UFPB – CI – PPGMMC – EDO
Primeira Lista de Exercícios Computacionais
Data de entrega: 31/10/2019

Nesta lista considere a seguinte notação:

- $a, b, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\Omega = [a, b]$, $x_0 \in \Omega$ $(x_0 = a)$.
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Problema de Valor Inicial (PVI): dados f, a, b, x_0, y_0, encontrar $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que,

$$(PVI) \begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \qquad x \in \Omega, \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

  onde y se chama solução analítica do (PVI).
- Número de passos: $N \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- Comprimento do passo: $h = \frac{b-a}{N}$.
- Pontos da discretização: $x_n = x_0 + nh$, $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.
- Discretização de Ω:

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_N\} \quad (= \{a, a+h, a+2h, \ldots, b\}).$$

- y_n é a aproximação da solução analítica em x_n. Dito de outra forma: y_n é obtido a partir de um método numérico, por exemplo Euler, e aproxima $y(x_n)$.
- Solução numérica do (PVI):

$$S = \{(x_n, y_n) : n \in \{0, 1, \ldots, N\}\}$$

- Vetores da solução numérica:

$$\begin{aligned} x &= [x_0 \;\; x_1 \;\; \ldots \;\; x_n \;\; \ldots \;\; x_N]^\top \in \mathbb{R}^{N+1} \\ y &= [y_0 \;\; y_1 \;\; \ldots \;\; y_n \;\; \ldots \;\; y_N]^\top \in \mathbb{R}^{N+1} \end{aligned}$$

- $f_n = f(x_n, y_n)$

Exercício 1. Escreva uma função em OCTAVE com a seguinte interface:

```
function [x,y]=taylor3(f,f1,f2,x0,y0,h,N)
```

cujas entradas são as funções f, $f1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, o ponto (x_0, y_0), o comprimento do passo h e o número de passos N. E cujas saídas são os vetores da solução numérica x e y, obtidas com o método de Taylor de ordem $q = 3$.

Exercício 2. Escreva um script em OCTAVE 'teste.m' que executa a função 'taylor3.m', definida no exercício 1, com $h = 0.1$ e $N = 50$ para resolver aproximadamente o seguinte problema:

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) - x + 2, \\ y(0) &= 2 \end{cases} \tag{1}$$

Use 'plot' para graficar os pontos da solução analítica $(x_n, y(x_n))$ e dos pontos da solução numérica (x_n, y_n).

Exercício 3. Com base no código 'taylor3.m' do exercício 1, escreva uma função OCTAVE 'euler.m' que empregue o método de Euler para resolver o problema (1). A interface da função deve ser a seguinte:

```
function [x,y]=euler(f,x0,y0,h,N)
```

Empregue 'teste.m' do exercício 2 para comparar o resultado numérico obtido com 'euler.m' e 'taulor3.m'.

Exercício 4. Faça funções em OCTAVE com as seguintes interfaces:

```
function [x,y]=adams_bashforth(f,x0,y0,h,N)
```

```
function [x,y]=ponto_medio(f,x0,y0,h,N)
```

cujas entradas são as funções f o ponto (x_0, y_0), o comprimento do passo h e o número de passos N. E cujas saídas são os vetores da solução numérica x e y, obtidas com o método de Adams-Bashforth e o método do ponto médio. Empregue o método de Euler para calcular y_{n+1}.

Exercício 5. Considere o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & \frac{y(x)}{1+3x}, \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right. \tag{2}$$

Faça um único 'plot' com a solução analítica e com todas as soluções numéricas obtidas pelos seguintes métodos:

(1) método de Euler.
(2) método de Taylor de ordem 3.
(3) método do ponto médio.
(4) método de Adams-Bashforth.

Empregue $N = 10$, $h = 1.0$.

Exercício 6. Acesse o link:
`https://www.wolframalpha.com/`
Investigue se é possível resolver algum dos exerícios anteriores usando este link.

Exercício 7. Calcular a ordem e a constante do erro para os seguintes métodos lineares:

(1) método do ponto médio
(2) método de Simpson
(3) método de Adams-Moulton
(4) método de Adams-Bashforth

Exercício 8. Verifique se as seguintes fórmulas correspondem a métodos convergentes (estável e consistente):

(1) $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$
(2) $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}(-2f_n + 3f_{n+1})$
(3) $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(-f_n + 8f_{n+1} + 4f_{n+2})$
(4) $y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$

Exercício 9. Programe uma função OCTAVE do método preditor-corretor que empregue as seguintes regras:

(1) preditor: fórmula do método de Adams-Moulton.
(2) corretor: fórmula do método de Simpson.

Exercício 10. Resolva numericamente o problema (2) com a função do exercício 9. Grafique em um único 'plot' a solução analítica de (2), a solução numérica do método preditor-corretor e a solução numérica obtida com o método de Adams-Mouton.