UFPB – CI – PPGMMC – EDO
Segunda Lista de Exercícios Computacionais
Data de entrega: 05/12/2019

Nesta lista considere a notação da Primeira Lista de Exercícios Computacionais e adicionalmente:

- $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Um método explícito de 1-passo (ME1P) verifica a relação: $y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h)$.
- Um método explícito de Runge-Kutta (RKE) de R estágios é um ME1P no qual:

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, h) &= c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + \ldots + c_Rk_R \\
k_1 &= f(x, y) \\
k_2 &= f(x + a_2h, y + hb_{21}k_1) \\
k_3 &= f(x + a_3h, y + hb_{31}k_1 + hb_{32}k_2) \\
k_4 &= f(x + a_4h, y + hb_{41}k_1 + hb_{42}k_2 + hb_{43}k_3) \\
&\vdots \\
k_R &= f(x + a_Rh, y + hb_{R1}k_1 + hb_{R2}k_2 + hb_{R3}k_3 + \ldots + hb_{RR-1}k_{R-1})
\end{aligned}$$

  onde:
  $c \in \mathbb{R}^R$ é chamado de vetor de pesos.
  $a \in \mathbb{R}^R$ é chamado de vetor de posições.
  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{R\times R}$ é chamada de matriz de dependências.
  e se impõem as seguintes condições entre a e B:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= b_{21} \\
a_3 &= b_{31} + b_{32} \\
&\vdots \\
a_R &= b_{R1} + b_{R2} + \ldots + b_{RR-1}.
\end{aligned}$$

- Os dados c, a e B para um RKE são organizados na seguinte forma (tabela de Butcher):

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & & & & & \\
a_2 & b_{21} & & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
a_R & b_{R1} & b_{R2} & \ldots & b_{RR-1} & \\
 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{R-1} & c_R
\end{array}$$

Exercício 1. Prove que $c_1 + \ldots + c_R = 1$ é condição suficiente para que o RKE de R estágios seja consistente.

Exercício 2. Defina os métodos de Runge-Kutta de 3 estágios: defina ϕ, c, a, B e as relações entre estes dados([1]) para que este método seja de ordem 3.

Exercício 3. Verifique se os dados das tabelas abaixo verificam as relações do exercício 2.

$$\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array} \qquad (Heun) \tag{1}$$

[1]Consulte equações (233a)-(233d) do livro: Butcher, J.C. (2008). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. England: Wiley.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \qquad (Nystron) \tag{2}$$

Exercício 4. Defina os métodos de Runge-Kutta de 4 estágios: defina ϕ, c, a, B e as relações entre estes dados([2]) para que este método seja de ordem 4.

Exercício 5. Verifique se os dados das tabelas abaixo verificam as relações do exercício 4.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \tag{4}$$

Exercício 6. Estude os seguintes códigos e responda as questões abaixo

```
function ynm1=incognita1(f,xn,yn,h,c,a,B)
  R=size(c,1);
  n=size(yn,1);
  k=zeros(n,R);
  k(:,1)=f([xn;yn]);
  phi=c(1)*k(:,1);
  for i=2:R
    soma=zeros(n,1);
    for j=1:i-1
      soma=soma+h*B(i,j)*k(:,j);
    endfor
    k(:,i)=f([xn+a(i)*h;yn+soma]);
    phi=phi+c(i)*k(:,i);
  endfor
  ynm1=yn+h*phi;
endfunction
```

```
function [x y]=incognita2(f,x0,y0,h,N)
  x(1)=x0;
  y(:,1)=y0;
  c=[1/4;0;3/4];
  a=[0;1/3;2/3];
  B=[0 0 0;1/3 0 0;0 2/3 0];
  for n=1:N
    y(:,n+1) = incognita1(f,x(n),y(:,n),h,c,a,B);
    x(n+1) = x(n) + h;
  endfor
endfunction
```

[2]Consulte equações (235a)-(235h) do livro: Butcher (2008).

(1) O que calcula a função 'incognita1'?
(2) O que calcula a função 'incognita2'?
(3) Que modificações faria na função 'incognita2' para que represente a programação do método de Nystron.

Dica: para respoder o que calcula cada função dê significado as entradas, as saídas e o passo a passo.

Exercício 7. Considere o problema do pêndulo:

$$\begin{cases} y''(x) &=& -\frac{g}{d} sen(y(x)), \\ y'(0) &=& 0 \\ y(0) &=& \frac{\pi}{3} \end{cases} \tag{5}$$

onde d é o comprimento do haste do pêndulo, g a aceleração da gravidade, $y(x)$ é o ângulo que faz o haste do pêndulo com a vertical no tempo x, $y'(x)$ é a velocidade angular no tempo x e $y''(x)$ é a aceleração angular no tempo x. Escreva um sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente ao problema (5).

Exercício 8. Faça um script em OCTAVE para resolver o problema do pêndulo (5) que empregue a função 'incognita2' ou a função que programa o método de Nystron (exercício 6).

Exercício 9. Com base nas funções do exercício 6, faça funções semelhantes para programar o método explícito de Runge-Kutta de 4 estágios. Use a tabela (3) ou (4) para definir os valores de c, a e B.

Exercício 10. Considere o problema de Kepler:

$$\begin{cases} y_1'(x) &=& y_3(x), \\ y_2'(x) &=& y_4(x), \\ y_3'(x) &=& \frac{-y_1}{\left(y_1^2+y_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ y_4'(x) &=& \frac{-y_2}{\left(y_1^2+y_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ y_1(0) &=& 1 \\ y_2(0) &=& 0 \\ y_3(0) &=& 1 \\ y_4(0) &=& 1 \end{cases} \tag{6}$$

onde $(y_1(x), y_2(x))$ é a posição no plano de um astro no tempo x, $(y_3(x), y_4(x))$ é a velocidade no plano no tempo x. Na origem $(0,0)$ está um astro massivo que atrae o astro em movimento([3]). Faça um script em OCTAVE para resolver o problema de Kepler que empregue a função desenvolvida no exercício 9. Faça o gráfico da trajetória $\{(y_1(x), y_2(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ para diferentes valores iniciais.

[3] O modelo está explicado na página 4 do livro do Butcher (2008).