Análise Combinatória - Aula Completa

Professor: Jefferson

Nome: ________________________________ Turma: ____________

Introdução

A Análise Combinatória estuda **como contar** possibilidades sem precisar enumerar todas elas. É essencial para probabilidade e situações do cotidiano.

1. Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O que é?

É a **regra do "e"** para eventos consecutivos e independentes.

Exemplo Prático

Situação: Você tem:

- 3 camisetas: Azul (A), Vermelha (V), Verde (Vd)
- 2 calças: Jeans (J), Preta (P)

Quantas combinações diferentes você pode fazer?

Solução:

1. Para cada camiseta (3 opções), você pode escolher qualquer calça (2 opções)
2. Total = 3 (camisetas) × 2 (calças) = 6 combinações

Combinação	Peças
1	A + J
2	A + P
3	V + J
4	V + P
5	Vd + J
6	Vd + P

Fórmula Geral

Se temos:

- 1ª escolha: m opções
- 2ª escolha: n opções
- ...
- k-ésima escolha: p opções

O número total de possibilidades é:

$$\boxed{m \times n \times \cdots \times p}$$

2. Permutação

2.1 Permutação Simples

Quando **ordenamos todos** os elementos distintos.

$$P_n = n!$$

(Onde $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ e $0! = 1$)

Exemplo Passo a Passo

Quantos anagramas tem a palavra "AMOR"?

Resolução:

1. Temos 4 letras distintas: A, M, O, R
2. Para a 1ª posição: 4 opções
3. Para a 2ª posição: 3 opções restantes
4. Para a 3ª posição: 2 opções
5. Para a 4ª posição: 1 opção
6. Total $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$

2.2 Permutação com Repetição

Quando há elementos repetidos:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

Exemplo Detalhado

Quantos anagramas tem "BANANA"?

Passo a Passo:

1. Total de letras: 6 (B, A, N, A, N, A)
2. Letras repetidas: 3 A's e 2 N's
3. Cálculo:

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{720}{6 \times 2} = 60$$

3. Arranjo

Quando usar?

Quando a **ordem importa** e **não usamos todos** os elementos.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo Comentado

Num pódio com 1º, 2º e 3º lugares, com 10 competidores.

Por que é arranjo?:

- A ordem importa (1º 2º 3º)
- Não usamos todos os 10 competidores

Cálculo:

$$A_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

4. Combinação

Quando usar?

Quando a **ordem não importa** e formamos grupos.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Princípio do Desprezo de Ordem

Entendendo a Diferença

Arranjo vs Combinação:

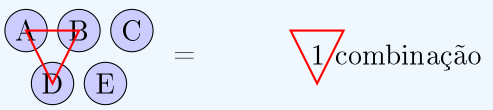
- **Arranjo**: ABC $\neq$ ACB (ordem diferente = resultado diferente)
- **Combinação**: ABC = ACB = BAC = $\cdots$ (são o mesmo grupo)

Por que dividimos por p! na combinação?: Para eliminar as repetições de ordem. Exemplo para grupo ABC:

- 3! = 6 permutações (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA)
- Na combinação, todas contam como 1 único grupo

Exemplo Visual

Quantos triângulos formamos com 5 pontos não colineares?



Solução:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ triângulos}$$

5. Resumo Visual

Conceito	Quando usar?	Fórmula
PFC	Eventos consecutivos	$m \times n \times p$
Permutação	Ordenar todos	$n!$
Arranjo	Ordem importa, não usa todos	$\frac{n!}{(n-p)!}$
Combinação	Ordem não importa	$\frac{n!}{p!(n-p)!}$

6. Exercícios Resolvidos

1. Problema: Um restaurante oferece 5 pratos principais, 3 acompanhamentos e 2 sobremesas. Quantas refeições completas distintas podem ser formadas?

   Solução:

   - Pelo PFC: $5 \times 3 \times 2 = 30$ possibilidades

2. Problema: Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com 1,2,3,4,5?

   Solução:

   - É arranjo (ordem importa e não usa todos): $A_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

3. Problema: Quantas comissões de 3 pessoas podemos formar com 7 alunos?

   Solução:

   - É combinação (ordem não importa): $C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$

7. Exercícios Propostos

1. Você tem 4 pares de sapatos e 5 bonés. De quantas maneiras diferentes pode calçar um par de sapatos e usar um boné?
2. Quantos anagramas tem a palavra "ARARA"?
3. Numa classe de 30 alunos, de quantas formas podemos escolher:
   - Um presidente e um vice?
   - Uma dupla para representar a turma?
4. (Desafio) Quantas diagonais tem um polígono de 12 lados? *Dica*: Lembre-se que diagonais são segmentos que não são lados do polígono.