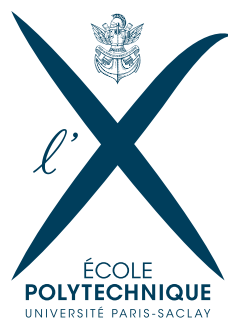




MAP411 MINI-PROJET DANALYSE NUMERIQUE

Effets du courant sur la dispersion d'un polluant

Jianfei ZHANG
Zuli HUANG



1 Evolution de la concentration de polluant dans le fleuve

1.1 Equation de convection uni-dimensionnelle

1.1.1 Q1

La dérivée de Φ est:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{dX}{dt}$$

Selon la méthode des caractéristiques, $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + V \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, donc on obtient la courbe caractéristique:

$$\frac{dx}{dt} - V = 0 \quad i.e. x = Vt + c$$

On peut facilement obtenir la solution $u(x, t) = u_0(x - Vt)$.

1.1.2 Q2

Pour ce schéma explicite centré, on a que

$$u_j^{n+1} = -\frac{V\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + u_j^n$$

Donc on obtient que

$$\begin{aligned}
 U^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V\Delta t}{2\Delta x} & & & 0 \\ \frac{V\Delta t}{2\Delta x} & 1 & -\frac{V\Delta t}{2\Delta x} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \frac{V\Delta t}{2\Delta x} & 1 & -\frac{V\Delta t}{2\Delta x} \\ & & & \frac{V\Delta t}{2\Delta x} & 1 \end{pmatrix} U^n \\
 &= (I_N - V\Delta t K_c) U^n \\
 \text{où } K_c &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & & 0 \\ -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} \\ & & & -\frac{1}{2\Delta x} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Par la simulation, on voit l'instabilité de ce schéma. En utilisant l'analyse de Fourier, on étudie la stabilité L^2 . Les composantes de Fourier $\hat{u}^n(k)$ vérifient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = (1 - i \frac{V\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x)) \hat{u}^n(k) = A(k) \hat{u}^n(k)$$

On vérifie que le module du facteur d'amplification est toujours plus grand que 1,

$$|A(k)|^2 = 1 + (\frac{V\Delta t}{\Delta x})^2 \geq 1$$

Donc ce schéma n'est pas stable, par simulation, on observe l'instabilité dans le figure 1

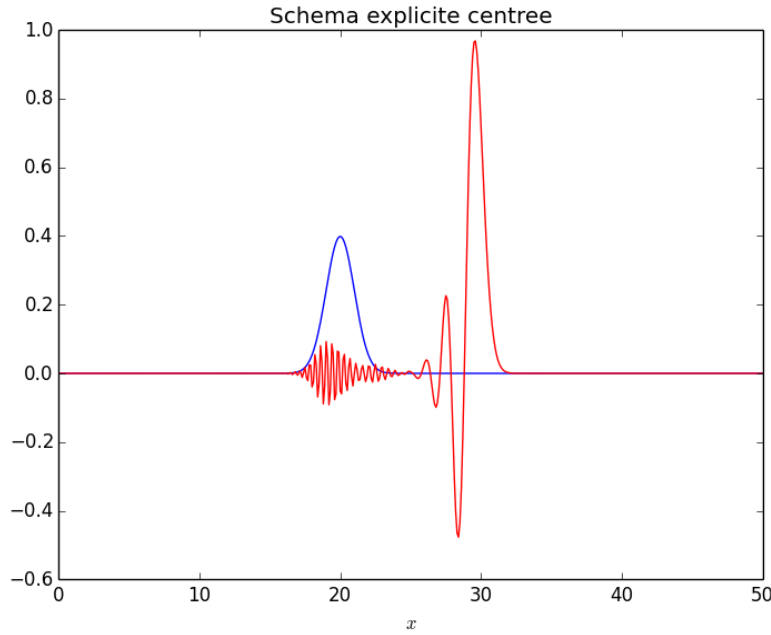


Figure 1: Schéma explicite centré

1.1.3 Q3

D'abord on a

$$u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)u_j^n + \frac{V\Delta t}{\Delta x}u_{j-1}^n$$

À partir de laquelle on peut déduire que

$$U^{n+1} = (I_N - V\Delta t K_d)U^n$$

avec $K_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x} & & & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} \end{pmatrix}$

Ce schéma explicite décentré amont est stable en norme L^2 et L^∞ sous condition $V\Delta t \leq \Delta x$. Pour l'ordre de consistance, on a

$$\begin{aligned} & \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + V \frac{u(t_n, x_j) - u(t_n, x_{j-1})}{\Delta x} \\ &= (u_t + Vu_x)(t_n, x_j) - \frac{V}{2}(\Delta x - V\Delta t)u_{xx}(t_n, x_j) + O(\Delta t^2 + \Delta x^2) \end{aligned}$$

Donc ce schéma est précis à l'ordre 1 en temps et en espace. L'équation équivalente est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + V \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad v = \frac{V}{2}(\Delta x - V\Delta t)$$

Lorsque la condition de stabilité n'est pas satisfaite, on observe la figure 2. On change les valeurs de V , Δt et Δx pour que la condition CFL soit satisfaite, on voit la stabilité dans la figure 3.

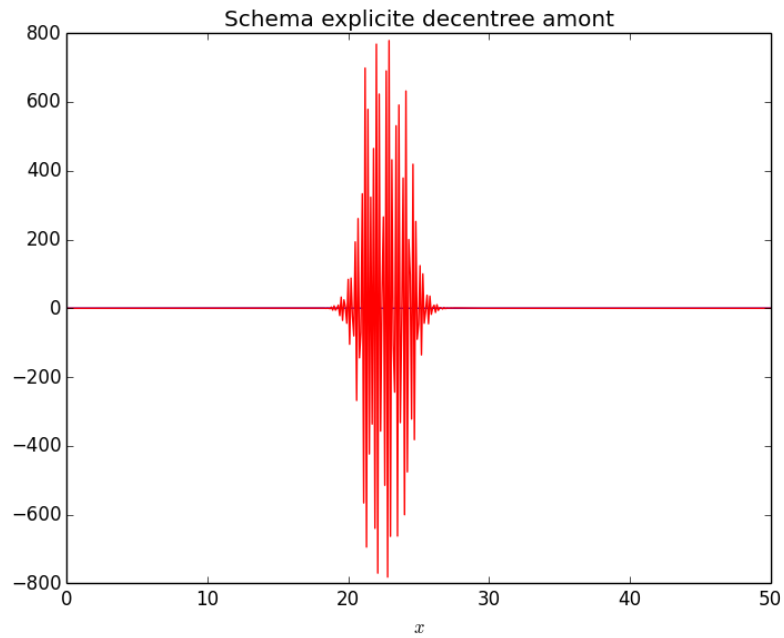


Figure 2: Schéma explicite décentré avec condition $V\Delta t \geq \Delta x$

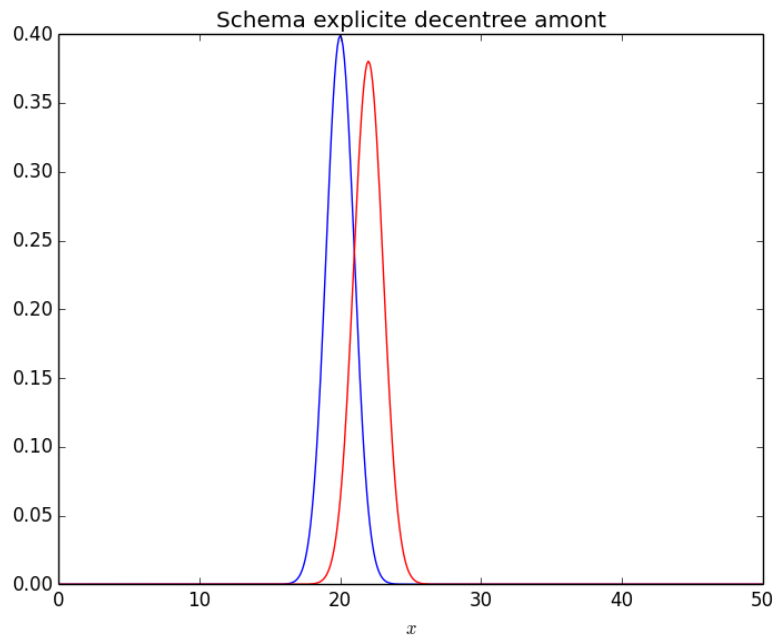


Figure 3: Schéma explicite décentré avec condition $V\Delta t \leq \Delta x$

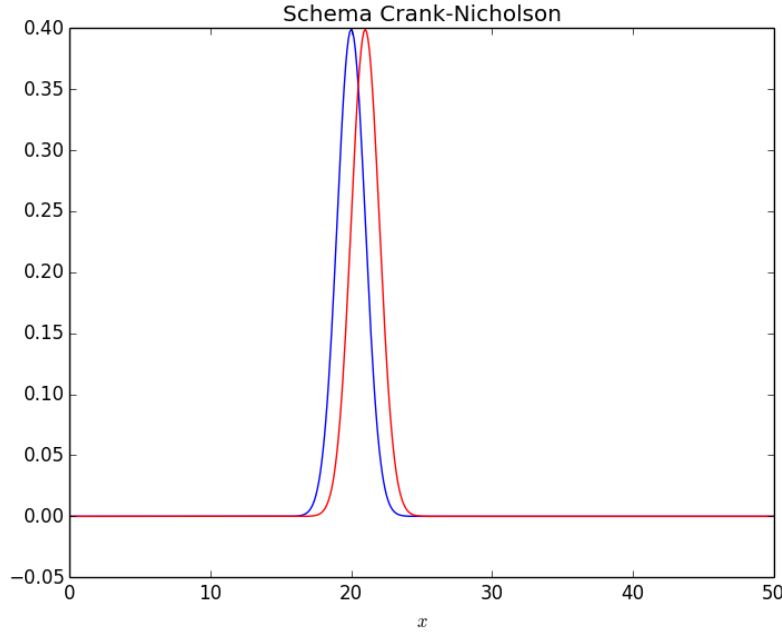


Figure 4: Schéma Crank-Nicholson

1.1.4 Q4

On obtient que

$$u_j^{n+1} + \frac{V\Delta t}{2} \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n - \frac{V\Delta t}{2} \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

À partir de quelle on a

$$(I_N + \frac{V\Delta t}{2} K_c) U^{n+1} = (I_N - \frac{V\Delta t}{2} K_c) U^n$$

En norme L^2 , avec l'analyse de Fourier, on obtient

$$(1 + i \frac{V\Delta t}{2\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x)) u^{n+1}(k) = (1 - i \frac{V\Delta t}{2\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x)) u^n(k)$$

Ça vérifie que le facteur d'amplification $|A(k)| = 1$, alors c'est inconditionnellement stable en norme L^2 . Le figure 4 le justifie. Pour la consistance, on peut le réécrire comme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right)$$

Pour le premier terme dans la parenthèse, on fait le développement de Taylor autour du point (t_n, x_j) and pour le deuxième, on fait le développement autour du point (t_{n+1}, x_j) . On obtient que l'erreur

troncature au-dessus égale

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{V \Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4 + \Delta t^3) \right) (t_n, x_j) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{V \Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4 + \Delta t^3) \right) (t_{n+1}, x_j) \\
 & = \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V \Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4 + \Delta t^4) \right) (t_n, x_j) \\
 & = \frac{V}{2} \left(\frac{\Delta t^2 V^2}{6} + \frac{\Delta x^2}{3} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (t_n, x_j) + O(\Delta x^4 + \Delta t^4)
 \end{aligned}$$

Donc on obtient l'ordre de ce schéma est $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. Et son équation équivalente est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + V \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + v \frac{\partial^3}{\partial x^3} = 0 \quad \text{avec} \quad v = \frac{V}{2} \left(\frac{\Delta x^2}{3} + \frac{V^2 \Delta t^2}{6} \right)$$

1.1.5 Q5

Comme on fixe la valeur de $\frac{V \Delta t}{\Delta x}$, on peut observer la relation entre l'erreur e et l'un des Δx et Δt . Ici on prend Δx . On sait exactement la solution réelle pour ce problème, notons la U_{ex} , et notons la solution obtenue par la calcul numérique U_{nu} . On a

$$\|e\| = \|U_{ex} - U_{nu}\| \simeq O(\Delta x^p)$$

avec p l'ordre de convergence. Donc pour observer numériquement l'ordre de convergence d'un schéma, il suffit de calculer plusieurs solutions numériques, chacune solution obtenue du même schéma mais calculée sur des grilles de calcul de plus en plus fine.

On calcule ensuite pour chacune des grilles l'erreur $\|e\|$, par exemple en norme 2, et on trace la courbe de $\ln(\|e\|)$ en fonction de $\ln(\Delta x)$. Sachant que:

$$\ln(\|e\|) \simeq \ln(C) + p \ln(\Delta x)$$

On obtient finalement une droite de pente l'ordre de schéma. À travers la simulation, on obtient la figure 5 on voit que la pente de celle du schéma Crank-Nicholson égale environs 2 et deux fois que celle du schéma décentré amont, qui confirme leur ordres de consistance.

1.2 Équation de convection-diffusion uni-dimensionnelle

1.2.1 Q6

On a

$$\begin{aligned}
 & u_j^{n+1} + \frac{V \Delta t}{2} \frac{1}{2 \Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{v \Delta t}{2} \frac{1}{2 \Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \\
 & = u_j^n - \frac{V \Delta t}{2} \frac{1}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{v \Delta t}{2} \frac{1}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)
 \end{aligned}$$

En comparant la question **Q4**, on obtient la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} & & & 0 \\ \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} \\ 0 & & & \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \end{pmatrix}$$

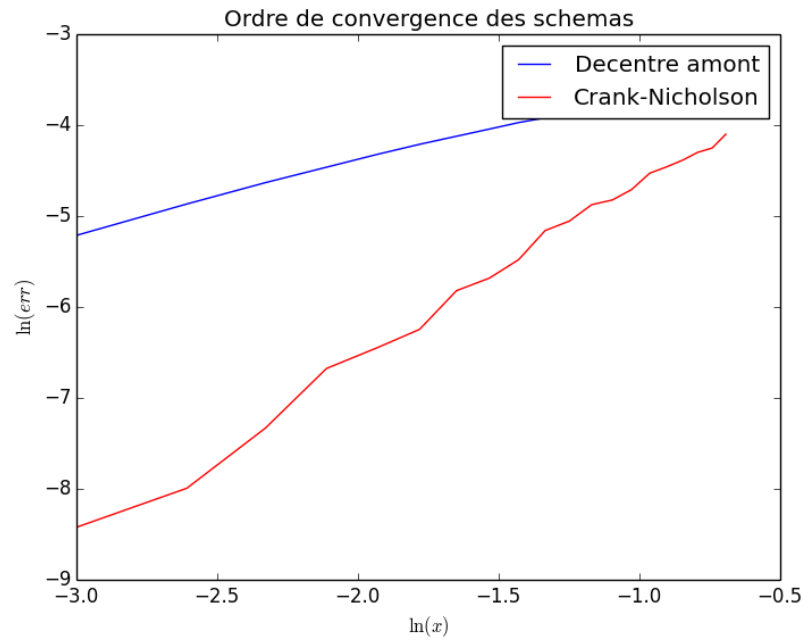


Figure 5: Ordre de convergence des schémas

Si on prend cette simulation avec $T = 10$, on voit l'instabilité à la sortie $x = L$ qui est montré dans le figure 6

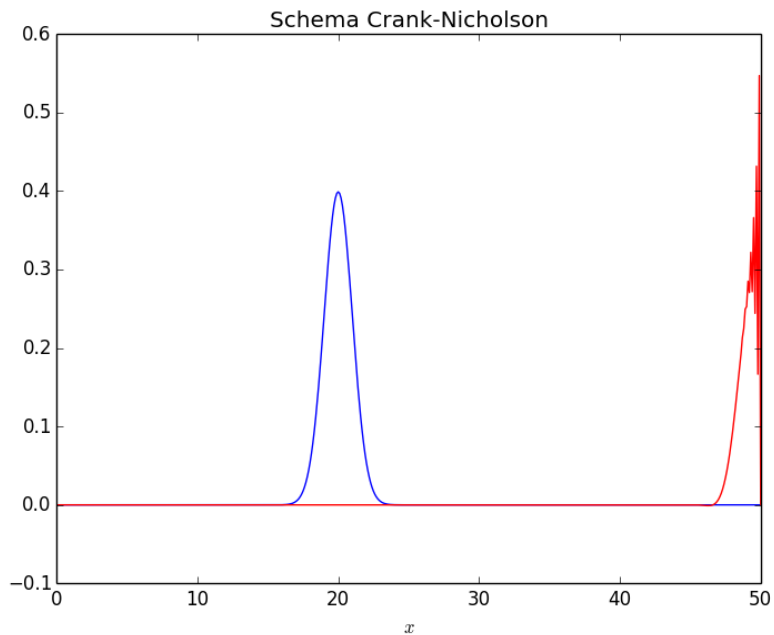


Figure 6: Equation de convection-diffusion – schéma Crank-Nicholson

1.2.2 Q7

En utilisant la condition de type Neumann homogène $u_{N+1} = u_N$, pour $j = N$, on obtient la relation de récurrence suivante

$$\begin{aligned} & u_N^{n+1} + \frac{V\Delta t}{2} \frac{1}{2\Delta x} (u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}) - \frac{v\Delta t}{2} \frac{1}{2\Delta x} (u_N^{n+1} - 2u_N^{n+1} + u_{N-1}^{n+1}) \\ &= u_N^n - \frac{V\Delta t}{2} \frac{1}{2\Delta x} (u_N^n - u_{N-1}^n) + \frac{v\Delta t}{2} \frac{1}{2\Delta x} (u_N^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n) \end{aligned}$$

Donc les matrices K_c et A ne changent que pour le n-ième rang,

$$K_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & & 0 \\ -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} \\ 0 & & & -\frac{1}{2\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} \end{pmatrix}$$

Et

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} & & & 0 \\ \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} \\ 0 & & & \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{2\Delta x} \end{pmatrix}$$

Après avoir modifié les deux matrices, la solution à la sortie $x = L$ deviens stable, qui est illustré par le figure 7

1.2.3 Q8

En ajoutant le terme source, on a la relation de recurrence

$$(I_N + \frac{V\Delta t}{2} K_c - \frac{v\Delta t}{2} A) U^{n+1} = (I_N - \frac{V\Delta t}{2} K_c + \frac{v\Delta t}{2} A) U^n + f^n$$

avec $f^n = (f_j^n)_{j=1,\dots,N}$. Sous la fonction de source donnée, on observe que après cerain temps, le sommet de la pollution n'augmente plus, mais elle diffuse dans la dimension espace, comme illustré dans le figure 8

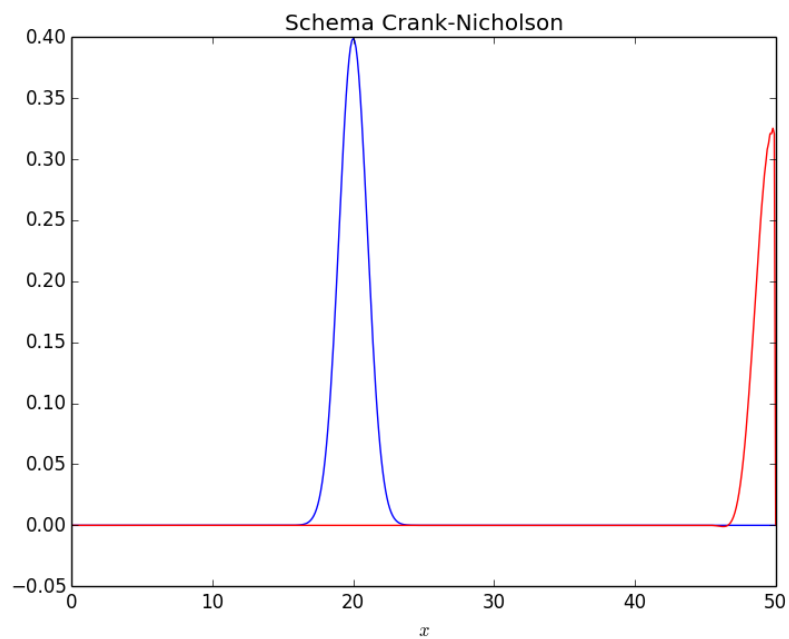


Figure 7: Schéma Crank-Nicholson avec la condition $u_{N+1} = u_N$

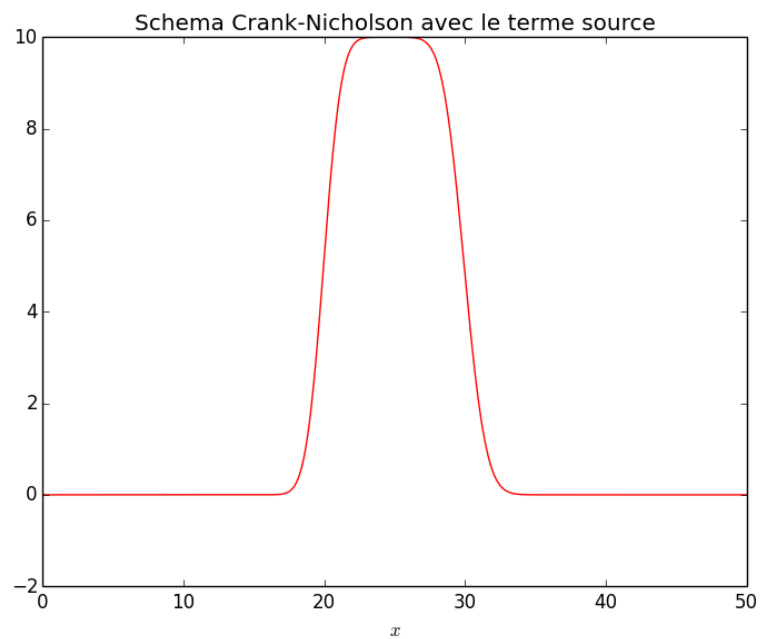


Figure 8: Schéma Crank-Nicholson avec le terme source ajouté

2 Évolution de la concentration de polluant dans l'océan

2.1 Discrétisation du Laplacien en dimension 2

On cherche à simuler via différences finies une fonction $u(x, y)$ solution de l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \forall (x, y) \in \Omega =]0, L[\times]0, L[, \\ u(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Pour résoudre numériquement cette équation, nous utilisons alors

- h le pas de discrétisation en espace commun aux deux directions;
- $N = \frac{L}{h} - 1$ la taille de la maille;
- $x_i = ih$ et $y_j = jh$ les coordonnées des points de la maille, $0 \leq i, j \leq N + 1$;
- $u_{i,j}$ l'approximation de $u(x_i, y_j)$;
- $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ la discrétisation de f aux points de la maille

On utilise pour calculer les $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ le schéma aux différences finies

$$-\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}, \text{ avec } 1 \leq i, j \leq N.$$

On introduit le vecteur U de taille N^2 qui est donné par la concaténation des lignes de la matrice $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$:

$$U_{(i-1)N+j} = u_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N.$$

2.1.1 Q9

Calculer la matrice A et le vecteur b pour lesquels U est solution du système linéaire

$$-AU = b. \quad (2)$$

D'après le schéma qu'on introduit à l'énoncé, on obtient que

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) = f_{i,j}.$$

Alors, on peut facilement en déduire la forme explicite de b et celle de A . Pour décrire la matrice A , d'abord, on note deux matrices : M et I .

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{4}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & \frac{1}{h^2} & -\frac{4}{h^2} \end{pmatrix}_{N \times N}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}_{N \times N}$$

Alors, on peut donner l'expression de A en utilisant M et I_d .

$$A = \begin{pmatrix} M & I & & 0 \\ I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ 0 & & I & M \end{pmatrix}_{N^2 \times N^2}$$

Dans ce cas là, on obtient le vecteur b de la taille N^2 .

$$b_{(i-1)N+j} = f_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N.$$

Grace à A et b , on peut résoudre numériquement l'équation de Laplace avec un terme source bien choisi permettant de comparer la résolution numérique et la solution exacte. Ici, on prend le terme source la forme polynomiale.

$$f(x, y) = -2x(x - L) - 2y(y - L)$$

Par conséquent, on a la solution exacte :

$$u(x, y) = x(x - L)y(y - L)$$

Puis, on choisit $h = 0.01$ et $L = 1$. Or, on peut résoudre numériquement l'équation de Laplace et obtenir le Figure 9.

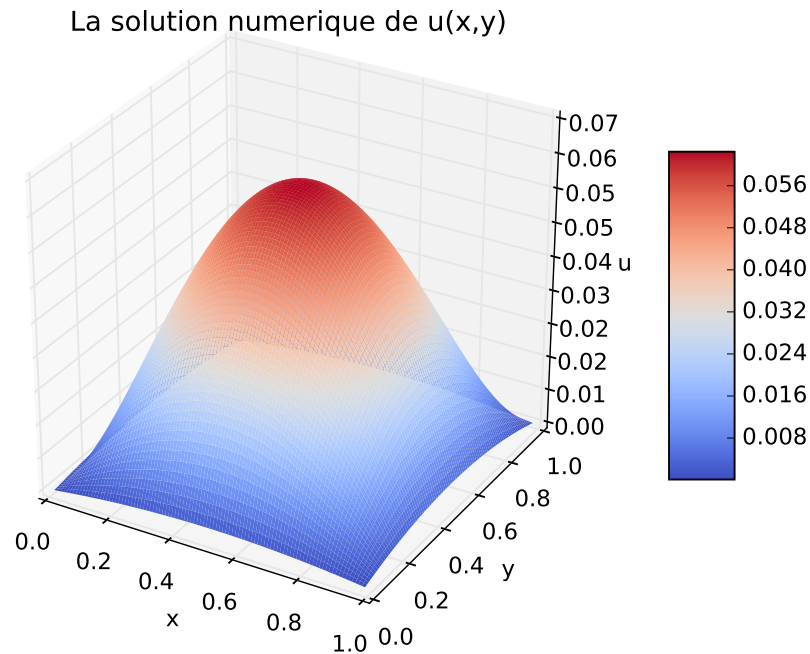


Figure 9: Résultat numérique de l'équation 2

Nous montrons également le dessin de la solution théorique ci-dessous. Nous pouvons voir que la solution, qu'on a obtenu par la méthode numérique, approche bien la solution exacte.

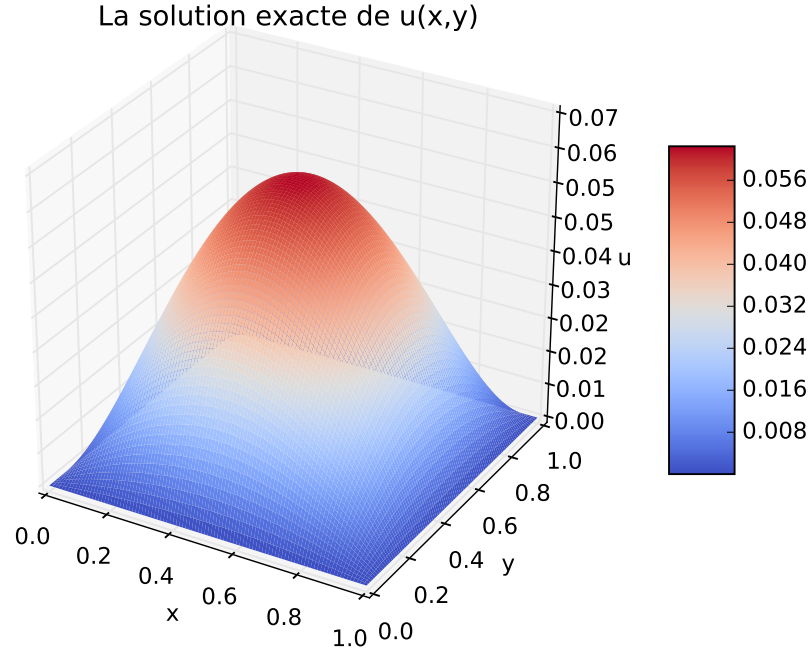


Figure 10: Résultat théorique de l'équation 2

Pour obtenir l'ordre de convergence du schéma, on peut calculer l'erreur de troncature. Evidemment, ce schéma est de l'ordre 2 en espace.

$$\begin{aligned}
 \eta_{i,j} &= -\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + \\
 &\quad \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2} \\
 &= O(h^2)
 \end{aligned}$$

En choisissant différent h , l'on peut calculer l'écart entre la solution exacte et celle de théorique sous la norme 2.

$$\text{erreur} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (u_{i,j} - u(x_i, y_j))^2} \times h^2$$

D'où, on obtient le figure de convergence.

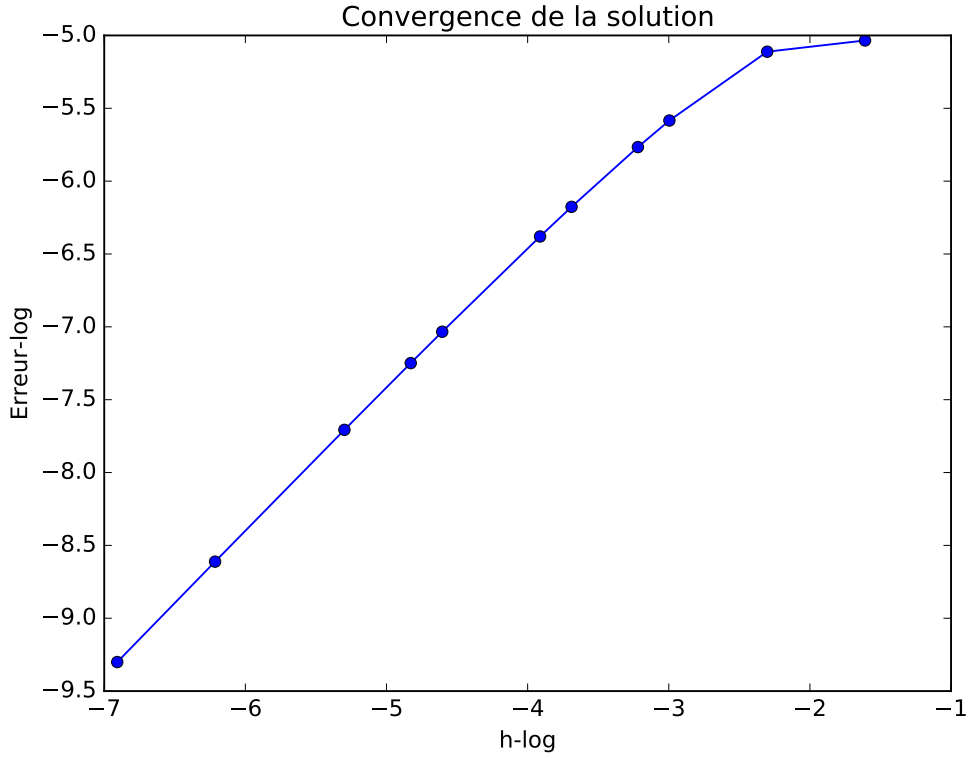


Figure 11: Convergence du schéma

2.2 Équation de convection diffusion bi-dimensionnelle

Nous pouvons a present simuler le comportement de la concentration de polluant lorsqu'il est deverse dans l'ocean par le fleuve. On modelise son evolution par l'equation de reaction diffusion sur un domaine $\Omega =]0, L[\times]0, L[$ avec conditions de Dirichlet au bord :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V^x \frac{\partial u}{\partial x} + V^y \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \forall (x, y) \in \Omega, \forall t > 0, \\ u(t = 0, x, y) = u_0(x, y), & \forall (x, y) \in \Omega \\ u(t, x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

Pour resoudre numeriquement cette equation nous utilisons de plus

- Δt le pas de discretisation en temps ;
- $t^n = n\Delta t$ les coordonnees du maillage temporel ;
- $u_{i,j}^n$ l'approximation de $u(t^n, x_i, y_j)$;
- $V_{i,j}^x = V^x(x_i, y_j)$ et $V_{i,j}^y = V^y(x_i, y_j)$ l'approximation de $u(t^n, x_i, y_j)$ la discretisation de $V = (V^x, V^y)$;
- U^n de taille N^2 donné par la concaténation des lignes de la matrice $(u_{i,j}^n)_{1 \leq i,j \leq N}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$

2.2.1 Q10

D'après le schéma de Crank-Nicholson correspondant qu'on a dans l'énoncé, on peut calculer les matrices K_c^x et K_c^y quand $V = (1, 1)$ pour l'équation ci-dessous.

$$(I_N + \frac{\Delta t}{2}(K_c^x + K_c^y) - \frac{\nu \Delta t}{2}A)U^{n+1} = (I_N - \frac{\Delta t}{2}(K_c^x + K_c^y) + \frac{\nu \Delta t}{2}A)U^n \quad (4)$$

On note la matrice E

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{2h} \end{pmatrix}_{N \times N} \quad \text{et} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2h} & 0 \\ -\frac{1}{2h} & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & 0 \end{pmatrix}_{N \times N}$$

D'où, on obtient que

$$K_c^x = \begin{pmatrix} E_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_2 \end{pmatrix}_{N^2 \times N^2} \quad \text{et} \quad K_c^y = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & 0 \\ E_1 & \ddots & \ddots \\ 0 & & E_1 & 0 \end{pmatrix}_{N^2 \times N^2}$$

2.2.2 Q11

On peut faire la simulation numérique en appliquant $\nu = 1, L = 50, T = 5, h = 0.5, \Delta t = 0.2$ et la condition initiale $u_0 = f_{x_0, y_0, \sigma}$ pour

$$f_{x_0, y_0, \sigma} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec $x = x_0 = 25$ et $\sigma = 1$.

On peut finalement obtenir le figure de simulation.

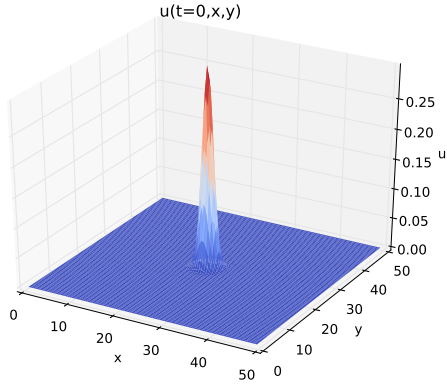
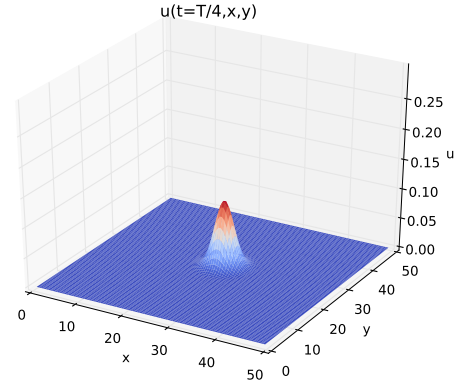
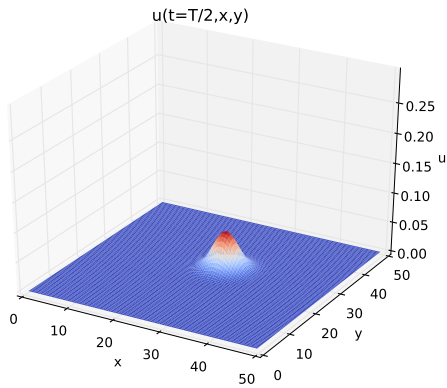
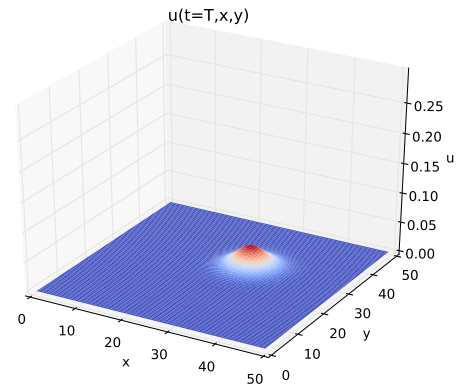
(a) $t = 0$ (b) $t = T/4$ (c) $t = T/2$ (d) $t = T$

Figure 12: Évolution en temps

2.2.3 Q12

Afin modéliser la dispersion du polluant dans l'océan, modifier le schéma afin de prendre en compte la participation du terme source $f = f_{x_0, y_0, \sigma}$ avec $x_0 = 25$ et $y_0 = 0$ et $\sigma = 1$.

On note le vecteur qui représente le terme de source comme b , un vecteur de taille N^2 .

$$b_{(i-1)N+j} = f(x_i, y_j) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N.$$

Alors, l'on peut en déduire l'équation du schéma.

$$(I_N + \frac{\Delta t}{2}(K_c^x + K_c^y) - \frac{\nu \Delta t}{2}A)U^{n+1} = (I_N - \frac{\Delta t}{2}(K_c^x + K_c^y) + \frac{\nu \Delta t}{2}A)U^n + \Delta t b \quad (5)$$

Et l'on obtient le figure du simulation.

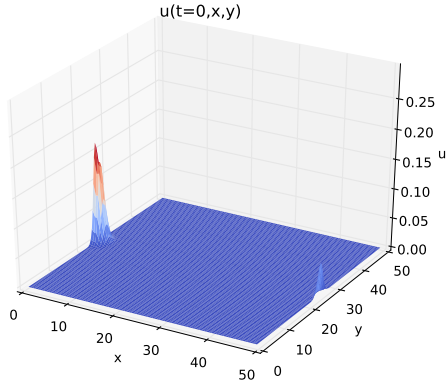
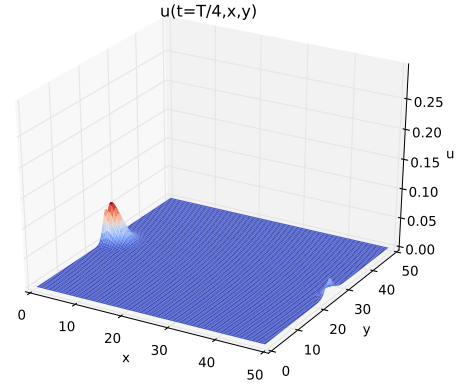
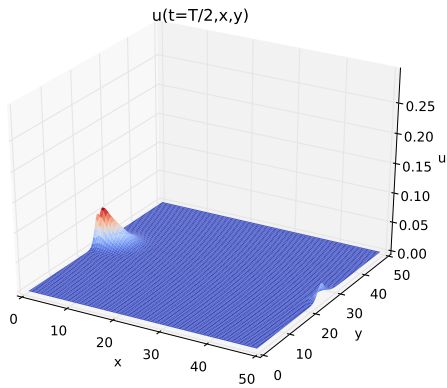
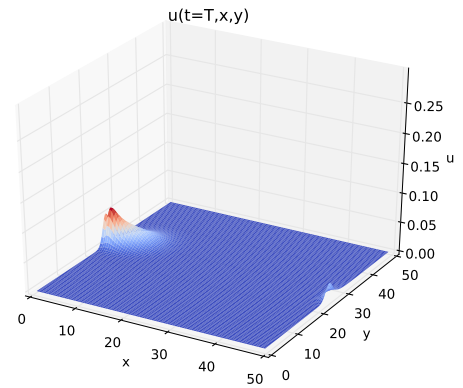
(a) $t = 0$ (b) $t = T/4$ (c) $t = T/2$ (d) $t = T$

Figure 13: Évolution en temps avec le terme de source

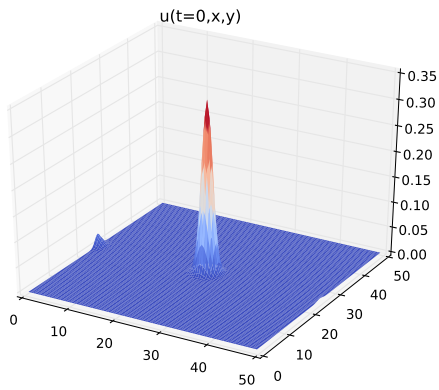
2.2.4 Q13

L'objectif final du projet est d'observer les effets du courant océaniques sur la dispersion, en particulier lorsque celui-ci dépend de la position comme à proximité de l'embouchure d'un fleuve. Modifier à présent les matrices K_c^x et K_c^y pour prendre en compte la dépendance de V vis-à-vis de la position. Tester le nouveau schéma avec les données de la question précédente, pour le un coefficient de convection V donné par

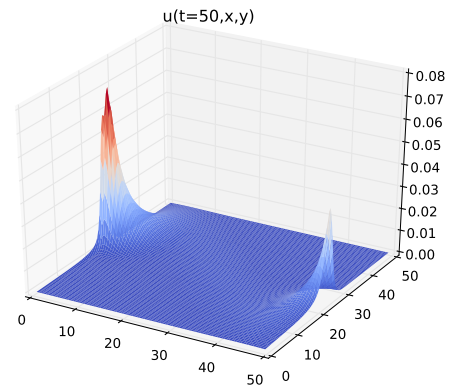
$$V(x, y) = (\cos(\frac{k\pi y}{L})\sin(\frac{l\pi x}{L}), \cos(\frac{l\pi x}{L})\sin(\frac{k\pi y}{L})), \text{ avec } \forall (x, y) \in \Omega, (k, l) \in \mathbb{N}^2$$

On choisit par exemple $k = 1, l = 1$. Puis, l'on change la matrice définit dans la question précédente.

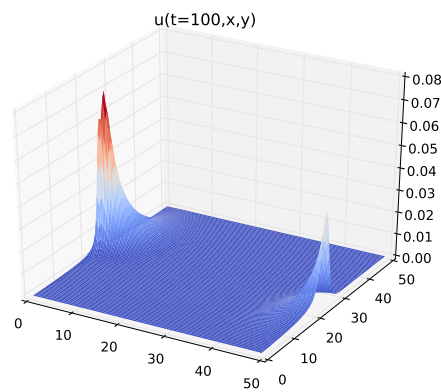
On obtient les figures suivants.



(a) $t = 0$



(b) $t = 50$



(c) $t = 100$

Figure 14: Évolution en temps avec le terme de source

D'après les figures, on obtient que les polluants acumulent rapidement dans deux côté et reste stable.