Escalonamento

Sadao Massago

2011-05-05 a 2014-03-14

Sumário

Neste texto, veremos os métodos de Gauss e Gauss-Jordan, conhecidos como método de escalonamento. O método de escalonamento é um dos métodos mais importantes para diversos cálculos relacionados com o sistema linear, o que é um pré requisito importante para a Geometria Analítica.

1 Pré-requisitos

Para ler este texto, precisará ter noção básica sobre matriz e sistemas lineares.

Por exemplo, conceitos sobre matrizes tais como soma e produto, múltiplos, determinantes e inversa, tipo de matriz (quadrada, diagonal, simétrica, etc) são considerados conhecidos.

Da mesma forma, o que é um sistema linear e suas soluções, técnicas de substituição para obter a solução do sistema, tipo de sistema quanto a solução (determinada, indeterminada com infinitas soluções e indeterminada sem solução), etc são assumidos conhecidos.

Para tais assuntos, veja o [2], cuja uma versão digital está disponível no site
`http://www.mat.ufmg.br/~regi/livros.html`.

2 Sistema Linear e forma matricial

Um sistema linear pode ser escrito na forma matricial. Considere um sistema de m equações em n incógnitas

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m
\end{cases}
$$

pode ser visto na forma equivalente como igualdade entre duas matrizes colunas

$$
\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

que pode ser reescrito como produto matricial

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},
$$

denominado de representação matricial.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é denominado de matriz dos coeficientes, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é denominado de vetor das incógnitas e o $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é denominado de vetor dos constantes. Deixaremos de lado, o termo "vetor" para mais adiante e seguiremos em frente. Usando esta notação, o sistema de equações torna $Ax = b$ e podemos ver facilmente que se A for matriz quadrada com $\det A \neq 0$, temos que $x = A^{-1}b$. No entanto, não é imediato determinar se o sistema tem a solução ou determinar soluções no caso do sistema não quadrada.

A representação matricial é essencialmente importante para resolver problemas complexos através das técnicas da álgebra matricial, o que não vamos entrar em detalhes.

Para resolver o sistema de equações lineares, costumamos usar uma matriz denominada de *matriz aumentada* que consiste de dois blocos, separado pelas linhas tracejadas. O bloco do lado esquerdo é a matriz dos coeficientes e o bloco do lado direito é o vetor dos constantes. A matriz aumentada do sistema é como segue.

$$
\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]
$$

É importante que consiga efetuar conversão rápida entre sistema de equações, forma matricial e a representação por matriz aumentada.

3 Forma escalonada

Uma matriz é denominada de forma escalonada ou forma escada quando o número de zeros no lado esquerdo do primeiro elemento não nulo da linha, aumenta a cada linha.

Exemplo 3.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz escalonada, mas $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é.

No caso de ter esgotado o número de colunas, isto é, quando uma linha tornar nula, todas linhas seguintes devem ser linhas nulas.

Exercício 3.2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz escalonada.

A quarta linha não aumentou os números de zeros por ter esgotado as colunas, mas é uma matriz escalonada.

Resolvendo o sistema já escalonada

O sistema cuja matriz do sistema está na forma escalonada é denominado de sistema escalonada. A solução deste sistema pode ser obtido facilmente pela técnica de substituição, resolvendo de baixo para acima.

Exemplo 3.3. Considere a matriz aumentada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right]$$

O sistema associada é

$$\begin{cases} 2x + 2y - z & = 0 \\ y + 2z & = -3 \\ -4z & = 8 \end{cases}$$

Resolvendo de baixo para cima, temos

$-4z = 8 \implies z = -2$

$y + 2z = -3 \implies y + 2 \times (-2) = -3 \implies y = -3 + 4 = 1$

$2x + 2y - z = 0 \implies 2x + 2 \times 1 - (-2) = 0 \implies 2x + 4 = 0 \implies 2x = -4 \implies x = -2$

Logo, a solução é $x = -2, y = 1, z = -2$.

Podemos obter também as infinitas soluções. Por exemplo, considere o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

tem infinitas soluções.

Resolvendo de baixo para cima, temos

$-4w = 4 \implies w = -1$

$2z + 1 = -1 \implies 2z = -2 \implies z = -1$

$x + 2y - z + 3w = 1 \implies x + 2y - (-1) + 3 \times (-1) = 1 \implies x + 2y = 3$

que tem mais de uma variável desconhecida. Neste caso, escolhemos estas variáveis como sendo livres, com exceção de um. As variáveis que forem escolhidos como livres serão considerados conhecidos e são manipulados como constantes no restante da resolução. Por exemplo, escolhendo y como livre, temos $x = 3 - 2y$.

Então a solução será

$x = 3 - 2y$, y livre, $z = -1$ e $w = -1$.

O número de variáveis livres da solução é denominado de grau de liberdade do sistema.

Determinante do sistema escalonada

Uma matriz é denominada de triangular superior quando a parte abaixo do diagonal são nulas. Da forma análoga, é denominado de matriz triangular inferior quando a parte acima do diagonal são nulas.

Como os números de zeros a esquerda do primeiro elemento não nulo da linha na matriz escalonada devem aumentar a cada linha, ele será uma matriz triangular superior no caso de ser matriz quadrada.

Teorema 3.4 (Determinante do triangular)**.** *O determinante da matriz triangular é o produto dos elementos dos diagonais.*

Demonstração. Temos que o determinante com o desenvolvimento de Laplace na coluna j é dado por

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A_{ij} = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \cdots + (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

onde A_{ij} é a matriz obtida de A, eliminando a linha i e a coluna j.

Considere o caso da matriz triangular superior. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na primeira coluna, temos que $\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{ij} = a_{11} \det A_{ij}$. Aplicando sucessivamente o desenvolvimento de Laplace, temos que

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \cdots = a_{11} \cdots a_{nn}
\end{aligned}
$$

.

O caso da matriz triangular inferior é similar, efetuando o desenvolvimento de Laplace na primeira linha. □

Exemplo 3.5. $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 2 \times (-1) \times 3 \times 5 = -30$

e $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \times (-1) \times 0 \times 0 = 0.$

4 Método de eliminação de Gauss (escalonamento)

O método de eliminação de Gauss é um dos métodos mais usados para resolver o sistema linear. A versão adaptada denominada de Eliminação de Gauss-Jordan é um dos método mais prático para inverter matrizes. Além de resolver o sistema linear e inverter matrizes, a eliminação de Gauss é usado frequentemente para diversos outros cálculos tais como determinantes, base do núcleo e da imagem de uma transformação linear, base do espaço gerado, etc.

O procedimento é converter a matriz aumentada do sistema dado, numa matriz escalonada, aplicando uma sequência de operações denominados de operações elementares. Tais operações são escolhidos de forma que a solução do sistema não sejam alteradas.

As operações elementares constituem de três operações básicas

- **Somar múltiplo de outra linha**: Equivale a somar múltiplo da outra equação que também não altera a solução do sistema.

- **Troca de linhas:** A troca de linhas corresponde a troca da posição das equações, o que não influencia na solução do sistema.

- **Multiplicar uma linha por número não nulo**: Equivale a multiplicar um número não nulo na equação correspondente que também não altera a solução. Esta operação não é necessário na eliminação de Gauss, mas faz-se necessário no Gauss-Jordan.

Para a praticidade, multiplicar e somar múltiplos podem ser realizados juntas (exceto para o cálculo numérico).

A notação usadas são

- $L_i \leftarrow L_i + \mu L_k$ somar linha k multiplicado por μ. Não altera o determinante.

- $L_i \leftrightarrow L_k$ é a troca de linha i por linha k. Caso estiver calculando o determinante por método de escalonamento, lembrar que isto muda o sinal do determinante.

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplicar a linha i com λ. Não esquecer que λ não podem ser nulo. No caso de estiver calculando o determinante, lembrar que o determinante é multiplicado por λ.

No caso do Cálculo Numérico, deverá escalonar usando somente estas três operações, o que é adequado para uma implementação computacional eficiente. Para o cálculo manual, costuma trocar a segunda operação com

- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_k$ combinação de multiplicar e somar o múltiplo. Lembrar que λ não pode ser nulo. Quando $\lambda = 1$, será operação usada no cálculo numérico. No caso de estiver calculando o determinante, lembrar que determinantes será multiplicado por λ.

Também usaremos a notação adicional.

- $L_i \leftarrow L_i$ usado para indicar que a linha i não precisa ser modificada (multiplicar por 1).

Todo de escalonamento é efetuado em etapas, escolhendo as linhas de cima para baixo. Na primeira etapa, escolhe a linha 1, na segunda etapa escolhe a linha 2 e assim por diante. A linha escolhida em cada etapa é denominada de linha pivô (chave). Após escolher a linha de pivô, um elemento especial desta linha denominado de elemento de pivô será escolhida.

Quando a linha de pivô for a primeira linha, inicialmente o primeiro elemento será considerado elemento de pivô. Quando a linha de pivô for outras linhas, o elemento de uma coluna a direita do pivô anterior (da linha imediatamente acima) é denominado de elemento de pivô. Quando o elemento de pivô e todos os elementos da linha de baixo nesta coluna forem nulas, o pivô será deslocado para a direita. Mais precisamente, um elemento da linha de pivô é denominado de elemento pivô se todas elementos das linhas dele e de baixo dele nas colunas a esquerda são nulas, mas existe pelo menos um elemento não nulo na linha ou abaixo dela na coluna dele.

O objetivo de cada etapa é anular os elementos abaixo (Gauss) ou acima e abaixo (Gauss-Jordan) do elemento pivô através dos operadores elementares usando a linha desejada e a linha pivô.

A melhor forma de entender o processo de eliminação de Gauss é através de exemplos explicados.

Exemplo 4.1 (Escalonamento sem troca de linhas)**.**

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 5 \\ 3y + 2z & = -1 \\ x + z & = 1 \end{cases}$$

A matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Na primeira etapa, a linha pivô é a linha 1. O primeiro elemento é o elemento do diagonal. Precisamos anular os elementos da primeira coluna da segunda e da terceira linha (linha de baixo).

A segunda linha não precisa de alteração. Deverá anular a primeira coluna da terceira linha, usando ele e a linha de pivô (primeira linha). Para isso, basta subtrair a linha de pivô.

$$\begin{array}{r} \text{pivô}\longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Com estas operações, a primeira coluna ficou escalonada.

Agora, a linha de pivô é a segunda linha e o elemento pivô é o elemento do diagonal (uma a esquerda do pivô anterior). Precisamos anular a segunda coluna da terceira linha (linha de baixo).

Para isto, basta multiplicar por 3 e subtrair o dobro da linha de pivô. O esquema usado aqui é multiplicar o elemento de pivô na linha em alteração (que quer anular o elemento abaixo de pivô) e o elemento que quer anular na linha de pivô. Esta "multiplicação invertida" iguala os elementos na coluna de pivô. Subtraindo uma da outra, podemos anular o elemento desejado. No exemplo, pivô é 3. Logo, multiplica 3 na linha 3 que está em alteração. O elemento que quer anular é -2. Logo, multiplica o -2 na linha de pivô. Depois subtrai um do outro.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô}\longrightarrow \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] L_3 \leftarrow 3L_3 - (-2)L_2 = 3L_3 + 2L_2$$

Na operação na terceira linha, foi necessário multiplicar fator não trivial (diferente de ± 1) em pelo menos uma das linhas. Casos como estes, é necessário efetuar cálculos mais detalhada para evitar erros e permitir corrigir no caso de cometer erros. Lembre-se de que, a forma mais rápida de calcular é evitar erros, o que não é exceção para o caso de escalonamento.

O cálculo para a terceira linha será

$$\begin{array}{rccc:cc} 3L_3: & 0 & -6 & 6 & -12 & \\ 2L_2: & 0 & 6 & 4 & 2 & (+) \\ \hline & 0 & 0 & 10 & -10 & \end{array}$$

Agora a linha de pivô seria a terceira linha. Como não há linha abaixo da terceira linha, a matriz já está escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right]$$

Como o escalonamento não altera a solução do sistema associado, basta resolver o sistema triangular, resolvendo de baixo para cima.

O sistema associada é

$$\begin{cases} x+2y-z &= 5 \\ 3y+2z &= 1 \\ 10z &= -10 \end{cases}$$
Resolvendo de baixo para cima, temos
$10z = -10 \implies z = -1$
$3y+2z = -1 \implies 3y+2\times(-1) = 1 \implies 3y = 3 \implies y = 1$
$x+2y-z = 5 \implies x+2\times 1-(-1) = 5 \implies x+3 = 5 \implies x = 2$
Logo, a solução é $x = 2, y = 1, z = -1$.

Para obter o determinante, precisará ver o número de troca de linhas e quanto multiplicou nas linhas.

Primeiramente, não houve troca de linhas. Logo, não haverá mudança de sinal dos determinantes.

O valor multiplicados nas linhas (que estão sendo anuladas) sempre foram 1, exceto na linha três na etapa 2. Nesta etapa, a linha 3 foi multiplicada por 3. Logo, o determinante da matriz escalonada é o determinante da matriz original multiplicado por 3, o que significa que determinantes do original é um terço do determinante da matriz escalonada. Como o determinante do escalonada é $1\times 3\times 10 = 30$, o determinante do original é 10. O escalonamento é útil para a resolução numérica, incluindo solução do sistema e determinantes, mas não é prático para a análise teórica (demonstrar propriedades), o que costuma usar outras técnicas.

Em muitas áreas da matemática, encontrarão os resultados destinados para a análise teórica e outra para a resolução numérica. É importante não confundir a utilidade de cada método.

Observação importante: Para anular uma linha, só poderá usar ele e o múltiplo da linha de pivô.

Suponha que a linha de pivô seja k-ésima linha e o elemento pivô seja a_{kj}. Para anular a coluna j da linha i, basta efetuar a operação

$L_i \leftarrow a_{kj}L_i - a_{ii}L_k$ que é multiplicar elementos da coluna j de uma linha na outra e subtrair. No caso do Cálculo Numérico que não é permitido multiplicar na linha que está sendo alterada, passa dividindo pelo a_{kj}, obtendo $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{kj}}L_k$. Apesar de gerar frações, é a forma adequada para uma implementação computacional eficiente, além de alguns outros benefícios, como obter uma decomposição LU da matriz. Lembrar que o elemento de pivô a_{kj} não pode ser nulo.

Na etapa 2 do exemplo, foi aplicado $L_i \leftarrow a_{kj}L_i - a_{ij}L_k$ (multiplicar elemento de uma linha na outra e subtrair), gerando $L_3 \leftarrow 3L_3 - (-2)L_2 = 3L_3 + 2L_2$.

No caso do Cálculo Numérico, deveria usar $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{kj}}L_k$, obtendo $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-2}{3}L_k$, o que evita de multiplicar números na linha corrente (neste caso, o determinante será mantido).

Exemplo 4.2 (Escalonamento com troca de linhas)**.**

Considere
$$\begin{cases} x+2y-z+w &= -3 \\ 2x+4y-2z+3w &= -7 \\ -3x-6y+2z-w &= 6 \end{cases}$$
A matriz do sistema é

$$\text{pivô} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -7 \\ -3 & -6 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

como tem fatores multiplicando nas linhas, escreveremos as operações detalhadas de linhas.
Segunda linha:

$$
\begin{array}{rrrrr|rl}
L_2: & 2 & 4 & -2 & 3 & -7 & \\
-2L_1: & -2 & -4 & 2 & -2 & 6 & (+) \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 &
\end{array}
$$

Terceira linha:

$$
\begin{array}{rrrrr|rl}
L_3: & -3 & -6 & 2 & -1 & 6 & \\
3L_1: & 3 & 6 & -3 & 3 & -9 & (+) \\
\hline
 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 &
\end{array}
$$

O elemento pivô será escolhido inicialmente como sendo uma coluna a direita da etapa anterior. Caso ele for nulo, trocar com linha de baixo. Caso todos os elementos desta coluna nas linhas de baixo forem nulos, deslocar para a direita. No exemplo, o elemento pivô é nulo e todos elementos correspondentes nas linhas de baixo também. Logo, deslocamos uma coluna para a direita.

$$
\text{pivô} \rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -3
\end{array}\right]
$$

O elemento pivô ainda é nulo, mas agora podemos trocar com a linha de baixo.

$$
\text{pivô} \rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -3
\end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_3
$$

No caso de estar calculando o determinante, lembrar que a troca de linha muda o sinal do determinante. Tendo o elemento pivô não nulo, prosseguiremos com o procedimento de escalonamento, ainda na segunda etapa (linha de pivô é a segunda linha). Como a terceira linha já tem zero na coluna, nada precisa ser feita.

$$
\text{pivô} \rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3
$$

Assim, obtemos o sistema escalonada

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

O sistema associada é

$$
\begin{cases}
x + 2y - z + w & = -3 \\
-z + 2w & = -3 \\
w & = -1
\end{cases}
$$

Resolvendo de baixo para cima.

$w = -1$.

$-z + 2w = -3 \implies -z + 2(-1) = -3 \implies -z - 2 = -3 \implies z = 1$

Na equação $x + 2y - z + w = -3 \implies x + 2y - 1 + (-1) = -3 \implies x + 2y = -3 + 2 = -1$, obtendo $x + 2y = -1$, o que tem mais de uma variável. Escolhendo y como sendo livre, teremos $x = -1 - 2y$.

Assim, a solução será

$$\begin{cases} x & = -1 - 2y \\ y & = \text{livre} \\ z & = 1 \\ w & = -1 \end{cases}$$

Observação 4.3. A troca de linha no processo de escalonamento é denominado de privoteamento.

5 A matriz inversa e escalonamento (Gauss-Jordan)

No caso da matriz 2×2, tem uma fórmula pronta para inversa.

Dado $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Note que os elementos dos diagonais principais trocaram de lugar e o elemento na diagonal secundário trocaram de sinal, mantendo no lugar. Esta fórmula pode ser obtido facilmente da matriz dos cofatores. No caso da dimensão maior ou igual a 3, o escalonamento é uma das técnicas mais importantes para inverter matrizes.

O processo consiste em escalonar a matriz obtido, colocando a matriz desejada no lado esquerdo e a matriz identidade no lado direito. O processo de escalonamento é similar ao da resolução do sistema linear, mas as operações serão aplicadas em todas linhas que não sejam do pivô (acima e abaixo da linha de pivô). Assim, obteremos uma matriz diagonal no lado esquerdo. Dividindo cada linha com o elemento do diagonal do lado esquerdo usando a operação elementar $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, obteremos uma matriz identidade no lado esquerdo. A matriz no lado direito é a matriz inversa.

O processo de escalonar tanto para cima como para baixo da linha de pivô (e deixar o pivô como 1) para resolver o sistema ou inverter uma matriz é denominado de método de Gauss-Jordan.

Exemplo 5.1. Obter a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Na primeira etapa, somente existem linhas de baixo e operações é exatamente igual ao método de Gauss.

$$\begin{array}{r} \text{pivô} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

Agora a linha de pivô é a segunda linha e precisamos anular acima e abaixo dela.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô} \longrightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$$

A primeira linha:

$$\begin{array}{r|ccc:ccc|l}
L_1: & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
-2L_2: & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & (+) \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 &
\end{array}$$

A segunda linha:

$$\begin{array}{r|ccc:ccc|l}
L_3: & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
-4L_2: & 0 & -4 & -4 & 0 & -4 & 0 & (+) \\
\hline
 & 0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1 &
\end{array}$$

Continuando para a terceira etapa (linha de pivô é terceira).

$$\begin{array}{r}
\\
\\
\text{pivô}\rightarrow
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1
\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{l}
L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \\
L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3
\end{array}$$

O cálculo para a primeira linha será

$$\begin{array}{r|ccc:ccc|l}
3L_1: & 3 & 0 & -6 & 3 & -6 & 0 & \\
-2L_3: & 0 & 0 & 6 & -2 & 8 & -2 & (+) \\
\hline
 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 &
\end{array}$$

e para a segunda linha, temos

$$\begin{array}{r|ccc:ccc|l}
3L_2: & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & \\
L_3: & 0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1 & (+) \\
\hline
 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 &
\end{array}$$

Assim, já diagonalizamos o lado esquerdo da matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}
3 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\
0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1
\end{array}\right]$$

Agora dividiremos as linhas com os elementos de diagonais da matriz a esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}
3 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\
0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1
\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{l}
L_1 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_1 \\
L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_2 \\
L_3 \leftarrow \dfrac{-1}{3}L_3
\end{array}$$

O lado esquerdo tornou matriz identidade. Então o lado direito será a matriz inversa.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}\right]$$

Matriz inversa é $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, com o determinante

$\det(A^{-1}) = \left(\frac{1}{27} + \frac{-8}{27} + \frac{-2}{27}\right) - \left(\frac{-2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{-2}{27}\right) = \frac{-1}{3}$. Como $\det A = -3$, o determinante está coerente. A comparação dos determinantes é uma das técnicas mais usadas para detectar erros na matriz até 3×3, pois é muito raro ter determinantes coerentes quando comete erros na inversão da matriz. No entanto, matriz acima de 4×4, é mais rápido verificar se o produto é matriz identidade.

Exemplo 5.2 (Gauss-Jordan com pivotamento)**.** Obter a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Na primeira etapa, precisaremos anular abaixo do diagonal.

$$\begin{array}{r} \text{pivô}\longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Agora a linha de pivô é a segunda linha. Como o elemento de pivô é nula, precisamos trocar com a linha de baixo.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô} \longrightarrow \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \longleftrightarrow L_3.$$

Agora precisamos anular acima e abaixo do elemento de pivô.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô} \longrightarrow \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

Continuando para a terceira etapa (linha de pivô é terceira).

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{pivô} \longrightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 \end{array}$$

Assim, já diagonalizamos o lado esquerdo da matriz aumentada.
Agora dividiremos as linhas com os elementos de diagonais da matriz a esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

O lado esquerdo tornou matriz identidade. Então o lado direito será a matriz inversa.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Matriz inversa é $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, com o determinante

$\det(A^{-1}) = -1$. Como $\det A = -1$, o determinante está coerente.

6 O posto da matriz e grau de liberdade.

O posto da matriz A é definido como sendo número de linhas não nulas após o escalonamento e costuma ser denotado por $\rho(A)$.

Dado um sistema linear, a forma escalonada equivalente da matriz aumentada permite classificar o sistema quanto as suas soluções, assim como saber quantas variáveis livres existem na solução do sistema.

Um sistema de equações é equivalente a forma escalonada. Isto significa que a solução é exatamente a mesma. Portanto, basta saber escalonar e classificar a forma escalonada para classificar um sistema.

Um sistema escalonada não tem solução se, e somente se, tiver uma linha com lado da matriz do sistema nula e lado dos constantes não nulas. Tal linha resulta na equação do tipo $0 = c \neq 0$.

Como as linhas totalmente nulas (tanto na parte da matriz do sistema, como dos constantes), costumam ignorar e analisar as linhas que restarem.

Exemplo 6.1. Caso que não tem solução.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{4} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

O sistema não tem solução, a última linha resulta na equação $0x + 0y + 0z = 4 \implies 0 = 4$.

Caso tenha solução, analisaremos se tem solução única ou infinita. Um sistema escalonada com solução apresenta uma única solução se, e somente se, o número de linhas não nulas for igual ao número de variáveis.

Exemplo 6.2. Caso que aparece linhas nulas.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

O sistema restante (após cortar linhas totalmente nulas) tem uma única solução.

Exemplo 6.3. Caso que aparece linhas nulas (2)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

O grau de liberdade (número de variáveis livres) do sistema escalonado é o número de variáveis menos o número de linhas não nulas. Logo, será o número de variáveis menos o posto da matriz do sistema.

No exemplo anterior, o grau de liberdade é 1.

Se marcar o número da equação do sistema no lado esquerdo, poderá detectar a equação redundante.

Exemplo 6.4. Elimine as equações redundantes do sistema $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ x+z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$.

A matriz do sistema é

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{3a.} \\ \text{4a.} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{3a.} \\ \text{4a.} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc|cl} 2L_3: & 0 & -2 & 0 & 0 & \\ L_2: & 0 & -2 & 0 & 0 & (-) \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{3a.} \\ \text{4a.} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad L_3 \leftrightarrow L_4$$

ao trocar linhas, troca-se também a rotulação a esquerda.

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{4a.} \\ \text{3a.} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Agora a matriz esta escalonada. A última linha é uma linha nula, logo a equação associada é redundante. Pela enumeração a esquerda, podemos constatar que é a equação 3.

Da forma análoga, podemos determinar equações inconsistentes. Equações inconsistentes é aquele associado as linhas to tipo $\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & a \end{array}$ com $a \neq 0$.

7 Calculando o determinante por escalonamento

Embora o desenvolvimento por Laplace no cálculo de determinantes permite calcular para matriz $n \times n$ e é importante para efetuar demonstrações, é bastante trabalhoso para calcular para matrizes acima de 3×3. O método eficaz para cálculo de determinantes principalmente quando é acima de 3×3 é pelo processo de escalonamento.

Seja A a matriz original e $\bar{A}$, a matriz escalonada. Então o determinante de $\bar{A}$ pode ser obtido como produto dos elementos dos diagonais. Pelo propriedade dos determinantes, podemos mostrar que a operação $L_i \longleftarrow \lambda L_k$ faz multiplicar o determinante por λ e somar múltiplo de outras linhas não altera o valor do determinante. Também sabemos que a troca de linha inverte o sinal do determinante. Com isso, podemos concluir que $(-1)^p \left(\prod \lambda\right) \det A = \det \bar{A}$ onde p é o número de troca de linhas.

Exemplo 7.1. Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ usando escalonamento.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array}$$

tendo $\lambda = 3$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 1$ respectivamente.

$$\begin{array}{rrrrrl} 3L_2: & -6 & 0 & 6 & 0 & \\ 2L_1: & 6 & 0 & 2 & 0 & (+) \\ \hline & 0 & 0 & 8 & 0 & \end{array}$$

Como pivô é nulo e tem elementos não nulos abaixo dele, troca-se as linhas.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \qquad \text{tendo } \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que já tem a forma escada.

O produto de λ' s é $3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$. Como houve número impar de troca de linhas, o sinal de $\det A$ é oposto de $\det \bar{A}$. Assim, $-3 \det A = \det \bar{A}$. Como $\det \bar{A} = 3 \times 1 \times 8 \times 2$, temos que $-3 \det A = 3 \times 8 \times 2$ e consequentemente, $\det A = -16$.

Exercício 7.2. Encontre o determinante do exemplo anterior pelo desenvolvimento de Laplace.

Referências

[1] Boldrini, José L. et al., "Álgebra Linear", Editora Harbra Ldta, 1986.

[2] Santos, Reginaldo J., "Matrizes, Vetores e Geometria Analítica", Imprensa Universitária da UFMG, 2010.