Universidade Federal da Paraíba
Discente: Jefferson Bezerra dos Santos
Docente: Thiago José Machado

Terceira lista de EDO teórica

1. Questão:
a) $y^{''} + 4y = 0$
Equação homogênia auxiliar:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$
$$\lambda^2 = \pm 2i$$

A solução homogênea é da forma:

$$\begin{aligned} y_h x &= c_1 e^{-2i} + c_2 e^{2i} \\ y_h x &= c_1 \left[cos(2x) - isen(2x)\right] + c_2 \left[cos(2x) + isen(2x)\right] \\ y_h x &= (c_1 + c_2) cos(2x) + (-c_1 + c_2) isen(2x) \end{aligned}$$

tomando $b_1 = c_1 + c_2$ e $b_2 = (-c_1 + c_2)i$ temos que

$$y_h = b_1 cos(2x) + b_2 sen(2x)$$

segue que $y_1 = cos(2x)$ e $y_2 = sen(2x)$. Portanto, o conjunto será dada por,

$$C = \{cos(2x), sen(2x)\}$$

para a verificação da indepência vamos utilizar o Wronskiano,

$$W(y_1, y_2) = det \left[\begin{array}{cc} y_1 & {y_1}' \\ y_2 & {y_2}' \end{array} \right]$$

$$W(y_1, y_2) = det \left[\begin{array}{cc} cos(2x) & -2sen(2x) \\ sen(2x) & 2cos(2x) \end{array} \right] = 2(sen^2(x) + cos^2(x)) = 2.1 \neq 0.$$

Logo, o conjunto C é independente.

b)$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y^{(1)} - 6y = 0$

Equação homogênea:
$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

note que $\lambda = 1$ é uma das raízes da equação homogênea, portanto aplicando a divisão de polinômios temos que
$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
logo,

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

o conjunto C a ser verificado é da forma

$$C = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}.$$

O wronskiano é dado por,

$$W(y_1, y_2, y_3) = det \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix} = e^x(8e^{5x} - 6e^{5x}) = e^x(2e^{5x}) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) $y^4 - y = 0$
Equação homogênea :
$\lambda^4 - 1 = 0$
cujas as raízes são
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -i$ e $\lambda_4 = i$.

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{-ix} + c_4 e^{ix}$$
$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + b_1 cos(x) + b_2 sen(x)$$

O conjunto é dado por,

$$C = \{e^{-x}, e^x, cos(x), sen(x)\}$$

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) = det \begin{bmatrix} e^{-x} & e^x & cos(x) & sen(x) \\ -e^{-x} & e^x & -sen(x) & cos(x) \\ e^{-x} & e^x & -cos(x) & -sen(x) \\ -e^{-x} & e^x & sen(x) & -cos(x) \end{bmatrix} = e^{-x}(2e^x) \begin{vmatrix} -2cos(x) & -2sen(x) \\ 2sen(x) & -2cos(x) \end{vmatrix}$$
$$= 4 \neq 0.$$

portanto, o conjunto C é L.I.

d) $y^4 - 6y^3 + 18y^2 - 30y^1 + 25y = 0$
Equação homogn̂ea:
$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 18\lambda^2 - 30\lambda + 25 = 0$

$\lambda_1 = 1 - 2i, \lambda_2 = 1 + 2i, \lambda_3 = 2 - i$ e $\lambda_4 = 2 + i$.
A solução homogênea é da forma,

$$y_h(x) = c_1 e^{(1-2i)x} + c_2 e^{(1+2i)x} + c_3 e^{(2-i)x} + c_4 e^{(2+i)x}$$

logo, o conjunto C é da forma

$$C = \{e^{(1-2i)x}, e^{(1+2i)x}, e^{(2-i)x}, e^{(2+i)x}\}$$

$$W = -160e^{6x} \neq 0$$

logo, o conjunto C é L.I. Para os cálculos foi utilizado o Wolfram.
e) $y^3 - 3y = 0$
Equação homogênea:
$\lambda^3 - 3\lambda = 0$
$\lambda(\lambda^2 - 3) = 0$
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\sqrt{3}, \lambda_3 = \sqrt{3}$
o conjunto C a ser verificado é da forma

$$C = \{1, e^{(-\sqrt{3})x}, e^{(\sqrt{3})x}\}.$$

$$W(y_1, y_2, y_3,) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^{(-\sqrt{3})x} & -\sqrt{3}e^{(-\sqrt{3})x} & 3e^{(-\sqrt{3})x} \\ e^{(\sqrt{3})x} & \sqrt{3}e^{(\sqrt{3})x} & 3e^{(\sqrt{3})x} \end{bmatrix} = -6\sqrt{3} \neq 0.$$

portanto, o conjunto C é L.I.
f)$y^5 - y^4 - 2y^3 + 2y^2 + y^1 - y = 0$
Equação homogênea:
$\lambda^5 - \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda^1 - 1$
uma das raízes é $\lambda - 1 = 0$, portanto aplicando aplicando divisão de polinômio obtemos que

$$(\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda^2 - 1)^2(\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^3 = 0$$

logo, a solução homogênea é da forma

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_4 x^2 e^x$$

o conjunto C a ser verificado é da forma

$$C = \{e^{-x}, xe^{-x}, e^x, xe^x, x^2e^x\}.$$

segue que

$$W = 128e^x \neq 0$$

portanto o conjunto C é L.I para o cálculo de W foi utilizado Wolfram.

2. Questão:

$$y^{(4)}(x) + 2y^{(2)}(x) + y(x) = 3e^{2x} + 2sin(x) - 8e^x cos(x)$$

Equação homogênea:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 &= 0 \\ (\lambda^2+1)^2 &= 0 \\ (\lambda^2+1) &= 0 \\ \lambda &= \pm i \end{aligned}$$

solução homogênea é da forma,

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} + c_3xe^{ix} + c_4xe^{-ix} \\ &= k_1cos(x) + k_2sen(x) + k_3xcos(x) + k_4xsen(x) \end{aligned}$$

a solução particular é da forma,

$$y_p(x) = ae^{2x} + bcos(x) + csen(x) + de^x cos(x) + \alpha e^x sen(x)$$

calculando a derivadas da solução particular segue que

$$y_p(x)^{(1)} = 2ae^{2x} - bsen(x) + cos(x)de^x(cos(x) - sen(x) + \alpha e^x(sen(x) + cos(x)))$$
$$y_p(x)^{(2)} = 4ae^{2x} - bcos(x) - csen(x) + de^x(-2sen(x) + \alpha e^x(2cos(x)))$$
$$y_p(x)^{(3)} = 8ae^{2x} + bsen(x) - ccos(x) + de^x(-2cos(x) - 2sen(x)) + \alpha e^x(2cos(x) - 2sen(x))$$
$$y_p(x)^{(4)} = 16ae^{2x} + bcos(x) + csen(x) + de^x(-4cos(x) + \alpha e^x(-4sen(x)))$$

substituindo na equação segue que

$$\begin{aligned} &y^{(4)}(x) + 2y^{(2)}(x) + y(x) = \\ &\qquad = 25ae^{2x} + (-4de^x - 3\alpha e^x)sen(x) + (-3d + 4\alpha)e^x cos(x) \\ &\qquad = 3e^{2x} + 2sin(x) - 8e^x cos(x) \end{aligned}$$

da igualdade acima obtemos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} 25a & = 3 \\ -4d - 3\alpha & = \frac{2}{e^x} \\ -3d - 4\alpha & = -8 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a & = \frac{3}{25} \\ \alpha & = -\frac{1}{25}\left(32 + \frac{6}{e^x}\right) \\ d & = \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{25}(32 + \frac{6}{e^x})\right] \end{array}\right.$$

portanto, a solução geral é da forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

onde :

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{25} \\ \alpha &= -\frac{1}{25}\left(32 + \frac{6}{e^x}\right) \\ d &= \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{25}(32 + \frac{6}{e^x})\right] \end{aligned}$$

com $b, c \in \mathbb{R}$.

3. Questão:

Seja y_1 e y_2 as funções solução. Temos que para que sejam independentes é suficiente que

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

contudo, nenhuma restrição do domínio de $x^2 - 1$ foi especificada, portanto, as funções y_1 e y_2 são L.D.

4. Questão:

Seja a equação

$$ay^{(2)}(x) + by^{(1)}(x) + cy(x) = f(x)$$

da equação homogênea obtemos que

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

vejamos primeiramente para o caso real, tomando

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

e supondo que $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ temos que

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} e^{\alpha x} = 0 \\ y_2(x) &= e^{\beta x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} e^{\beta x} = 0 \end{aligned}$$

segue que

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

supondo que $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ onde $\alpha = \beta$ segue que

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = 0$$
$$y_2(x) = xe^{\beta x}$$

reescrevendo e aplicando a regra de L'Hopital em y_2 temos que

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\beta x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{\beta x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-\beta x}} = 0$$

logo,

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

note que o resultado é válido para o caso que $\alpha < 0$ e $\beta < 0$. Vejamos para o caso que λ é complexo, portanto λ é da forma

$$\lambda = \frac{-b \pm ki}{2a}$$

onde $ki = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Portanto, temos que para $\alpha = \beta$,

$$y_1 = e^{(\frac{-b-ki}{2a})x} = e^{\frac{-b}{2a}x}(cos(\frac{-kx}{2a}) + isen(\frac{-kx}{2a}))$$
$$y_2 = e^{(\frac{-b+ki}{2a})x} = e^{\frac{-b}{2a}x}(cos(\frac{kx}{2a}) + isen(\frac{kx}{2a}))$$

como as funções cos, sen são limitadas segue que

$$\lim_{x\to\infty} y_1 = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} y_2 = 0$$

logo,

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

para o caso de $\alpha = \beta$ teriamos que

$$y_1 = e^{(\frac{-b-ki}{2a})x} = e^{\frac{-b}{2a}x}(cos(\frac{-kx}{2a}) + isen(\frac{-kx}{2a}))$$
$$y_2 = xe^{(\frac{-b+ki}{2a})x} = xe^{\frac{-b}{2a}x}(cos(\frac{kx}{2a}) + isen(\frac{kx}{2a}))$$

como no caso anterior as funções sen, cos são limitadas e o termo $xe^{\frac{-bx}{2a}} \to 0$ quando $x \to \infty$. Portanto,

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty.$$

note que a prova é válida desde que para o caso real tenhamos $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

Para $b = 0$ o resultado contínua válido, pois analisando o termo

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

caso esse seja 0 teriamos

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 1$$

e portanto,

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty.$$

as outras opções seriam admitir um valor real ou imaginário que iriam recair nos casos já demonstrados. Note que para o caso as provas feitas são verdadeiras desde que $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

b) Dada a equação

$$ay^{(2)}(x) + by^{(1)}(x) + cy(x) = f(x)$$

onde

$$f(x) = d$$

tomemos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = \frac{d}{c}$$

temos que a solução geral é da forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

pela letra (a) temos que

$$\lim_{x\to\infty} y_h(x) = 0$$

nota-se que

$$\lim_{x\to\infty} y_p(x) = \frac{d}{c}$$

portanto,

$$y(x) \to \frac{d}{c} \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

5. Questão:

a)$x^2y^{(2)}(x) + 7xy^1(x) + 4y(x) = ln(x^{-3})$
Vamos as seguintes substituiçãoes :

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ y^{(1)} &= \frac{1}{x}(\dot{y}) \\ y^{(2)} &= \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}) \end{aligned}$$

seque que $\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = -3t$
Equação homogênea:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 6\lambda + 4 &= 0 \\ \lambda &= -3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

solução homogênea é da forma

$$y_h(t) = c_1e^{(-3-\sqrt{5})t} + c_2e^{(-3+\sqrt{5})t}$$

a particular será dada por

$$y_p(t) = \beta_1 t + \beta_0$$

de onde temos que

$$\begin{aligned} {y_p}^{(1)}(t) &= \beta_1 \\ {y_p}^{(2)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

segue que

$$6\beta_1 + 4(\beta_1 t + \beta_0) = -3t$$

$$\begin{cases} 4\beta_1 & = -3 \Rightarrow \beta_1 & = -\frac{3}{4} \\ 6\beta_1 + 4\beta_0 & = 0 \Rightarrow \beta_0 & = \frac{9}{8} \end{cases}$$

logo,

$$y_p(t) = -\frac{3}{4}t + \frac{9}{8}$$

a solução geral é

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 e^{(-3-\sqrt{5})t} + c_2 e^{(-3+\sqrt{5})t} - \frac{3}{4}t + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

como $x = e^t$ temos que a solução geral é da forma

$$y(x) = c_1 x^{(-3-\sqrt{5})} + c_2 x^{(-3+\sqrt{5})} - \frac{3}{4} ln(x) + \frac{9}{8}$$

b)$x^3 y^{(3)}(x) - 3x^2 y^{(2)}(x) + 6xy^{(1)}(x) = x$
Vamos as seguintes substituições :

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ y^{(1)} &= \frac{1}{x}(\dot{y}) \\ y^{(2)} &= \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}) \\ y^{(3)} &= \frac{1}{x^3}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) \end{aligned}$$

segue que

$$\dddot{y} - 6\ddot{y} + 11\dot{y} - 6y = e^t$$

equação homogênea é da forma

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda^1 - 6 = 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

a solução homogênea é da forma

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$$

a solução particualar é da forma

$$y_p(t) = \alpha t e^t$$

seque que

$$\begin{aligned} \dot{y_p}(t) &= \alpha(te^t + e^t) \\ \ddot{y_p}(t) &= \alpha(te^t + 2e^t) \\ \dddot{y_p}(t) &= \alpha(te^t + 3e^t) \end{aligned}$$

substituindo temos que

$$\alpha(te^t + 3e^t) - 6(\alpha(te^t + 2e^t)) + 11(\alpha(te^t + e^t)) - 6(\alpha te^t) = e^t$$

logo,

$$\alpha = -\frac{1}{4}$$

portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - \frac{1}{4} te^t \\ y(x) &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - \frac{1}{4} x ln(x) \end{aligned}$$

c) $4x^2 y^{(2)} - 5xy^{(1)} + y = x^2$
Vamos utilizar o método de Frobenius
Equação indicial:

$$\begin{aligned} A\lambda^2 + (-A + B)\lambda + c = 0 \\ 4\lambda^2 - 9\lambda + 1 = 0 \\ \lambda = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8} \end{aligned}$$

solução homogênea é da forma

$$y_h(x) = c_1 e^{(\frac{9-\sqrt{65}}{8})x} + c_2 e^{(\frac{9+\sqrt{65}}{8})x}$$

a solução particualar é da forma

$$y_p(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$$

segue que

$$y_p{}^{(1)} = 2\beta_2 x + \beta_1$$
$$y_p{}^{(2)} = 2\beta_2$$

portanto, temos que

$$4x^2(2\beta_2) - 5x(2\beta_2 x + \beta_1) + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 = x^2$$

da equação acima temos que

$$\begin{cases} \beta_2 & = -1 \\ \beta_1 & = 0 \\ \beta_0 & = 0 \end{cases}$$

segue que

$$y_p(x) = -x^2$$

a solução geral é da forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

6. Questão:

a)

$$x^2 y^{(2)} - 2y(x) = 3x^2 - 1, x > 0$$
$$y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^{-1}$$

vamos verificar que y_1 e y_2 são solução da homogênea temos que

$$y_h = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$$
$$y_h{}^{(1)} = 2c_1 x - c_2 x^{-2}$$
$$y_h{}^{(2)} = 2c_1 + 2c_2 x^{-3}$$

substituindo temos que

$$x^2(2c_1 + 2c_2 x^{-3}) - 2(c_1 x^2 + c_2 x^{-1}) = 0 + 0 = 0$$

solução verificada. Calculando o wronskiano

$$W = \begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ x^{-1} & -x^{-2} \end{bmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{L.I}$$

a solução particular é da forma

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

vamos calcular u_1 e u_2

$$\begin{aligned} u_1 = -\int \frac{y_2 f}{a_2 W} dx &= \frac{1}{3}\int \frac{(3x^2-1)}{x^3} dx \\ &= \frac{1}{3}\left[3ln(x) + \frac{1}{2}x^{-2} + k_1\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = \int \frac{y_1 f}{a_2 W} dx &= -\frac{1}{3}\int (3x^2-1) dx \\ &= -\frac{1}{3}\left[x^3 - x + k_2\right] \end{aligned}$$

b)

$$x^2 y^{(2)} - x(x+2)y^{(1)} + (x+2)y = 2x^3, x > 0$$
$$y_1 = x, y_2 = xe^x$$

vamos verificar se y_1 e y_2 são solução da homogênea, temos que

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 x + c_2 x e^x \\ {y_h}^{(1)} &= c_1 + c_2(xe^x + e^x) \\ {y_h}^{(2)} &= c_2(xe^x + 2e^x) \end{aligned}$$

substituindo temos que

$$x^2(c_2(xe^x+2e^x)) - x(x+2)(c_1 + c_2(xe^x+e^x)) + (x+2)(c_1x + c_2xe^x) =$$
$$c_2(x^3e^x + 2x^2e^x) -$$
$$[c_1x^2 + c_2(x^3e^x + x^2e^x) + 2c_1x + 2c_2(x^2e^x + xe^x)] + c_1x^2 + c_2x^2e^x + 2c_1x + c_2xe^x = 0$$

as soluções estão verificadas. Calculando o wronskiano temos que

$$W = \begin{vmatrix} x & 1 \\ xe^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = x^2e^x \neq 0 \Rightarrow \text{L.I}$$

a solução particular é da forma

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

vamos calcular u_1 e u_2

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{a_2 W} dx = -\int 2dx = -2x + k_1$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 f}{a_2 W} dx = \int 2e^{-x} dx = -2e^{-x} + k_2$$

c)

$$xy^{(2)} - (1+x)y^{(1)} + y = x^2 e^x, x > 0$$
$$y_1 = 1 + x, y_2 = e^x$$

vamos verificar que y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea

$$y_h = c_1(1+x) + c_2 e^x$$
$${y_h}^{(1)} = c_1 + c_2 e^x$$
$${y_h}^{(2)} = c_2 e^x$$

substituindo temos que

$$x(c_2 e^x) - (1+x)(c_1 + c_2 e^x) + c_1(1+x) + c_2 e^x =$$
$$= c_2 x e^x - [c_1 + c_2 e^x + c_1 x + c_2 x e^x] + c_1 + x c_1 + c_2 e^x = 0$$

a solução foi verificada. Calculando o wronskiano

$$W = \begin{bmatrix} 1+x & 1 \\ e^x & e^x \end{bmatrix} = xe^x \neq 0 \Rightarrow \text{L.I}$$

a solução particular é da forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

vamos encontra u_1 e u_2 segue que

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{a_2 W} dx = -\int e^x dx = -e^x + k_1$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 f}{a_2 W} dx = \int (1+x) dx = x + \frac{x^2}{2} + k_2$$

d)

$$(1-x)y^{(2)} + xy^{(1)} - yx = 2(x-1)^2 e^{-x}, x > 1$$
$$y_1 = e^x, y_2 = x$$

vamos verificar que y_1 e y_2 são soluções da homogênea, segue que

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 e^x + c_2 x \\ {y_h}^{(1)} &= c_1 e^x + c_2 \\ {y_h}^2 &= c_1 e^x \end{aligned}$$

vamos substituir

$$(1-x)(c_1 e^x) + x(c_1 e^x + c_2) - (c_1 e^x + c_2 x) = 0$$

solução verificada. Calculando o wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^x \\ x & 1 \end{vmatrix} = e^x(1-x) \neq 0 \Rightarrow \text{L.I}$$

a solução particular é da forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

vamos encontra u_1 e u_2

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int \frac{y_2 f}{a_2 W} dx = -2\int x e^{-2x} dx = \frac{1}{2} e^{-2x}(2x+1) + k_1 \\ u_2 &= \int \frac{y_1 f}{a_2 W} dx = \int 2e^{-x} dx = -2e^{-x} + k_2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x^2 y^{(2)} - 3xy^1 + 4y = x^2 ln(x), x > 0 \\ y_1 = x^2, y_2 = x^2 ln(x) \end{aligned}$$

vamos verificar que é solução, segue que

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 x^2 + c_2 x^2 ln(x) \\ {y_h}^{(1)} &= 2c_1 x + c_2(x + 2xln(x)) \\ {y_h}^{(2)} &= 2c_1 + c_2(3 + 2ln(x)) \end{aligned}$$

substituindo temos que

$$\begin{aligned} x^2[2c_1 + c_2(3+2ln(x))] - 3x[2c_1 x + c_2(x + 2ln(x))] + 4[c_1 x^2 + c_2 x^2 ln(x)] = \\ = 2x^2 c_1 + 3x^2 c_2 + 2x^2 c_2 ln(x) - 6c_1 x^2 - 3c_2 x^2 - 6x^2 ln(x) + 4c_1 x^2 + 4c_2 x^2 ln(x) = 0 \end{aligned}$$

solução verificada. Vamos calcular o wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ x^2ln(x) & x+2xln(x) \end{vmatrix} = x^3 \neq 0 \Rightarrow \text{L.I}$$

a solução particular é da forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

vamos calcular u_1 e u_2

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{a_2 W}dx = -\int \frac{ln^2(x)}{x}dx = -\frac{1}{3}ln^3(x) + k_1$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 f}{a_2 W}dx = \int \frac{ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}ln^2(x) + k_2$$

f)

$$x^2y^{(2)} + xy^{(1)} + (x^2 - 0,25)y = 3x^{\frac{3}{2}}sen(x), x > 0$$
$$y_1 = x^{\frac{-1}{2}}sen(x), y_2 = x^{\frac{-1}{2}}cos(x)$$

vamos verificar que é solução, temos que

$$y_h = c_1x^{\frac{-1}{2}}sen(x) + c_2x^{\frac{-1}{2}}cos(x)$$
$${y_h}^{(1)} = c_1[x^{\frac{-1}{2}}cos(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}sen(x)] + c_2[-x^{\frac{-1}{2}}sen(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}cos(x)]$$
$${y_h}^{(2)} = c_1[-x^{\frac{-1}{2}}sen(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}cos(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}cos(x) + \frac{3}{4}x^{\frac{-5}{2}}sen(x)]$$
$$+ c_2[-x^{\frac{-1}{2}}cos(x) + \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}sen(x) + \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}sen(x) + \frac{3}{4}x^{\frac{-5}{2}}cos(x)]$$

substituindo temos que

$$c_1[-x^{\frac{3}{2}}sen(x) - x^{\frac{1}{2}}cos(x) + \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}}sen(x)]$$
$$+c_2[-x^{\frac{3}{2}}cos(x) + x^{\frac{1}{2}}sen(x) + \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}}cos(x)]$$
$$+c_1[x^{\frac{1}{2}}cos(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}sen(x)]$$
$$+c_2[-x^{\frac{1}{2}}sen(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}cos(x)]$$
$$+c_1[x^{\frac{3}{2}}sen(x)] + c_2[x^{\frac{3}{2}}cos(x)]$$
$$-\frac{1}{4}[c_1(x^{\frac{-1}{2}}sen(x) + c_2x^{\frac{-1}{2}}cos(x))] = 0$$

de fato é solução. Vamos ao cálculo do wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^{\frac{-1}{2}}sen(x) & x^{\frac{-1}{2}}cos(x) \\ -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}sen(x) + x^{\frac{-1}{2}}cos(x) & -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}cos(x) - x^{\frac{-1}{2}}sen(x) \end{vmatrix} = \frac{-1}{x} \neq 0, \forall x > 0$$

a solução particular tem a forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

vamos encontrar u_1 e u_2

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{a_2 W}dx = \int 3sen(x)cos(x)dx = \frac{3sen^2x}{2} + k1$$
$$u_2 = \int \frac{y_1 f}{a_2 W}dx = -\frac{3}{2}\left[x - \frac{sen(x)}{2} + k_2\right]$$

7. Questão:

Primeiramente vamos verificar que $y_1 = sin(\frac{1}{2})$ e $y_2 = cos(\frac{1}{2})$ são soluções, portanto a solução homogênea é da forma

$$y_h = c_1sen(\frac{1}{x}) + c_2cos(\frac{1}{2})$$
$${y_h}^{(1)} = \frac{1}{x^2}(-c_1cos(\frac{1}{x}) + c_2sen(\frac{1}{x}))$$
$${y_h}^{(2)} = \frac{1}{x^4}[-c_1sen(\frac{1}{x}) + 2c_1xcos(\frac{1}{x}) - c_2cos(\frac{1}{x}) - 2c_2xsen(\frac{1}{x})]$$

substituindo temos que

$$\begin{aligned} &- c_1sen(\frac{1}{x}) + c_1xcos(\frac{1}{x}) - c_2cos(\frac{1}{x}) - 2c_2xsen(\frac{1}{x}) \\ &- 2c_1xcos(\frac{1}{x}) + 2c_2xsen(\frac{1}{x}) \\ &+ c_1sen(\frac{1}{x}) + c_2cos(\frac{1}{x}) = 0 \end{aligned}$$

de fato é solução. Calculando o wronskiano para verificar se são L.I.

$$W = \begin{vmatrix} sen(\frac{1}{x}) & -\frac{1}{x^2}cos(\frac{1}{x}) \\ cos(\frac{1}{x}) & \frac{1}{x^2}sen(\frac{1}{x}) \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} \neq 0, x \neq 0 \Rightarrow \text{L.I}$$

vamos encontrar $y(x)$ tal que $y(\frac{1}{x}) = 1$ e $y^{(1)}(\frac{1}{x}) = -1$. Usando y e sua derivada obtemos o seguite sistema

$$\begin{cases} c_1sen(\pi) + c_2cos(\pi) = 1 \Rightarrow c_2 = -1 \\ -c_1cos(\pi) + c_2sen(\pi) = -\frac{1}{\pi^2} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

portanto, a y procurada é da forma

$$y = -\frac{1}{\pi^2} sen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$$

8. Questão:
Seja f,g e h as funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, devemos provar que

$$W(fg, fh) = f^2 W(g, h)$$

de fato aplicando o wronskiano temos que

$$W(fg, fh) = \begin{vmatrix} fg & fg' + gf' \\ fh & fh' + hf' \end{vmatrix} = fg(fh' + hf') - fh(fg' + gf') = f^2 gh' - f^2 g'h = f^2(gh' - g'h)$$

por outro lado temos que

$$f^2 W(g, h) = f^2 \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} = f^2(gh' - g'h)$$

o que completa a prova.

9. Questão:
Temos que

$$y_3 = a_1 y_1 + a_2 y_2$$
$$y_4 = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

aplicando o wronskino temos

$$W = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ y_3{'} & y_4{'} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (a_1 y_1 + a_2 y_2)(b_1 y_1{'} + b_2 y_2{'}) - (b_1 y_1 + b_2 y_2)(a_1 y_1{'} + a_2 y_2{'}) \neq 0$$

arrumando temos que as seguinte relaçẽs

$$y_2 y_1{'} \neq 0$$
$$a_2 b_1 \neq b_2 a_1$$