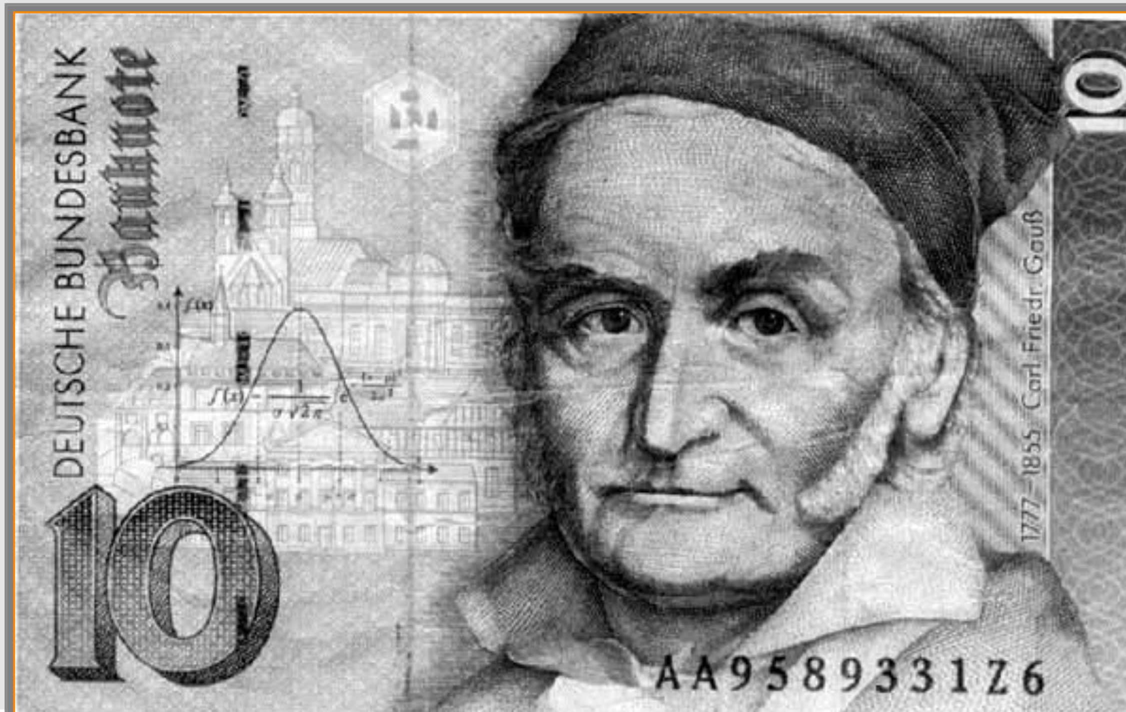
Κεφάλαιο Η2 Ο νόμος του Gauss

Karl Friedrich Gauss

1777–1855

Συνεισέφερε στους παρακάτω τομείς:

- Ηλεκτρομαγνητισμό
- Θεωρία αριθμών
- Στατιστική
- Μη ευκλείδεια γεωμετρία
- Μηχανική των τροχιών των κομητών
- Ήταν ένας από τους ιδρυτές της Γερμανικής Ένωσης Μαγνητισμού.
  - Η Γ.Ε.Μ. μελετά το μαγνητικό πεδίο της Γης.



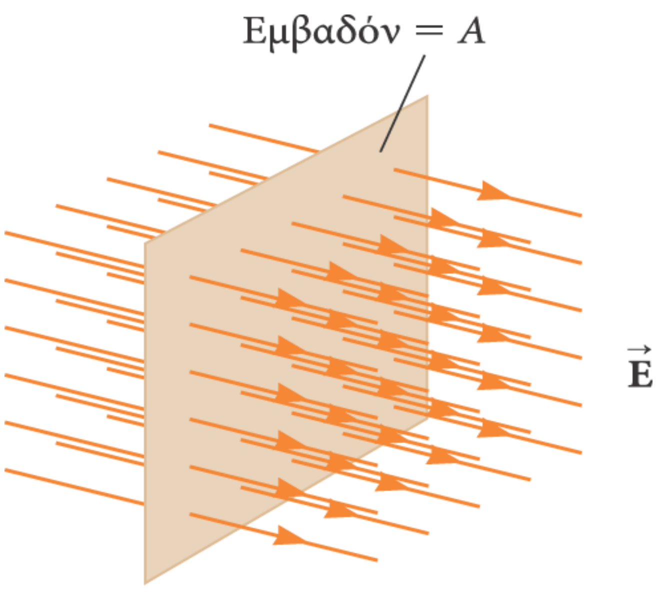
Ο νόμος του Gauss

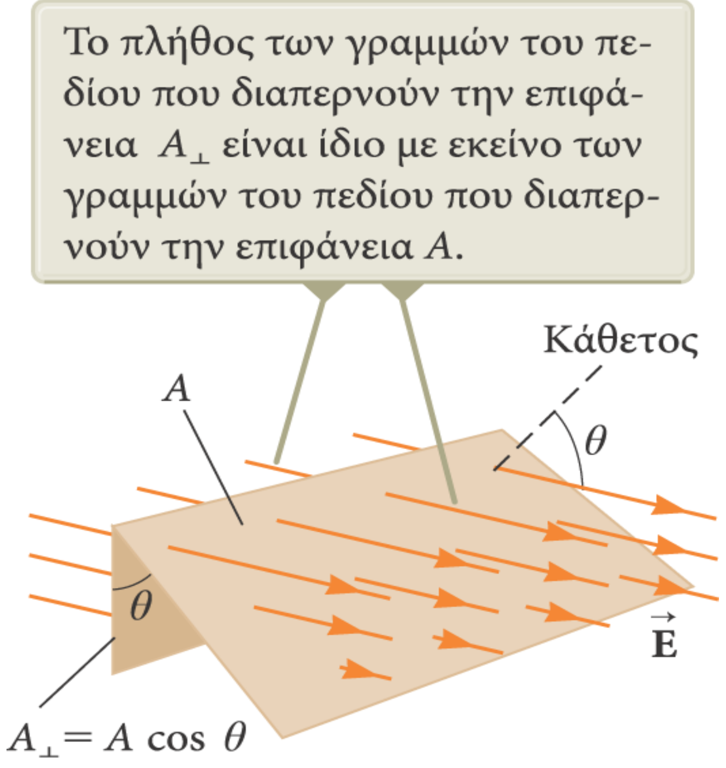
- Ο νόμος του Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου.
- Ο νόμος του Gauss βασίζεται στο γεγονός ότι η ηλεκτρική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ σημειακών φορτίων ακολουθεί τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.
- Μας διευκολύνει στον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου κατανομών φορτίου με υψηλό βαθμό συμμετρίας.
- Ο νόμος του Gauss είναι σημαντικός στην κατανόηση και την επαλήθευση των ιδιοτήτων των αγωγών που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Ηλεκτρική ροή

Η **ηλεκτρική ροή** ορίζεται ως το γινόμενο του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου επί το εμβαδόν A της επιφάνειας που είναι κάθετη στις γραμμές του πεδίου.

$\Phi_E = EA$ Μονάδες: $N \cdot m^2 / C$





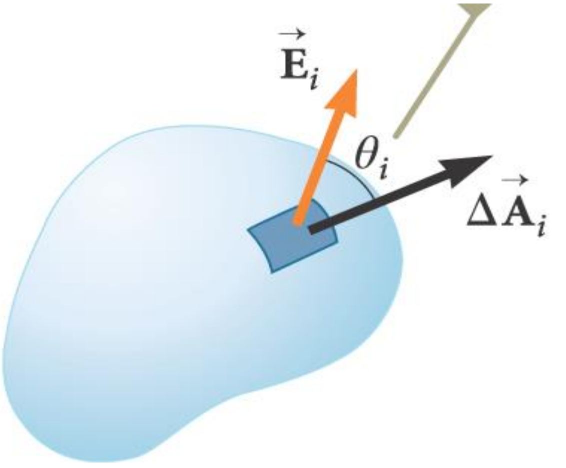
Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια τυχαία επιφάνεια υπό γωνία

- Η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν την επιφάνεια.
- Οι γραμμές του πεδίου μπορεί να σχηματίζουν γωνία θ με την κάθετο στην επιφάνεια.
- Σε αυτή την περίπτωση, $\Phi_E = EA\cos\theta$

Ηλεκτρική ροή – Κατανόηση της εξίσωσης

- Η ηλεκτρική ροή έχει μέγιστη τιμή όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στο πεδίο.
  - $\theta = 0°$ ⟹ $\Phi_E = EA \cos(0) = EA$
- Η ηλεκτρική ροή έχει μηδενική τιμή όταν η επιφάνεια είναι παράλληλη στο πεδίο.
  - $\theta = 90°$ ⟹ $\Phi_E = EA \cos(0) = 0$
- Αν το πεδίο δεν έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της επιφάνειας, τότε η σχέση $\Phi = EA \cos\theta$ ισχύει μόνο για μια στοιχειώδη επιφάνεια ΔA.
- Στην πιο γενική περίπτωση, εξετάζουμε ένα στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας.

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$



- Η σχέση αυτή γράφεται

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i$$

$$\Phi_E = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

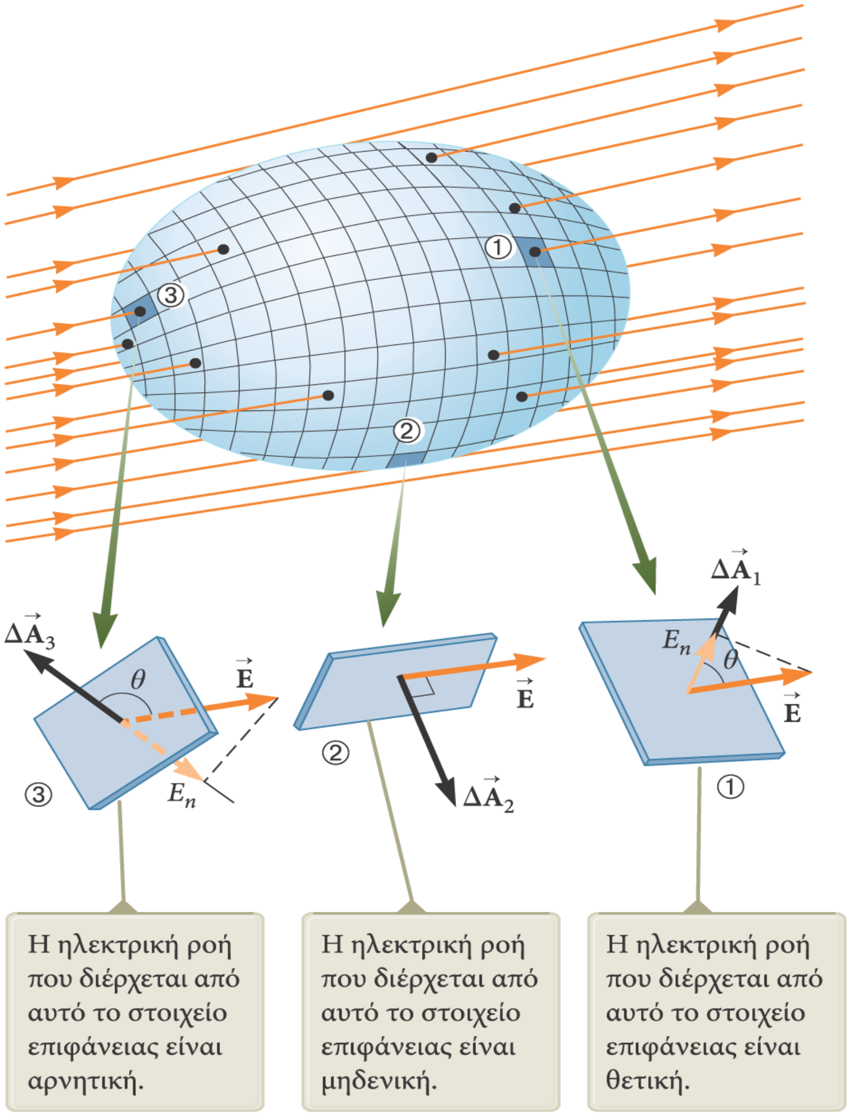
  - Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα, δηλαδή πρέπει να υπολογιστεί σε ολόκληρη την υπό εξέταση επιφάνεια.
- Γενικά, η τιμή της ηλεκτρικής ροής εξαρτάται τόσο από τη μορφή του πεδίου όσο και από την επιφάνεια.

Ηλεκτρική ροή – Κλειστή επιφάνεια

Θεωρούμε μια κλειστή επιφάνεια.

Τα διανύσματα $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ δείχνουν προς διαφορετικές κατευθύνσεις.

- Σε κάθε σημείο, είναι κάθετα στην επιφάνεια.
- Λόγω σύμβασης, δείχνουν προς τα έξω.



- Στο στοιχείο (1), οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την επιφάνεια από το εσωτερικό προς το εξωτερικό. $\theta < 90^o$ και η ροή Φ είναι θετική.
- Στο στοιχείο (2), οι γραμμές του πεδίου εφάπτονται στην επιφάνεια. $\theta = 90^o$ και η ροή $\Phi = 0$.
- Στο στοιχείο (3), οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την επιφάνεια από το εξωτερικό προς το εσωτερικό. $180^o > \theta > 90^o$ και η ροή Φ είναι αρνητική.

Ηλεκτρική ροή – Κλειστή επιφάνεια

Η **συνολική ηλεκτρική ροή** που διέρχεται από την επιφάνεια είναι ανάλογη του συνολικού πλήθους των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια.

- Ο συνολικός αριθμός των γραμμών ισούται με τη διαφορά του πλήθους των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον το πλήθος των γραμμών που εισέρχονται σε αυτήν.

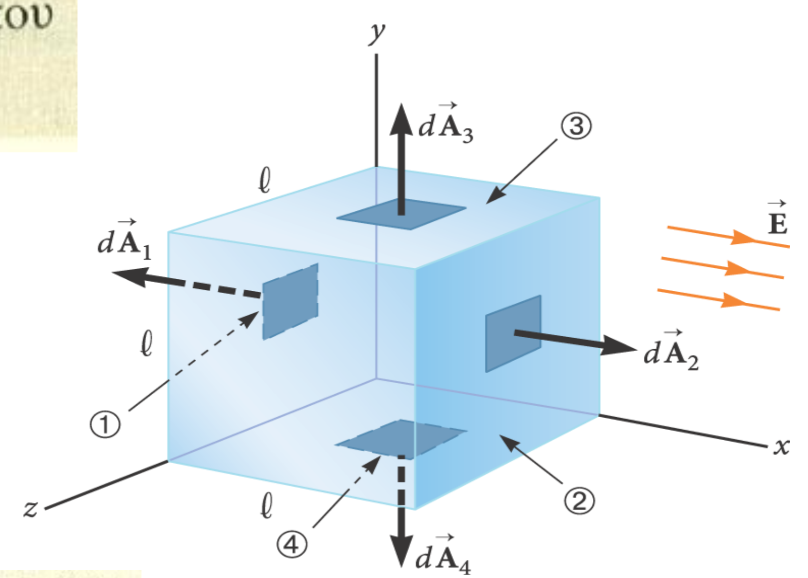
Αν E_n είναι η συνιστώσα του πεδίου η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια, τότε

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E_n dA$$

- Η ολοκλήρωση γίνεται επί της κλειστής επιφάνειας.

Παράδειγμα Ροή που διέρχεται από κύβο

Θεωρήστε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ σε έναν κενό χώρο, προσανατολισμένο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Στο πεδίο εισάγεται ένας κύβος με μήκος ακμής ℓ και τον προσανατολισμό που φαίνεται στην Εικόνα Η2.5. Βρείτε τη συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κύβου.



Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου διέρχονται κάθετα από τέσσερις έδρες του κύβου και είναι παράλληλες στις άλλες δύο .

$$\Phi_E = \int_1 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_2 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

Για την έδρα 1, $\int_1 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_1 E(\cos 180°)\, dA = -E\int_1 dA = -EA = -E\ell^2$

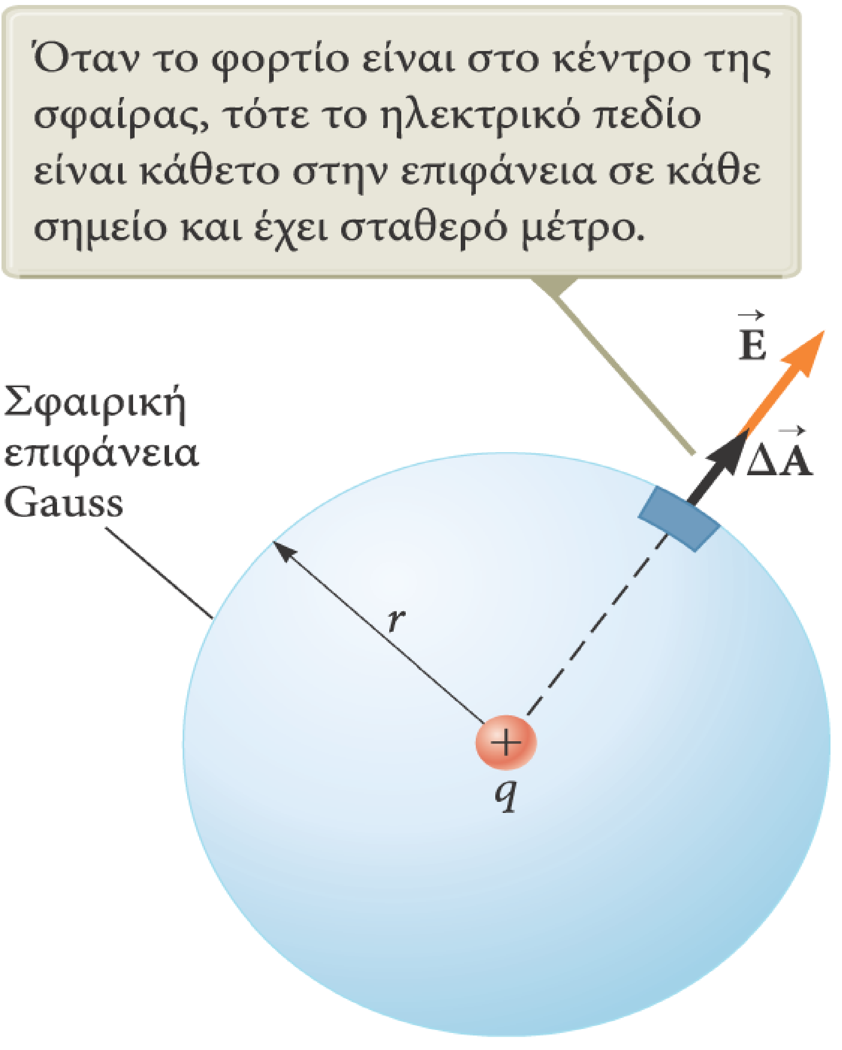
Για την έδρα 2, $\int_2 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_2 E(\cos 0°)\, dA = E\int_2 dA = +EA = E\ell^2$

Για τις υπόλοιπες έδρες, $\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Επομένως, $E_{συν.} = 0$

Ο νόμος του Gauss (1777–1855) – Εισαγωγή

- Ο νόμος του Gauss εκφράζει τη γενική σχέση μεταξύ της συνολικής ηλεκτρικής ροής που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια και του φορτίου που αυτή περιέχει.
  - Η κλειστή επιφάνεια συχνά λέγεται και *επιφάνεια Gauss*.
- Ο νόμος του Gauss έχει θεμελιώδη σημασία στη μελέτη των ηλεκτρικών πεδίων.



- Στο κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα *r* βρίσκεται ένα θετικό σημειακό φορτίο *q.*
- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας είναι:
  - $E = k_e q / r^2$

Ο νόμος του Gauss – Γενικά

Οι γραμμές του πεδίου κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω και είναι κάθετες σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E \oint dA$$

Αυτή είναι η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss – στην προκειμένη περίπτωση, τη σφαίρα με ακτίνα *r*.

Γνωρίζουμε ότι $E = k_e q / r^2$ και $A_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = 4\pi r^2$

$$\Phi_E = 4\pi k_e q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ο νόμος του Gauss – Γενικά

- Η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια γύρω από ένα σημειακό φορτίο q δίνεται από τον λόγο q/ϵ_o και **δεν εξαρτάται** από το σχήμα της επιφάνειας αυτής.
- Η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια η οποία δεν περικλείει φορτίο είναι ίση με μηδέν.
- Αφού το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από πολλά φορτία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργεί κάθε φορτίο ξεχωριστά, η ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια δίνεται από τη σχέση:

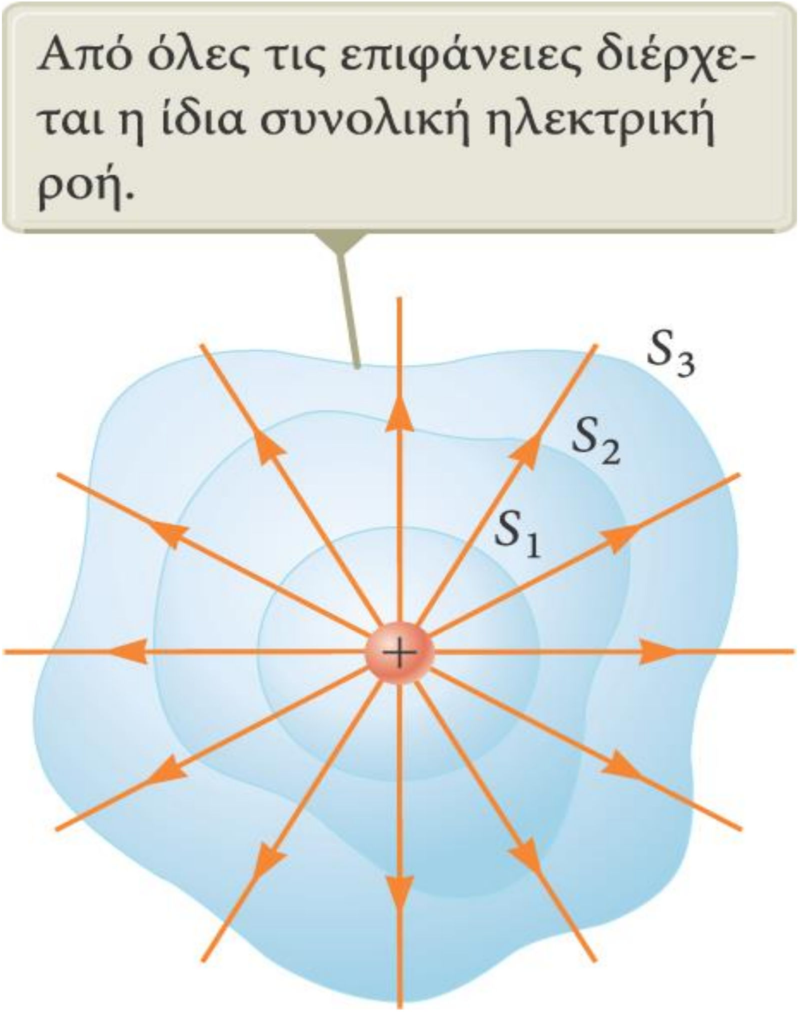
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \left(\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 \ldots \right) \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

Επιφάνεια Gauss – Παράδειγμα

Το φορτίο μπορεί να περιβάλλεται από κλειστές επιφάνειες διαφόρων σχημάτων.

- Μόνο η επιφάνεια S_1 είναι σφαιρική.

Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια, η οποία περιβάλλει ένα σημειακό φορτίο *q*, δίνεται από τον λόγο q/ϵ_o και δεν εξαρτάται από το σχήμα της επιφάνειας.

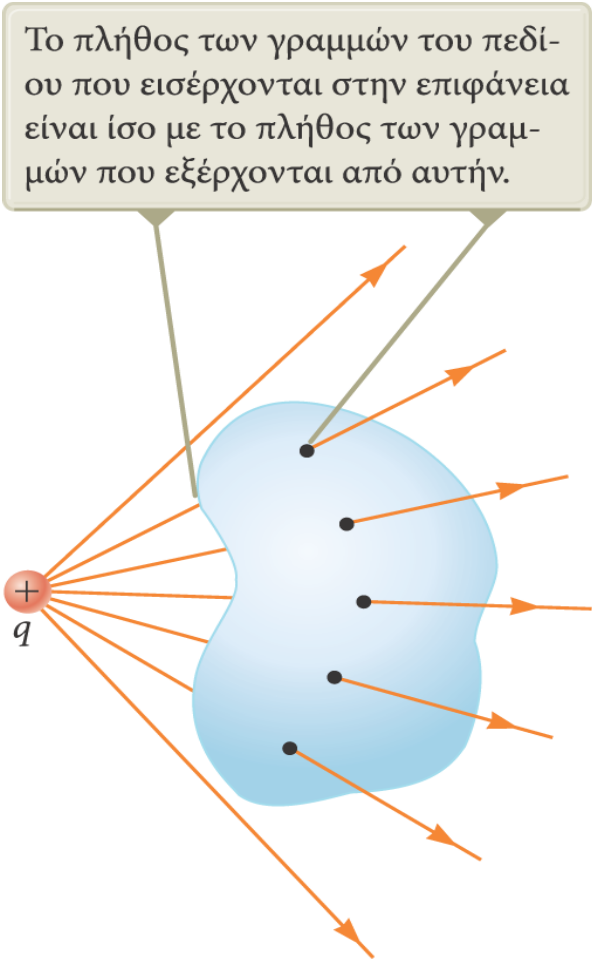


Επιφάνεια Gauss – Παράδειγμα 2

Το φορτίο βρίσκεται *εκτός* της κλειστής επιφάνειας τυχαίου σχήματος.

Κάθε γραμμή του πεδίου η οποία εισέρχεται στην επιφάνεια εξέρχεται από κάποιο άλλο σημείο της επιφάνειας.

Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια, η οποία δεν περιβάλλει φορτίο, είναι ίση με μηδέν.



Ο νόμος του Gauss

Η μαθηματική μορφή του νόμου του Gauss είναι:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_o}$$

- *Όπου* $q_{\text{εντός}}$ είναι το συνολικό φορτίο εντός της επιφάνειας.

Το $\vec{\mathbf{E}}$ παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας.

- $\vec{\mathbf{E}}$ είναι το *συνολικό ηλεκτρικό πεδίο* και μπορεί να περιλαμβάνει συνεισφορές από φορτία που βρίσκονται τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό της επιφάνειας.

Αν και, θεωρητικά, μπορούμε να λύσουμε τη σχέση του νόμου του Gauss ως προς $\vec{\mathbf{E}}$ για οποιαδήποτε διάταξη φορτίων, στην πράξη χρησιμοποιείται μόνο σε περιπτώσεις όπου υπάρχει συμμετρία.

Εφαρμογή του νόμου του Gauss

Για να χρησιμοποιήσετε τον νόμο του Gauss, επιλέξτε μια επιφάνεια Gauss η οποία επιτρέπει την απλούστευση του επιφανειακού ολοκληρώματος και τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου.

Εκμεταλλευτείτε τη συμμετρία.

Υπενθυμίζουμε ότι η επιφάνεια Gauss είναι μια επιφάνεια που επιλέγουμε, η οποία δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με μια πραγματική επιφάνεια.

Συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η επιφάνεια Gauss

Προσπαθήστε να επιλέξετε μια επιφάνεια η οποία να ικανοποιεί μία ή περισσότερες από τις παρακάτω συνθήκες:

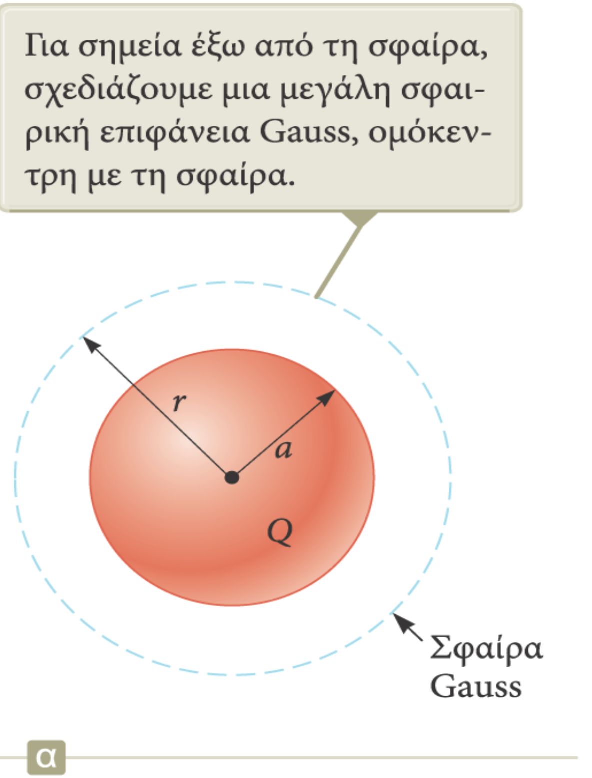
- Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, λόγω συμμετρίας, σε ολόκληρη την επιφάνεια.
- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ μπορεί να εφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο *EdA,* επειδή τα διανύσματα $\vec{\mathbf{E}}$ και $d\vec{\mathbf{A}}$ είναι παράλληλα.
- Το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με 0, επειδή τα διανύσματα $\vec{\mathbf{E}}$ και $d\vec{\mathbf{A}}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν στο συγκεκριμένο τμήμα επιφάνειας.

Αν η κατανομή φορτίου δεν έχει επαρκή συμμετρία, ώστε να μπορεί να βρεθεί επιφάνεια Gauss η οποία θα ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, τότε ο νόμος του Gauss θα μας φανεί χρήσιμος στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου της συγκεκριμένης κατανομής.

Παράδειγμα Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου

Μια μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας *a* έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου *ρ* και φέρει συνολικό θετικό φορτίο *Q* (Εικ. Η2.10).

(A) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο που βρίσκεται εκτός της σφαίρας.



Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα.

Για $r > \alpha$

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E dA = \frac{Q_{\text{εντός}}}{\epsilon_o}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E \oint dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

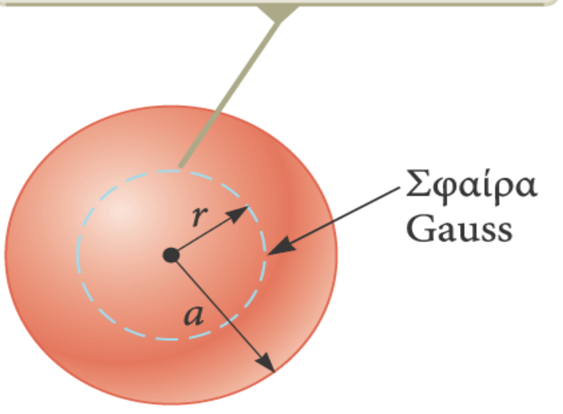
(B) Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο που βρίσκεται εντός της σφαίρας.

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα, με $r < \alpha$.

$q_{εντός} < Q$

$q_{εντός} = \rho V' = \rho\,(4/3\pi r^3)$

Για σημεία μέσα στη σφαίρα, σχεδιάζουμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss, μικρότερη από τη σφαίρα.



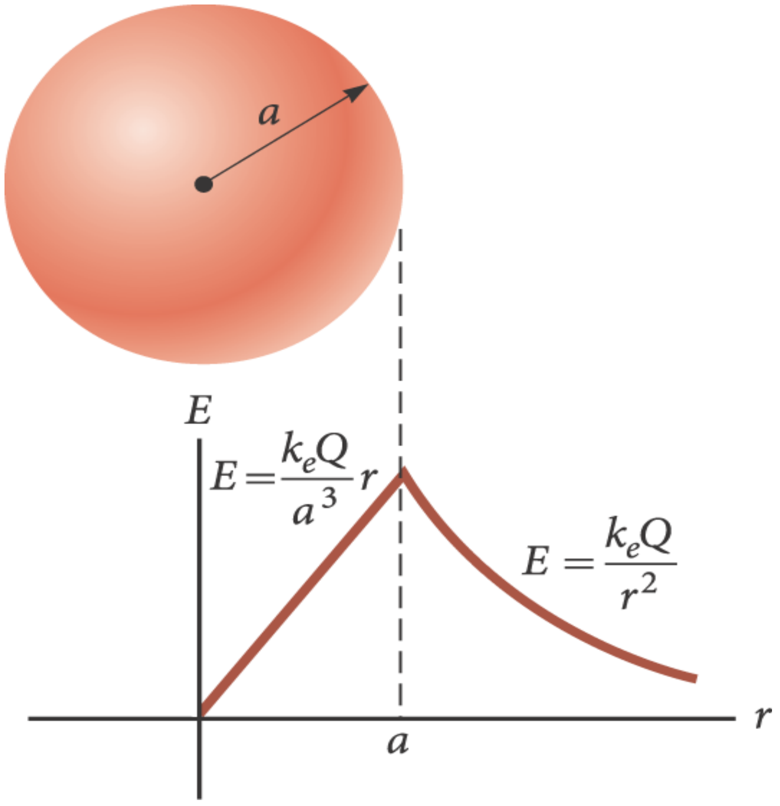
$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{εντός}}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{q_{εντός}}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} r$$

$$E = \frac{Q/\frac{4}{3}\pi\alpha^3}{3\left(1/4\pi k_e\right)} r = k_e \frac{Q}{\alpha^3} r$$

Ολοκλήρωση Αυτό το αποτέλεσμα για το E διαφέρει από εκείνο του πρώτου σκέλους. Δείχνει ότι $E \to 0$ όταν $r \to 0$. Άρα, το αποτέλεσμα εξαλείφει το πρόβλημα που θα υπήρχε στο $r = 0$ αν το E μεταβαλλόταν στο εσωτερικό της σφαίρας ανάλογα με την ποσότητα $1/r^2$, όπως δηλαδή έξω από τη σφαίρα. Δηλαδή, αν $E \propto 1/r^2$ για $r < a$, το πεδίο θα γινόταν άπειρο στο $r = 0$, κάτι που είναι αδύνατο από φυσικής άποψης.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου



- Στο εσωτερικό της σφαίρας, το *E* μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει του *r*.

$$E = \lim_{r \to a}\left(k_e \frac{Q}{a^3} r\right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

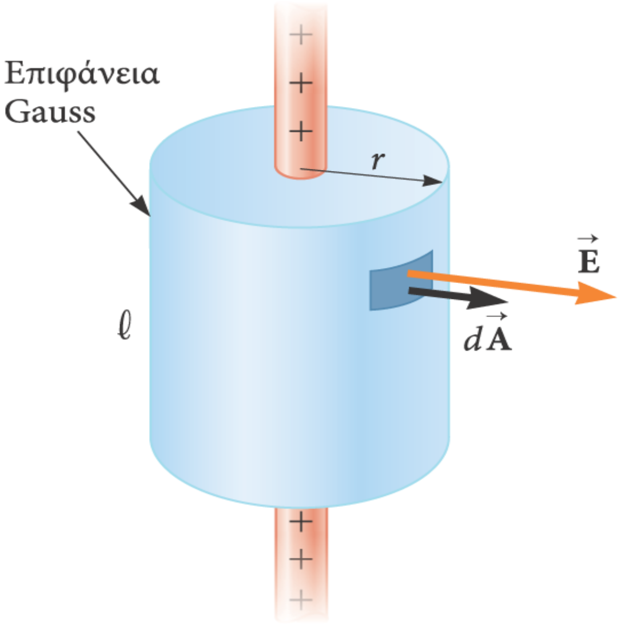
  - Καθώς η ακτίνα $r \to 0$, το πεδίο $E \to 0$.

$$E = \lim_{r \to a}\left(k_e \frac{Q}{r^2}\right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

- Το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας είναι το ίδιο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας.

Παράδειγμα Το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση *r* από μια φορτισμένη ευθεία

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση *r* από μια θετικά φορτισμένη ευθεία άπειρου μήκους και σταθερής γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ (Εικ. Η2.12α).



Επιλέγουμε μια κυλινδρική κατανομή φορτίου.

- Ο κύλινδρος έχει ακτίνα *r* και μήκος *ℓ*.

Στο καμπύλο τμήμα της επιφάνειας, το πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ έχει σταθερό μέτρο και είναι κάθετο στην επιφάνεια σε κάθε σημείο της.

Υπολογίζουμε το πεδίο χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss.

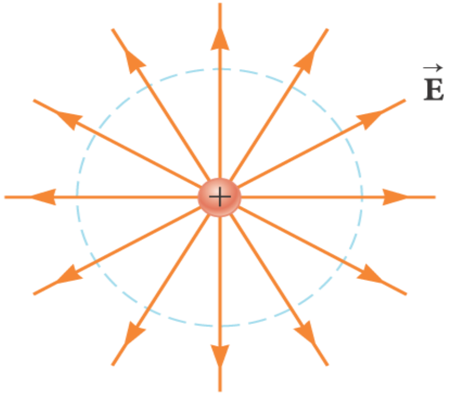
$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\,dA = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_o}$$

$$E\left(2\pi r \ell\right) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$

Η όψη από τη βάση του κυλίνδρου δείχνει ότι το πεδίο είναι κάθετο στην καμπύλη επιφάνεια.

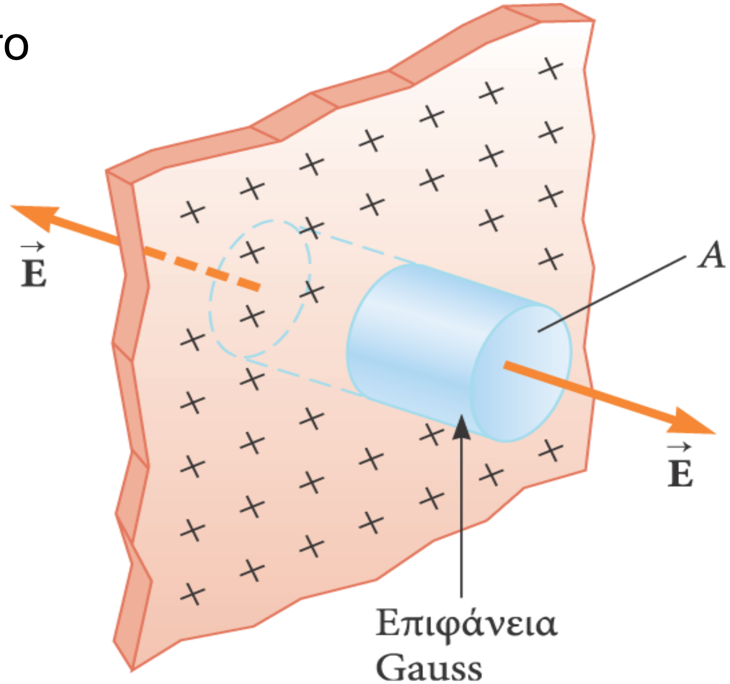
Η ροή που διέρχεται από τις βάσεις του κυλίνδρου είναι μηδενική, καθώς το πεδίο είναι παράλληλο με αυτές τις επιφάνειες.



Παράδειγμα Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτισμένο επίπεδο

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα θετικά φορτισμένο επίπεδο άπειρων διαστάσεων με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου *σ*.

- Το πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ πρέπει να είναι κάθετο στο επίπεδο και να έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από το επίπεδο
- Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν μικρό κύλινδρο με άξονα κάθετο στο φορτισμένο επίπεδο.
- Επειδή το πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$ είναι παράλληλο στην καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου, το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας δεν λαμβάνεται υπόψη στο επιφανειακό ολοκλήρωμα.
- Η ροή που διέρχεται από κάθε βάση του κυλίνδρου είναι *EA* οπότε η συνολική ροή είναι 2*EA.*



Το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια είναι *σA.*

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss:

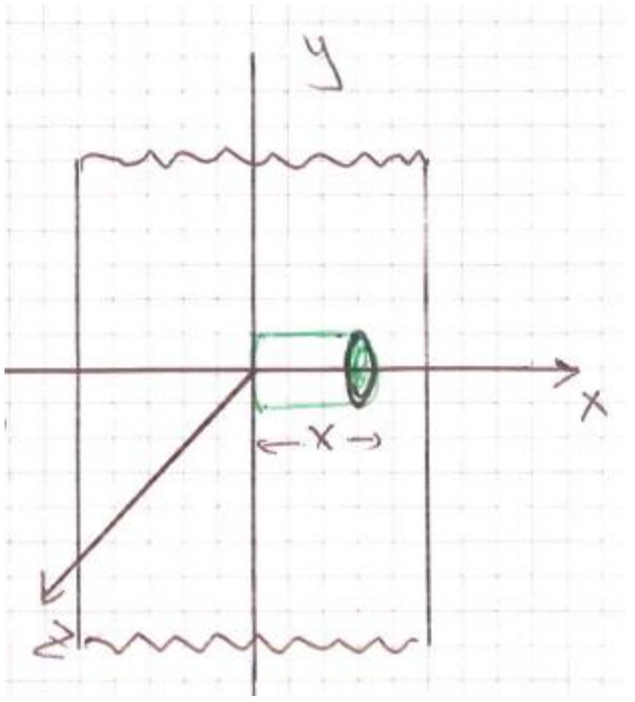
$$\Phi_E = 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_o} \quad \text{και} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$$

Παρατηρήστε ότι το πεδίο δεν εξαρτάται από την ακτίνα *r.*
Άρα το πεδίο είναι παντού ομογενές.

Παράδειγμα

Θ Ανασκόπηση. Μια πλάκα από μονωτικό υλικό (απείρων διαστάσεων στους άξονες *y* και *z*) έχει πάχος *d* και ομοιόμορφη θετική πυκνότητα φορτίου *ρ*. Στην Εικόνα Π Η2.59 βλέπετε μια πλάγια όψη της πλάκας. (α) Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση *x* από το κέντρο του και στο εσωτερικό της πλάκας είναι

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_o}$$



Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν μικρό κύλινδρο με άξονα κάθετο στο yz επίπεδο.
Λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν στο επίπεδο yz.
Το ηλεκτρικό πεδίο στη βάση του κυλίνδρου στο σημείο x

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E dA = \frac{q_{εντός}}{\epsilon_o}$$

$$EA = \frac{\rho(Ax)}{\epsilon_o} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho x}{\epsilon_o}}$$

$E = \rho x/\epsilon_0$. (β) **Κι αν...;** Υποθέστε ότι ένα ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$ και μάζα m_e μπορεί να μετακινείται ελεύθερα στο εσωτερικό της πλάκας. Το ηλεκτρόνιο αφήνεται ελεύθερο από κατάσταση ηρεμίας σε απόσταση x από το κέντρο. Δείξτε ότι το ηλεκτρόνιο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\rho}{m\varepsilon_0}}$$

Λύση

Ξέρουμε ότι $E = \dfrac{\rho x}{\epsilon_o}$

$$\sum F = m_e a \rightarrow a = \frac{-eE}{m} = \frac{-e}{m}\left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\right)$$

$$a = \left(\frac{-e\rho}{m\varepsilon_0}\right)x \rightarrow a = -\omega^2 x \qquad \text{όπου} \qquad \omega = \sqrt{\left(\frac{e\rho}{m\varepsilon_0}\right)}$$

Δ.Ε αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{e\rho}{m\varepsilon_0}}}$

Παράδειγμα

Ένας μονωτικός κύλινδρος, άπειρου μήκους και ακτίνας R, έχει χωρική πυκνότητα φορτίου που μεταβάλλεται ως συνάρτηση της ακτίνας ως εξής

$$\rho = \rho_0 \left(\alpha - \frac{r}{b} \right)$$

Όπου τα ρ_0, α, και b είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Προσδιορίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στις ακτινικές αποστάσεις
(α) r < R και (β) r > R.

Λύση

Η πυκνότητα φορτίου δεν είναι ομοιόμορφη, άρα ο νόμος του Gauss γράφεται ως

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$$

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο ακτίνα r και μήκος ℓ , και είναι ομοαξονική με το φορτίο διανομής.

Όταν r < R

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV \Rightarrow E\left(2\pi r \ell\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^r \left(\alpha - \frac{r}{b} \right) dV$$

Το στοιχείο του όγκου είναι κυλινδρικό κέλυφος $dV = 2\pi r \ell dr$

$$E(2\pi r\ell)=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^r\left(\alpha-\frac{r}{b}\right)2\pi r\ell dr$$

$E(2\pi r$ [redacted]

$$\Rightarrow \quad E(2\pi r\ell)=\frac{2\pi r^2\ell\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{r}{3b}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad E=\frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\left(\alpha-\frac{2r}{3b}\right)}$$

(β) Όταν r > R

$$E(2\pi r\ell)=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^R\left(\alpha-\frac{r}{b}\right)2\pi r\ell dr$$

$$\boxed{\Rightarrow E=\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\left(\alpha-\frac{2R}{3b}\right)}$$

Οι ιδιότητες ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

1. Όταν δεν υπάρχει κίνηση φορτίου σε έναν αγωγό, τότε λέμε ότι ο αγωγός είναι σε **ηλεκτροστατική ισορροπία**.
   - Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν σε κάθε σημείο του εσωτερικού του αγωγού.
   - Είτε ο αγωγός είναι κοίλος είτε συμπαγής.
2. Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, τότε αυτό βρίσκεται στην επιφάνειά του.
3. Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο που βρίσκεται ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο σ/ϵ_o.
   - Όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στο συγκεκριμένο σημείο.
4. Σε έναν αγωγό με ακανόνιστο σχήμα, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της σε θέσεις όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι ελάχιστη.

Ιδιότητα 1: Πεδίο$_{εντός}$ = 0

Θεωρούμε μια αγώγιμη πλάκα σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.

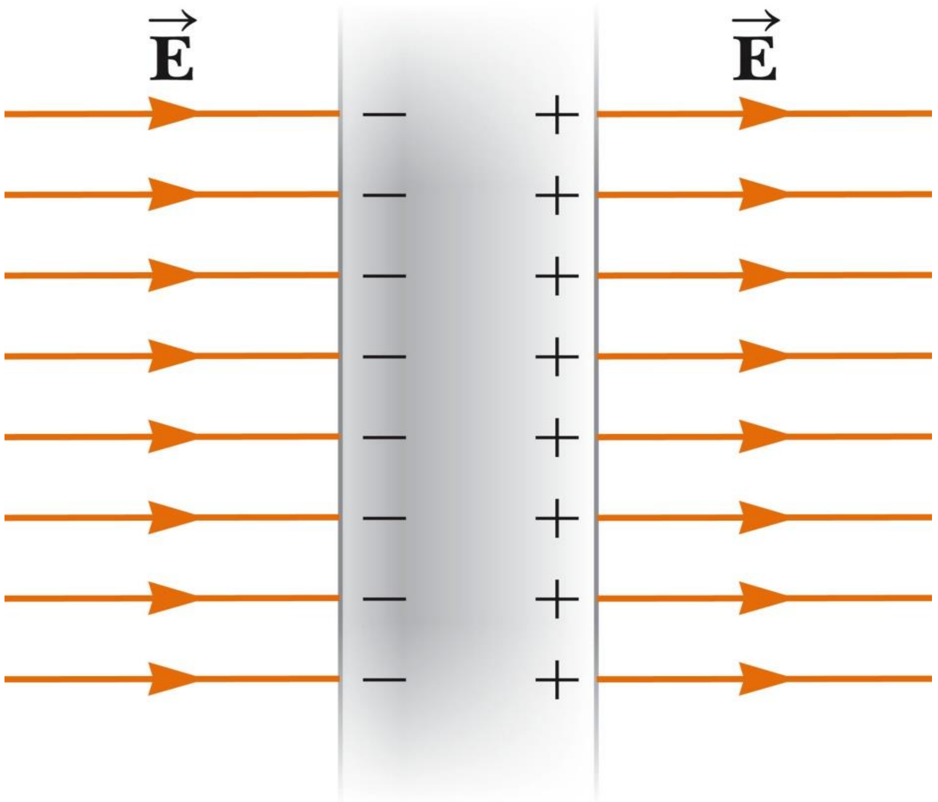
Αν το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού **ήταν μη μηδενικό**, τότε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού θα δέχονταν μια ηλεκτρική δύναμη

($\vec{F} = q\vec{E}$).

Τα ηλεκτρόνια αυτά θα επιταχύνονταν.

Τα ηλεκτρόνια δεν θα βρίσκονταν σε ισορροπία.

Επομένως, στο εσωτερικό του αγωγού **δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο (** $\vec{E} = 0$ **)**.

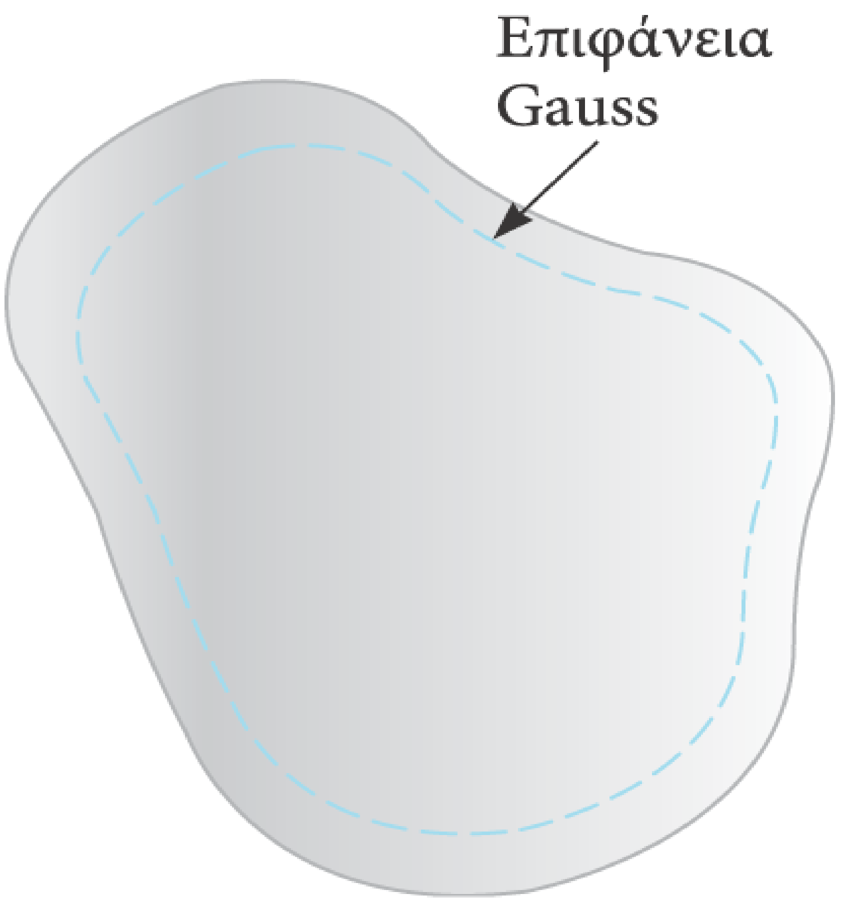


Ιδιότητα 1: Πεδίο$_{\text{εντός}}$ = 0 (*συνέχεια*)

- Πριν από την εφαρμογή του εξωτερικού πεδίου, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα σε ολόκληρο τον αγωγό.
- Όταν εφαρμοστεί το εξωτερικό πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ανακατανέμονται μέχρι το μέτρο του εσωτερικού πεδίου να είναι ίσο με το μέτρο του εξωτερικού πεδίου.
- Στο εσωτερικό του αγωγού, το συνολικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν.
- Η ανακατανομή γίνεται μέσα σε 10^{-16} s και μπορεί να θεωρηθεί ακαριαία.
- Αν ο αγωγός είναι κοίλος, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι επίσης ίσο με μηδέν.
  - Είτε θεωρήσουμε σημεία επάνω στον αγωγό είτε σημεία της κοιλότητας εντός του αγωγού.

Ιδιότητα 2: Το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού

- Επιλέγουμε μια επιφάνεια Gauss που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού, αλλά κοντά στην πραγματική επιφάνεια.
- Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι ίσο με μηδέν (ιδιότητα 1).
- Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με μηδέν.
- Εφόσον μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια Gauss βρίσκεται οσοδήποτε κοντά στην πραγματική επιφάνεια, συνεπάγεται ότι στο εσωτερικό της επιφάνειας δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο.



Ιδιότητα 2: Το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού (*συνέχεια*)

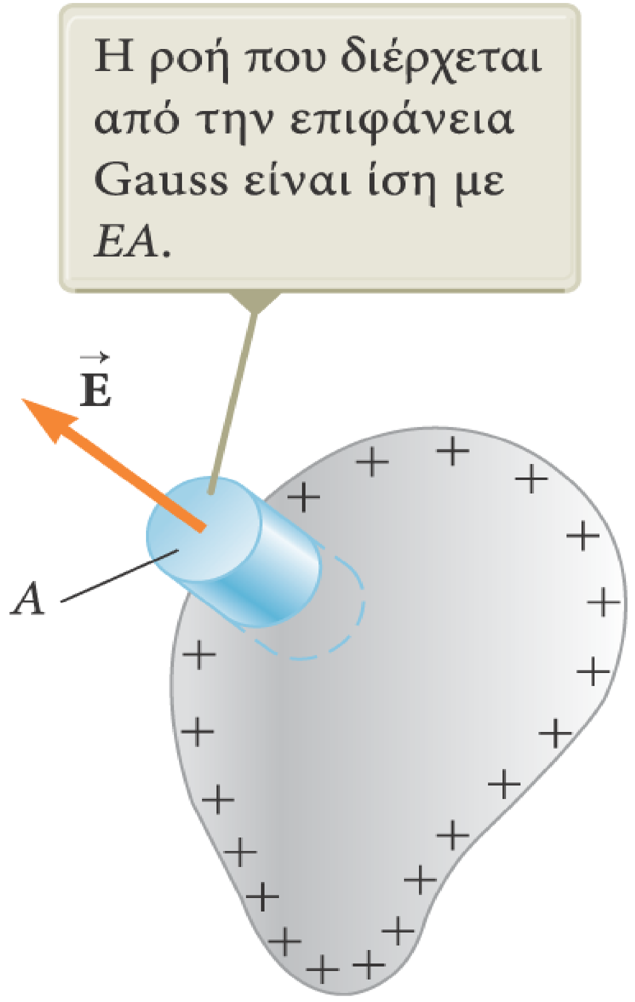
- Εφόσον λοιπόν δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας, το όποιο συνολικό φορτίο φέρει ο αγωγός πρέπει να βρίσκεται **επάνω** στην επιφάνειά του.
- Ο νόμος του Gauss δεν επισημαίνει πώς κατανέμεται αυτό το φορτίο, αλλά μόνο ότι πρέπει να βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού.

Ιδιότητα 3: Το μέτρο και η κατεύθυνση του πεδίου

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gausss έναν κύλινδρο.

Το πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια.

- Αν το $\vec{\mathbf{E}}$ είχε παράλληλη συνιστώσα, τότε τα φορτία θα δέχονταν μια δύναμη, θα επιταχύνονταν επί της επιφάνειας και, επομένως, δεν θα βρίσκονταν σε ισορροπία.



Ιδιότητα 3: Το μέτρο και η κατεύθυνση του πεδίου (*συνέχεια*)

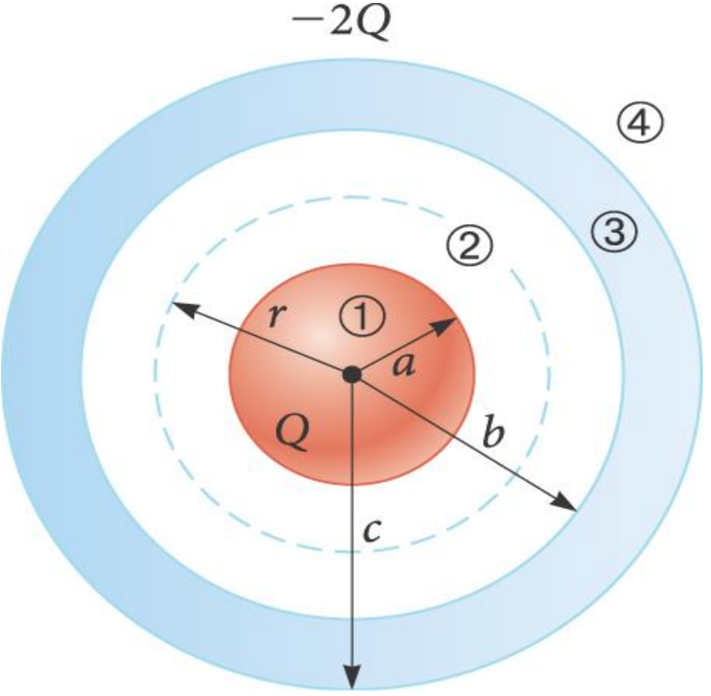
- Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με εκείνη που διέρχεται μόνο από την επίπεδη βάση που βρίσκεται εκτός του αγωγού.
  - Το πεδίο σε αυτό το σημείο είναι κάθετο στην επιφάνεια.
- Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss:

$$\Phi_E = EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_o} \quad \text{και} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_o}$$

Παράδειγμα

Σφαίρα και σφαιρικό κέλυφος

Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας a φέρει θετικό συνολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα στον όγκο της. Ένα αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής ακτίνας c είναι ομόκεντρο με τη συμπαγή σφαίρα και φέρει συνολικό φορτίο $-2Q$. Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές ①, ②, ③, και ④ της Δυναμικής Εικόνας Η2.17, καθώς και την κατανομή φορτίου στο κέλυφος όταν ολόκληρο το σύστημα είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία.



Μοντελοποίηση

- Αυτό το παράδειγμα είναι παρόμοιο με εκείνο της σφαίρας.
- Σε αυτή την περίπτωση, μια φορτισμένη σφαίρα περιβάλλεται από ένα κέλυφος.
- Προσέξτε τα φορτία.

Κατηγοριοποίηση

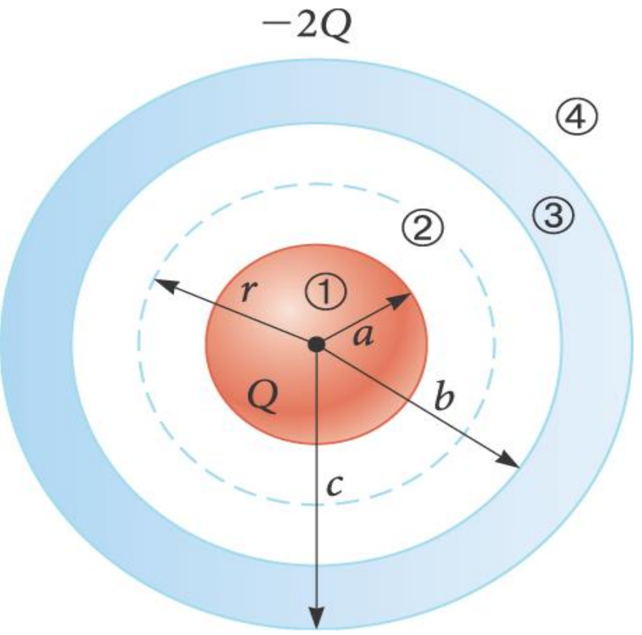
- Το σύστημα έχει σφαιρική συμμετρία.
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.

Ανάλυση

- Σχεδιάστε μια σφαίρα Gauss μεταξύ της επιφάνειας της συμπαγούς σφαίρας και της εσωτερικής επιφάνειας του κελύφους.
  - Περιοχή 2
  - $a < r < b$
  - Το φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας είναι $+Q$.

- Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω και το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό μέτρο επάνω στην επιφάνεια Gauss.
- Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε περιοχή.

Για r < α: Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα, με $r < \alpha$.



$q_{εντός} < Q$, $\quad q_{εντός} = \rho V' = \rho\,(4/3\pi r^3)$

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{εντός}}{\epsilon_o}$$

$$E_1 = \frac{q_{εντός}}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} r \quad \Rightarrow E_1 = \frac{Q / \frac{4}{3}\pi\alpha^3}{3\left(1/4\pi k_e\right)} r = k_e \frac{Q}{\alpha^3} r$$

Για (α< r < b):

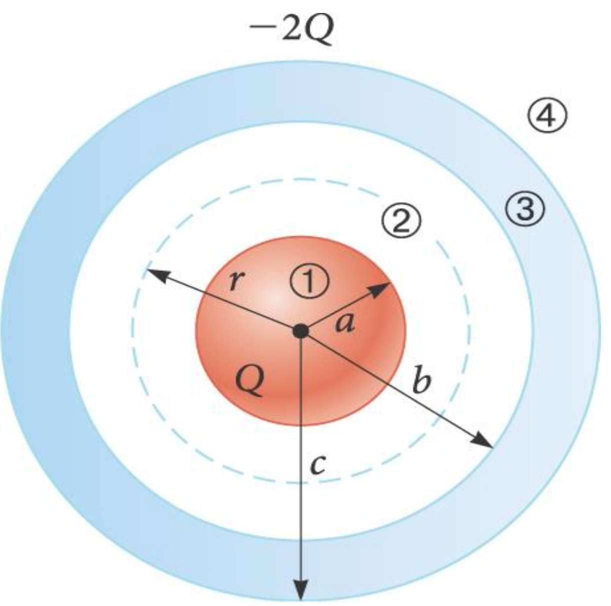
$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E dA = \frac{Q_{εντός}}{\epsilon_o}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E \oint dA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

$E_3 = 0 \quad (για\ b < r < c)$ ⟹ Το σφαιρικό κέλυφος είναι αγωγός σε ισοορροπία

$E_4 = -k_e \dfrac{Q}{r^2} \quad (για\ r > c)$ ⟹ Το συνολικό φορτίο $q_{εντός}$= Q + (-2Q) = -Q

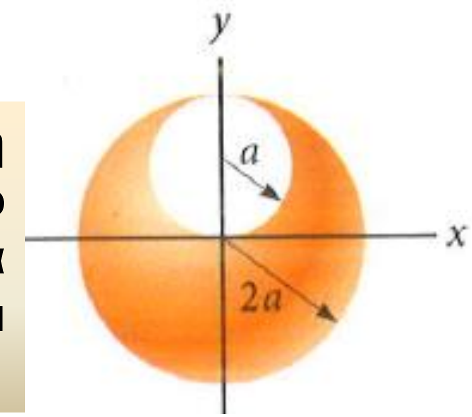


- Το συνολικό φορτίο. $q_{εντός} = q_{σφαίρας} + q_{εσωτερικό}$
- Σκεφτείτε άλλους πιθανούς συνδυασμούς.
- Τι θα συνέβαινε αν η σφαίρα ήταν αγώγιμη αντί για μονωτική;

$$q_{εσωτερικό} = q_{εντός} - q_{σφαίρας} = 0 – Q = -Q$$

Απάντηση Η μοναδική αλλαγή θα εντοπιζόταν στην περιοχή ①, όπου $r < a$. Επειδή μέσα σε έναν αγωγό που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο, $q_{εντός} = 0$ για μια επιφάνεια Gauss ακτίνας $r < a$· άρα, λόγω του νόμου του Gauss και λόγω συμμετρίας, $E_1 = 0$. Στις περιοχές ②, ③, και ④, δεν θα υπήρχε τρόπος να προσδιορίσουμε αν η σφαίρα είναι αγώγιμη ή μονωτική από μετρήσεις του ηλεκτρικού πεδίου.

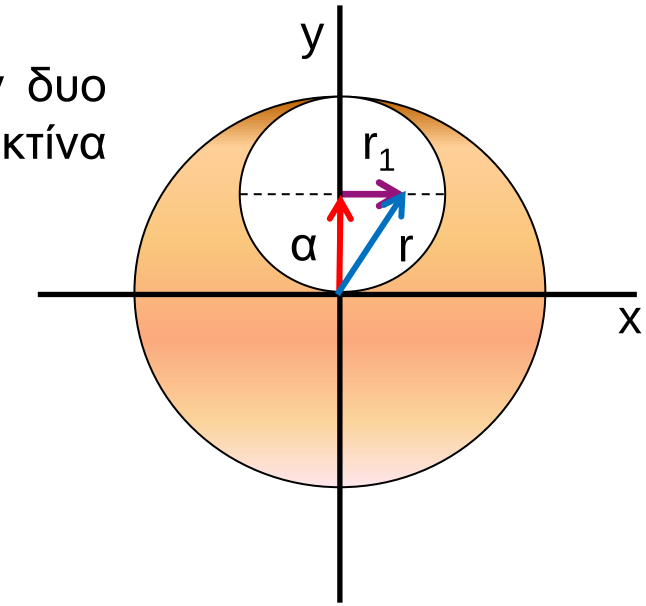
Παράδειγμα



Μία σφαίρα ακτίνας 2α αποτελείται από ένα μη αγώγιμο υλικό με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Υποθέστε ότι το υλικό δεν επηρεάζει το ηλεκτρικό πεδίο. Κατόπιν δημιουργείται στη σφαίρα μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας α. δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα είναι ομογενές και ισούται με $E_x = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \; E_y = \rho\alpha / 3\varepsilon_0$

Λύση

Το πεδίο που προκύπτει μέσα στην κοιλότητα είναι η υπέρθεση των δυο πεδίων, ένας E^+ οφείλεται σε μια ομοιόμορφη σφαίρα θετικού φορτίου ακτίνα 2 α και το άλλο E^- οφείλεται σε σφαίρα αρνητικού φορτίου με ακτίνα α.



(1) $$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E^+ \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow E^+ \left(4\pi r^2\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi r^3 \rho}{\epsilon_o}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow E^+ = \frac{\rho r}{3\epsilon_o}\hat{r} = \frac{\rho r}{3\epsilon_o}}$$

(2) $$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E^- \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$\Rightarrow E^- \left(4\pi r_1^2\right) = -\frac{4}{3}\left(\frac{\pi r_1^3 \rho}{\epsilon_o}\right)$$

$$\Rightarrow E^- = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_o}\left(-\hat{r}_1\right) = -\frac{\rho r_1}{3\epsilon_o}$$

και $\vec{r} = \vec{\alpha} + \vec{r}_1$

$$\boxed{E^- = -\frac{\rho\left(r-\alpha\right)}{3\epsilon_o}}$$

άρα $$E = E^+ + E^- = \frac{\rho r}{3\epsilon_o} - \frac{\rho r}{3\epsilon_o} + \frac{\rho \alpha}{3\epsilon_o} = 0\hat{i} + \frac{\rho\alpha}{3\epsilon_o}\hat{j}$$

$$\boxed{E_x = 0 \qquad E_y = \frac{\rho\alpha}{3\epsilon_o}}$$