矩阵理论与方法

9月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

$$y = Tx, x \in V$$

1、线型空间V: 数域K，加法，数乘

2、线性变换T: $V \to V$

$$T(x + y) = Tx + Ty$$
$$T(kx) = kTx$$

线性变换的运算

一、线性变换的和

二、线性变换的数量乘法

三、线性变换的乘积

四、线性变换的逆

五、线性变换的多项式

1. 线性变换的和

设T_1,T_2 为线性空间V的两个线性变换，定义它们的**和** T_1+T_2为: $\left(T_1+T_2\right)\left(x\right)=T_1x+T_2x,\forall x\in V$

则 T_1+T_2 也是V的线性变换.

事实上，$(T_1+T_2)(x+y)=T_1(x+y)+T_2(x+y)$

$$=T_1x+T_1y+T_2x+T_2y=(T_1+T_2)x+(T_1+T_2)y$$

$$(T_1+T_2)(kx)=T_1(kx)+T_2(kx)=k(T_1x)+k(T_2x)$$

$$=k(T_1x+T_2x)\quad=k(T_1+T_2)x$$

负变换

设 T 为线性空间V的线性变换，定义变换 $-T$ 为：

$$(-T)(x) = -T(x), \qquad \forall x \in V$$

则 $-T$ 也为V的线性变换，称之为 T 的**负变换**.

线性变换和的基本性质

（1）满足交换律：$T_1+T_2=T_2+T_1$

（2）满足结合律：$(T_1+T_2)+T_3=T_1+(T_2+T_3)$

（3） $T_0+T_1=T_1$ ，T_0 为零变换.

（4） $(-T)+T=T_0$

1.2 线性变换及其矩阵

例：复数$\alpha + i\beta = (1+i2)(x+iy) = T_1(x+iy)$

$$\alpha + i\beta = (3+i4)(x+iy) = T_2(x+iy)$$

求$T_1 + T_2$，　$T_1 - T_2$，　T_0，　$-T_1$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times 2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_1(X)=AX,T_2(X)=XB,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

证明：$T(X)=(T_1+T_2)(X)$ 是线型变换

线性变换的数量乘法

设 T 为线性空间V的线性变换，$k \in K$, 定义 k 与 T

的**数量乘积** kT 为：

$$(kT)(x) = kT(x), \quad \forall x \in V$$

则 kT 也是V的线性变换.

线性变换数量乘法的基本性质

(1) $k(T_1+T_2)=kT_1+kT_2$

(2) $(k+l)T=kT+lT$

(3) $(kl)T=k(lT)$

(4) $1T=T$

1.2 线性变换及其矩阵

例：复数$\alpha+i\beta=(1+i2)(x+iy)=T_1(x+iy)$

$$\alpha+i\beta=(3+i4)(x+iy)=T_2(x+iy)$$

证明： $T=3T_1$是线型变换

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times 2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_1(X)=AX, T_2(X)=XB,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

证明： $T(X)=(3T_2)(X)$ 是线型变换

线性变换的乘积

设 T_1, T_2 为线性空间V的两个线性变换，定义它们的**乘积** T_1T_2 为：$\left(T_1T_2\right)(x) = T_1\left(T_2x\right)$， $\forall x \in V$

则 T_1T_2 也是V的线性变换.

$$
\begin{aligned}
\text{事实上,}(T_1T_2)(x+y) &= T_1(T_2(x+y)) = T_1(T_2(x)+T_2(y)) \\
&= T_1(T_2x)+T_1(T_2y) = (T_1T_2)x+(T_1T_2)y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(T_1T_2)(kx) &= T_1\left(T_2(kx)\right) = T_1\left(k(T_2x)\right) \\
&= k\left(T_1(T_2x)\right) = k\left(T_1T_2\right)x
\end{aligned}
$$

线性变换乘积的基本性质

（1）满足结合律：$(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$

（2） $T_eT=TT_e=T$ ， T_e 为单位变换

（3）交换律一般不成立，即一般地，

$$T_1T_2\neq T_2T_1$$

（4）乘法对加法满足左、右分配律：

$$T_1(T_2+T_3)=T_1T_2+T_1T_3$$

$$(T_1+T_2)T_3=T_1T_3+T_2T_3$$

1.2 线性变换及其矩阵

例：复数$\alpha+i\beta=(1+i2)(x+iy)=T_1(x+iy)$

$$\alpha+i\beta=(3+i4)(x+iy)=T_2(x+iy)$$

证明： $T=T_2T_1$是线型变换

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times 2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_1(X)=AX, T_2(X)=BX,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

证明： $T(X)=(T_2T_1)(X)$ 是线型变换

线性变换的逆

设 T 为线性空间V的线性变换，若有V的变换 S 使

$$ST = TS = T_e$$

则称 T 为可逆变换，称 S 为 T 的逆变换，记作 T^{-1}.

1.2 线性变换及其矩阵

例：复数$\alpha + i\beta = (1+i2)(x+iy) = T_1(x+iy)$

$$\alpha + i\beta = (3+i4)(x+iy) = T_2(x+iy)$$

求： $T = T_1^{-1}$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_1(X)=AX, T_2(X)=XB,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times2})$$

求： $T(X)=(T_1^{-1})(X)$ $\quad T(X)=(T_2^{-1})(X)$

五、线性变换的多项式

1．线性变换的幂

设 T 为线性空间V的线性变换，n为自然数，定义

$$T^n = \underbrace{T\cdots T}_{n},$$

称之为 T 的n次幂.

当 $n=0$ 时，规定 $T^0 = T_e$（单位变换）.

2. 线性变换的多项式

设 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0 \in P[x]$,

T 为V的一个线性变换，则

$$f(T)=a_m T^m+\cdots+a_1 T+a_0 T_e$$

也是V的一个线性变换，称 $f(T)$为线性变换 T 的**多项式**.

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times 2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad T_1(X)=AX,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

求：$T(X)=f(T_1)(X)$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times 2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad T_1(X)=AX,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

求：$T(X)=f(T_1)(X)$

解1：

$$A=P^{-1}\Lambda P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times 2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad T_1(X)=AX,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

求：$T(X)=f(T_1)(X)$

解1：

$$A=P^{-1}\Lambda P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{f(A)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\mathrm{f}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad T_1(X)=AX,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times2})$$

求：$T(X)=f(T_1)(X)$

解2： 找到$\mathrm{R}^{2\times2}$的一组基

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha \qquad \alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_3,x_2+x_4,-x_1+x_3,-x_2+x_4)^T$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad T_1(X)=AX,\qquad 求:T(X)=f(T_1)(X)$$

解2：找到$\mathrm{R}^{2\times 2}$的一组基

$$X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}$$

$$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_3,x_2+x_4,-x_1+x_3,-x_2+x_4)^T$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad T_1(X)=AX,\qquad \text{求}:T(X)=f(T_1)(X)$$

解2: 找到$\mathrm{R}^{2\times2}$的一组基

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,-1,-1)$$

$$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha \qquad \alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_3,x_2+x_4,-x_1+x_3,-x_2+x_4)^T$$

$$T_1(X)=T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha=(X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,-1,-1)\alpha$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad T_1(X)=AX,\qquad \text{求}:T(X)=f(T_1)(X)$$

解2: 找到R $^{2\times2}$的一组基

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,-1,-1)$$

$$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha\qquad \alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_3,x_2+x_4,-x_1+x_3,-x_2+x_4)^T$$

$$T_1(X)=T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha=(X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,-1,-1)\alpha$$

$$T_1^k(X)=T_1^k(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha=(X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,(-1)^k,(-1)^k)\alpha$$

$$f(T_1)(X)=f(T_1)(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha=(X_1,X_2,X_3,X_4)f(diag(1,1,-1,-1))\alpha$$

线性变换小节

1、线性变换T $Y=T(X)\in V$

2、$f(T)$ 也是线性变换 $Y=f(T)(X)$

3、求 $Y=T(X)$

4、求 $Y=f(T)(X)$

1.2 作业(第三版或第五版)

1、例题：本ppt：P23例题

2、习题1.2：3、5

下课，谢谢大家！