

矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

第3章 矩阵分析及其应用

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数

第3章 矩阵分析及其应用

■ 矩阵序列

定理1: 设 $A^{(k)}, A \in C^{m \times n}$, 则

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \forall \|\bullet\|, \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)}\| = 0$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \quad \longleftrightarrow \quad \forall \|\bullet\|, \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$$

定义: 若 $A_{n \times n}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0_{n \times n}$, 称 A 为收敛矩阵

定理2: A 为收敛矩阵 $\longleftrightarrow \rho(A) < 1$

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数

第3章 矩阵分析及其应用

定义： 设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$, 其中 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in C^{m \times n}$

称 $A^{(0)} + A^{(1)} + \dots + A^{(k)} + \dots$ 为**矩阵级数**。记为 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)} = \sum_{k=0}^N A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

第3章 矩阵分析及其应用

定义： 设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ ，其中 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in C^{m \times n}$

称 $A^{(0)} + A^{(1)} + \dots + A^{(k)} + \dots$ 为**矩阵级数**。记为 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)} = \sum_{k=0}^N A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

敛散性： 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} S^{(N)} = S$ ，称 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛于 S ，记做

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$$

若 $\{S^{(N)}\}$ 发散，称 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 发散

第3章 矩阵分析及其应用

性质 1: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S \iff \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \text{ (all } i, j)$

第3章 矩阵分析及其应用

性质 1: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S \iff \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \text{ (all } i, j)$

证明: 左 $\iff \lim_{N \rightarrow \infty} S^{(N)} = S$

$$\iff \lim_{N \rightarrow \infty} s_{ij}^{(N)} = s_{ij} \text{ (all } i, j)$$

$$\iff \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \text{ (all } i, j)$$

$$\iff \text{右}$$

第3章 矩阵分析及其应用

例 3.2 已知

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{3 \times 4^k} \\ 0 & \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

研究矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^{(k)}$ 的收敛性.

例 3.2 已知

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{3 \times 4^k} \\ 0 & \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

研究矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^{(k)}$ 的收敛性.

解

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(N)} &= \sum_{k=1}^N \mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k} & \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{3 \times 4^k} \\ 0 & \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N & \frac{\pi}{9} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^N\right] \\ 0 & \frac{N}{N+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故有

$$\mathbf{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{S}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\pi}{9} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第3章 矩阵分析及其应用

性质2: 若 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|$ 收敛 (*all* i, j) , 称 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛。

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \text{ 收敛}$$

(2) 若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛于 S , 对 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 任意重组
重排得 $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$ 绝对收敛于 S 。

第3章 矩阵分析及其应用

性质3: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

第3章 矩阵分析及其应用

性质3: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

证明: 只需考虑矩阵范数 $\|\cdot\|_{m1}$

第3章 矩阵分析及其应用

性质3: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

证明: (必要性) 由于矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛, 因此 mn 个数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ 绝对收敛。因此存在 $M > 0$, 使得对任意 N , 都有 $\sum_{k=0}^N |a_{ij}^{(k)}| < M, (\forall i, j)$

故
$$\sum_{k=0}^N \|A^{(k)}\|_{m1} = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{i,j} |a_{ij}^{(k)}| \right) \leq mnM$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|_{m1}$ 收敛

第3章 矩阵分析及其应用

性质3: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

(充分性) $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|_{m1}$ 收敛。因此 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|_{m1}$

故矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛

第3章 矩阵分析及其应用

性质4: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛于 $S \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 收敛于 PSQ

$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

证明: 只需考虑矩阵范数 $\|\cdot\|_{m1}$

第3章 矩阵分析及其应用

性质4: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛于 $S \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 收敛于 PSQ

$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

证明: (1) $S^{(N)} = \sum_{k=0}^N A^{(k)} \rightarrow S \Rightarrow \sum_{k=0}^N PA^{(k)}Q = PS^{(N)}Q \rightarrow PSQ$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \rightarrow PSQ$$

第3章 矩阵分析及其应用

性质4:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \text{ 绝对收敛}$$

(2) 矩阵范数 $\|\cdot\|$ ，由性质3知 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

$$\text{因为 } \|PA^{(k)}Q\| \leq \|P\| \|A^{(k)}\| \|Q\| = M \|A^{(k)}\| \quad (M = \|P\| \|Q\|)$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^N \|PA^{(k)}Q\| \leq \sum_{k=0}^N (M \|A^{(k)}\|) = M \sum_{k=0}^N \|A^{(k)}\| \quad \text{有界}$$

$$\text{故 } \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \text{ 绝对收敛}$$

第3章 矩阵分析及其应用

性质5: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛于 $S_{m \times n}$, $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$ 绝对收敛于 $T_{n \times l}$

则Cauchy积

$$\begin{aligned} &A^{(1)}B^{(1)} + [A^{(1)}B^{(2)} + A^{(2)}B^{(1)}] + [A^{(1)}B^{(3)} + A^{(2)}B^{(2)} + A^{(3)}B^{(1)}] \\ &+ \cdots + [A^{(1)}B^{(k)} + A^{(2)}B^{(k-1)} + \cdots + A^{(k)}B^{(1)}] + \cdots \end{aligned}$$

绝对收敛于 ST , 记作 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)} = ST$

矩阵幂级数

下面开始建立矩阵幂级数的讨论,讨论是以上面所论知识为基础的. 首先从一个比较简单的方阵幂级数谈起.

方阵 A 的幂级数(Neumann 级数)

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots \quad (3.2.9)$$

第3章 矩阵分析及其应用

Neumann级数： $A_{n \times n}, \sum_{k=0}^{\infty} A^k, (A^0 = I)$

定理4： $A_{n \times n}, \sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow A^k \rightarrow 0$

$\sum A^k$ 收敛时，其和为 $(I - A)^{-1}$

Neumann级数： $A_{n \times n}, \sum_{k=1}^{\infty} A^k, (A^0 = I)$

定理4： $A_{n \times n}, \sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow A^k \rightarrow 0$

$\sum A^k$ 收敛时，其和为 $(I - A)^{-1}$

证明：必要性。 $\sum A^k$ 收敛时 $\sum (A^k)_{ij}, \forall i, j$ 收敛

即 $(A^k)_{ij} \rightarrow 0$ ，也就是 $A^k \rightarrow 0$

充分性。 $A^k \rightarrow 0$ 由定理2可知 $\rho(A) < 1 \Leftrightarrow (I - A)$ 可逆

$$(I + A + A^2 + \cdots + A^N)(I - A) = I - A^{N+1}$$

$$(I + A + A^2 + \cdots + A^N) = (I - A)^{-1} - A^{N+1}(I - A)^{-1} \rightarrow (I - A)^{-1}, N \rightarrow \infty$$

$$\text{即 } \sum A^k = (I - A)^{-1}$$

第3章 矩阵分析及其应用

定理 3.5 如果方阵 \mathbf{A} 对某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|\mathbf{A}\| < 1$, 则对任何非负整数 k , 以 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 为部分和 $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^k$ 的近似时, 其误差为

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^k)\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbf{A}\|}$$

第3章 矩阵分析及其应用

定理5: $A_{n \times n}, \|A\| < 1 \Rightarrow \left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^N A^k \right\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{1 - \|A\|}, N = 0, 1, 2$

定理 3.5 如果方阵 A 对某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A\| < 1$, 则对任何非负整数 k , 以 $(I - A)^{-1}$ 为部分和 $I + A + A^2 + \cdots + A^k$ 的近似时, 其误差为

$$\| (I - A)^{-1} - (I + A + A^2 + \cdots + A^k) \| \leq \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|}$$

定理5: $A_{n \times n}, \|A\| < 1 \Rightarrow \left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^N A^k \right\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{1 - \|A\|}, N = 0, 1, 2$

证明: $\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1 \Rightarrow (I - A)$ 可逆

$$(I + A + A^2 + \cdots + A^N)(I - A) = I - A^{N+1}$$

右乘 $(I - A)^{-1}$, 移项可得

$$(I - A)^{-1} - (I + A + A^2 + \cdots + A^N) = A^{N+1}(I - A)^{-1}$$

恒等式 $A^{N+1} = A^{N+1}(I - A)^{-1}(I - A) = A^{N+1}(I - A)^{-1} - A^{N+1}(I - A)^{-1}A$

$$A^{N+1}(I - A)^{-1} = A^{N+1} + A^{N+1}(I - A)^{-1}A$$

$$\|A^{N+1}(I - A)^{-1}\| \leq \|A^{N+1}\| + \|A^{N+1}(I - A)^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$\text{故 } \|A^{N+1}(I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{N+1}\|}{1 - \|A\|} \Rightarrow \left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^N A^k \right\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{1 - \|A\|}$$

第3章 矩阵分析及其应用

幂级数： 对函数 $f(z) = \sum c_k z^k, (|z| < r)$ 方阵 $A_{n \times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A) = \sum c_k A^k$

定理6： (1) $\rho(A) < r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

(2) $\rho(A) > r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

第3章 矩阵分析及其应用

$$(1) \quad \rho(A) < r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k \text{ 绝对收敛}$$

证明: 对 A , 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}[r - \rho(A)] > 0, \exists \|\cdot\|_\varepsilon$, 使得

$$\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon = \frac{1}{2}[r + \rho(A)] < r$$

$$\|c_k A^k\|_\varepsilon \leq |c_k| \|A\|_\varepsilon^k \leq |c_k| [\rho(A) + \varepsilon]^k$$

当 $|z| < r$ 时, $\sum |c_k| |z|^k$ 收敛, 于是

$$\sum |c_k| [\rho(A) + \varepsilon]^k \text{ 收敛} \Rightarrow \sum \|c_k A^k\|_\varepsilon \text{ 收敛} \Rightarrow \sum c_k A^k \text{ 收敛}$$

第3章 矩阵分析及其应用

$$(2) \quad \rho(A) > r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k \text{ 发散}$$

证明:

设 A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| = \rho(A)$, \mathbf{x} 为 λ 相应的特征向量

$$\sum_{k=0}^n c_k (A^k \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n c_k (\lambda^k \mathbf{x}) = \left(\sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \right) \mathbf{x}$$

由于 $\rho(A) > r$, 那么 $\left(\sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \right) \mathbf{x}$ 发散(注意 \mathbf{x} 为非零向量)

从而 $\sum_{k=0}^n c_k (A^k \mathbf{x})$ 发散, 这样 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散

第3章 矩阵分析及其应用

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性：

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k; \quad (2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k.$$

第3章 矩阵分析及其应用

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性：

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k; \quad (2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{3}i & -2-\sqrt{3}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}i & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{\sqrt{3}}{6}i & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 2 > R = \frac{1}{l} = 1, l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^2}{(k+1)} = 1$$

第3章 矩阵分析及其应用

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性：

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k; \quad (2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 5 < R = \frac{1}{l} = 6, l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{k+1}{6^{k+1}}}{\frac{k}{6^k}} = \frac{1}{6}$$

1. (1) 发散； (2) 绝对收敛 .

第3章 矩阵分析及其应用

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

第3章 矩阵分析及其应用

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

$$\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = PJP^{-1}$$

$$A^k = PJ^k P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} A^k = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} J^k \right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} P^{-1}$$

第3章 矩阵分析及其应用

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{令 } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = M = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \dots,$$

$$2M = \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{2}{2^{2-1}} + \frac{3}{2^{3-1}} + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} + \dots$$

第3章 矩阵分析及其应用

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{令 } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = M = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \dots,$$

$$2M = \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{2}{2^{2-1}} + \frac{3}{2^{3-1}} + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1+1}{2^1} + \frac{2+1}{2^2} + \frac{3+1}{2^3} + \dots + \frac{k+1}{2^k} + \dots,$$

第3章 矩阵分析及其应用

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{令 } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = M = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \dots,$$

$$2M = 1 + \frac{1+1}{2^1} + \frac{2+1}{2^2} + \frac{3+1}{2^3} + \dots + \frac{k+1}{2^k} + \dots,$$

$$2M - M = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

第3章 矩阵分析及其应用

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} A^k &= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵级数-小节

定义： 设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ ，其中 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in C^{m \times n}$

称 $A^{(0)} + A^{(1)} + \dots + A^{(k)} + \dots$ 为**矩阵级数**。记为 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)} = \sum_{k=0}^N A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

敛散性： 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} S^{(N)} = S$ ，称 $\sum A^{(k)}$ 收敛于 S ，记做

$$\sum A^{(k)} = S$$

若 $\{S^{(N)}\}$ 发散，称 $\sum A^{(k)}$ 发散

性质3： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

矩阵级数-小节

幂级数： 对函数 $f(z) = \sum c_k z^k, (|z| < r)$ 方阵 $A_{n \times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A) = \sum c_k A^k$

定理6： (1) $\rho(A) < r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

(2) $\rho(A) > r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

作业（第五版）

1、定义： 3.4、 3.5、 3.6

2、定理： 3.5、 3.6

3、例题： 3.2

4、习题3.2： 1、 3、 4

作业（第三版）

1、定义： 3.4、3.5、3.6

2、定理： 3.5、3.6

3、例题： 3.2

4、习题：

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性：

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k; \quad (2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k.$$

作业 (第三版)

4、习题：

2、问矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A^k$ 是否收敛？ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3、设 $A^{(k)} \in C^{m \times n}$ ，且矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛，证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = O$.

下课，谢谢大家！