

矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

第3章 矩阵分析及其应用

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

第3章 矩阵分析及其应用

■ 矩阵序列

定理1: 设 $A^{(k)}, A \in C^{m \times n}$, 则

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \forall \|\bullet\|, \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)}\| = 0$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \quad \longleftrightarrow \quad \forall \|\bullet\|, \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$$

定义: 若 $A_{n \times n}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0_{n \times n}$, 称 A 为收敛矩阵

定理2: A 为收敛矩阵 $\longleftrightarrow \rho(A) < 1$

第3章 矩阵分析及其应用

■ 矩阵级数

幂级数： 对函数 $f(z) = \sum c_k z^k, (|z| < r)$ 方阵 $A_{n \times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A) = \sum c_k A^k$

定理6： (1) $\rho(A) < r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

(2) $\rho(A) > r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

第3章 矩阵分析及其应用

定义： 设一元函数 $f(z)$ 能展开为 z 的幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < r, r > 0)$$

其中 $r > 0$ 表示该幂级数的收敛半径。当 n 阶矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) < r$ 时，把收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 的和为 $f(A)$ ，即 $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$

性质(代入规则)： 若 $f(z) = g(z)$ ，则 $f(A) = g(A)$ 。

第3章 矩阵分析及其应用

例1：

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \cdots + \frac{1}{k!}z^k + \cdots \quad (r = +\infty)$$

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots \quad (\forall A_{n \times n})$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}z^{(2k+1)} + \cdots \quad (r = +\infty)$$

$$\sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}A^{(2k+1)} + \cdots \quad (\forall A_{n \times n})$$

$$\text{例2: } f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z| < 1), \quad f(A) = \frac{1}{1-A} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (\rho(A) < 1)$$

$$\text{例2: } f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z| < 1), \quad f(A) = \frac{1}{1-A} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (\rho(A) < 1)$$

$$\text{例3: } \forall A_{n \times n}, e^{jA} = \cos A + j \sin A \quad (j = \sqrt{-1})$$

$$\cos A = \frac{1}{2}(e^{jA} + e^{-jA}), \quad \cos(-A) = \cos A$$

$$\sin A = \frac{1}{2j}(e^{jA} - e^{-jA}), \quad \sin(-A) = -\sin A$$

$$\text{例2: } f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z| < 1), \quad f(A) = \frac{1}{1-A} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (\rho(A) < 1)$$

$$\text{例3: } \forall A_{n \times n}, e^{jA} = \cos A + j \sin A \quad (j = \sqrt{-1})$$

$$\cos A = \frac{1}{2}(e^{jA} + e^{-jA}), \quad \cos(-A) = \cos A$$

$$\sin A = \frac{1}{2j}(e^{jA} - e^{-jA}), \quad \sin(-A) = -\sin A$$

证明：在 e^{jA} 中,视“ jA ”为整体,并按奇偶次幂分开

$$\begin{aligned} e^{jA} &= \left[I + \frac{1}{2!}(jA)^2 + \frac{1}{4!}(jA)^4 + \cdots \right] + \left[\frac{1}{1!}(jA) + \frac{1}{3!}(jA)^3 + \cdots \right] \\ &= \cos A + j \sin A \quad (j = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

第3章 矩阵分析及其应用

例4: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^B 及 e^{A+B}

例4: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^B 及 e^{A+B}

解: $A^2 = A$:
$$e^A = I + \left(\frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots \right) A = I + (e - 1) A$$
$$= \begin{bmatrix} e & e - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^2 = B$:
$$e^B = I + \left(\frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots \right) B = I + (e - 1) B$$
$$= \begin{bmatrix} e & 1 - e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例4: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^B 及 e^{A+B}

解: $A^2 = A$:
$$e^A = I + \left(\frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots \right) A = I + (e - 1) A$$
$$= \begin{bmatrix} e & e - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^2 = B$:
$$e^B = I + \left(\frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots \right) B = I + (e - 1) B$$
$$= \begin{bmatrix} e & 1 - e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A + B)^k = 2^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B} = I + \left(\frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I + (e^2 - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第3章 矩阵分析及其应用

注意:

$$e^{A+B} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^A e^B = \begin{bmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^B e^A = \begin{bmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A$$

第3章 矩阵分析及其应用

定理7: $A_{n \times n}, B_{n \times n}, AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

$$\begin{aligned}\text{证明: } e^A e^B &= \left[I + \frac{1}{1!} A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots \right] \left[I + \frac{1}{1!} B + \frac{1}{2!} B^2 + \dots \right] \\ &= I + (A + B) + \frac{1}{2!} (A^2 + 2AB + B^2) + \frac{1}{3!} (A^3 + 3AB^2 + 3A^2 B + B^3) + \dots \\ &= I + (A + B) + \frac{1}{2!} (A + B)^2 + \frac{1}{3!} (A + B)^3 + \dots \\ &= e^{A+B}\end{aligned}$$

同理: $e^B e^A = e^{B+A} = e^{A+B}$

注: (1) $e^A e^{-A} = e^0 = I \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A} \quad \forall A$

(2) $(e^A)^m = e^{mA} \quad m = 2, 3, \dots$

例5: $A_{n \times n}, B_{n \times n}, AB = BA$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

证明: $\cos A \cos B - \sin A \sin B =$

$$= \frac{1}{2} [e^{jA} + e^{-jA}] \cdot \frac{1}{2} [e^{jB} + e^{-jB}] - \frac{1}{2j} [e^{jA} - e^{-jA}] \cdot \frac{1}{2j} [e^{jB} - e^{-jB}]$$

$$= \frac{1}{4} [e^{j(A+B)} + \dots + \dots + e^{-j(A+B)}] + \frac{1}{4} [e^{j(A+B)} - \dots - \dots + e^{-j(A+B)}]$$

$$= \frac{1}{2} [e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}]$$

$$= \cos(A+B)$$

矩阵函数值的求法

- 1 待定系数法
- 2 数项级数求和法
- 3 对角形法
- 4 Jordan标准型法

矩阵函数值的求法

1. 待定系数法: 设 n 阶矩阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

如果首1多项式 $\psi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m$ ($1 \leq m \leq n$)

满足 $\psi(\lambda) \mid \varphi(\lambda)$, 分解

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \sum m_i = m$$

因为 λ_i 是 A 的特征值, 所以 $|\lambda_i| \leq \rho(A) < r$, 从而

$f(\lambda_i) = \sum c_k \lambda_i^k$ 绝对收敛。

设 $f(z) = \sum c_k z^k = \psi(z)g(z) + r(z)$

$$r(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{m-1} z^{m-1}$$

由 $\psi(\lambda_i) = 0, \psi^{(1)}(\lambda_i) = 0, \dots, \psi^{(m_i-1)}(\lambda_i) = 0$ 可得

$$r(\lambda_i) = f(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$r'(\lambda_i) = f'(\lambda_i)$$

...

$$r^{(m_i-1)}(\lambda_i) = f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

解此方程组得出 b_0, b_1, \dots, b_{m-1} 。因为 $\psi(A) = O$ 所以

$$f(A) = \sum c_k A^k = \psi(A)g(A) + r(A) = r(A)$$

即
$$f(A) = b_0 I + b_1 A + \dots + b_{m-1} A^{m-1}$$

例6: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^{tA} ($t \in R$)

例6: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^{tA} ($t \in R$)

解: $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, (A - 2I)^2 = O$$

取 $\psi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

例6: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^{tA} ($t \in R$)

解: $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, (A - 2I)^2 = O$$

取 $\psi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

(1) $f(\lambda) = e^\lambda = \psi(\lambda)g(\lambda) + (a + b\lambda)$

$$f'(\lambda) = e^\lambda = [\psi(\lambda)g(\lambda)]' + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = e^2 : (a + 2b) = e^2 \\ f'(2) = e^2 : b = e^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad} \left\{ \begin{array}{l} a = -e^2 \\ b = e^2 \end{array} \right.$$

$$e^A = e^2(A - I) = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

例6: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^{tA} ($t \in R$)

$$(2) f(\lambda) = e^{t\lambda} = \psi(\lambda)g(\lambda) + (a + b\lambda)$$

$$f'(\lambda) = te^{t\lambda} = [\psi(\lambda)g(\lambda)]' + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = e^{2t} : (a + 2b) = e^{2t} \\ f'(2) = te^{2t} : b = te^{2t} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = (1 - 2t)e^{2t} \\ b = te^{2t} \end{array} \right.$$

$$e^{tA} = e^{2t} [(1 - 2t)I + tA] = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 - t & t \\ t & -t & 1 + t \end{bmatrix}$$

矩阵函数值的求法

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

2. 数项级数求和法。

利用首一多项式 $\psi(\lambda)$ ，且满足 $\psi(A) = 0$ ，即

$$A^m + b_1 A^{m-1} + \cdots + b_{m-1} A + b_m I = 0$$

或者 $A^m = k_0^{(0)} I + k_1^{(0)} A + \cdots + k_{m-1}^{(0)} A^{m-1}$ ($k_i^{(0)} = -b_{m-i}$)

可以求出 $A^{m+1} = A^m A = k_0^{(1)} I + k_1^{(1)} A + \cdots + k_{m-1}^{(1)} A^{m-1}$

$$\vdots$$
$$A^{m+l} = k_0^{(l)} I + k_1^{(l)} A + \cdots + k_{m-1}^{(l)} A^{m-1}$$

$$\vdots$$

于是 $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \left(c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{m-1} A^{m-1} \right) + c_m \left(k_0^{(0)} I + k_1^{(0)} A + \cdots + k_{m-1}^{(0)} A^{m-1} \right) + \cdots$

$$= \left(c_0 + \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} k_0^{(l)} \right) I + \left(c_1 + \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} k_1^{(l)} \right) A + \cdots + \left(c_{m-1} + \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} k_{m-1}^{(l)} \right) A^{m-1}$$

例 3.6 设 $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\sin A$.

例 3.6 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\sin \mathbf{A}$.

解 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^4 - \pi^2 \lambda^2$. 由于 $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, 所以

$\mathbf{A}^4 = \pi^2 \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^5 = \pi^2 \mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^7 = \pi^4 \mathbf{A}^3$, \dots . 于是有

$$\sin \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{1}{5!} \mathbf{A}^5 - \frac{1}{7!} \mathbf{A}^7 + \frac{1}{9!} \mathbf{A}^9 - \dots =$$

$$\mathbf{A} - \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{1}{5!} \pi^2 \mathbf{A}^3 - \frac{1}{7!} \pi^4 \mathbf{A}^3 + \frac{1}{9!} \pi^6 \mathbf{A}^3 - \dots =$$

$$\mathbf{A} + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \pi^2 - \frac{1}{7!} \pi^4 + \frac{1}{9!} \pi^6 - \dots \right) \mathbf{A}^3 =$$

$$\mathbf{A} + \frac{\sin \pi - \pi}{\pi^3} \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} - \pi^{-2} \mathbf{A}^3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵函数值的求法

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

3. 对角阵法

设 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$,

$$\begin{aligned}\text{且有 } \sum_{k=0}^N c_k A^k &= P \sum_{k=0}^N c_k \Lambda^k P^{-1} \\ &= P \text{diag} \left(\sum_{k=0}^N c_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^N c_k \lambda_n^k \right) P^{-1}\end{aligned}$$

于是

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P \cdot \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$$

例8: $P^{-1}AP = \Lambda$:

$$e^A = P \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot P^{-1}$$

$$e^{tA} = P \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \cdot P^{-1}$$

$$\sin A = P \cdot \text{diag}(\sin \lambda_1, \dots, \sin \lambda_n) \cdot P^{-1}$$

例 3.7 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, 求 e^A , e^{tA} ($t \in \mathbf{R}$) 及 $\cos A$.

例 3.7 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, 求 e^A , e^{tA} ($t \in \mathbf{R}$) 及 $\cos A$.

解 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$. 对应 $\lambda_1 = -2$ 的特征向量 $p_1 = (-1, 1, 1)^T$; 对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量 $p_2 = (-2, 1, 0)^T$, $p_3 = (0, 0, 1)^T$. 构造矩阵

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{-2} & & \\ & e & \\ & & e \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2e - e^{-2} & 2e - 2e^{-2} & 0 \\ e^{-2} - e & 2e^{-2} - e & 0 \\ e^{-2} - e & 2e^{-2} - 2e & e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^t & \\ & & e^t \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - e^t & 0 \\ e^{-2t} - e^t & 2e^{-2t} - 2e^t & e^t \end{bmatrix}$$

$$\cos \mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - \cos 1 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - 2\cos 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$$

矩阵函数值的求法

- 1 待定系数法
- 2 数项级数求和法
- 3 对角形法
- 4 Jordan标准型法

4. Jordan 标准形法

设 A 的 Jordan 标准形为 J , 则有可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

可求得

$$f(\mathbf{J}_i) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{J}_i^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!} f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

4. Jordan标准型法

设 $P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s)$, $J_i = \lambda_i I + I^{(1)}$

易证 $I^{(k)} I^{(1)} = I^{(1)} I^{(k)} = I^{(k+1)}, I^{(m_i)} = O$

$$k \leq m_i - 1: J_i^k = \lambda_i^k I + C_k^1 \lambda_i^{k-1} I^{(1)} + \dots + C_k^{k-1} \lambda_i I^{(k-1)} + I^{(k)}$$

$$k \geq m_i: J_i^k = \lambda_i^k I + C_k^1 \lambda_i^{k-1} I^{(1)} + \dots + C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} I^{(m_i-1)}$$

$$f(J_i) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k = f(\lambda_i) I + \frac{f'(\lambda_i)}{1!} I^{(1)} + \dots + \frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} I^{(m_i-1)}$$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k \cdot P^{-1} = P \cdot \text{diag}(f(J_1), \dots, f(J_s)) \cdot P^{-1}$$

例 3.6 设 $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\sin A$.

例 3.6 设 $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\sin A$.

例如, 例 3.6 中的矩阵 A 是一个 Jordan 标准形, 它的三个 Jordan 块为

$$J = \pi, \quad J_2 = -\pi, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据式(3.3.16), 求得

$$\sin J_1 = \sin \pi = 0$$

$$\sin J_2 = \sin(-\pi) = 0$$

例 3.6 设 $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\sin A$.

例如, 例 3.6 中的矩阵 A 是一个 Jordan 标准形, 它的三个 Jordan 块为

$$J_1 = \pi, \quad J_2 = -\pi, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据式(3.3.16), 求得

$$\sin J_1 = \sin \pi = 0$$

$$\sin J_2 = \sin(-\pi) = 0$$

$$\sin J_3 = \begin{bmatrix} \sin 0 & \frac{1}{1!} \cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

也可用待定
系数法计算

$$\sin \mathbf{J}_1 = \sin \pi = 0$$

$$\sin \mathbf{J}_2 = \sin(-\pi) = 0$$

$$\sin \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \sin 0 & \frac{1}{1!} \cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再由式(3.3.17), 可得(取 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$)

$$\sin \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \mathbf{J}_1 & & \\ & \sin \mathbf{J}_2 & \\ & & \sin \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{A}^k = \mathbf{P} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{J}^k \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \text{diag}(f(\mathbf{J}_1), \dots, f(\mathbf{J}_s)) \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

四、矩阵函数的性质

$$(1) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z) \Rightarrow f(A) = f_1(A) + f_2(A)$$

$$f^{(l)}(\lambda_i) = f_1^{(l)}(\lambda_i) + f_2^{(l)}(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow f^{(l)}(J_i) = f_1^{(l)}(J_i) + f_2^{(l)}(J_i)$$

$$\begin{aligned} f(A) &= P \cdot \left\{ \begin{bmatrix} f_1(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_1(J_s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_2(J_s) \end{bmatrix} \right\} \cdot P^{-1} \\ &= f_1(A) + f_2(A) \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$$

$$\Rightarrow f(A) = f_1(A) \cdot f_2(A) = f_2(A) \cdot f_1(A)$$

$$\begin{aligned} f_1(J_i) \cdot f_2(J_i) &= \left[f_1 \cdot I + f_1' \cdot I^{(1)} + \frac{f_1''}{2!} \cdot I^{(2)} + \dots + \frac{f_1^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!} \cdot I^{(m_i-1)} \right] \cdot \\ &\quad \left[f_2 \cdot I + \frac{f_2'}{1!} \cdot I^{(1)} + \frac{f_2''}{2!} \cdot I^{(2)} + \dots + \frac{f_2^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!} \cdot I^{(m_i-1)} \right] \\ &= (f_1 f_2) \cdot I + \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{1!} \cdot I^{(1)} + \frac{f_1'' f_2 + 2 f_1' f_2' + f_1 f_2''}{2!} \cdot I^{(2)} + \dots \\ &= (f_1 f_2) \cdot I + \frac{(f_1 f_2)'}{1!} \cdot I^{(1)} + \frac{(f_1 f_2)''}{2!} \cdot I^{(2)} + \dots + \frac{(f_1 f_2)^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!} \cdot I^{(m_i-1)} \\ &= f(J_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(A) &= P \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{bmatrix} f_1(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_1(J_s) \end{bmatrix} P^{-1} \bullet P \begin{bmatrix} f_2(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_2(J_s) \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= f_1(A) \bullet f_2(A)
\end{aligned}$$

作业（第五版）

- 1、定义： 3.7
- 2、定理： 3.7
- 3、例题： 3.3-3.5、 3.7
- 4、习题3.3： 5、 6

作业（第三版）

- 1、定义： 3.7
- 2、定理： 3.7
- 3、例题： 3.3-3.5、 3.7
- 4、习题3.3： 5、 6

下课，谢谢大家！