Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

MODELO DE PLANEJAMENTO DE USINA HIDROTÉRMICA BASEADO EM PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

Jefferson Bezerra dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Camila Mara Vital Barros
Sérgio de Carvalho Bezerra

João Pessoa
Abril de 2019

MODELO DE PLANEJAMENTO DE USINA HIDROTÉRMICA BASEADO EM PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

Jefferson Bezerra dos Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Nome do Primeiro Examinador Sobrenome, D.Sc.

Prof. Nome do Segundo Examinador Sobrenome, Ph.D.

Prof. Nome do Terceiro Examinador Sobrenome, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
ABRIL DE 2019

M21m Bezerra dos Santos, Jefferson
Modelo de planejamento de Usina Hidrotérmica baseado em Programação Dinâmica Dual Estocástica / Jefferson Bezerra dos Santos. – João Pessoa, 2019.
29, f.: il.;
Orientadores: Camila Mara Vital Barros , Sérgio de Carvalho Bezerra
Dissertação (mestrado) – UFPB/CI/PPGMMC.
Referências Bibliográficas: p. 17 – 17.
1. Primeira palavra-chave. 2. Segunda palavra-chave. 3. Terceira palavra-chave.

UFPB/BC CDU: 719.6(043)

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELO DE PLANEJAMENTO DE USINA HIDROTÉRMICA BASEADO EM PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

Jefferson Bezerra dos Santos

Abril/2019

Orientadores: Camila Mara Vital Barros
Sérgio de Carvalho Bezerra

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Apresenta-se, nesta tese, ...

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THESIS TITLE

Jefferson Bezerra dos Santos

April/2019

Advisors: Camila Mara Vital Barros
Sérgio de Carvalho Bezerra

Program: Computational Mathematical Modelling

In this work, we present ...

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

N	Symbol Definition N, p. 4
α	Symbol Definition XX, p. 4

Lista de Abreviaturas

Capítulo 1

Introdução

O setor energético é de suma importância para qualquer país. Com o decorrer das últimas décadas a sociedade de um modo geral ser tornou altamente dependente da energia elétrica. A preocupação em supir essa demanda crescente por energia levou ao surgimento de modelos para o planejamento de dispacho de energia, tais modelos devem ser ajustar adequadamente ao planejamento energético. Portanto, não é coincidência que na construção de taís modelos sejam o necessário o conhecimento de várias áreas da ciência. Dentre as quais tem-se a Matemática, Engenharia, Probabilidade e Hidrologia. Contudo, há também uma preocupação ambiental,pois, as ações do ser humano em sua maioria trazem um impacto negativo sobre o ambiente, como é o caso da geração de energia termoelétrica e nuclear. Diante disso, metodologias que permitem o uso da energia elétrica de modo eficiente, e a sua geração constituem problemas de grande interesse. O Brasil pelo seu vasto território de natureza continental e pela sua natureza climática diferenciada tem uma posição privilegiada para fontes de energias renováveis. Segundo a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANELL) no Brasil a principal fonte de geração de energia é hidroelétrica que corresponde a 62%, o restante é 28% proveniente da geração térmica (gás natural, carvão mineral, combústiveis fósseis, biomassa e nuclear) e 10% proveniente de geração eólica e importação de outro países. O processo básico para o dispacho de energia é constituido por três etapas. As responsáveis pela geração de energia as *geradoras*, as responsáveis pela transmissão de energia para os centros urbanos as *transmissoras* e por último as responsáveis por distribuir a energia para o consumidor final as *distribuidoras*.

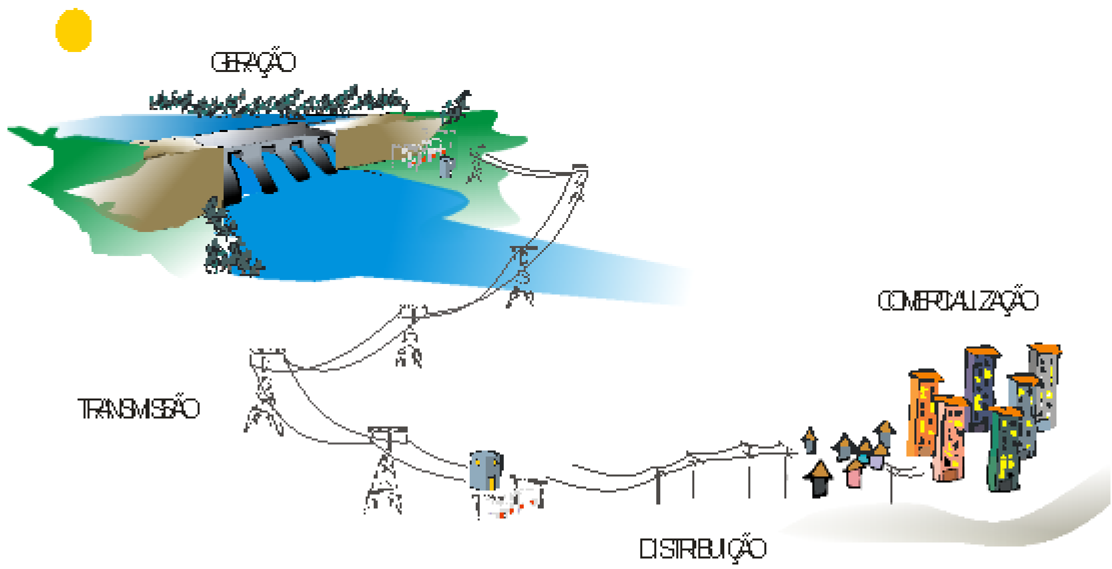

Figura 1.1: Dispacho de energia ANELL

Percebe-se que qualquer problema envolvendo as geradoras têm repercussões para os outros estágios, ocasionado-se um aumento do preço da tarifa de energia para o usuário final, portanto para um planejamento eficaz as geradoras tem um papel fundamental levando-se em relação fatores como o custo da produção de energia elétrica. Por outro, lado o fator ambiental jamais deve ser esquecido. Diante dessas condições a serem consideradas, o Brasil, pela sua diversidade de recursos para a geração de energia, tem-se utilizado a geração mista,onde o modelo que ser destacar e o modelo hidrotérmico. O modelo hidrotérmico é constituído por usnas hidroelétricas em cascata, onde caso tendo-se um nível de reservatório baixo para a demanda do sistema as térmicas associadas são ativadas para supir a demanda de energia. As princiais dificuldades relacionadas a este tipo de modelo podem ser relaciondas pelo uso de térmica cujo o custo tanto para a geração, quanto para o meio ambiente e relativamente alto. Contudo, a geração térmica possui a vantagem de ter uma depedência menor a fatores externos, comparada há outras fontes de energia, fazendo que sua utilização seja necessária. A grande vantagem da geração elétrica está em seu custo relativamente baixo em relação as outras fontes de energia, porém está é altamente depedente do nível do reservatório. Tendo em vista tais questões uma metodologia desenvolvida para trabalhar com tais dificuldades do modelo hidrotérmico para a tomada de decisão é a modelagem hidrotérmica baseada na Programação Dinâmica Dual Estócastica (PDDE), sendo, a base para modelos como o DECOMP utilizado pela ANELL.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Noções de Probabilidade

Para a formulação de um modelo de dispacho de energia, fazer a análise do modelo considerando somente o aspecto deterministico, costumar ser pouco viável, pois, as mudanças que podem ocorrer no ambiente podem causa um sério impacto. Portanto, para modelos hidrotérmicos é necessário o conhecimento sobre a teoria das probabilidades. Está seção aborda os principais conceitos para o entendimento do modelo de dispacho de energia considerando a variedade de cenários que podem ocorrer. Para um estudo mais rigoroso sobre o probabilidade consulte [1] e [2].

Na natureza encontramos uma série de situações que envolvem algum tipo de incerteza, sendo denomindas de fenômenos ou experimentos aleatórios. Por exemplo, o lançamento de um dado, a previsão do clima. O espaço amostral é o conjunto de todos os resultado possíveis é representado por Ω. Segundo [2] pode ser enumerável, finito ou infinito, sendo for possível uma correspondência biunívoca com os números reais, caso contrário será não enumerável. Para maiores detalhes sobre conjuntos o apêndice A dever ser consultado. Onde os resultados possíveis do espaço amostral seram conhecidos como os pontos ou elementos de Ω. De forma generica os elementos de Ω seram representados por ω. O conjunto vazio por $\emptyset$. Para os subconjunto de Ω será adotado por convenção a utilização de letras maiúsculas do alfabeto latino, para indicar um subconjunto de Ω será adotado $A \subset \Omega$. Caso exista ω que pertence ao espaço amostral, escreve-se $\omega \in \Omega$.

Exemplo:

Seja o lançamento de um dado, para especificar o espaço amostral deste fenômeno deve-se elencar todos os resultados possíveis, ou seja, $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Portanto, o espaço amostral será dado por,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

alguns dos subconjuntos de Ω podem ser elencados da seguinte forma,

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{6\}$$

pode-se notar que,

$$A \subset \Omega \qquad \text{e} \qquad B \subset \Omega$$

significando que tanto A como B são subconjuntos de Ω. A representação pela linguagem dos conjuntos permite que uma forma objetiva de ser expressa os eventos, por exemplo, no lançamento do dado poderia-se um interesse no evento "sair um número menor que 4", uma representação para esse tipo de evento poderia ser,

$$C = \{\omega \in \Omega; \omega < 4\}$$

desta forma, o evento de interesse está bem formulado. Quando ser está trabalhando com conjuntos deve-se ter alguns cuidados, um deles, tomando como refência o lançamento do dado, a seguinte forma de escrita,

$$6 \in \Omega$$

é válida, contudo,

$$6 \subset \Omega$$

não tem sentido,
caso seja necessário pode-se escrever,

$$\{6\} \subset \Omega.$$

As notações básicas para as operações entre conjuntos são:

(i) A^c complemento, ou seja, todos os elementos ω de Ω, exceto aqueles que estão em A.

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3, \ldots, \cup A_n$ ou $\bigcup_{j=1}^{n} A_n$, é a união, são todos os pontos $\omega \in \Omega$, que pertecem a pelo menos um A_i com $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) $A_1 \cap A_2 \cap A_3, \cdots, \cap A_n$ ou $\bigcap_{j=1}^{n} A_n$, é a intersecção, são todos os pontos $\omega \in \Omega$, pertencentes A_i qualquer que seja o $i = 1, \ldots, n$.

(iv) $A - B$ ou $A \cup B^c$ é a diferença entre A e B, ou seja, são todos os elementos $\omega \in \Omega$ pertencentes à A que não pertecem a B.

(v) $A \triangle B$ é a diferença simétrica entre A e B, todos os $\omega \in \Omega$ pertecentes a $A \cup B$ exceto os $\omega \in \Omega$ que estão na $A \cap B$.

Dados dois conjuntos A e B são ditos disjuntos ou mutuamente exclusivos se, somente se, a interseção entre A e B é o conjunto vazio, ou de outra forma,

$$\text{A e B disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Será dita partição de um conjunto Ω, satifazendo as seguintes condições,

$$\bigcup A_i = \Omega \qquad e \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

pode-se pensa no conceito de partição a divisão de uma *pizza* onde a reunião forma o todo, é cada pedaço é único. Conforme [1] é [2] a definição clássica de probabilidade é dada pelo número de caso favoráveis sobre o número de casos possíveis, de outra forma,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

para um Ω finito e supondo-se caso equiprováveis, onde cada evento tem a mesma probabilidade de ocorrência, conforme [1] está definição segue o principio da indiferênça, ou seja, a ocorrência de um evento A não modificar a probabilidade de ocorrência de um evento B. Para o lançamento do dado tem-se,

$$P(i) = \frac{1}{6}, \forall \quad i \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Portanto, independente da jogada do dado,considerando que este não é viciado, tem-se uma mesma probabilidade associdada independente do evento no espaço amostral, outro exemplo clássico e o lançamento de uma moeda. Descrevendo os eventos possíveis tem-se,

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

ambos equiprováveis, ou seja,

$$P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}.$$

Conforme [2] tem-se a segunda definição para a probabilidade definida como, frequentista ou estátistica, onde dado um evento, seja n(A) o número de ocorrências de ocorrêcias independentes do evento A, seja n todo o casos possíveis tem-se,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

a expressão acima é a frência para a de ocorrêcia do evento A para o n sucientemente grande. As definições dadas utilizam-se da intuição, contudo são amplamentes utilizadas, por outro lado é necessário uma formalização conceitual, permitindo que não tenha-se uma depedência alta em relação a intuição, diante disso, o conforme [2] matemático Kolmogorov estabeleceu um conjunto de axiomas para a formalização a probabilidade dados a seguir.

Definição 2.1.1 (Probabilidade)**.** Uma função P, definida na σ-álgebra F de subconjunto de Ω e valores no intervalo [0,1], é uma probabilidadese satisfaz os Axiomas de Kolmogorov:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $A \in F, P(A) \geq 0$;
3. Qualquer que seja a sequência $A_1, A_2, \cdots \in F$, mutuamente exclusivos, temos,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

O significado que deve-se guardado dos axioma anterioes, é o seguinte, a probabilidade associado ao espaço amostral Ω é 1, a probalidade de qualquer evento é sempre não negativa, sabendo-se que os eventos são mutuamente exclusivos, pode-se calcular a probabilidade da união de eventos pelo somatório das probabilidades. Os axiomas de Kolgomorov definem a ideia de probabilidade, além de permitir que as definições anterioes se tornem casos particulares. A trinca (Ω, F, P), define o espaço de probabilidade, sendo que os subconjuntos em F são os eventos, somente a estes tem-se uma probabilidade associada. Uma vez que probabilidade está bem definida pode-se no espaço de probabilidade, as propriedades associadas são elencadas a seguir.

Primeiramente, considere o espaço de probabilidade (Ω, F, P), onde os conjuntos mencionados estão contidos neste espaço tem-se:

1. $P(A) = 1 - P(A^c)$
2. Sendo A e B dois eventos quaisquer tem-se:
   $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$
3. Se $A \subset$ B, então $P(A) \leq P(B)$
4. Regra da adição de probabilidade
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Para eventos quaisquer $A_1, A_2, \cdots$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty})A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Considerando-se o exemplo a seguir encontrado em [2] para exemplificar as propriedades. Um dado equilibrado é lançado duas vezes e as faces resultantes observadas. Considerando-se os seguintes eventos de interesse:

A : a soma dos resultados é ímpar.
B : o resultado do primeiro lançamento ímpar.
C : o produto do resultado é impar.

Primeiramente deve-se definir um espaço adequado para o experimento, considerando-se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ x $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sendo, Ω o produto cartesino de todos os resultados possíveis, ou seja, todo ponto $\omega \in \Omega$ pode ser descrito como $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ respectivamente. Sendo, a σ-álgebra o conjunto das partes de Ω e P a probabilidade associada a cada ponto, para cada um dos eventos em Ω tem-se uma probabilidade uniforme, ou seja, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$. De fato, resultado é uma implicaąão do príncipio fundamental da contagem, encontrado em [2] enunciado como se segue, se uma tarefa tem k etapas e cada etapa i tem n maneiras diferentes de ser realizada, então o número total de alternativas para realizar a tarefa é o produto $n_1 n_2 \cdots n_k$. Para cada jogada de um dos dado tem-se, 6 possibilidades para o resultado, portanto para o lançamento de dois dados tem-se 36 possibilidades, significando que o espaço amostral possui 36 pontos, a jogada do dado D1 não interfere na jogada do dado D2, configurando-se a indepêndencia de eventos. O evento A é descrito da seguinte forma,

$$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega; \text{é ímpar}\}$$

ou de maneira equivalente

$$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega; \omega = 2n + 1, n \in \mathbb{R}\}$$

forma de descrever eventos podem facilitar o entendimento do problema probalistico como tamém podem dificultar nota-se que a primeira forma é intuitiva em relação a segunda, a sua utilização para este tipo problema será mais eficaz. Feitas as devidas considerações, para o cálculo da probabilidade do evento poderia-se elencar todos as possíveis combinações para este evento, ou seja, os pontos procurado são, $\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 1\}, \{4, 3\}, \{4, 5\}$, $\{5, 2\}, \{5, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{6, 3\}, \{6, 5\}$. Verifica-se que o total de 18 pontos pontos, a probabilidade associada é $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. O evento B, pode-se descrito da seguinte forma,

$$B = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega; \omega_1 \text{é ímpar}\}$$

O procedimento segue de modo análogo em relação ao evento B, os pontos são, $\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, \{5,5\}, \{5,6\}$. A probabilidade de ocorrência do evento B é $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. A probabilidade associdada a C, de modo análogo, $P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Com base nas informações das probabilidade do eventos A, B e C pode-se fazer conclusões interessantes, percebe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, de fato uma vez que, $A \cap B = \{1,1\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,1\}, \{3,3\}, \{3,5\}, \{5,1\}, \{5,3\}, \{5,5\}$ dada essa informação, obtem-se facilmente,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Consequentemente, a probabilidade de dado o resultado a soma dos resultados ser ímpar e o resultado do primeiro lançamento ser ímpar corresponde a $\frac{1}{4}$, e a probabilidade de ocorrência das soma dos resultado ser ímpar e o resultado do primeiro lançamento ser ímpar corresponde a $\frac{3}{4}$. Em problemas práticos é o interesse por probabilidades que tenham alguma indepência entre si, considerando-se a pergunta "Qual a probabilidade do evento A tal que ocorreu B ?", a resposta a esse tipo de pergunta de interesse prático, fundamentar a probabilidade condicional.

Definição 2.1.2 (Probabilidade Condicional)**.** Considerando-se os eventos A e B em (Ω, F, P), onde $P(B) > 0$ define-se a probabilidade de ocorrência do evento A tal que B ocorreu, por,

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

para o caso $P(B) = 0$, define-se $P(A \backslash B) = P(A)$.

Conforme [1] é interessante que $P(A \backslash B) = P(A)$, pois, a probabilidade de $P(A \backslash B)$ dependerá somente de A (como uma funçao de A). Por [2] a probabilidade condicional também tem um certo interesse teórico por permitir a decomposição de probalidade de difícil caracterização por meio de probabilidade condicionais mais simples.

Proposição 2.1.1 (Regra do produto de probabilidades)**.** Para os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ em (Ω, F, P), com $P(\bigcap_{i=1}^{\infty}) > 0$, o produto das probabilidades é dado por,

$$P(A_1 \cap A_2, \cap A_3 \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \backslash A_1) \cdots P(A_n \backslash A_1 \cap A_2 \cdots A_{n-1})$$

Uma aplicação direta da regra do produto de probabilidades é a lei da probabilidade total dada por,

Teorema 2.1.1 (Lei da Probabilidade Total)**.** Supondo-se que os eventos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ em (Ω, F, P) formam uma partição de Ω e que para qualquer C_n tem-se $C_n > 0$. Então qualquer evento A neste espaço de probabilidade, a probabilidade do evento A, é dada por,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(A \backslash C_i).$$

Nota-se que o membro do direito lei de probabilidade total é justamente formada produtos envolvento a probabilidade condicional. Utilizou-se forma intuitiva o conceito de indepência de eventos, contudo com o conhecimento da probabilidade condiconal pode-se ter uma definição que evite qualquer tipo de ambiguidade.

Definição 2.1.3 (Indepedência de dois eventos)**.** Dados dois eventos A e B em (Ω, F, P) são ditos independentes, quando a ocorrência do evento A não influência na ocorrência do evento do evento B, isto é,

$$P(A \backslash B) = P(A)$$

conforme a definição de probabilidade condicional,

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

obtêm-se uma representação equivalente para a indepedência de eventos dada por,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Nota-se que a independência para dois eventos, pode ser analisada conforme o cálculo da probabiliadade associada para a interseção facilitando-se a análise dos eventos e futuras conclusões sobre o fenômeno observado. Com base na 2.1.3 define-se a indenpência de vários eventos.

Definição 2.1.4. Os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ em (Ω, F, P) são independentes se, para toda coleção de índices $1 \leq i_1 \leq i_2 < \cdots i_k \leq n$, tem-se,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

Consequentemente por 2.1.3 e 2.1.4, é possível analisar a independência de eventos com base no cálculo de probabilidades. Al'em de conhecida a indepedência facilitar o cálculo de eventos de interesse. Considerando-se o seguinte evento. Uma moeda é lançada duas vezes, sejam os eventos.

A : Sair cara.
B : Sair coroa.

Nota-se que para este evento A e B são independentes, uma vez que a ocorrência de A ou B no primeiro lançamento em nada influência este resultado para o segundo lançamento. A probabilidade de sair cara no segundo lançamento dado que saiu coroa no primeiro lançamento corresponde a $\frac{1}{4}$, de fato, nota-se que como os eventos são indepedentes,

$$\begin{aligned} P(B\backslash A) &= P(B) \\ P(B\backslash A) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

é de imediato que,

$$\begin{aligned} P(B \cap A) &= P(B)P(A) \\ P(B \cap A) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

o mesmo resultado poderia ser obtido cálculando a probabilidade de forma clássica, onde deve-se elencar o resultado possiveis, ou seja, (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa). O evento de interesse é (coroa, cara) como para esse evento $\Omega = 4$ tem-se de imediato que,

$$P(\text{coroa, cara}) = \frac{1}{4}.$$

Nota-se que tanto a primeira forma quanto a segunda tiveram o mesmo resultado, contudo, se o evento um espaço amostral com uma quantidade de elementos grande a primeira forma é mais atraente, diante desse tipo de evento pode-se observar os benefícios do conhecimento de da probabilidade condicional. Uma vez estebelecido conceito de probabilidade condicional, as ferramentas probabilistas já ão suficientes para conceitua, uma variável aleatória. No estudo de fenômenos aletórios é comum o interesse em quantidades associadas a esse tipo de fenômeno, segundo [2] essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno observado, em alguns casos essas funções são o próprio fenômeno observado, é comum tomar a identidade para casos esses tipos de casos de interesse. Antes da realização de qualquer experimento ou ocorrência de qualquer fenômeno de natureza aleatória não é comum ter o resultado, somente em alguns casos especiais, contudo a uma vez que o espaço de probabilidade está bem definido é possível observar qualquer evento de interesse na σ-álgebra, diante disso, também é possível atribuir probabilidades para as funções que descrevem esse evento, com essa ideia fundamenta-se o conceito do termo variável aleatória, de forma mais rígida.

Definição 2.1.5 (Variável aleatória (quantitativa))**.** Dado um espaço de probabilidade (Ω, F, P), define-se uma variável aleatória, como uma função X: $\Omega \to \mathbb{R}$

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\} \in F$$

qualquer que seja o conjunto $I \subset \mathbb{R}$ pertecente a σ-álgebra.

Pela definição 2.1.5, primeiramente existe uma função de Ω em $\mathbb{R}$, diante disso dever existir uma função inversa de $\mathbb{R}$ para cada subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ pertecente a σ-álgebra F. A exigência que a inversa devar pertença a σ-álgebra é importante, pois é possível garantir as operações com probabilidades para elementos que estejam na σ-álgebra. Conforme [2], considere $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, seja $F = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ define-se os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$, deve-se verificar se é possível I_A e I_B sejam variáveis aleatórias, definindo X^{-1} por,

$$(\omega \in \Omega; I_A \in (-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se} \quad x < 0, \\ A^c, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \\ \Omega, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

nota-se que para qualquer intervalo da forma $(-\infty, x] \in F$, uma vez que ambos os subconjuntos $\emptyset, A^c, \Omega \in F$, e portanto I_A é variável aleatória, contudo utilizando-se a mesma definição de I_A para I_B, ocorrer que B^c não pertence a F, de fato $B^c = \{2, 4\} \ \notin F$, portanto I_B não nestas condiç oes não é uma variável aleatória, por outro lado, poderia-se definir uma outra σ-álgebra que comporta-se o I_B, o que tornaria I_B uma variável aleatória. A formulação de uma variável aleatária está sempre associada diretamente com a σ-álgebra associada, conforme [2] os eventos da forma $(-\infty, x)$ possuem um interesse em particular, pois, por meio deste, define-se uma importante funç ao no estudo da probabilidade, conhecida como função de ditribuição de probabiliade, para facilitar o entendimento quando houve menção a ω em algum evento da forma $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I)\}$ este será omitido sendo representado este evento como, $[X \in I]$, logo, eventos com $I = (-\infty, x]$, seram representados na forma, $[X < 0]$, por fim, em vez de $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\})$, será $P(X \in I)$. Por este tipo de simplicação a função de ditribuição de probabilidade também é conhecida por função de probabilidade acumulada, pelo acumulo de probabilidade no intervalo real nota-se, pela definição a seguir.

Definição 2.1.6 (Função de distribuição de probabilidade)**.** Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade (Ω, F, P), sua função de distribuição é dada por,

$$F_x(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x).$$

Conforme [2] o conhecimento de 2.1.6, permite obter qualquer informação sobre a variável a ser examinada. Uma vez que apesar da variável possa assumir valores num subconjunto dos reais, a sua função de distribuição assumir valores em todos os reais. Além da função de distribuição, existe uma função de fundamental importância para o estudo de probabilidades, conhecida como função de probabilidade. Uma varável aleatória X, é classificada como, discreta ou conínua para ambos os casos tem-se funções de probabilidade especificas associadas. Uma primeira análise para o caso discreto, uma variável é classificada como discreta, quando assumir somente um número enumerável de valores finito ou infinito, onde este tipo de função atribuir valor a cada um dos possíveis valores assumidos pela variável aleatória, ou seja, tomando-se X como uma variável aleatória, assumindo valores em $x_1, x_2, \cdots$, para $i = 1, 2, \cdots$,

$$P(x_i) = P(X = x_i) = P(\omega \in \Omega; X(\omega) = x.$$

Para o caso discreto a função de probabilidade dever satisfazer duas propriedades, a saber,

p1 $0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \cdots,$

p2 $\sum_i p(x_i) = 1.$

As propriedades, confirmam a ideia intuitiva de probabilidade, por p1, a probabilidade somente assumirá valores não negativos no intervalo $[0, 1]$, e o somatório de todas as probabilidades asssocidas ao evento dever ser igual a 1. Para o caso contínuo a ideia em si é semelhante, contudo pela sua continuidade, a utilização de uma integral ao invés do somatório é o ideal, portanto, uma variável aleatória X será classificada como contínua como quando exite uma função f não negativa que satisfaça,

p1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$

p2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega = 1.$

observando-se que a construção de tais funções dever existir uma espaço de probabilidade (Ω, F, P). Pelas funções de ditribuição e de probabilidade consegue-se a maioria das informações sobre o evento, por fim, é inevitável o conceito de valor esperado,esperança matemática, ou média de uma variável extremamente útil na análise de fenômenos aleatórios justamente por esse ser comportar como a média, trazendo uma informações do problema em um contexto geral. Podendo ser definido para o caso discreto como,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i),$$

desde que soma esteja bem determinada e o espaço de probabilidade bem definido. Para o caso contínuo, a ideia é análoga,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

desde que a integral esteja bem definida, assim como o espaço de probabilidade.

Capítulo 3

Probabilidade

Segundo [?] Segundo [?]

Capítulo 4

Programação Dinâmica Dual Estocástica

Capítulo 5

Modelo DECOMP

Referências Bibliográficas

[1] JAMES, B. R., 1981, *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 4 ed. Rio de janeiro, IMPA.

[2] MAGALHÃES, M. N., 2013, *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. 3 ed. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

Apêndice A

Projeto GNU

Apêndice B

GLPK