43}a_3 &= \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)(1)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}(1)(-1)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}(1)(1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{8}(\text{válida}) \\
c_4b_{43}b_{32}a_2 &= \frac{1}{8}(1)(1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24}(\text{válida})
\end{aligned}
$$

6. Questão:

1) A função incognita1 é o Range-Kutta de ordem R que calcular o vetor coluna para a solução do sistema de equações diferencias.

2) A função incognita2 é o método de Heun um Runge-Kutta de ordem 3 que calcular a matriz solução do sistema de equações, a função incognita2 carregar os dados necessários para aplicar a função Runge-Kutta de ordem R, isto é os vetores a, c e a matriz B.

3) Mudaria os vetores a,c e matriz B, isto é

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} e\, B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

7. Questão:

Para facilitar a transformação do problema (5) esse será reescrito da seguinte forma,

$$\begin{cases} \theta''(x) &= & -\frac{g}{d} sen(\theta(x)) \\ \theta'(0) &= & 0 \\ \theta(0) &= & \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Para transformar o problema (5) em um sistema de equações faremos a seguinte substituição,

$$\begin{aligned} & y_1 = \theta \;\Rightarrow y_1{}' = y_2 \\ & y_2 = \theta' \Rightarrow y_2{}' = y_3 \\ & y_3 = \theta'' \end{aligned}$$

O vetor coluna da matriz solução do sistema de equações será dado por,

$$P_c = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix}, \text{com a condição inicial } P_1 = \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \end{bmatrix}$$

a função f será definida como, $f(t, P_c) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ -\frac{g}{d} sin(p_1) \end{bmatrix}$ onde p_1 e p_2 são elementos do vetor coluna P_c. Finalmente a matriz solução do sistema de equações será dada por,

$$P = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{N+1} \\ \theta_1{}' & \theta_2{}' & \dots & \theta_{N+1}{}' \end{bmatrix}$$

onde por definição $\theta_1 = \theta(0)$ e $\theta_1{}' = \theta'(0)$.

8. Questão:

Para está questão utilizei o método que estava já definido, ou seja, o Range-Kutta de ordem 3 o método de Heun.

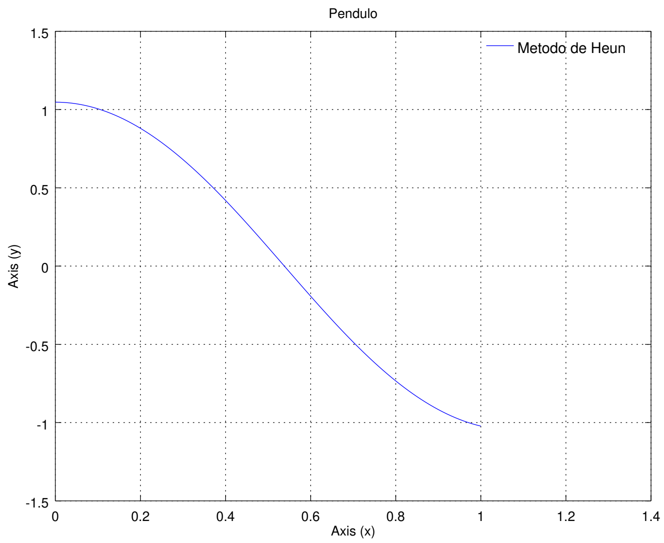
```
###==================== PROGRAM ============================
# Program: RungeKuttaR.m
```

```
# Description:Method of Runge Kutta R
# Date of Create:  sex 29 nov 2019 17:51:24
# Update in:  sex 29 nov 2019 17:51:28
# Author:Jefferson Bezerra dos Santos
#-----------------------------------------------------------

function ynm1 = RungeKuttaR(f,xn,yn,h,c,a,B)
    R = size(c,1);
    n = size(yn,1);
    k = zeros(n,R);
    k(:,1) = f([xn;yn]);
    phi = c(1)*k(:,1);
    for i = 2:R
        soma = zeros(n,1);
        for j = 1:i-1
            soma = soma + h*B(i,j)*k(:,j);
        endfor
        k(:,i) = f([xn + a(i)*h;yn + soma]);
        phi = phi + c(i)*k(:,i);
    endfor
    ynm1 = yn + h*phi;
endfunction


###==================== PROGRAM ============================
# Program: Heun.m
# Description: Method of Heun
# Date of Create: sex 29 nov 2019 18:02:52
# Update in: sex 29 nov 2019 18:03:00
# Author:Jeffrey
#-----------------------------------------------------------

function [x y] = Heun(f,x0,y0,h,N)
    x(1) = x0;
    y(:,1) = y0;
    c = [1/4;0;3/4];
    a = [0;1/3;2/3];
    B = [0 0 0;1/3 0 0; 0 2/3 0];
    for n = 1:N
        y(:,n+1) = RungeKuttaR(f,x(n),y(:,n),h,c,a,B);
        x(n+1) = x(n) + h;
```

```
    endfor
endfunction


###==================== PROGRAM ============================
# Program:pendulo.m
# Description: Solve Pendulum
# Date of Create:  sex 29 nov 2019 16:49:23
# Update in: sex 29 nov 2019 16:49:27 -03
# Author:Jeffrey
#-----------------------------------------------------------

###================= Clean enviromment =====================
clc
clear
#-----------------------------------------------------------

g=9.81;
d=1;

f=@(x) [x(3); -g/d*sin(x(2))];
y0=[pi/3;0];
x0=0;
h = 0.01;
N = 100;

[x y] = Runge4(f,x0,y0,h,N);

plot(x,y(1,:))
```

9. **Questão:**

```
###==================== PROGRAM ============================
# Program: RungeKuttaR.m
# Description:Method of Runge Kutta R
# Date of Create:  sex 29 nov 2019 17:51:24
# Update in:  sex 29 nov 2019 17:51:28
# Author:Jefferson Bezerra dos Santos
#-----------------------------------------------------------
```




```
function ynm1 = RungeKuttaR(f,xn,yn,h,c,a,B)
    R = size(c,1);
    n = size(yn,1);
    k = zeros(n,R);
    k(:,1) = f([xn;yn]);
    phi = c(1)*k(:,1);
    for i = 2:R
        soma = zeros(n,1);
        for j = 1:i-1
            soma = soma + h*B(i,j)*k(:,j);
        endfor
        k(:,i) = f([xn + a(i)*h;yn + soma]);
        phi = phi + c(i)*k(:,i);
    endfor
    ynm1 = yn + h*phi;
endfunction


###==================== PROGRAM ============================
# Program: Runge4.m
# Description: Method of Runge Kutta 4
# Date of Create: sex 29 nov 2019 18:02:52
# Update in: sex 29 nov 2019 18:03:00
# Author:Jefferson Bezerra dos Santos
```

```
#------------------------------------------------------------

function [x y] = Runge4(f,x0,y0,h,N)
    x(1) = x0;
    y(:,1) = y0;
    c = [1/6;1/3;1/3;1/6];
    a = [0;1/2;1/2;1];
    B = [0 0 0 0;1/2 0 0 0; 0 1/2 0 0 ;0 0 1 0];
    for n = 1:N
        y(:,n+1) = RungeKuttaR(f,x(n),y(:,n),h,c,a,B);
        x(n+1) = x(n) + h;
    endfor
endfunction
```

10. Questão:

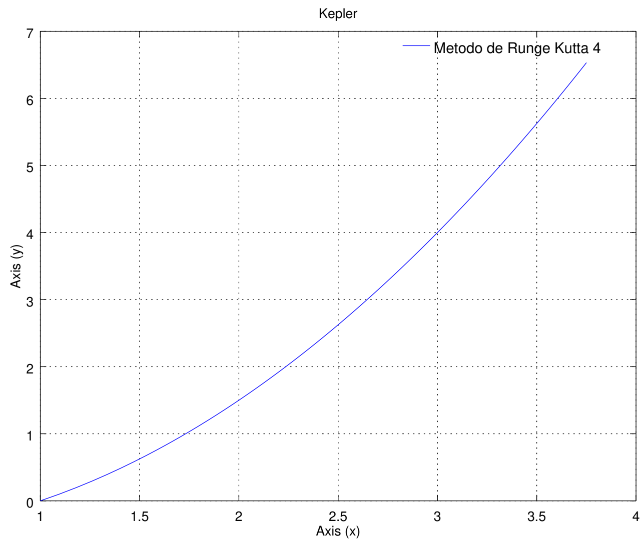
```
###==================== PROGRAM ============================
# Program: RungeKuttaR.m
# Description:Method of Runge Kutta R
# Date of Create:  sex 29 nov 2019 17:51:24
# Update in:  sex 29 nov 2019 17:51:28
# Author:Jefferson Bezerra dos Santos
#------------------------------------------------------------

function ynm1 = RungeKuttaR(f,xn,yn,h,c,a,B)
    R = size(c,1);
    n = size(yn,1);
    k = zeros(n,R);
    k(:,1) = f([xn;yn]);
    phi = c(1)*k(:,1);
    for i = 2:R
        soma = zeros(n,1);
        for j = 1:i-1
            soma = soma + h*B(i,j)*k(:,j);
        endfor
        k(:,i) = f([xn + a(i)*h;yn + soma]);
        phi = phi + c(i)*k(:,i);
    endfor
    ynm1 = yn + h*phi;
endfunction
```

```
###==================== PROGRAM ===========================
# Program: Runge4.m
# Description: Method of Runge Kutta 4
# Date of Create: sex 29 nov 2019 18:02:52
# Update in: sex 29 nov 2019 18:03:00
# Author:Jefferson Bezerra dos Santos
#-----------------------------------------------------------

function [x y] = Runge4(f,x0,y0,h,N)
    x(1) = x0;
    y(:,1) = y0;
    c = [1/6;1/3;1/3;1/6];
    a = [0;1/2;1/2;1];
    B = [0 0 0 0;1/2 0 0 0; 0 1/2 0 0 ;0 0 1 0];
    for n = 1:N
        y(:,n+1) = RungeKuttaR(f,x(n),y(:,n),h,c,a,B);
        x(n+1) = x(n) + h;
    endfor
endfunction


###==================== PROGRAM ===========================
# Program:kepler.m
# Description: Solve Kepler
# Date of Create:  sex 29 nov 2019 16:49:23
# Update in: sex 29 nov 2019 16:49:27 -03
# Author:Jefferson Bezerra dos Santos
#-----------------------------------------------------------

###================= Clean enviromment =====================
clc
clear
#-----------------------------------------------------------

G = 1;
M = 1;


f=@(x) [x(4);x(5);(((x(2)^2 + x(3)^2)^(-3/2)))*[-x(2);-x(3)]];
y0=[0;1;0;0];
```

```
x0=0;
h = 0.1;
N = 100;

[x y] = Runge4(f,x0,y0,h,N);

### =========== Plotting ======================================
#color b for blue, '.' for point, + is type of symbol
plot(y(1,:),y(2,:))
title('Kepler');
xlabel('Axis (x)');
ylabel('Axis (y)');
h = legend("Metodo de Runge Kutta 4");
set(h,"fontsize",11);
legend("boxoff");
grid on
#print -depsc k3.eps #Figure in color eps format
#-------------------------------------------------------------
```

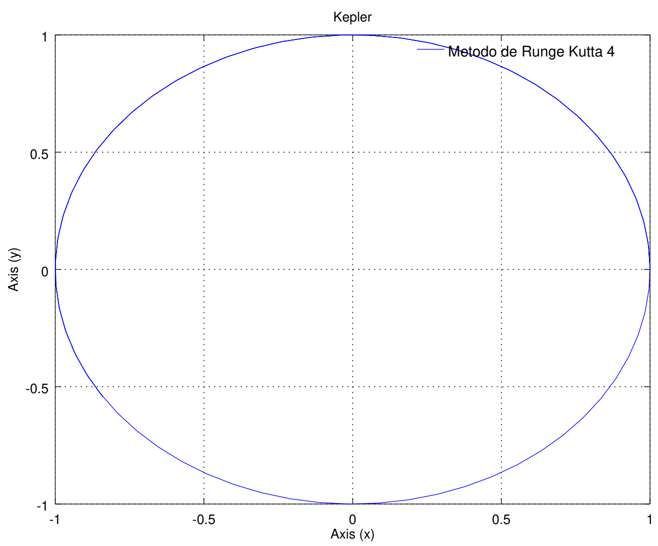
O método de Kepler com $n = 100$ e $h = 0.1$ para o vetor inicial,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



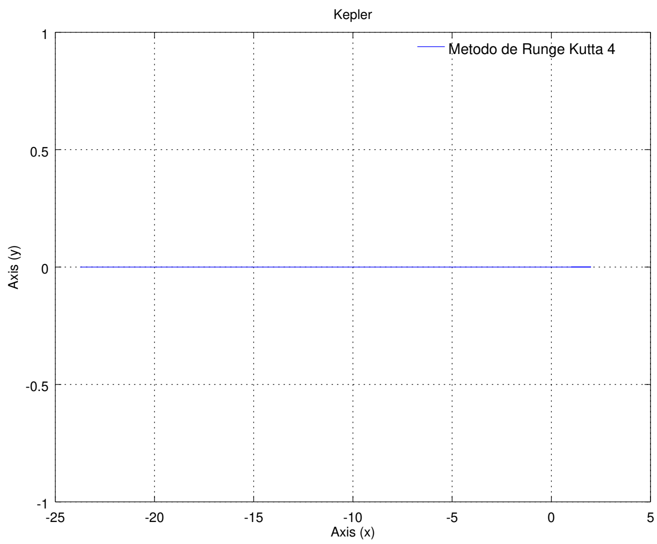
O método de Kepler com $n = 100$ e $h = 0.1$ para o vetor inicial,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



O método de Kepler com $n = 100$ e $h = 0.1$ para o vetor inicial,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



O método de Kepler com $n = 100$ e $h = 0.1$ para o vetor inicial,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$