9.4 Απορρόφηση και διασπορά

9.4.1 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε αγωγούς

$$\Sigma\tau\eta\nu\ \pi\alpha\rho o\upsilon\sigma\acute{\iota}\alpha\ \alpha\gamma\omega\gamma\acute{\omega}\nu: \begin{cases} \Pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \varepsilon\lambda\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\varepsilon\rho\omega\nu\ \varphi o\rho\tau\acute{\iota}\omega\nu\ \rho_f \\ \Pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \varepsilon\lambda\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\varepsilon\rho\omega\nu\ \rho\varepsilon\upsilon\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\ J_f \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{J}_f = \sigma\vec{E}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(i)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\mathcal{E}}, \quad (iii)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &(ii)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad (iv)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\underbrace{\sigma\vec{E}}_{\vec{J}_f} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}} \qquad (9.118)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_f = -\frac{\partial\rho_f}{\partial t} \rightarrow E\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\alpha\varsigma$$

$$\rightarrow \frac{\partial\rho_f}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\sigma\vec{E}\right) = -\sigma\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_f$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\rho_f(0)} \rightarrow E\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\omega\sigma\eta\ \varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\upsilon$$

$$\tau \equiv (\varepsilon/\sigma) \rightarrow \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \text{"}\pi o\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma\text{"}\ \alpha\gamma\omega\gamma o\acute{\upsilon}$$

$\sigma = \infty \quad \rightarrow \quad \tau \simeq 0 \quad \rightarrow$ Ιδανικός Αγωγός

$\tau \ll \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{T}{2\pi} \quad \rightarrow$ Καλός Αγωγός

$\tau \gg \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{T}{2\pi} \quad \rightarrow$ Κακός Αγωγός

$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \tau \rightarrow \infty \quad \rightarrow$ Μονωτής

$$\xrightarrow{\rho_f=0}\begin{cases} (i)\ \ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0, \quad (iii)\ \ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ (ii)\ \ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \quad (iv)\ \ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\sigma\vec{E} \end{cases} \qquad (9.121)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \nabla^2\vec{E} &= \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla^2\vec{B} &= \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (9.122) \xrightarrow{\text{ΛΥΣΕΙΣ}} \left\{\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}(z,t) &= \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \\ \tilde{\vec{B}}(z,t) &= \tilde{\vec{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \end{aligned}\right\} \quad (9.123)$$

Επίπεδα Κύματα

$$\begin{cases} \text{Μιγαδικός κυματάριθμος} \\ \tilde{k}^2=\mu\varepsilon\omega^2+i\mu\sigma\omega \end{cases}$$

$$\tilde{k}=k_a+ik_b=\left|\tilde{k}\right|e^{i\phi}=Ke^{i\phi}$$

$$\Rightarrow k_{a,b}=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\pm 1\right]^{1/2}$$

$$k = a + ib \Rightarrow k^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$= \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \begin{cases} a^2 - b^2 = \mu\varepsilon\omega^2 (1) \\ b = \dfrac{\mu\sigma\omega}{2a} \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} a^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4a^2} - \mu\varepsilon\omega^2 = 0 \Rightarrow 4a^4 - 4\mu\varepsilon\omega^2 a^2 - \mu^2\sigma^2\omega^2 = 0$$

$$\left\{\begin{matrix} A = 4 \\ B = -4\mu\varepsilon\omega^2 \\ C = -\mu^2\sigma^2\omega^2 \\ a^2 = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{Ax^2 + Bx + C = 0} \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ a^2 = \dfrac{4\mu\varepsilon\omega^2 \pm \sqrt{16\mu^2\varepsilon^2\omega^4 + 16\mu^2\sigma^2\omega^2}}{\mathbf{8}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2(>0) = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a \equiv k_a = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}}$$

$$2) \Rightarrow b \equiv k_b = \frac{\mu\sigma\omega}{2\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right)^{1/2}} \xrightarrow{t=1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}$$

$$\rightarrow k_b = \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{t}-1}}{\sqrt{1+\sqrt{t}}\sqrt{\sqrt{t}-1}} = \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{t}-1}}{\sqrt{t-1}} =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{t}-1}}{\sigma/\varepsilon\,\omega} = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{t}-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_b = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right)^{1/2}}$$

$$\xrightarrow{\text{Πεδία με απόσβεση}} \begin{cases} \tilde{\vec{E}}(z,t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-k_b z} e^{i(k_a z - \omega t)} \\ \tilde{\vec{B}}(z,t) = \tilde{\vec{B}}_0 e^{-k_b z} e^{i(k_a z - \omega t)} \end{cases} \quad (9.127)$$

$$\begin{cases} \text{Απόσταση που το πλάτος μειώνεται κατά } 1/e \\ d = \left(\dfrac{1}{k_b}\right) \quad (9.128) \rightarrow \text{Επιδερμικό φαινόμενο} \end{cases}$$

$$k_a \rightarrow \text{καθορίζει τις φυσικές ποσότητες: } \lambda = \frac{2\pi}{k_a} \quad \omega = \upsilon k_a \quad \upsilon = \frac{c}{n}$$

$$\begin{cases} \text{Κακός αγωγός: ισχύει } \omega \gg \dfrac{\sigma}{\varepsilon} \text{ ή } \sigma \ll \varepsilon\omega \text{ (δηλ, υψηλές συχνότητες)} \\ \Rightarrow \boxed{k_a \cong \omega\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad k_b = \dfrac{1}{d} \cong \dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}} \end{cases}$$

Καλός μονωτής

$$\begin{cases} \text{Καλός αγωγός: ισχύει } \omega \ll \dfrac{\sigma}{\varepsilon} \text{ ή } \sigma \gg \varepsilon\omega \text{ (δηλ, χαμηλές συχνότητες)} \\ \Rightarrow \boxed{k_a \cong k_b \cong \sqrt{\dfrac{\omega\sigma\mu}{2}} = \dfrac{1}{d}} \quad (d \propto \omega^{-1/2}), \quad \upsilon = \dfrac{\omega}{k} \simeq \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\sigma}} \end{cases}$$

Καλός αγωγός

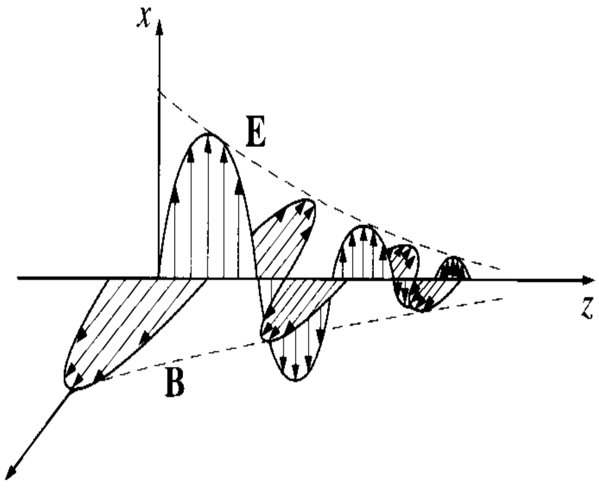
$$d \approx \frac{\lambda}{2\pi}$$

Μονοχρωματικά κύματα σε αγώγιμα μέσα

$\vec{E} \rightarrow$ *πολωμένο στον άξονα* x:

$$\Rightarrow \vec{\tilde{E}}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{-k_b z} e^{i(k_a z - \omega t)} \hat{x} \quad (9.130)$$

$$(iii) \Rightarrow \vec{\tilde{B}}(z,t) = \left(\frac{\tilde{k}}{\omega}\right) \tilde{E}_0 e^{-k_b z} e^{i(k_a z - \omega t)} \hat{y} \quad (9.131)$$



$$\tilde{k} = k_a + i k_b = K e^{i\phi} \quad , \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{k_b}{k_a}\right)$$

$$\Rightarrow K = |\tilde{k}| = \sqrt{k_a^2 + k_b^2} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{k_a = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{k_b = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right)^{1/2}}$$

$$\tilde{E} = E_o e^{i\delta_E} \qquad \tilde{B} = B_o e^{i\delta_B}$$

$$B_o e^{i\delta_B} = \frac{|\tilde{k}| e^{i\phi}}{\omega} E_o e^{i\delta_E} \quad \boxed{\rightarrow \frac{B_o}{E_o} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\mu\varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}} \Rightarrow$$

$\delta_B - \delta_E = \phi \rightarrow$ *καθυστέρηση μαγνητικού πεδίου*

Πραγματικά E *και* B *πεδία*

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-k_b z} \cos(k_a z - \omega t + \delta_E) \hat{x} \quad (9.138)$$

$$\vec{B}(z,t) = \left(\frac{K}{\omega}\right) E_0 e^{-k_b z} \cos(k_a z - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{y}$$

Μονοχρωματικά κύματα σε αγώγιμα μέσα

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)$$

Η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$= \frac{1}{2}E_o^2 e^{-2k_b z}\left[\varepsilon \cos^2\left(k_a z - \omega t + \delta_E\right) + \frac{K^2}{\mu\omega^2}\cos^2\left(k_a z - \omega t + \delta_E + \varphi\right)\right]$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon E_o^2 e^{-2k_b z}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right] = \boxed{\frac{k_a^2}{2\mu\omega^2}E_o^2 e^{-2k_b z}} \qquad < \cos^2() >= \frac{1}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \quad \textit{το διάνυσμα Poynting}$$

$$= \frac{K}{\mu\omega}E_o^2 e^{-2k_b z}\left[\cos\left(k_a z - \omega t + \delta_E\right)\cos\left(k_a z - \omega t + \delta_E + \phi\right)\right]\hat{z}$$

$$\rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{K}{\mu\omega}E_o^2 e^{-2k_b z}\left\langle \cos\left(k_a z - \omega t + \delta_E\right)\cos\left(k_a z - \omega t + \delta_E + \phi\right)\right\rangle \hat{z}$$

$$< > = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos\left(\theta + \phi\right)d\theta = \frac{1}{2}\cos\phi$$

$$\rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\frac{K\cos\phi}{\mu\omega}E_o^2 e^{-2k_b z}\hat{z} \xrightarrow{k_a = K\cos\phi} \boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\frac{k_a}{\mu\omega}E_o^2 e^{-2k_b z}\hat{z}} \Rightarrow \boxed{I = \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = \frac{k_a}{2\mu\omega}E_o^2 e^{-2k_b z}}$$

Το Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

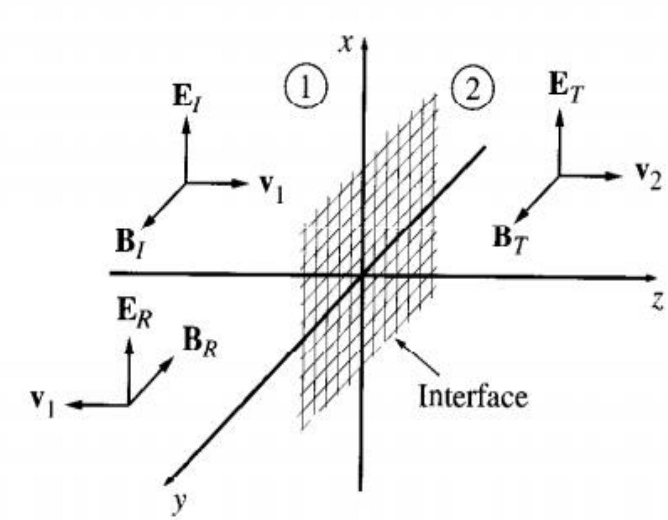
Συχνότητα (Hz)	Όνομα της ακτινοβολίας	Μήκος κύματος (m)
10^{22} –	Ακτίνες γάμμα	-10^{-13}
10^{21} –		-10^{-12}
10^{20} –		-10^{-11}
10^{19} –	Ακτίνες X	-10^{-10}
10^{18} –		-10^{-9}
10^{17} –	Υπεριώδες	-10^{-8}
10^{16} –		-10^{-7}
10^{15} –	Ορατό	-10^{-6}
10^{14} –	Υπέρυθρο	-10^{-5}
10^{13} –		-10^{-4}
10^{12} –		-10^{-3}
10^{11} –	**(microwave)** Μικροκύματα	-10^{-2}
10^{10} –		-10^{-1}
10^{9} –	TV, FM	-1
10^{8} –		-10
10^{7} –	**(AM)** Μεσαία κύματα	-10^{2}
10^{6} –		-10^{3}
10^{5} –	**(RF)** Ραδιοσυχνότητες	-10^{4}
10^{4} –		-10^{5}
10^{3} –		

Ορατό Φάσμα

Χρώμα	Μήκος κύματος (m)	Συχνότητα (Hz)
Εγγύς υπεριώδες	$3,0 \times 10^{-7}$	$10,0 \times 10^{14}$
Ελάχιστο ορατό κυανό μήκος κύματος	$4,0 \times 10^{-7}$	$7,5 \times 10^{14}$
Κυανό (μπλε)	$4,6 \times 10^{-7}$	$6,5 \times 10^{14}$
Πράσινο	$5,4 \times 10^{-7}$	$5,6 \times 10^{14}$
Κίτρινο	$5,9 \times 10^{-7}$	$5,1 \times 10^{14}$
Πορτοκαλί	$6,1 \times 10^{-7}$	$4,9 \times 10^{14}$
Μέγιστο ορατό ερυθρό μήκος κύματος	$7,6 \times 10^{-7}$	$3,9 \times 10^{14}$
Εγγύς υπέρυθρο	$10,0 \times 10^{-7}$	$3,0 \times 10^{14}$

9.4.2 Ανάκλαση και μετάδοση σε αγώγιμη επιφάνεια

$$\left.\begin{cases} \underbrace{\Pi\rho o\sigma\pi \acute{\iota}\pi\tau o\nu} \\ \vec{\tilde{E}}_I(z,t) = \vec{\tilde{E}}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{x} \\ \vec{\tilde{B}}_I(z,t) = \vec{B}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{y} = \frac{1}{\upsilon_1}\tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{y} \end{cases}\right\} \quad (9.140)$$



$$\begin{cases} \underbrace{A\nu\alpha\kappa\lambda \acute{\omega}\mu\varepsilon\nu o} \\ \vec{\tilde{E}}_R(z,t) = \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)}\hat{x} \\ \vec{\tilde{B}}_R(z,t) = -\frac{1}{\upsilon_1}\tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)}\hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{M\varepsilon\tau\alpha\delta\iota\delta \acute{o}\mu\varepsilon\nu o} \\ \vec{\tilde{E}}_T(z,t) = \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)}\hat{x} \\ \vec{\tilde{B}}_T(z,t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega}\tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)}\hat{y} \\ \tilde{k}_2 = k_{2a} + ik_{2b} \rightarrow \mu\iota\gamma\alpha\delta\iota\kappa \acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu \acute{o}\varsigma \end{cases}$$

Που έχει απόσβεση καθώς διεισδύει στον αγωγό

Συνοριακές Συνθήκες:

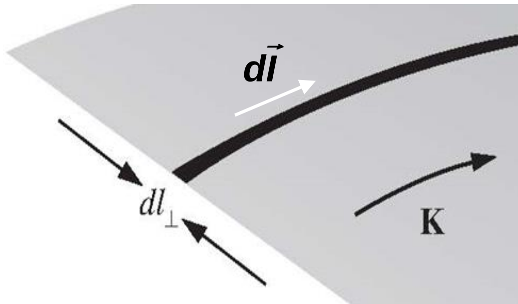
Συνοριακές συνθήκες σε αγώγιμη επιφάνεια

$(i)\quad \varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_f \qquad (iii)\quad \vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$

$(ii)\quad B_{1\perp} = B_{2\perp} \qquad (iv)\quad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$

$\boxed{\sigma = \frac{dq}{d\alpha'}}$

σ_f: η πυκνότητα του ελεύθερου επιφανειακού φορτίου
$\vec{K}_f$: η πυκνότητα του ελεύθερου επιφανειακού ρεύματος



$\boxed{\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{d\ell_\perp}}$

Στο επίπεδο $\chi = 0$:

$E_\perp = 0 \rightarrow (i) \Rightarrow \sigma_f = 0$

$B_\perp = 0 \rightarrow (ii) \Rightarrow$ *ισχύει αυτόματα*

$$(iii) \rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T}} \qquad (9.143)$$

$$(iv) \rightarrow \xrightarrow{K_f = 0} \frac{1}{\mu_1 \upsilon_1}\left(\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R}\right) - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega_2}\tilde{E}_{0_T} = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \tilde{\beta}\tilde{E}_{0_T}} \qquad (9.145)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\beta} = \frac{\mu_1 \upsilon_1 \tilde{k}_2}{\mu_2 \omega}} \qquad (9.146)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0_R} = \left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left(\frac{2}{1+\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0_I}} \qquad (9.147)$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \tau\acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\iota o\ \alpha\gamma\omega\gamma\acute{o}\left[\left(\sigma \to \infty, \xrightarrow{(9.126)} \tilde{k}_2 \to \infty\right) \Rightarrow \beta \to \infty\right]:$$

$$\Rightarrow\ \tilde{E}_{0_R} = -\tilde{E}_{0_I} \qquad \tilde{E}_{0_T} = 0 \qquad (9.148)$$

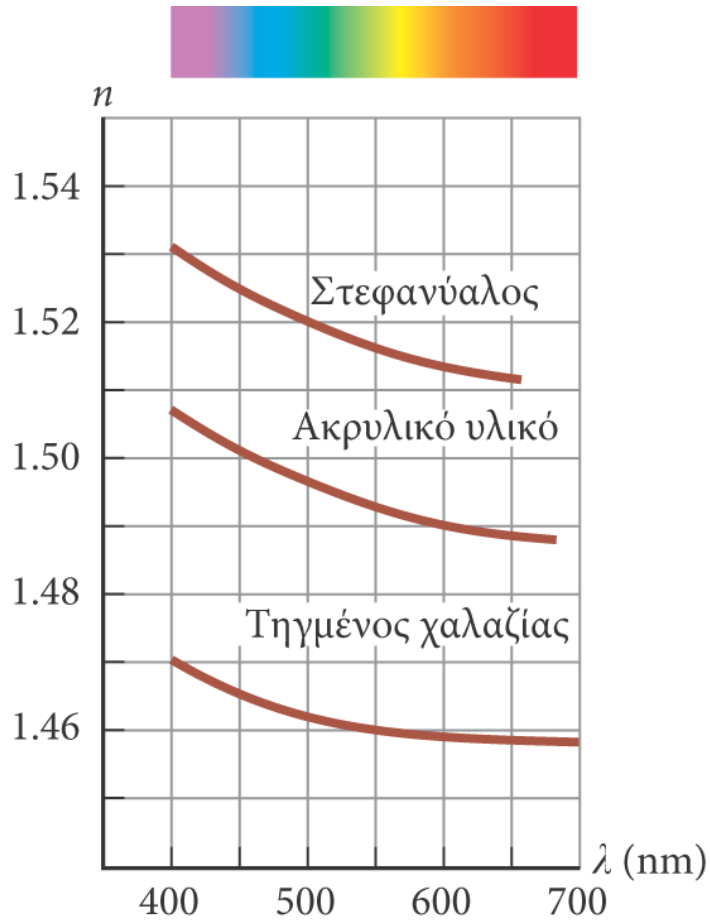
Κύμα υφίσταται ολική ανάκλαση με $\phi = 180^0$

Καλός αγωγός: ισχύει $\omega \ll \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ ή $\sigma \gg \varepsilon\omega$

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0_R}}{E_{0_I}}\right)^2 = \left|\frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}\right|^{\mathbf{2}} = \left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}\right)\left(\frac{1-\widetilde{\beta^*}}{1+\widetilde{\beta^*}}\right)$$

Διασπορά

- Για ένα δεδομένο υλικό, ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται συναρτήσει του μήκους κύματος του φωτός το οποίο διέρχεται από το υλικό.
- Αυτή η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης *n* από το μήκος κύματος του φωτός *λ* ονομάζεται *διασπορά*.
- Σύμφωνα με τον νόμο της διάθλασης του Snell, όταν σε ένα διαθλαστικό υλικό προσπίπτει φως με διαφορετικά μήκη κύματος, τότε εκτρέπεται υπό διαφορετικές γωνίες.
- Γενικά, ο δείκτης διάθλασης ενός υλικού μειώνεται όταν αυξάνεται το μήκος κύματος του φωτός.



9.4 Απορρόφηση και διασπορά

9.4.3 Εξάρτηση από τη συχνότητα των ε, μ και σ.

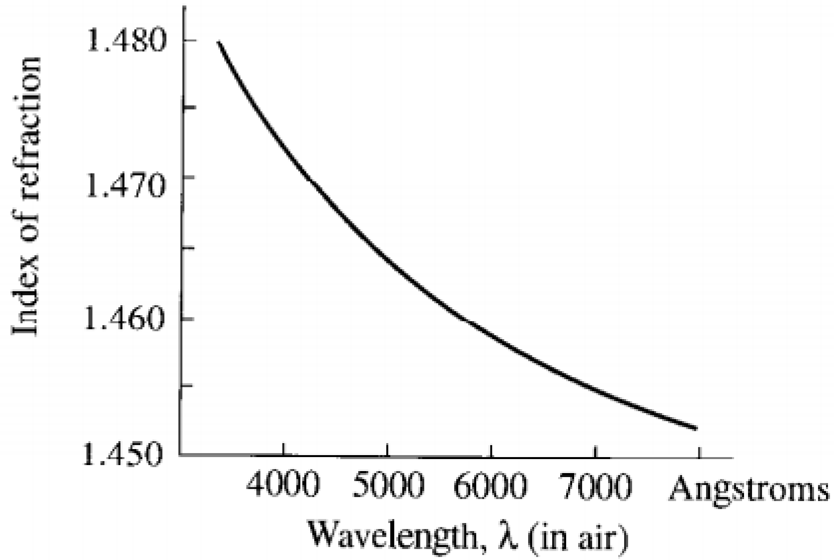
Μή αγώγιμα υλικά

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \rightarrow \sigma\tau\alpha\theta.?$$

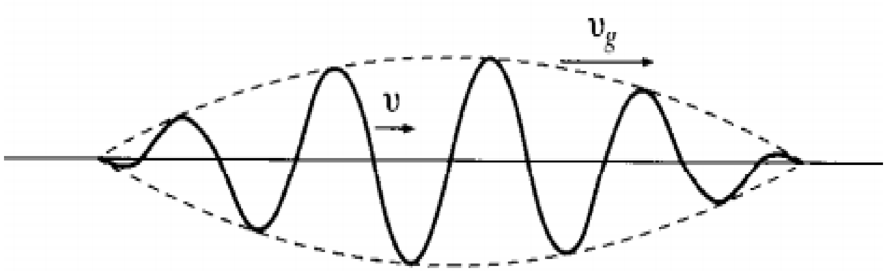
$$\eta = \frac{c}{\upsilon} \sim \sqrt{\varepsilon\mu} \rightarrow \sigma\tau\alpha\theta?$$

$$\xrightarrow{\text{Αλλά συνήθως}}$$

$$n = F(\omega)$$
$$\varepsilon = f(\omega)$$
$$\mu = \varphi(\omega)$$
$$\sigma = \Phi(\omega)$$



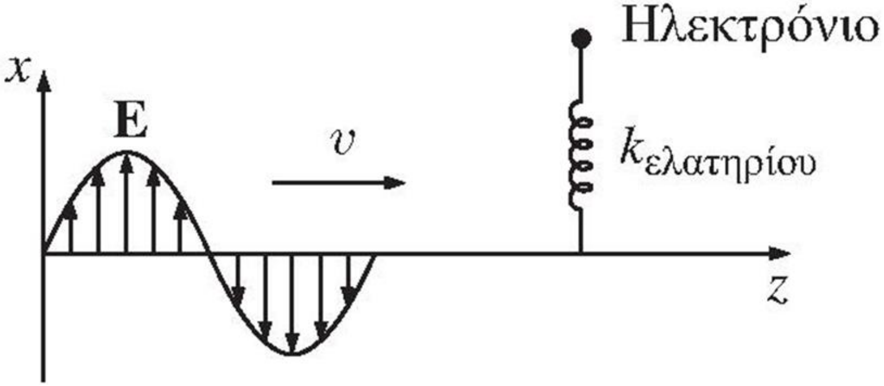
Επειδή τα κύματα διαφορετικών συχνοτήτων κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες σε ένα μέσο διασποράς, μια κυματομορφή που είναι επαλληλία κυμάτων ποικίλων συχνοτήτων αλλάζει σχήμα καθώς προχωρά.



$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \rightarrow \text{φασική ταχύτητα}$$

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \rightarrow \text{ταχύτητα ομάδας}$$

Διασπορά σε Μη Αγώγιμα Υλικά



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{ελατ}}{m}} = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$$

$\omega_0 \rightarrow$ *φυσική συχνότητα ταλάντωσης*

- Τα ηλεκτρόνια ενός μη αγώγιμου υλικού είναι προσκολλημένα σε συγκεκριμένα μόρια μέσω πολύπλοκων συνδετικών δυνάμεων.
- Κάθε ηλεκτρόνιο είναι προσκολλημένο στο άκρο ενός ελατηρίου

$F_1 \equiv F_{δεσμού} = -k_{ελατ}x \equiv -m\omega_0^2\boldsymbol{x}$ →Δύναμη επαναφοράς (Δεσμός μορώου)

- Καθώς το ηλεκτρόνιο ταλαντώνεται, θα υποθέσουμε ότι ασκείται πάνω του κάποια δύναμη απόσβεσης

$F_2 \equiv F_{απόσβεσης} = -m\gamma\frac{dx}{dt}$ →Δύναμη απόσβεσης (ακτινοβολία)

- Παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας ω, πολωμένου στην διεύθυνση x, στον ηλεκτρόνιο ασκείται μια κινητήρας δύναμη

$F_3 \equiv F_{κινητηρια} = qE = qE_0cos(\omega t)$ →Κινητήρια δύναμη (λόγω Η/Μ πεδίου)

Διασπορά σε Μη Αγώγιμα Υλικά

Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση ηλεκτρονίου $m\dfrac{d^2\chi}{dt^2} = F_{o\lambda} = F_1 + F_2 + F_3$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt^2} + \gamma\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt} + \omega^2{}_0\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{q}{m}E_0 e^{-i\omega t} \quad (9.155)}$$

$$\begin{cases} \boxed{\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 e^{-i\omega t}} \rightarrow \textit{Μόνιμη λύση} \quad (9.156) \\ (9.155) \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\tilde{\boldsymbol{x}}_0 e^{-i\omega t}} \boxed{\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = \dfrac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}E_0} \quad (9.157) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{p}_1 = q\tilde{x}(t) = \dfrac{\left(q^2/m\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}E_0 e^{-i\omega t} \ (9.158) \rightarrow \ \textit{διπολική ροπή}\ e^- \\ \vec{\tilde{P}} = \dfrac{Nq^2}{m}\left(\sum_j \dfrac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega}\right)\vec{\tilde{E}} \ (9.159) \rightarrow \ \textit{συνολική πόλωση} \\ f_i \rightarrow \textit{αριθμός}\ e^-\ \textit{με συχνότητα}\ \omega_j \\ N \equiv \textit{Μόρια ανά μονάδα όγκου} \end{cases}$$

Διασπορά σε Μη Αγώγιμα Υλικά

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\tilde{P}} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \vec{\tilde{E}} \quad \vec{\tilde{D}} = \tilde{\varepsilon}\vec{\tilde{E}} = \varepsilon_0(1+\tilde{\chi}_e)\vec{\tilde{E}} \\ \rightarrow \boxed{\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0\left[1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{(\omega_j{}^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega}\right]} \end{array}\right. \quad (9.161)$$

$\tilde{\chi}_e$ μιγαδική επιδεκτικότητα
$\tilde{\varepsilon}$ μιγαδική δεκτικότητα

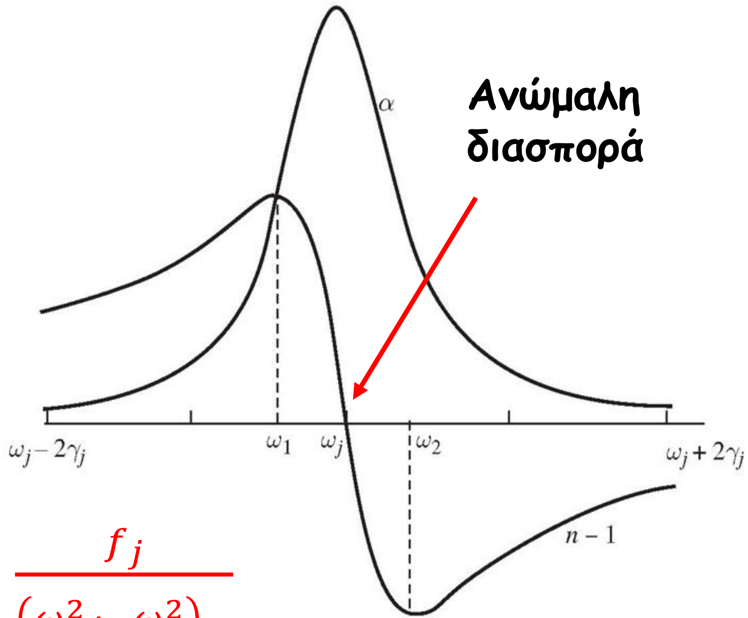
Σε ένα μέσο διασποράς, η κυματική εξίσωση: $\nabla^2\vec{\tilde{E}} = \tilde{\varepsilon}\mu_0 \frac{\partial^2\vec{\tilde{E}}}{\partial t^2}$

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{k} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu_0}\,\omega = k_a + ik_b \\ \vec{\mathrm{E}}(z,t) = \vec{\mathrm{E}}_0 e^{-k_b z} e^{i(k_a z - \omega t)} \\ I \propto E^2 \propto e^{-2k_b z} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2k_b} \rightarrow \textit{Συντελεστής απορρόφησης} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \upsilon = \frac{\omega}{k_a} \quad \Rightarrow n = \frac{c}{\omega}k_a \\ \rightarrow \tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}} \simeq \frac{\omega}{c}\left[1 + \frac{\mathrm{N}q^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{(\omega^2{}_j - \omega^2) - i\gamma_j\omega}\right] \end{array}\right. \quad (9.169)$$

Διασπορά σε Μη Αγώγιμα Υλικά

$$\begin{cases} n = \dfrac{c}{\omega} k_a \simeq 1 + \dfrac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \dfrac{f_j\left(\omega^2{}_j - \omega^2\right)}{\left(\omega^2{}_j - \omega^2\right)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} & (9.170) \\ \alpha = 2k_b \simeq \dfrac{Nq^2\omega^2}{m\varepsilon_0 c} \sum_j \dfrac{f_j \gamma_j}{\left(\omega^2{}_j - \omega^2\right) + \gamma_j^2 \omega^2} & (9.171) \end{cases}$$



Αν αγνοήσουμε την απόσβεση $n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega^2{}_j - \omega^2)}$

Μακριά από τους συντονισμούς και ειδικά για διαφανή υλικά, όπου $\omega < \omega_j \equiv υπεριώδες$

$$\frac{1}{(\omega^2{}_j - \omega^2)} = \frac{1}{\omega_j^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\omega_j^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)$$

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega^2{}_j)}\right) + \omega^2 \left(\frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{(\omega^4{}_j)}\right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad \boxed{n = 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \qquad (9.174)} \rightarrow εξώσωση\ cauchy$$

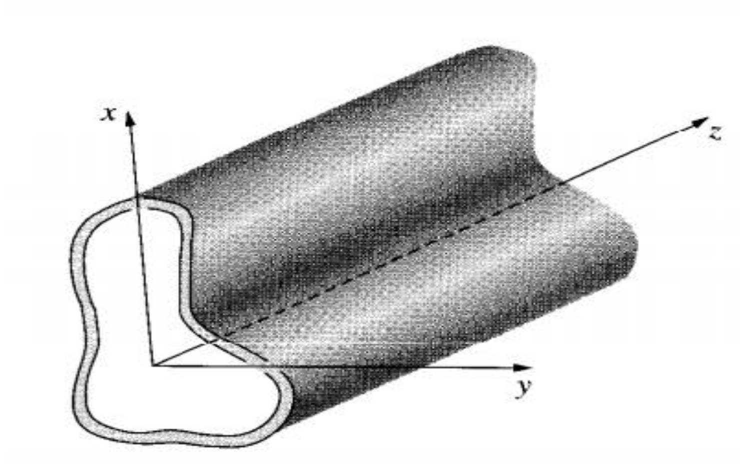
A→ συντελεστής διάθλαση B→ συντελεστής διασποράς

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

9.5.1 Κυματοδηγοί

Τέλειος αγωγός → στο εσωτερικό του : E=B=0 .
Συνοριακές συνθήκες στο εσωτερικό τοίχωμα

$$\left.\begin{aligned}(i)\quad & E_{\parallel}=0\\ (ii)\quad & B_{\perp}=0\end{aligned}\right\}\quad (9.175)$$



Μονοχρωματικά κύματα κατά μήκος του σωλήνα

$$\left.\begin{aligned}(i)\quad & \tilde{E}(x,y,z,t)=\tilde{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\\ (ii)\quad & \tilde{B}(x,y,z,t)=\tilde{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\end{aligned}\right\}\quad (9.176)$$

E και B πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell στο εσωτερικό του αγωγού.

$$\left.\begin{aligned}(i)\quad & \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0, \quad (iii)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ (ii)\quad & \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \quad (iv)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad (9.177)$$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

Γενική έκφραση παίρνοντας και διαμήκεις συνιστώσες (E_z και B_z):

$$\begin{cases} \tilde{E}_0 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} \quad \hat{B}_0 = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z} \quad (9.178) \\ \\ E_{x,y,z} = E_{x,y,z}(x,y),\ B_{x,y,z} = B_{x,y,z}(x,y) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(9.177),\ (iii),\ (iv)\ [\Pi\rho o\beta\lambda.9.26(\alpha)]}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} (i) & \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z & (iv) & \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_z \\ (ii) & \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x & (v) & \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_x \\ (iii) & ikE_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y & (vi) & ikB_x - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_y \end{array}\right\} \quad (9.179)$$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

Λύσεις των (9.179) :

$$\xrightarrow{(ii),(iii),(v),(vi)}\left\{\begin{aligned}
&(i)\quad E_x=\frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x}+\omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\\
&(ii)\quad E_y=\frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y}-\omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\\
&(iii)\quad B_x=\frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\\
&(iv)\quad B_y=\frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(9.180)$$

$$\xrightarrow{(9.180),\,(9.177,\,i,\,iv)\left[\Pi\rho o\beta\lambda.9.26(\beta)\right]}\left\{\begin{aligned}
&(i)\quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(\omega/c)^2-k^2\right]E_z=0\\
&(ii)\quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(\omega/c)^2-k^2\right]B_z=0
\end{aligned}\right\}\quad(9.181)$$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

Αν $E_z = 0 \rightarrow$ ΕΗ $\rightarrow$ «εγκάρσια ηλεκτρικά» κύματα
$B_z = 0 \rightarrow$ ΕΜ $\rightarrow$ «εγκάρσια μαγνητικά» κύματα
$E_z = 0$ και $B_z = 0 \rightarrow$ ΕΗΜ $\rightarrow$ «εγκάρσια ηλεκτρομαγνητικά» κύματα

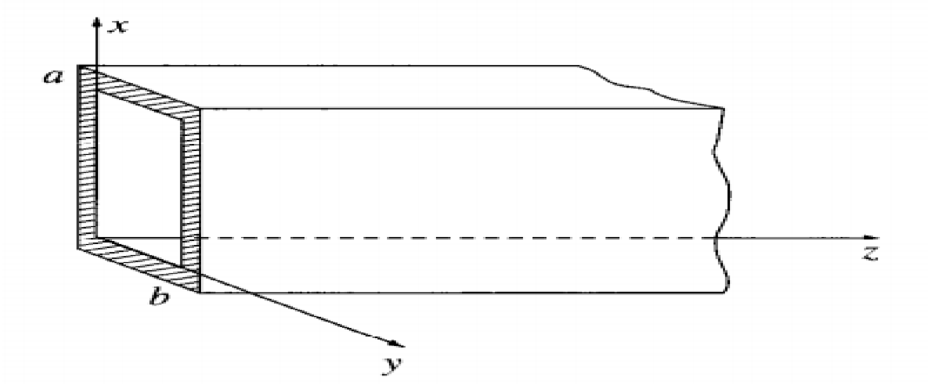
$$\left.\begin{aligned} E_z = 0 &\xrightarrow{(9.177(i))} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \\ B_z = 0 &\xrightarrow{(8.177(iii))} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(9.178) \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V \rightarrow \sigma\tau\alpha\theta.\ \sigma\tau o\ \varepsilon\sigma\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{o}\ \tau o\upsilon\ \alpha\gamma\omega\gamma o\acute{\upsilon} \\ \vec{E}_0 = 0 \end{cases}$$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

9.5.2 Κύματα σ' έναν ορθογώνιο κυματοδηγό



Επίλυση (9.181(ιι) με τη συνοριακή συνθήκη (9.175 (ιι)): $B_{\perp} = 0$

$$B_z\left(x,y\right) = X(x)\cdot Y\left(y\right)$$

$$\Rightarrow Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[(\omega/c)^2 - k^2\right]XY = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (i)\ \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = C_1 = -k_x^2,\ (ii)\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = C_2 = -k_y^2 \quad (9.182) \\ C_1 + C_2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow -k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0 \quad (9.183) \end{cases}$$

Λύση εξίσωσης Laplace
καρτεσιανές συντεταγμένες

ΙΙ. Σε δύο διαστάσεις (μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 = k^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 = -k^2, \quad C_1 + C_2 = 0$$

Ansatz $\quad V\;\; x,y\;\; = X\;\; x\;\cdot Y\;\; y$

Γενική κατηγορία $\quad \Rightarrow \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0, \quad \Psi'' + k^2\Psi = 0$

Γενική λύση $\quad \boxed{\Rightarrow \Psi(\chi) = A' e^{ikx} + B' e^{-ikx} = C\sin(kx) + D\cos(kx)}$

Επίσης $\quad \boxed{\Rightarrow \dfrac{d^2\Psi}{d\chi^2} - \kappa^2\Psi = 0 \Rightarrow \Psi'' + (i\kappa)^2\Psi = 0 \Rightarrow \Psi(\chi) = Ae^{kx} + Be^{-kx}}$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

Η γενική λύση της (9.182(ι) είναι :

$$\boxed{X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)}$$

$$\textit{Συνοριακές συνθήκες} : B_x \equiv \frac{dX}{dx} = 0 \quad \left(9.180(iii)\right) \textit{γιά } x = 0 \textit{ και } x = \alpha \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\Rightarrow \left\{ k_x = m\pi/\alpha \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \quad (9.184) \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textit{Το ίδιο ισχύει και για την } Y \\ k_y = n\pi/b \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (9.185) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_z = B_0 \cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b) \quad (9.186)}$$

Η λύση αυτή ονομάζεται EH_{mn} → τρόπος ταλάντωσης (ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στην μεγαλύτερη διάσταση, εδώ υποθέτουμε $\alpha \geq b$)

$$(9.184), (9.185), (9.183) \Rightarrow k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2\left[(m/\alpha)^2 + (n/b)^2\right]} \quad (9.187)$$

$$A\nu \quad \omega < c\pi\sqrt{(m/\alpha)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn} \quad (9.188)$$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

Το κ γίνεται φανταστικός και αντί για ένα οδεύουν κύμα, παίρνουμε πεδία που σβήνουν εκθετικά

$$\Rightarrow \omega_{mn} \rightarrow \textit{συχνότητα αποκοπής}$$

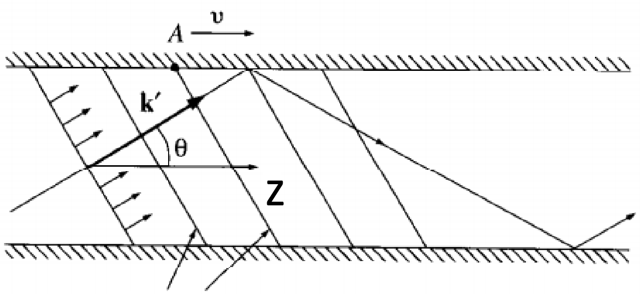
Η μικρότερη συχνότητα είναι εκείνη του E_{10}:

$$\boxed{\omega_{10} = c\pi / a}$$

ΕΗ κύματα με $\omega < \omega_{10}$ αδύνατον να διαδοθούν στον κυματοδηγό.

$$\boxed{\Rightarrow k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} \quad (9.190)$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}} \quad (9.191) \xrightarrow{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi.\,\varepsilon\nu\acute{\varepsilon}\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha} \upsilon_g = \frac{1}{(d\kappa / d\omega)} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} < c \quad (9.192)$$



Μέτωπα κύματος

Επίπεδο κύμα κινείται με γωνία θ ως προ z και ανακλάται στις αγώγιμες επιφάνειες. Στις κατευθύνσεις x και y έχουμε συμβολή κυμάτων με στάσιμες κυματομορφές

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_x = 2\alpha / m \\ \lambda_y = 2b / n \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} k_x = 2\pi / \lambda_x = m\pi / \alpha \\ k_y = 2\pi / \lambda_y = n\pi / b \end{Bmatrix}$$

Στην κατεύθυνση z απομένει ένα οδεύον κύμα με κυματικό αριθμό $\kappa_z = \kappa$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\kappa}' = \frac{m\pi}{\alpha}\hat{x} + \frac{n\pi}{b}\hat{y} + k\hat{z}}$$

$$\Rightarrow \omega = c\left|\vec{k}'\right| = c\sqrt{k^2 + \pi^2\left[(m/\alpha)^2 + (n/b)^2\right]} = \sqrt{(ck)^2 + (\omega_{mn})^2}$$

Μόνο κάποιες συγκεκριμένες γωνίες οδηγούν σε επιτρεπόμενες στάσιμες κυματομορφές:

$$\cos\theta = \frac{k}{\left|\vec{k}'\right|} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}$$

Το επίπεδο κύμα κινείται μεταχύτητα c, και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z

$$\Rightarrow \upsilon_g = c\cos\theta = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}$$

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

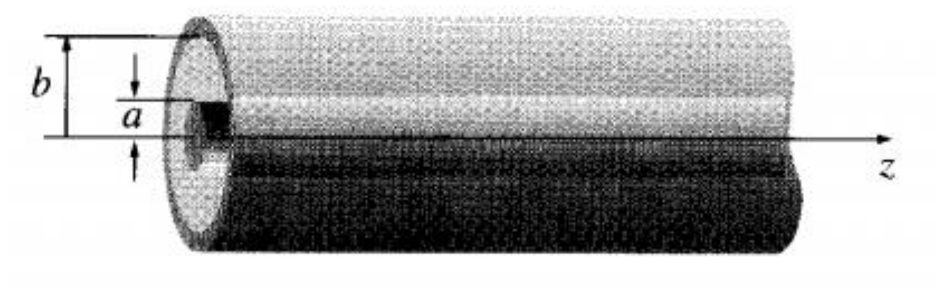
9.5.3 Ομοαξονική Γραμμή Μεταφοράς

$\Sigma'\, \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}\ \tau\eta\nu\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta :$

$E_z = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ B_z = 0$

$Maxwell \xrightarrow{(9.179)} \boxed{k = \omega / c}$

$\rightarrow E_x = cB_y \ \kappa\alpha\iota \ E_y = -cB_x$



$$\left.\begin{array}{l} E_z = 0 \rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ B_z = 0 \rightarrow \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad (9.195)$$

Εξισώσεις της ηλεκτροστατικής και μαγνητοστατικής στο κενό σε δύο διαστάσεις.

9.5 Καθοδηγούμενα κύματα

Τη λύση τους την παίρνουμε από την αντιστοιχία ενός άπειρου γραμμικού φορτίου και ενός άπειρου ευθύγραμμου ρεύματος:

$$\left.\vec{E}_0(r,\phi) = E_0 \frac{1}{r}\hat{r} \quad \vec{B}_0(r,\phi) = \frac{E_0}{c}\frac{1}{r}\hat{\phi}\right\} \quad (9.196)$$

Θέτοντας τις (9.196) στις (9.176) και παίρνοντας το πραγματικό μέρος έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}(r,\phi,z,t) &= E_0 \frac{\cos(kz-\omega t)}{r}\hat{r} \\ \vec{B}(r,\phi,z,t) &= \frac{E_0}{c}\frac{\cos(kz-\omega t)}{r}\hat{\phi}\end{aligned}\right\} \quad (9.197)$$