Função Exponencial: Crescimento e Decaimento

Professor: Jefferson

Nome: ______________________________ Turma: ____________

1. Conceito

Uma função exponencial é expressa por:

$$f(x) = a \cdot b^x \quad \text{ou} \quad y = a \cdot b^x$$

onde:

- a é o valor inicial ($a \neq 0$)
- b é a base ($b > 0$, $b \neq 1$)
- x é o expoente (variável independente)

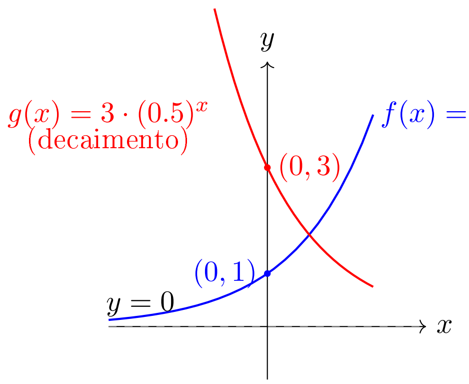
Exemplos Característicos

- Crescimento: $f(x) = 2^x \quad (a = 1,\ b = 2)$
- Decaimento: $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (a = 3,\ b = 0.5)$
- Com deslocamento: $h(x) = 2^x - 1$

2. Gráfico: Curva Exponencial

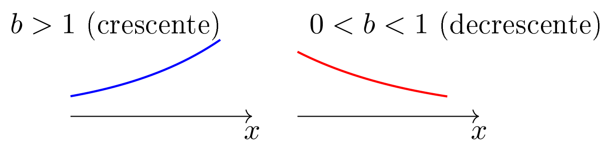
Características principais:

- **Forma**: Curva suave que cresce/decai rapidamente
- **Assíntota horizontal**: $y = k$ (geralmente $y = 0$)
- **Intercepto y**: $(0, a)$



3. Comportamento da Função

- **Base** $b > 1$:
  - Função crescente
  - Domínio: R
  - Imagem: $(0, +\infty)$
- **Base** $0 < b < 1$:
  - Função decrescente
  - Domínio: R
  - Imagem: $(0, +\infty)$



4. Propriedades Fundamentais

Para $a > 0$ e $b > 0$ ($b \neq 1$):

1. $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$
2. $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$
3. $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$
4. $a^x = b^{x \cdot \log_b a}$

5. Zero da Função

A função exponencial **nunca tem zeros** quando:

$$f(x) = a \cdot b^x \quad (a \neq 0, b > 0)$$

Pois $b^x > 0$ para todo $x \in R$.

Exceção com Transformações

Se houver deslocamento vertical:

$$f(x) = a \cdot b^x + k$$

O zero ocorre quando:

$$a \cdot b^x + k = 0 \Rightarrow b^x = -\frac{k}{a}$$

(Só existe solução se $-\frac{k}{a} > 0$)

6. Aplicações Práticas

Crescimento Populacional

Modelo de crescimento:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

onde:

- P_0: população inicial
- r: taxa de crescimento
- t: tempo

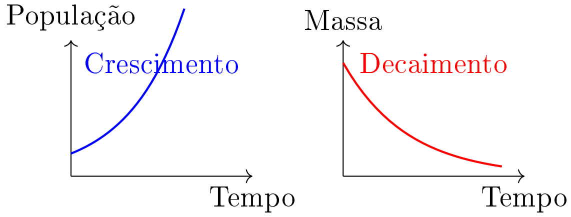
Decaimento Radioativo

Modelo de decaimento:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$$

onde:

- m_0: massa inicial
- k: constante de decaimento



7. Exercícios Básicos (1-10)

1. Classifique como crescimento ou decaimento:
   a) $f(x) = 3^x$
   b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
2. Determine o valor inicial e a base:
   a) $y = 5 \cdot 2^x$
   b) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (0.8)^x$
3. Calcule:
   a) $2^3 \cdot 2^4$
   b) $\frac{5^6}{5^2}$
4. Esboce os gráficos de:
   a) $f(x) = 2^x$
   b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
5. Resolva as equações:
   a) $2^x = 8$
   b) $3^{x-1} = 27$

8. Exercícios Intermediários (11-20)

6. Determine o domínio e imagem:
   a) $f(x) = e^x + 1$
   b) $g(x) = -2 \cdot 3^x$
7. Aplicações:
   a) Uma população cresce segundo $P(t) = 1000 \cdot 1.05^t$. Qual o tamanho após 10 anos?
   b) Uma substância decai segundo $m(t) = 50 \cdot 0.8^t$. Quando restará 10g?
8. Transforme em base e:
   a) 4^x
   b) 10^{2x-1}
9. Compare as funções:
   a) Qual cresce mais rápido: 2^x ou 3^x?
   b) Qual decai mais rápido: $(0.5)^x$ ou $(0.3)^x$?
10. Problemas:
    a) Se $f(x) = a \cdot b^x$ passa por (0,3) e (2,12), encontre a e b
    b) Um investimento rende 7% ao ano. Escreva a função valor futuro

9. Exercícios Avançados (21-30)

11. Resolva as inequações:
    a) $2^{x+1} > 16$
    b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 9$
12. Funções compostas:
    a) Se $f(x) = e^{2x}$, calcule $f(\ln 3)$
    b) Determine $f^{-1}(x)$ para $f(x) = 5 \cdot 3^x$
13. Modelagem:
    a) A meia-vida do Césio-137 é 30 anos. Escreva a função decaimento
    b) Se uma cultura bacteriana dobra a cada 2h, quanto tempo para 10x o inicial?
14. Desafios:
    a) Prove que $e^x \geq x + 1$ para todo $x \in R$
    b) Resolva $2^x + 2^{-x} = 3$
15. Problemas complexos:
    a) Um carro vale \$20,000 e deprecia 15% ao ano. Quando valerá \$8,000?
    b) A pressão atmosférica $P(h)$ a h km de altitude é $P(h) = P_0 e^{-kh}$. Se a 5km é 60% de P_0, encontre k

Gabarito Parcial

Questão	Resposta	Questão
1a)	Crescimento	16a)
$a = 3,\ b = 2$		
1b)	Decaimento	16b)
$V(t) = V_0(1.07)^t$		
2a)	$a = 5,\ b = 2$	17a)
$x > 2$		
2b)	$a = \frac{1}{3},\ b = 0.8$	17b)
$x \geq -2$		
3a)	128	18a)
9		
3b)	625	18b)
$f^{-1}(x) = \log_3(x/5)$		
4a)	Gráfico crescente	19a)
$m(t) = m_0(0.5)^{t/30}$		
5a)	$x = 3$	20a)
≈ 7.4 anos		
5b)	$x = 4$	20b)
$k \approx 0.102$		