Universidade Federal da Paraíba – Centro de Informática

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Disciplina: Equações Diferenciais Ordinárias

Segunda Lista de Exercícios Teóricos

Data de entrega: 12/11/2019

Aluno: Jefferson Bezerra dos Santos

Aplicação 1: Crescimento Populacional

Exercício 1. Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante.
(a) Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará?
(b) Suponha que a população da comunidade seja 10000 após 3 anos, ou seja, $P(3) = 10000$. Quais os valores aproximados de $P(0)$ e $P(10)$?

Solução:
a)

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p; \alpha > 0$$
$$p(0) = p_0$$

$$p(5) = 2p_0 \Rightarrow p_0 e^{5\alpha} = 2p_0 \Rightarrow \alpha = \frac{ln(2)}{5}$$

$$p(t_1) = 3t_0 \Rightarrow p_0 e^{\alpha t_1} = 3p_0 \Rightarrow \alpha = ln(3) \Rightarrow t_1 = \frac{ln(3)}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{ln(3)}{\frac{ln(2)}{5}} \Rightarrow t_1 \approx 7,92\,\text{anos}$$

b)

$$p(3) = 10.000 \Rightarrow 10.000 = p(0)e^{3\alpha} \Rightarrow p(0) = \frac{10.000}{e^{\frac{3ln(2)}{5}}} \approx 6.597,53$$

$$p(10) = 10.000 \Rightarrow 10.000 = p(0)e^{10\alpha} \Rightarrow p(0) = \frac{10.000}{e^{\frac{10ln(2)}{5}}} = 2.500$$

Exercício 2. A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população em qualquer tempo. Sua população inicial de 500 habitantes aumenta 15% em 10 anos. Qual será a população em 30 anos?

Solução:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p; \alpha > 0$$
$$p(0) = p_0$$
$$p_0 = 500$$

$$P(10) = 500 + \frac{15}{100}500 \Rightarrow P(10) = 575$$
$$P(10) = 500e^{10\alpha} \Rightarrow 575 = 500e^{10\alpha} \Rightarrow 10\alpha = ln(\frac{575}{500}) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10}ln(\frac{575}{500})$$
$$P(30) = 500e^{30\alpha} \Rightarrow P(30) = 500e^{30(\frac{1}{10}ln(\frac{575}{500}))} \Rightarrow P(30) \approx 760,43$$

Exercício 3. Usando o conceito de taxa líquida, que é a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade na comunidade, determine uma equação diferencial que governe a evolução da população $P(t)$, se a taxa de natalidade for proporcional à população presente no instante t, mas a de mortalidade for proporcional ao quadrado da população presente no instante t. Em seguida, determine uma forma geral para a solução dessa equação.

Solução:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha - \beta p^2 p(0) = p_0$$

onde:

- α é taxa de natalidade.
- β é taxa de mortalidade.

$$\frac{dp}{p(\alpha - \beta p)}\Bigg|_{p_0}^{p(t)} = dt\Bigg|_{p_0}^{p(t)} \Rightarrow \int_{p_0}^{p(t)} = \left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{p} + \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\alpha - \beta p}\right) dp = \int_0^t dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\, ln\, p\Bigg|_{p_0}^{p(t)} + \frac{\beta}{\alpha}(-\frac{1}{\beta})\, ln\,(\beta - \alpha p)\Bigg|_{p_0}^{p(t)} = t$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\, ln\, p\Bigg|_{p_0}^{p(t)} - \frac{1}{\alpha}\, ln\,(\beta - \alpha p)\Bigg|_{p_0}^{p(t)} = t$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \big[lnp(t)\, - lnp_0\big] - \frac{1}{\alpha}\big[ln(\alpha - \beta p(t))\, - ln(\alpha - \beta p_0)\big] = t$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \big[lnp(t)\, - lnp_0\big] + \frac{1}{\alpha}\big[ln(\alpha - \beta p_0)\, - ln(\alpha - \beta p(t))\big] = t$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left[ln\frac{p(t)}{\alpha - \beta p(t)}\right] + \frac{1}{\alpha}\left[ln\frac{\alpha - \beta p_0}{p_0}\right] = t$$
$$\Rightarrow ln\left(\frac{p(t)}{\alpha - \beta p(t)}\right) + ln\left(\frac{\alpha - \beta p_0}{p_0}\right) = t$$
$$\Rightarrow \boxed{p(t) = \frac{\alpha p_0 e^{\alpha t}}{\alpha - \beta p_0 + \beta p_0 e^{\alpha t}}}$$

Exercício 4. Suponha que um estudante portador de um vírus da gripe retorne para um campus universitário fechado, onde encontram-se outros 999 estudantes saudáveis.
(a) Determine a equação diferencial que descreve o número de pessoas x(t) que contrairão a gripe, se a taxa segundo a qual a doença se espalha for proporcional ao número de interações entre os estudantes gripados e os que ainda não foram expostos ao vírus.
(b) Determine a quantidade de estudantes infectados no instante $t = 10$, sabendo que $x(1) = 10$.

Solução:

a)

$$\frac{dx}{dy} = kxy$$
$$x(0) = 1$$

onde:

- $x + y = n$ números de habitantes.
- $y = n - x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = kx(n-x)$.

Temos que:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x(n-x)}dx = \int_0^t kdt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} (\frac{\frac{1}{n}}{x} + \frac{\frac{1}{n}}{n-x})dx = kt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[ln(x) - ln(n-x)\right]\Big|_1^{x(t)} = kt$$
$$\Rightarrow ln\left(\frac{x}{n-x}\Big|_1^{x(t)}\right) = nkt$$
$$\Rightarrow ln\left(\frac{x}{n-x}\right) - ln\left(\frac{x}{n-1}\right) = nkt$$
$$\Rightarrow \frac{x(n-1)}{n-x} = \frac{1}{n-1}e^{nkt}$$
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{ne^{nkt}}{(n-1)+e^{nkt}}}$$

b)

$$t = 10$$
$$x(1) = 10$$
$$n = 1000$$

Temos que,

$$\frac{x(1)(1000-1)}{1000-x(1)} = \frac{1}{1000-1}e^{1000k}$$
$$\Rightarrow \frac{10(1000-1)}{1000-10} = \frac{1}{1000-1}e^{1000kt}$$
$$\Rightarrow \boxed{k \approx 0.0092}$$

Portanto,

$$x(t) = \frac{ne^{nkt}}{(n-1)+e^{nkt}}$$
$$\Rightarrow x(10) = \frac{1000e^{1000(0.0092)10}}{(1000-1)+e^{1000(0.0092)10}}$$
$$\Rightarrow \boxed{x(10) \approx 1000}$$

Aplicação 2: Resfriamento/Aquecimento de Corpos

Exercício 5. Um termômetro é retirado de uma sala, em que a temperatura é 70^oC, e colocado no lado de fora, onde a temperatura é 10^oC. Após $30\,s$, o termômetro marca 50^oC.
(a) Qual será a temperatura marcada pelo termômetro no instante $t = 60\,s$?
(b) Quanto levará para marcar 15^oC?

Solução:
a)

$$\begin{aligned}
&\theta_a = 10\\
&\frac{d\theta}{dt} = -\alpha(\theta - \theta_a) \Rightarrow\\
&\Rightarrow \frac{d\theta}{\theta - \theta_a} = -\alpha dt\\
&\Rightarrow \theta(t) = 10 + ke^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \theta(0) = 70 \\ \theta(30) = 50 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 70 = 10 + k \Rightarrow k = 60 \\ 50 = 10 + ke^{-30\alpha} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{ln(\frac{2}{3})}{30} \end{matrix}$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 0.0135$$

$$\theta(60) = 10 + 60e^{-60(0.0135)}$$
$$\theta(60) \approx 36.79$$

b)

$$\theta(t_1) = 15 \Rightarrow 15 = 10 + 60e^{-(0.0135)t_1}$$
$$t_1 = \left(\frac{-ln(\frac{1}{12})}{60(0.0135)}\right) \Rightarrow t_1 \approx 184\ s$$
$$\Rightarrow \boxed{t_1 \approx \text{ 3 minutos e 4 segundos a partir do instante inicial}}$$

Exercício 6. Segundo a lei de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do ar. Se a temperatura do ar é 20^oC e o corpo se resfria em 20 minutos de 100^oC para 60^oC, dentro de quanto tempo sua temperatura descerá para 30^oC? Solução:

$$\begin{aligned}
&\theta_a = 20\\
&\frac{d\theta}{dt} = -\alpha(\theta - \theta_a) \Rightarrow\\
&\Rightarrow \frac{d\theta}{\theta - \theta_a} = -\alpha dt\\
&\Rightarrow \theta(t) = 20 + ke^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \theta(0) = 100 \\ \theta(20) = 60 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 100 = 20 + k \Rightarrow k = 80 \\ 60 = 20 + ke^{-20\alpha} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{ln(\frac{1}{2})}{20} \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 0.035$$

Portanto,

$$\theta(t_1) = 30 \Rightarrow 30 = 20 + 80e^{-0.035t_1}$$

$$t_1 = (\frac{-ln(\frac{1}{8})}{0.035}) \Rightarrow t_1 \approx 59.41\ m$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 \approx \text{ 59,41 minutos a partir do instante inicial}}$$

Exercício 7. Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, 2 horas depois da chamada, examina o cadáver e o ambiente, tirando os seguintes dados: A temperatura do escritório era de 20^oC, o cadáver inicialmente tinha uma temperatura de 35^oC. Uma hora depois medindo novamente a temperatura do corpo obteve $34,2^oC$. Supondo que a temperatura de uma pessoa viva é de $36,5^oC$, podemos considerar que a secretária é suspeita? Por quê?

$$\theta_a = 20$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha(\theta - \theta_a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\theta - \theta_a} = -\alpha dt$$

$$\Rightarrow \theta(t) = 20 + ke^{-\alpha t}$$

$$\begin{cases} \theta(0) & = & 35 \\ \theta(20) & = & 34,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + ke^{-2\alpha} & = & 35 \\ 20 + ke^{-3\alpha} & = & 34,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ke^{-2\alpha} & = & 15 & (1) \\ ke^{-3\alpha} & = & 14,2 & (2) \end{cases}$$

Temos que,

$$e^{\alpha} \Rightarrow \alpha = ln\left(\frac{15}{14,2}\right) \approx 0,0548.$$

Fazendo a substituição do α encontrado em: (1)

$$ke^{-0,1096} = 15 \Rightarrow k = 15e^{0,1096} \Rightarrow \boxed{k \approx 16,7374.}$$

Portanto,

$$\theta(t) = 36,5 \Rightarrow 20 + 16,7374e^{-0,0548}t = 36,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0,0548t} = \frac{16,5}{16,7374} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t \approx 0,26 \approx \text{ 15 min}}$$

Conlusão:
A secretária é suspeita, pois ligou 15 minutos antes da morte.

Exercício 8. Uma pequena barra de metal, cuja temperatura inicial é de 20^oC, é colocada em um recipiente com água fervendo. Quanto tempo levará para a barra atingir 90^oC se sua temperatura aumentar 2^oC em 1 segundo?

Solução:
Assumindo que a temperatura de ebulição d'água é 100 graus celsius.

$$\theta_a = 100$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha(\theta - \theta_a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\theta - \theta_a} = -\alpha dt$$
$$\Rightarrow \theta(t) = 100 + ke^{-\alpha t}$$

$$\begin{cases} \theta(0) & = & 20 \\ \theta(1) & = & 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 + k & = & 20 \Rightarrow k = -80 \\ 100 + ke^{-\alpha} & = & 22 \Rightarrow \alpha = -ln\left(\frac{100-22}{80}\right) \Rightarrow \alpha \approx 0,025 \end{cases}$$

Com o valor de α calculado temos que,

$$\theta(t_1) = 90 \Rightarrow 100 + 80e^{-0,025t_1} = 90 \Rightarrow t_1 = -\frac{ln\frac{100-90}{80}}{0,025} \Rightarrow t_1 \approx 83,17\ s$$
$$\Rightarrow \boxed{t_1 \approx \text{ 1 minuto e 23 segundos}}$$

Aplicação 3: Problemas de Mistura

Exercício 9. Suponha que um grande tanque para misturas contenha inicialmente $300\,l$ de fluido, no qual foram dissolvidos $20\,kg$ de sal. Água pura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $10\,l/min$, e então, quando a solução está bem misturada, ela é bombeada para fora na mesma taxa.
(a) Determine uma equação diferencial para a quantidade de sal no tanque no instante t.
(b) O que acontece quando $t \to +\infty$?
(c) Após quanto tempo, a quantidade de sal atingirá 1% da quantidade inicial?

a)
Solução:

- Q(t) $\to$ Quantidade de sal no instante t (Kg).
- V(t)$\to$ Quantidade de Salmoura no instante t (l).
- C(t)$\to$ Concentração de sal na mistura no instante t.
- W_{in} $\to$ Vazão de entrada.
- W_{out} $\to$ Vazão de saída.
- $V(t)$ $\to$ Volume no instante de tempo t.
- C_{in} $\to$ Concentração inicial.
- C_{out} $\to$ Concentração final.

onde:

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}$$
$$V(t) = v_0 + (W_{in} - W_{out}) \Rightarrow \frac{V(t) - v_0}{t} = W_{out}$$
$$Q_{in} = C_{in} W_{in}$$
$$Q_{in} = C_{out} W_{out}$$

Temos que:

$$\frac{dQ}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = Q_{in} - \frac{Q(t)}{V(t)}$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = C_{in} - \frac{Q(t)}{v_0 + (W_{in} + W_{out})}$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{v_0 + (W_{in} + W_{out})} = C_{in}}$$

Dados do problema,

- $v_0 = 300l$
- $Q_0 = 20Kg$
- $W_{in} = W_{out} = 10$ l/min
- $c_{in} = 0$

portanto,

$$\frac{dQ}{dt} = \left[\frac{10}{300+0.t}\right] Q = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{30} Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ln = -\frac{1}{30} t + C \Rightarrow Q(t) = e^{-\frac{1}{30t}} c_1$$

usando a condição inicial $Q(0) = c_1 = Q_0$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{30t}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 20e^{-\frac{1}{30t}}}$$

b)

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$$

c)

$$Q(t_1) = \frac{1}{100} Q_0 \Rightarrow 20e^{-\frac{1}{30t_1}} = \frac{1}{100} 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = -30\, ln(0,01d) \Rightarrow \boxed{t_1 \approx 138 \,\text{minutos a partir do instante inicial}}$$

Exercício 10. Um tanque contém $200\,l$ de fluido no qual foram dissolvidos $30\,g$ de sal. Uma salmoura contendo $1\,g$ de sal por litro é então bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $4\,l/min$. A solução bem misturada é então bombeada para fora à taxa de $1\,l/min$. Ache a quantidade de sal no tanque no instante $t = 30\,min$.

Solução:
Dados do problema:

- v_0 = 200 l;
- Q_0 = 20 kg;
- C_{in} = 1;

$$\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{w_{out}}{v_0 + (W_{in} - W_{out})}\right) Q(t) = C_{in} W_{in} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{1}{v_0 + (200 + (4-1))}\right) Q(t) = C_{in} W_{in} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{1}{203}\right) Q(t) = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{4 - \frac{Q}{203}} = dt \Rightarrow Q(t) = 203(4 - c_1 e^{-\frac{t}{203}})$$

Aplicando a condição inicial $Q_0 = Q(0)$ temos que,

$$c_1 = 4 - \frac{Q_0}{203} \Rightarrow c_1 = \frac{812 - Q_0}{203}$$

substituindo,

$$Q(t) = 203\left[4 + \frac{Q_0 - 812}{203}e^{-\frac{t}{203}}\right]$$
$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 812 + (Q_0 - 812)\,e^{-\frac{t}{203}}}$$

Para $t = 30$ temos que,

$$Q(30) = 812 + (20 - 812)\,e^{-\frac{30}{203}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{Q(30) \approx \text{ 128,8 litros}}$$

Exercício 11. Um grande tanque contém $500\,l$ de água pura. Uma salmoura contendo $2\,kg$ de sal por litro é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $5\,l/min$. A solução bem misturada é bombeada para fora a uma taxa de $1\,l/min$. Determine a quantidade e a concentração de sal no instante $t = 5\,min$?

Dados iniciais do problema são:

- $v_0 = 500$ l;
- $c_{in} = 2$ kg/l;
- $w_{in} = 5$ l/min;
- $w_{out} = 1$ l/min.

Temos que,

$$\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{1}{500 + (5-1)}\right) = 2.4$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{1}{504}\right)Q = 8$$
$$\Rightarrow Q(t) = 504\left[8 - c_1 e^{-\frac{t}{504}}\right]$$

Aplicando a condição inicial temos que,

$$c_1 = \frac{4032 - Q_0}{504}$$

Substituindo temos que,

$$Q(t) = 504\left[\frac{4032 - (4032 - Q_0)}{504}e^{-\frac{t}{504}}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t) = 4032 - (4032 - Q_0)e^{-\frac{t}{504}}$$

calculadndo o Q_0,

$$Q_{in} = c_{in}W_{in} \Rightarrow Q_0 = 2.5 \Rightarrow Q_0 = 10.$$

portanto,

$$Q(5) = 4032 - (4032 - 10)e^{-\frac{5}{504}} \Rightarrow \boxed{Q(5) \approx \text{ 49,70 quilos.}}$$

O volume em qualquer instante de tempo t é dado por,

$$V(t) = v_0 + (W_{in} - W_{out}t) \Rightarrow V(5) = 500 + (5-1)5 \Rightarrow V(5) = 520$$

portanto, a concentração no instante $t = 5$ é dada por,

$$C(t) = \frac{Q(5)}{V(5)} \Rightarrow C(5) = \frac{49,70}{520} \Rightarrow \boxed{C(5) = 0,095\,\text{kg/l.}}$$

Aplicação 4: Decaimento de substâncias radioativas

Exercício 12. O isótopo radioativo de chumbo, Pb^{209}, decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo. Sua meia vida é de $3,3$ horas. Se $1\,g$ de chumbo está presente inicialmente, quanto tempo levará para 90% de chumbo desaparecer?

Solução:

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}$$
$$Q(0) = Q_0$$

Dados do problema,

$$Q_0 = 1\,g$$
$$\text{mv} = 3,3\,horas$$

$$Q(3,3) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-3,3\alpha} = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow \alpha = -\frac{ln(\frac{1}{2})}{3,3} \Rightarrow \alpha \approx 0,21$$

portanto,temos que o instante de tempo t_1 procurado é dado na forma,

$$Q(t_1) = \frac{10}{100}Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-0,21t_1} = \frac{1}{10} \Rightarrow -\frac{ln(\frac{1}{10})}{0,21} \Rightarrow \boxed{t_1 \approx 10{,}96 \text{ horas}}$$

Exercício 13. Inicialmente havia $100\,mg$ de uma substância radioativa. Após 6 horas, a massa diminui 3%. Se a taxa de decrescimento é proporcional à quantidade de substância presente em qualquer tempo, determinar a meia vida desta substância. Qual a quantidade remanescente após 24 horas?

Dados do problema,

$$Q_0 = 100\ mg$$
$$Q(6) = 0,97Q_0$$

Temos que,

$$Q(t) = 0,97Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-6\alpha} = 0,97Q_0 \Rightarrow \alpha \approx 0,00508$$
$$Q(t) = 100e^{-0,00508t}$$

a meia-vida é dada por,

$$Q(t) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-0,00508t} = 0,5Q_0 \Rightarrow \boxed{t \approx 138 \text{ horas}}$$

após 24 horas a quantidade será dada por,

$$Q(24) = 100e^{-0,00508(24)} \Rightarrow \boxed{Q(24) \approx 8{,}87 \text{ mg}}$$

Exercício 14. Em um pedaço de madeira queimada, ou carvão, verificou-se que $85,5\%$ do C^{14} tinha se desintegrado. Sabendo que a meia vida do C^{14} é de 5730 anos, qual a idade da madeira?

Dados do problema,

$$Q(t) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow Q(5730) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-5730\alpha} = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow \alpha = -\frac{ln(\frac{1}{2})}{5730} \Rightarrow \alpha \approx 0,00012$$

calculado o tempo t_1 procurado por,

$$Q(t_1) = \frac{14,5}{100}Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-5730(0,00012)t_1} = \frac{14,5}{100}Q_0 \Rightarrow t_1 = -\frac{ln(\frac{14,5}{100})}{0,6876} \Rightarrow t_1 \approx 2,80 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{t_1 \approx 2 \text{ anos e } 9 \text{ meses.}}$$

Aplicação 5: Queda de Corpos

Exercício 15. Deixa-se cair de uma altura de $150\,m$ um corpo de $15\,kg$ de massa, sem velocidade inicial. Desprezando a resistência do ar, determine a expressão da velocidade $v(t)$ e da posição $y(t)$ do corpo num instante t. Qual o tempo necessário para o corpo atingir o solo?

Solução:
Dados do problema,

$$v(0) = 0$$
$$m = 15$$
$$h = 150$$

Como o atrio é disprezível temos que,

$$\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow v(t) = gt$$

aplicando a condição incial temos que,

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = gt$$

A posiçã será dada por,

$$\frac{ds}{dt} = gt \Rightarrow s(t) = \frac{gt^2}{2}$$

portanto, adotando $g = 10$ temos

$$150 = \frac{10(t^2)}{2} \Rightarrow t = (30)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t \approx 5,48s$$

Exercício 16. Deixa-se cair de uma altura de $30\,m$ um corpo de $30\,kg$, com uma velocidade inicial de $3\,m/s$. Admitindo que a resistência do ar seja proporcional à velocidade e que a velocidade-limite é de $43\,m/s$, determine a expressão da velocidade $v(t)$ e da posição $y(t)$ do corpo num instante t.

Dados do problema,

$$s(0) = 30$$
$$v(0) = 3$$
$$v_{lim} = 43$$

Considerando o atrito temos que,

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg$$

aplicando o fator integrante segue que,

$$v(t) = g\frac{m}{k} + ce^{\frac{-kt}{m}}$$

da velocidade limite e aplicando a $g = 10$temos,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 43 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left(\frac{300}{k} + ce^{-\frac{kt}{30}}\right) = 43$$
$$\Rightarrow k = \frac{300}{43}$$

usando a condição inicial,

$$v(0) = 3 \Rightarrow 43 + c \Rightarrow c = -40$$

subsituindo k e c na equação da velocide temos que,

$$v(t) = 10(30)\frac{300}{43} \Rightarrow v(t) = 43 - 40e^{-\frac{10}{43}}$$

A equaçã do espaço é a derivada da velocidade, portanto,

$$\frac{ds}{dt} = 43 - 40e^{-\frac{10}{43}} \Rightarrow s(t) = 43t - 40\left(\frac{-43}{10}e^{\frac{-10t}{43}}\right) + c_1 \Rightarrow s(t) \quad = 43t + 172e^{\frac{-10t}{43}} + c_1$$

aplicando a condição inicial $s(0) = 30$ temos que,

$$s(0) = 30 \Rightarrow 172 + c_1 = 30 \Rightarrow c_1 = -142$$
$$s(t) = 43t + 172e^{\frac{-10}{43}}$$

Exercício 17. Deixa-se cair de uma altura de $300\,m$ uma bola de $75\,kg$. Determine a velocidade limite v da bola, se a força, devido à resistência do ar, é de $-0,5v$.

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{750}{0,5} + ce^{-\frac{kt}{30}}\right) = \quad 1500 \text{ m/s}$$

Aplicação 6: Circuitos Elétricos

Exercício 18. Uma força eletromotriz é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de $0,1\,H$ e a resistência é de $50\,\Omega$. Ache a corrente I(t), sabendo que $I(0) = 0$. Determine a corrente quanto $t \to \infty$. Use $E = 30\,V$.

Solução:
Dados do problema,

$$\begin{aligned} I(0) &= 0 \\ L &= 0,1 \\ R &= 50 \\ E(t) &= 30v \end{aligned}$$

O sistema é tipo LR, portanto utilizando as léis de kirchhoff temos que,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L}$$

portanto, temos que

$$\frac{di}{dt} + \frac{50}{0,1}i = \frac{30}{0,1} \Rightarrow \frac{di}{dt} + 500i = 300 \Rightarrow i(t) = \frac{300}{500} - \frac{c_1e^{-500t}}{500}$$

Aplicando a condição inicial temos que,

$$i(0) = \frac{300 - c_1}{500} = 0 \Rightarrow c_1 = 300.$$

substituindo o c_1 temos,

$$i(t) = \frac{300}{500} - \frac{300e^{-500t}}{500} \Rightarrow i(t) = \frac{3}{5}\left(1 - e^{-500t}\right)$$

logo,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3}{5}\left(1 - e^{\frac{-t}{500}}\right) = \frac{3}{5}A$$

Exercício 19. Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é $12\,\Omega$, a indutância é $4\,H$, a pilha fornece uma voltagem constante de $60\,V$ e o interruptor é ligado quanto $t = 0$. Qual é o valor da corrente?

Solução:
Pelas leís de Kirchhoff temos que o sistema é do tipo LR, portanto,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L}$$

Aplicando as informações dada temos,

$$\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{12}{4}i &= \frac{60}{4} \Rightarrow \\ \frac{di}{dt} + 3i &= 15 \Rightarrow \\ \frac{di}{15 - 3i} &= dt \Rightarrow \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{15}{3} - \frac{c_1e^{-3t}}{3} \end{aligned}$$

aplicando a condição inicial temos que,

$$i(0) = 0 \Rightarrow \frac{15}{3} - \frac{c_1}{3} = 0 \Rightarrow c_1 = 15$$

substituindo temos que,

$$i(t) = \frac{15}{3} - \frac{15e^{-3t}}{3} \Rightarrow i(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

Exercício 20. Uma força eletromotriz de $200\,V$ é aplicada a um circuito em série RC no qual a resistência é de $1000\,\Omega$ e a capacitância é $5.10^{-6}\,F$. Ache a carga $q(t)$ no capacitor se $I(0) = 0,4$. Determine a carga da corrente em $t = 0,005s$. Determine a carga quando $t \to \infty$.

Solução:
Temos que pelas leís de Kirchhoff o sistema é do tipo RC, portanto,

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = E(t)$$

aplicando as informações dada temos,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = E(t) \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{0,005}q = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(t) = (0,005)\left(\frac{1}{5} - c_1 e^{\frac{-t}{0,005}}\right)$$

por outro lado,

$$\frac{dq}{dt} = (0,005)\left(\frac{c_1}{0,005}e^{\frac{-t}{0,005}}\right) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = c_1 e^{\frac{-t}{0,005}} = i(t)$$

aplicando a condição inicial temos que,

$$i(0) = 0,4 \Rightarrow c_1 = 0,4$$

substituindo temos que,

$$q(t) = (0,005)\left(\frac{1}{5} - 0,4e^{\frac{-t}{0,005}}\right)$$

calculando a carga para $t = 0,005$,

$$q(0,005) = (0,005)\left(\frac{1}{5} - 0,4e^{\frac{-0,005}{0,005}}\right) \Rightarrow q(0,005) = \frac{1}{5} - 0,4e^{-1} \approx 0,052$$

para o caso $t \to \infty$ temos que,

$$\lim_{t\to\infty}(0,005)\left(\frac{1}{5} - 0,4e^{\frac{-t}{0,005}}\right) = 0,001.$$