

矩阵理论与方法

9月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

第1章 线性空间与线性变换

1.2 线性变换及其矩阵

回顾

1、线性变换 T $Y = T(X) \in V$

2、 $f(T)$ 也是线性变换 $Y = f(T)(X)$

3、求 $Y = T(X)$

4、求 $Y = f(T)(X)$

回顾

例：计算 $Y = T(X)$ ，其中 $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)\alpha \in V$

1、由 $T(X_1, X_2, \dots, X_N) = (X_1, X_2, \dots, X_N)A$

2、 $Y = T(X) = T(X_1, X_2, \dots, X_N)\alpha = (X_1, X_2, \dots, X_N)A\alpha$

3、计算 Y 的坐标
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

1、线型空间

2、基和坐标

3、线性变换 $T \rightarrow$ 矩阵 A

4、 $A=P^{-1}AP$

1. 线性变换的矩阵

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为数域 P 上线性空间 V 的一组基, T 为 V 的线性变换. 基向量的象可以被基线性表出, 设

$$\begin{cases} T(x_1) = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \\ T(x_2) = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n \\ \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\ T(x_n) = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用矩阵表示即为

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)A$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵A称为**线性变换T在基 x_1, x_2, \cdots, x_n 下的矩阵**.

注: ① 给定 V^n 的基 x_1, x_2, \cdots, x_n 和线性变换T,
矩阵A是唯一的.

- ② 单位变换在任意一组基下的矩阵皆为单位矩阵;
零变换在任意一组基下的矩阵皆为零矩阵;
数乘变换在任意一组基下的矩阵皆为数量矩阵;

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵.

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵.

解: $\because T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\therefore T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵.

解: $\because T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

问题1:

坐标怎么求?

$$\therefore T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵

$$\text{解: } T(E_1) = (1, 0, 1) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$T(E_2) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$T(E_3) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$T(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵

解: $T(E_1) = (1, 0, 1) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$T(E_2) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (1, 0, 1) = (a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3)$$

$$T(E_3) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad T(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵

解: $T(E_1) = (1, 0, 1) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T(E_2) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(E_3) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

问题A:

坐标怎么求?

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵

解: $T(E_1) = (1, 0, 1) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

问题A: 坐标怎么求?

$$T(E_2) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

问题B: A^k 怎么算?

$$T(E_3) = (1, 1, 2) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题A：坐标怎么求？

先在一组简单的基下求坐标

然后通过坐标变换得到在其它基下的坐标

问题B： A^k 怎么算？

$$\text{若 } A = P^{-1} \Lambda P, \text{ 则 } A^k = P^{-1} \Lambda^k P$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题A：坐标怎么求？

先在一组简单的基下求坐标

然后通过坐标变换得到在其它基下的坐标

问题B： A^k 怎么算？

若 T 有 N 个线性无关特征向量，则 $A = P^{-1}\Lambda P$

若 A 有 N 个线性无关特征向量，则 $A = P^{-1}\Lambda P$

若 $A = P^{-1}\Lambda P$, 则 $A^k = P^{-1}\Lambda^k P$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设矩阵空间 $R^{2 \times 2}$ 的子空间为

$$V = \{X = (x_{ij})_{2 \times 2} \mid x_{11} + x_{12} + x_{21} = 0, x_{ij} \in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X) = X + X^T$

考虑V的两个基 (1) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(2) Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

分别求T在这两个基下的矩阵

1.2 线性变换及其矩阵

解:(1)

$$T(X_1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(X_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

解:(1)

$$T(Y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (Y_1, Y_2, Y_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(Y_2) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (Y_1, Y_2, Y_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(Y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (Y_1, Y_2, Y_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(Y_1, Y_2, Y_3) = (Y_1, Y_2, Y_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题A：坐标怎么求？

问题3：先在一组简单的基下求坐标

问题1：然后通过坐标变换得到在其它基下的坐标

问题B： A^n 怎么算？

问题2： 若 T 有 N 个线性无关特征向量，则 $A = P^{-1}\Lambda P$
若 A 有 N 个线性无关特征向量，则 $A = P^{-1}\Lambda P$

$$\text{若 } A = P^{-1}\Lambda P, \text{ 则 } A^k = P^{-1}\Lambda^k P$$

小节

- 1、线型空间的定义
- 2、基、向量在基下的坐标
- 3、线型变换的定义和基本运算
- 4、线型变换在基下的矩阵

小节

- 1、线型空间的定义
- 2、基、向量在基下的坐标
- 3、线型变换的定义和基本运算
- 4、线型变换在基下的矩阵

$$1、x = (E_1, \dots, E_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = (E_1, \dots, E_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$2、T(E_1, \dots, E_n) = (E_1, \dots, E_n)A$$

$$3、y = T(x) = T(E_1, \dots, E_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (E_1, \dots, E_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$4、\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

小节

设 V 是线性空间， T 是 V 上的一个线性变换，求 $z = (T^k)(x)$ ，其中 $x \in V$

0、在一组简单的基 e_1, \dots, e_n 下求向量坐标

1、2、通过坐标变换得到向量在基 E_1, \dots, E_n 下的坐标

3、求 T 在基 E_1, \dots, E_n 下的矩阵 A

4、若 T 有 N 个线性无关特征向量，则 $A = P^{-1} \Lambda P$

小节

设 V 是线性空间， T 是 V 上的一个线性变换，求 $z = (T^k)(x)$ ，其中 $x \in V$

0、在一组简单的基 e_1, \dots, e_n 下求向量坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量在基 E_1, \dots, E_n 下的坐标

问题a

3、求 T 在基 E_1, \dots, E_n 下的矩阵 A

4、若 T 有 N 个线性无关特征向量，则 $A = P^{-1} \Lambda P$

问题b

举例1

多项式空间 P^N , $f(x) \in P^N$

0、向量 $f(x)$ 在简单的基 $1, x, x^2, \dots, x^N$ 下的坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量 $f(x)$ 在基 $1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^N$ 下的坐标

问题a

举例2

多项式空间 P^N , $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N \in P^N$

0、向量 $f(x)$ 在简单的基 $1, x, x^2, \dots, x^N$ 下的坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量 $f(x)$ 在基 $1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^N$ 下的坐标

问题a

举例3

多项式空间 P^N , $f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (x-1)^k \in P^N$

0、向量 $f(x)$ 在简单的基 $1, x, x^2, \dots, x^N$ 下的坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量 $f(x)$ 在基 $1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^N$ 下的坐标

问题a

举例4

多项式空间 P^N ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (x-1)^k + a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N \in P^N$$

问题c

0、向量 $f(x)$ 在简单的基 $1, x, x^2, \dots, x^N$ 下的坐标

1、2、通过坐标变换得到向量 $f(x)$ 在基 $1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^N$ 下的坐标

问题a

1.2 作业 (第五版)

1、定义： 1.14、 1.15

2、定理： 1.9、 1.10

2、例题： 1.15(1)、 1.17

3、习题1.2： 4、 8

1.2 作业 (第三版)

- 1、定义：1.14、1.15
- 2、定理：1.9、1.10
- 2、例题：1.17
- 3、习题1.2：4、8、 下题第一问

例 1.15 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中, 给定矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

线性变换为 $T(X) = XB (\forall X \in \mathbf{R}^{2 \times 2})$, $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的两个基为

(I): $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$;

(II): $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

分别求 T 在这两个基下的矩阵.

下课，谢谢大家！