矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第4章 矩阵分解

第4章 矩阵分解

1、LU分解

2、QR分解

3、满秩分解

4、SVD分解

满秩分解

目的： 对 $A\in C_r^{m\times n}(r\geq 1)$，求 $F\in C_r^{m\times r}$，及 $G\in C_r^{r\times n}$ 使 $A=FG$

分解原理：

$$\operatorname{rank}A=r\Rightarrow A\xrightarrow{\text{行}}\text{阶梯形 }B=\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}:\quad G\in C_r^{r\times n}$$

$$\Rightarrow \exists\text{有限个初等矩阵之积 }P_{m\times m},\text{st.}PA=B$$

$$\Rightarrow A=P^{-1}B=\left(F_{m\times r}\mid S_{m\times(m-r)}\right)\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}=FG:\quad F\in C_r^{m\times r}$$

例 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, 求$A=FG$

例 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$，求$A=FG$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)}$$

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)}=L_1^{-1}A \qquad A^{(2)}=L_2^{-1}A^{(1)} \qquad A=L_1L_2A^{(2)}$$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1^{-1} A \qquad A^{(2)} = L_2^{-1} A^{(1)} \qquad A = L_1 L_2 A^{(2)}$$

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1 L_2 A^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = FG$$

作业（第五版）

1、定义：4.8

2、定理：4.13

3、例题：4.10

4、习题4.3：1

作业（第三版）

1、定义：4.8

2、定理：4.13

3、例题：4.10

4、习题4.3：1

下课，谢谢大家！