

基于拟合插值方法的电池放电模型研究

摘 要

本文针对铅酸电池在 9 个不同电流强度下的放电数据，以 MATLAB 数据拟合为突破口，得到了放电曲线的指数函数模型，并利用模型反函数降低了模型求解难度，通过调整坐标系、模型因变量与自变量对应关系计算出 9.8 伏降至 U_m 的时间，并在此方法上拓展延伸建立了任意电流对应的放电分段函数模型，通过 MRE 检验了所建立模型的合理性。

针对问题一：首先根据 9 组采样数据，对各个电流下的放电曲线使用指数函数进行拟合，得到相应的模型，该模型拟合效果好但是不利于计算，于是对放电曲线关于 $y = x$ 对称的图像进行拟合，得到了放电曲线反函数的多项式函数模型，将解方程转化为计算函数值，降低了模型计算难度，并计算出 9 条放电曲线的 MRE（见表 5），在进一步分析放电曲线的过程中发现 9 条放电曲线前期均呈现初期上下波动，后期趋于平缓的走势，针对这种情况，本文将函数进行数据处理，利用图像的拐点将前段波动较大的奇异点剔除，拟合出了更为平滑的放电曲线模型，并利用倒叙法求解，即将时间值进行前后颠倒，将电压与放电时间的关系转化为电压与剩余放电时间的关系，并用 MRE 进行了评价，根据该优化后的模型计算出了 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度下电压由 9.8 伏降至 U_m 需要的时间依次为 592.7240 分、415.6200 分、322.4720 分、284.8840 分、254.2160 分。

针对问题二：由于附录一只给出了九组离散数据，而第二问是一个连续性的问题，所以使用插值的方法，对问题一中建立的指数函数模型的参数进行插值处理，由于放电曲线在初始阶段波动较大，用函数整体拟合效果不佳，所以本文采取了分段建模的方法，利用拐点将放电曲线分割为波动阶段和稳定阶段。稳定阶段采用模型参数插值法得到任意电流的稳定阶段模型，初始波动阶段利用单调性、凹凸性、极值点、拐点等数据进行拟合得到相应的模型。并利用该分段模型，计算出 20A 时的 MRE 为 2.0153% 与第一问的结果相近，最后将 55A 的放电曲线用表格和图形给出（详见表 13、图 8）。

针对问题三：电压以 0.005V 为间隔给出相应的衰减时间，需要建立的模型应以电压为自变量，以时间为因变量，这与第一问中模型以时间为自变量，以电压为因变量恰好相反，于是在第一问模型的基础上去寻找放电曲线反函数模型来解决第三问，由于在第一问中已经使用模型的反函数模型进行求解，且对放电曲线反函数曲线拟合效果较好的是二次多项式函数，所以第三问本文用二次多项式来拟合衰减状态 3，补全了时间（表 14）。

本文使用凹凸性、拐点等高等数学知识建立的指数函数模型、分段函数模型拟合程度较好，适用的问题范围广，易于理解，在计算模型方面，采用了反函数、调整坐标系等方法简单有效。

关键词：数据拟合插值 指数函数模型 分段函数模型 反函数求解 拐点

§ 1 问题的提出

随着铅酸电池的应用领域越来越广, 电池使用时间的研究成为一项具有重要意义的课题, 已知电池以恒定电流强度放电过程中, 电压随放电时间单调下降, 到达额定的最低保护电压 (U_m , 本题中为 9V) 时停止放电. 放电过程中, 电压随时间变化的关系称为放电曲线. 电池通过较长时间使用或放置, 充满电后的荷电状态会发生衰减. 因此如何利用题目所给的采样数据计算电池在当前负荷下的剩余供电多长时间以及如何利用采样数据补全预测衰减下的剩余放电时间是研究本题的意义.

本题要求利用给出的以不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据, 利用数据拟合的方法, 找到表示的放电曲线的初等函数, 利用数据关联以及差值拟合, 研究解决表示 20A 到 100A 之间任意恒定电流的模型, 同时利用电池衰减时的数据, 通过数据之间的关联性推算出衰减状态下的剩余放电时间. 根据以上情况建立模型, 解决以下问题:

问题一: 要求对不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据分析拟合, 用初等函数建立放电曲线模型, 并计算出各放电曲线的平均相对误差 (MRE), 并计算在不同电流放电条件下, 电压都为 9.8 伏时, 电池的剩余放电时间.

问题二: 要求建立能够表示在 20A-100A 以任意一恒定电流强度放电时的放电曲线模型, 并对模型的精度用 MRE 进行评估. 且用表格和图形分析电流强度为 55A 时的放电曲线.

问题三: 给出了同一电池在不同衰减状态下以同一电流强度从充满电开始放电的记录数据, 要求我们对附件 2 的数据进行分析, 预测衰减状态 3 的剩余放电时间.

§ 2 问题的分析

2.1 预备知识

1. 放电瞬间: 电流从充电状态转变为放电状态的瞬间, 电池极板附近的电荷快速释放出来, 而离极板较远的电荷需要到极板附近, 然后才能释放出来, 无论放电电流大小, 都会出现在放电初期都会使端电压下降较多, 略有回升的现象.
2. 容量: 蓄电池在规定条件下 (包括放电强度、放电电流及放电终止电压) 下放出的电量.
3. 容量=放电电流*放电时间
4. 放电: 蓄电池对外电路输出电能时叫做放电.
5. 放电速率: 表示放电快慢的一种度量.
6. 相对误差: 相对误差是指测量所造成的绝对误差与被测量真值之比.
7. 绝对误差: 绝对误差是测量值对真值偏离的绝对大小

2.2 问题的分析

问题一: 该题首先要求根据给定的 9 组采样数据, 用初等函数表示各组在不同电流强度下的放电曲线, 本文首先尝试对各个电流下的放电曲线使用指数函数进行 MATLAB 拟合, 得到相应的模型, 该模型拟合效果好但不利于求解, 于是对放电曲线关于 $y = x$ 对称的反函数图像进行拟合, 得到放电曲线的多项式函数模型, 基于此模型计算出九条放电曲线的 MRE, MRE 越接近零, 说明拟合效果较好, 模型可以较为真实的刻画实际现象. 在进一步分析放电曲线的过程中, 发现 9 条放电曲线前期均呈现初期上下波动, 后期趋于平缓的走势, 针对这种情况, 本文将函数进行数据处理, 将前段波动较大的数据奇

异点去除,利用余下数据拟合出更为平滑的放电曲线.由于放电过程中电压呈现先下降再上升再稳定下降的形态,与高等数学中的曲线单调性、凹凸性比较相似,于是文中利用拐点,对采样数据进行筛选,将奇异点排除,对处理后的数据进行 MATLAB 拟合,得到 MRE 误差更小的优化后的放电曲线模型,并使用该优化后的模型分计算出 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度由 9.8 伏降至 U_m 需要的时间.

问题二:此问要建立 20A 到 100A 内任意恒定电流强度放电的放电曲线函数模型,由于附录一只给出了九组数据,这些数据是离散的,而第二问实际是一个连续性的问题,所以必然要使用差值的方法,对问题一中建立的模型进行分析,由于放电曲线在初始阶段波动较大,用函数整体拟合效果不佳,所以在第二问,本文采取了分段建模的方法,对放电曲线进行研究.

由于问题一中已发现放电曲线由波动到稳定的分界点是其拐点,所以此处依然利用拐点将放电曲线进行分割,稳定阶段采用模型参数插值法得到任意电流的稳定阶段模型,前半段利用单调性、凹凸性、极值点、拐点等数据进行拟合得到相应的模型.并利用该分段模型,计算出 20A 时的 MRE 与第一问的结果进行比对来评估模型,最后将 55A 的放电曲线用表格和图形给出.

问题三:通过对问题 3 的数据分析,发现这里电压以 0.005V 为间隔给出相应的衰减时间,需要建立的模型是以电压为自变量,以时间为因变量,这与第一问中模型以时间为自变量,以电压为因变量恰好相反,这也启发我们,在第一问模型的基础上去寻找放电曲线反函数模型来解决第三问,由于第一问的模型结构具有指数函数模型特点,即:

$U(t) = a_1 e^{a_2 x} + a_3 e^{a_4 x}$,且在第一问中已经使用模型的反函数模型用于求解,并且对放电曲线反函数曲线拟合效果最好的是二次多项式函数,所以第三问本文就尝试用二次多项式来拟合衰减状态 3,补全时间.

§ 3 模型的假设与名词解释

3.1 模型的假设

假设一:同一批次电池性能相同;

假设二:同一电压值对应多个放电时间,取这些时间的平均值为该电压的放电时间;

假设三:在 100A 数据中,可以将一个间隔电绝对压差值大于 0.005V 的数据拆分成两个间隔进行处理;

假设四:低电压阶段放电趋于稳定;

假设五:放电初始阶段波动点均可视为奇异点.

3.2 名词解释

$$\text{MRE: } \text{MRE} = \frac{\sum \left| \frac{\text{各点拟合值} - \text{各点采样值}}{\text{各点采样值}} \right|}{\text{采样点个数}} \times 100\%$$

§ 4 符号说明

序号	符号	符号说明
1	T	任意电压值的剩余放电时间
2	T_a	采样数据从满电放电到 U_m 所用的时间
3	T_b	采样数据放电到对应电压值所用的时间
4	$U(t)$	任意时间 t 对应的电压值
5	t	放电时间
6	a_n	模型中的参数 ($n = 1, 2, 3 \cdots n$)
7	$U_0(i)$	任意电流 i 对应的初始电压
8	$T_{\max}(i)$	任意电流 i 对应的放电曲线初始阶段极大值函数
9	$T_{\min}(i)$	任意电流 i 对应的放电曲线初始阶段极小值函数
10	$T_{\text{fenduan}}(i)$	任意电流 i 对应的放电曲线拐点(分段点)函数
11	$T(u)$	任意电压 u 对应的放电时间函数

§ 5 模型的建立与求解

5.1 问题 1 模型建立与求解

5.1.1 问题分析及解题思路

首先根据给定的 9 组采样数据, 尝试对各个电流下的放电曲线使用指数函数进行 MATLAB 拟合, 发现, 虽然该模型拟合效果好但不利于求解, 于是对放电曲线关于 $y = x$ 对称的反函数图像进行拟合, 得到放电曲线的多项式函数模型, 基于此模型计算出九条放电曲线的 MRE, MRE 越接近零, 说明拟合效果较好, 模型可以较为真实的刻画实际现象. 在进一步分析放电曲线的过程中, 发现 9 条放电曲线前期均呈现初期上下波动, 后期趋于平缓的走势, 针对这种情况, 本文将函数进行数据处理, 将前段波动较大的数据奇异点去除, 利用余下数据拟合出更为平滑的放电曲线. 由于放电过程中电压呈现先下降再上升再稳定下降的形态, 与高等数学中的曲线单调性、凹凸性比较相似, 于是文中利用拐点, 对采样数据进行筛选, 将奇异点排除, 对处理后的数据进行 MATLAB 拟合, 得到 MRE 误差更小的优化后的放电曲线模型, 并使用该优化后的模型分计算出 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度由 9.8 伏降至 U_m 需要的时间.

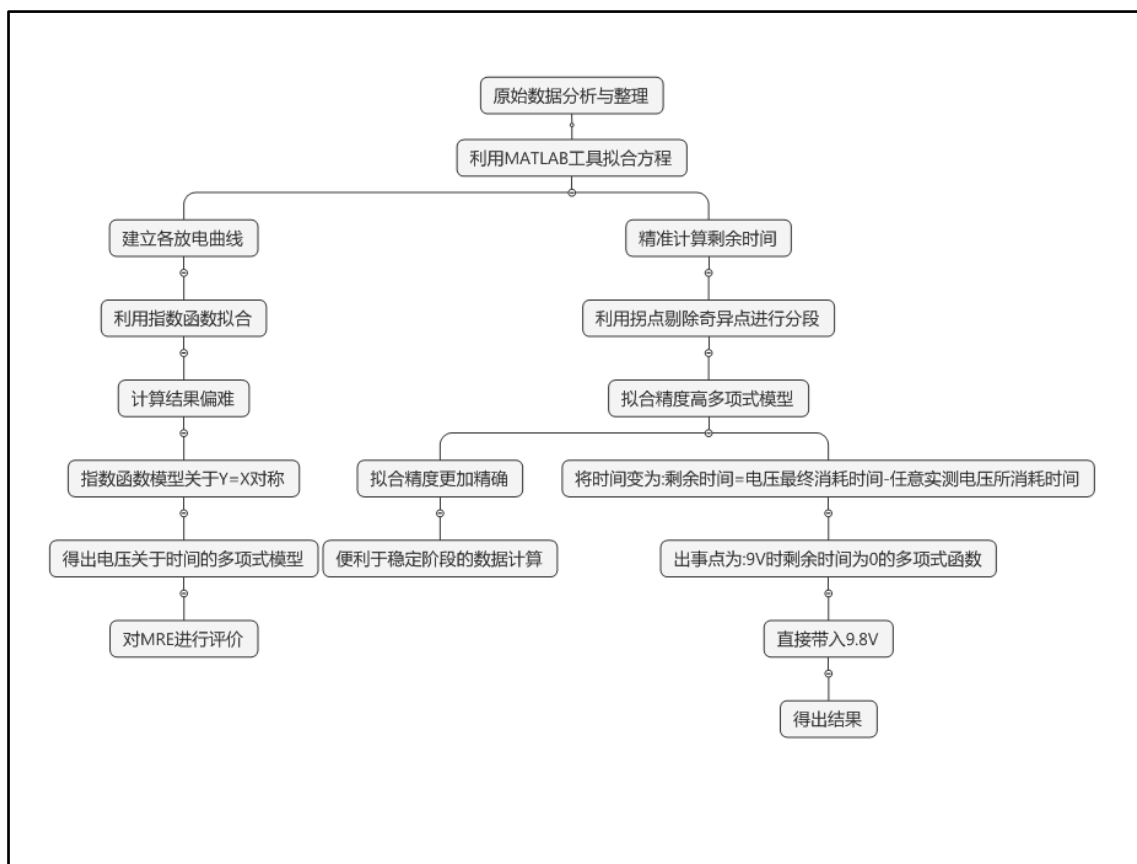


图 1 问题一思路图

5.1.2 模型的建立与求解

5.1.2.1 放电曲线指数函数模型

根据采样数据首先绘制出各电流下的放电曲线，

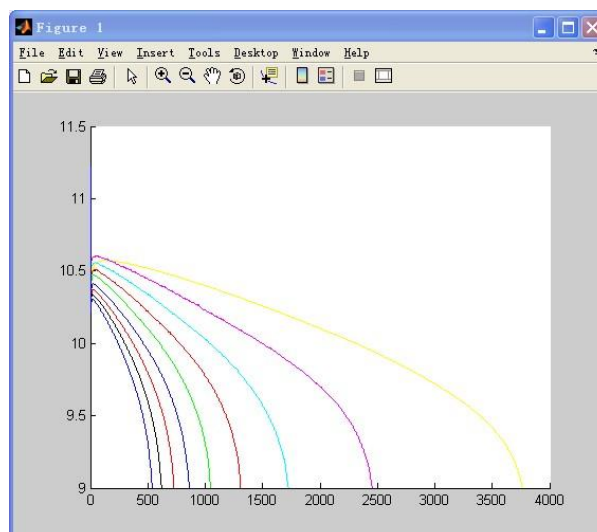
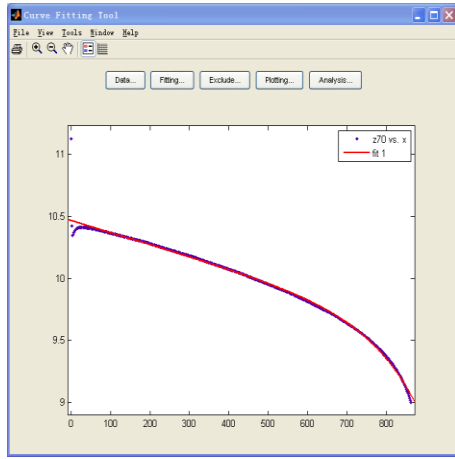
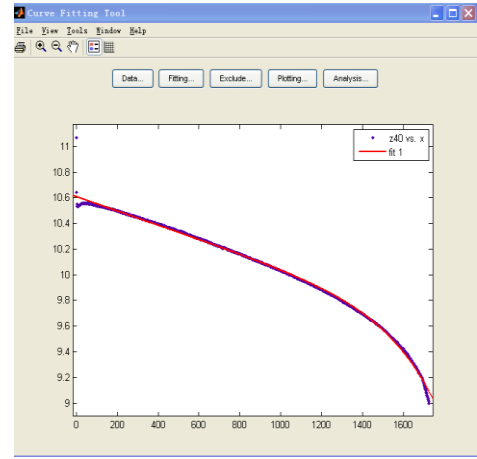


图 2 9 条放电曲线图

观察 9 条曲线可看到，他们的走势非常相似，尝试用 Matlab 拟合工具箱里的多种函数对放电曲线进行拟合，发现指数函数拟合程度最好，



70A



40A

图 3 70A、40A 放电曲线的拟合图

所以本文对各个放电曲线进行指数函数拟合，得到相应的指数函数放电模型，

$$U(t) = a_1 e^{a_2 t} + a_3 e^{a_4 t}$$

具体九条放电曲线数学模型见下表

表 1 放电曲线指数模型

电流(A)	放电曲线指数函数模型
20	$U(t) = -0.001965 \times e^{(0.00153kt)} + 10.64 \times e^{(-0.00002317t)}$
30	$U(t) = -0.00008066 \times e^{(0.003597kt)} + 10.65 \times e^{(-0.00004078t)}$
40	$U(t) = -0.000425 \times e^{(0.004204kt)} + 10.61 \times e^{(-0.00005282t)}$
50	$U(t) = -0.0003639 \times e^{(0.005637kt)} + 10.56 \times e^{(-0.0000658t)}$
60	$U(t) = -0.005453 \times e^{(0.006667kt)} + 10.52 \times e^{(-0.00007959t)}$
70	$U(t) = -0.0006155 \times e^{(0.007988kt)} + 10.47 \times e^{(-0.00009326t)}$
80	$U(t) = -0.0007741 \times e^{(0.009083kt)} + 10.43 \times e^{(-0.0001084t)}$
90	$U(t) = -0.0008763 \times e^{(0.01049kt)} + 10.64 \times e^{(-0.000125t)}$
100	$U(t) = -0.007764 \times e^{(0.01216kt)} + 10.64 \times e^{(-0.0001468t)}$

接下来本文尝试利用该模型计算出采样电压对应的拟合时间，给出关于时间的 MRE

$$MRE = \frac{\sum \frac{\text{各电压对应拟合时间} - \text{各电压对应采样时间}}{\text{各电压采样时间}}}{\text{采样电压个数}} \times 100\%$$

但是由于模型包含两个指数函数部分，根据电压求时间，相当于解一个颇为复杂的方程，这样给求解模型带来困难.

5.1.2.2 放电曲线多项式函数模型

观察发现放电曲线是一一对应的，如果能得到放电指数函数模型的反函数，通过代入电压计算时间，将解方程转化为求函数值将大大降低计算难度，

$$U = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(U)$$

于是本文做出九条放电曲线关于 $y = x$ 的图像，并对对称后的图像进行拟合，得到放电曲线的多项式函数模型.

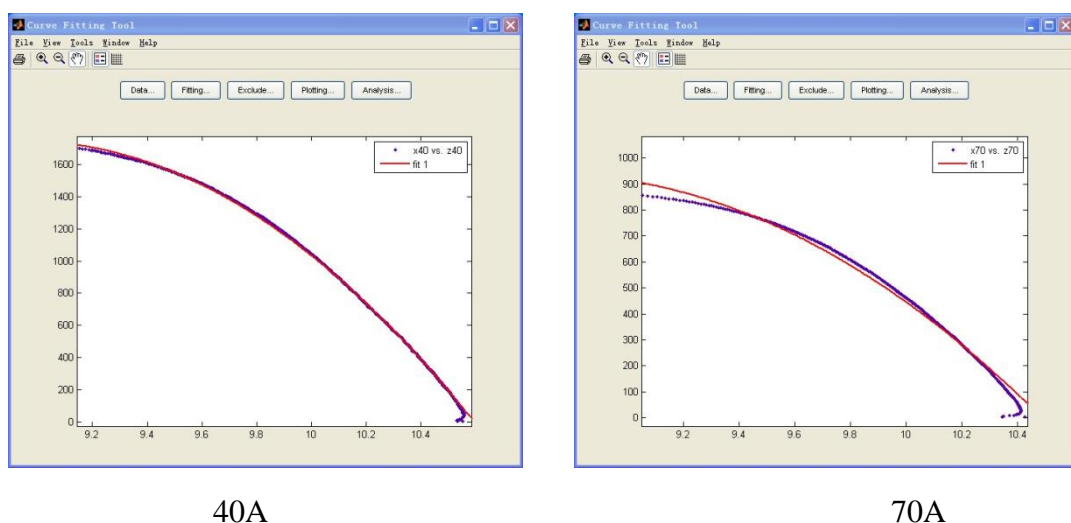


图 4 70A、40A 放电曲线关于 $y = x$ 对称的图像及拟合图像

拟合结果如下：

表 2 关于 $y = x$ 对称后的放电曲线多项式函数模型

电流(A)	电压关于时间的放电曲线函数表达式
20	$T(u) = -1342 \times u^2 + 2.402 \times 10^4 \times u - 1.036 \times 10^5$
30	$T(u) = -839 \times u^2 + 1.492 \times 10^4 \times u - 6.384 \times 10^4$
40	$T(u) = -644.9 \times u^2 + 1.155 \times 10^4 \times u - 4.992 \times 10^4$
50	$T(u) = -516.2 \times u^2 + 9233 \times u - 3.994 \times 10^4$
60	$T(u) = -390.3 \times u^2 + 6910 \times u - 2.948 \times 10^4$
70	$T(u) = -296.9 \times u^2 + 5173 \times u - 2.159 \times 10^4$

80	$T(u) = -206.5 \times u^2 + 3479 \times u - 1.379 \times 10^4$
90	$T(u) = -134.1 \times u^2 + 2135 \times u - 7658$
100	$T(u) = -67.51 \times u^2 + 884.8 \times u - 1871$

将采样电压代入表 2 中的多项式函数模型，计算出相应的拟合时间，并计算出各电流的 MRE，

表 3 20A 放电曲线 MRE 的具体计算结果

序号	采样数据电压值 (V)	采样已放电时间 (min)	采样数据剩余放电时间 (min)	绝对误差	相对误差
1	9.0000	3878.0000	0	35	0.0303
2	9.0038	3877.4638	2	36.752145	0.0307
3	9.0113	3876.2918	4	38.14642625	0.0309
4	9.0194	3874.8565	6	39.318505	0.0311
5	9.0263	3873.4950	8	40.47092625	0.0313
.....
230	9.5575	3385.0780	458	32.19140625	0.0239
231	9.5588	3382.9537	460.	32.11802	0.0239
平均相对误差		2.6452%			

根据题意需要从 U_m 开始按不超过 0.005V 的最大间隔提取 231 个电压样本点，但是电流强度为 100A 的采样数据中无法找到 231 个符合条件的样本点，针对这种情况本文将差值在 0.005V-0.01V 这一段区间的数据平均分成两个数据，时间差值变为 1 分钟，这样可以找到题目要求的 231 个样本点，数据中大于 0.01V 的差值我们将不做考虑，因为偏差太大。如表 5 为数据处理过的 100A 电流强度下的放电曲线模型 MRE 值统计表：

表 4 100A 电流放电曲线模型 MRE 值统计表

序号	采样数据电压值 (V)	采样已放电时间 (min)	采样数据剩余放电时间 (min)	倒序模型剩余放电时间 (min)	绝对误差	相对误差
1	9.54355	443	71	94.00911997	23.00912	0.051939323
2	9.5464	442	72	94.90526803	22.90527	0.051821873
3	9.55	441	73	96.04425	22.90527	0.052254535
4	9.5536	440	74	97.19105203	23.19105	0.052706936
5	9.5568	439	75	98.21699661	23.217	0.052886097
.....
230	10.3043	22	492	507.1696644	15.16966	0.689530202
231	10.3050	20	494	507.7106425	13.71064	0.685532125
平均相对误差		20.744815%				

表 5 放电指数函数模型的 MRE 汇总表

	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
MRE	2.6452%	1.88%	3.41%	1.12%	1.62%	2.41%	4.24%	18%	20.7%

平均相对误差 MRE 在电流强度为 90A 和 100A 时值最大,其他基本保持在 0.01 左右,这是因为 90A 和 100A 放电速度快,时间参数少,放电曲线变化率大,因此拟合精度较低,但是其他情况得到的 MRE 接近零,误差小说明模型与实际放电过程近似程度高,可以较好的刻画放电现象,但是通过观察图像,可以发现 9 个放电曲线图形较为类似,规律较为相近,均在一开始呈现上下波动然后逐渐趋于平缓,且本题最后一问主要研究的是放电曲线在低电压段的放电时间,因此,考虑低电压段的拟合越好,放电时间的计算精度越高.于是尝试将前面波动的数据值从拟合数据中去除,对后面平缓阶段的曲线进行拟合,以求得到更为精确的结果.

5.1.3 模型的优化

观察图形发现曲线有单调,有凹凸,联系到高等数学中曲线的凹凸性和拐点,要将放电曲线前期波动较大的奇异点去除,需要找到放电曲线波动阶段和稳定阶段的分界点,也就是放电曲线由上升转为下降的拐点,拐点可以由曲线函数的二阶导得出,利用放电曲线指数函数模型,通过 MATLAB 编程求解得到放电曲线的各个拐点:

表 6 各放电曲线的拐点(波动阶段与稳定阶段的分界点)

电流(A)	20	30	40
拐点(分钟)	138.4967	778.3594	322.1688
电流(A)	50	60	70
拐点(分钟)	241.0623	149.9097	104.0656
电流(A)	80	90	100
拐点(分钟)	70.9176	49.1644	54.1235

剔除拐点前的奇异点,通过拟合得到数据处理后的函数模型:

表 7 优化后的放电指数函数模型

电流(A)	数据处理后的放电曲线函数表达式
20	$U(t) = -0.0006143 \times e^{(0.001819t)} + 10.66 \times e^{(-2.544 \times 10^{-5} \times t)}$
30	$U(t) = -4.555e - 10^5 \times e^{(0.003823t)} + 10.66 \times e^{(-4.183 \times 10^{-5} \times t)}$
40	$U(t) = -0.000175 \times e^{(0.004693t)} + 10.63 \times e^{(-5.6 \times 10^{-5} \times t)}$

50	$U(t) = -0.0001182 \times e^{(0.006457t)} + 10.59 \times e^{(-7.082 \times 10^{-5} \times t)}$
60	$U(t) = -0.0001182 \times e^{(0.006457t)} + 10.59 \times e^{(-7.082 \times 10^{-5} \times t)}$
70	$U(t) = -0.0002115 \times e^{(0.009157t)} + 10.49 \times e^{(-0.0001018t)}$
80	$U(t) = -0.0008421 \times e^{(0.008974t)} + 10.43 \times e^{(-0.0001077t)}$
90	$U(t) = -0.001143 \times e^{(0.01009t)} + 10.39 \times e^{(-0.000123t)}$
100	$U(t) = -0.0001496 \times e^{(0.01104t)} + 10.36 \times e^{(-0.000138t)}$

处理后得到的拟合图像如图 5 所示：

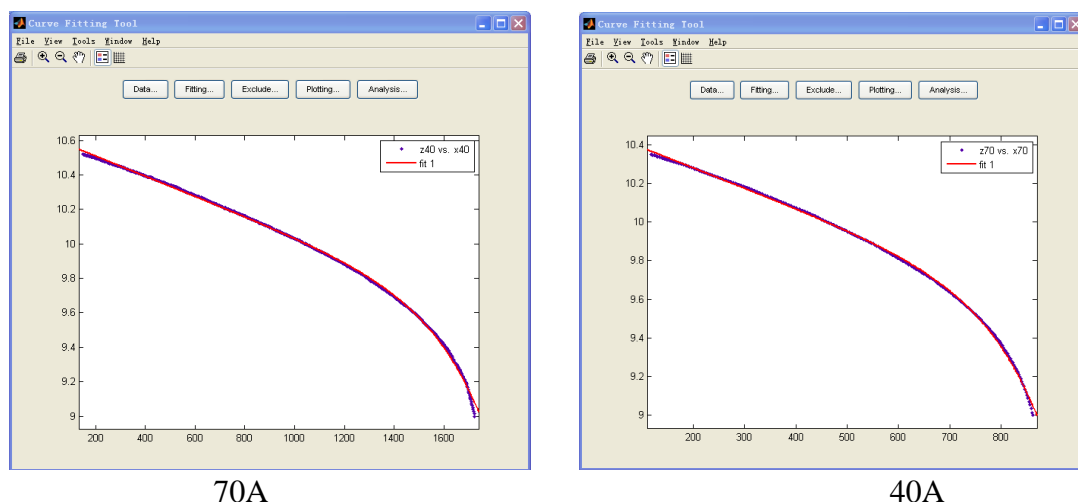


图 5 剔除奇异点后的拟合图像

由图像观察可见图像的拟合精度明显高于数据处理前，拟合图像通过低电压段的点明显增多，由此可以判断数据处理后的函数模型对低电压段的接近程度明显优于处理前的函数模型。

改进后模型求解依然使用前面 MRE 的计算方法，即将电压作为因变量，放电时间作为自变量，拟合得到一个较为简单的二次函数用于计算。由于问题要求 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度下电池由 9.8 伏到 9 伏的放电时间，为了便于计算本文将电压与放电时间的关系转化为电压与剩余放电时间的关系，即倒序法。

假设在某一固定电流值下，电压为 U_m (9V) 时的剩余放电时间为 0 分钟，则：

$$T = T_a - T_b \quad (1)$$

注：T—采样数据任意电压值的剩余放电时间

T_a —采样数据从满电放电到 U_m 所用的时间

T_b —采样数据从满电放电到对应电压值所用的时间

由于时间间隔是一个定值，因此本文将时间值进行前后颠倒，即初始电压的放电时间为末电压的剩余放电时间，通过此方法对数据进行处理，可以得到各电流强度下从 U_m 到拐点电压值每个电压值对应的剩余放电时间 T，对数据进行处理，建立对应关系。以剩余放电时间 T 为自变量，对应采样电压值 U 为应变量进行拟合，得到 70A 与 40A 电流强

度下的拟合图形如图 6 所示：

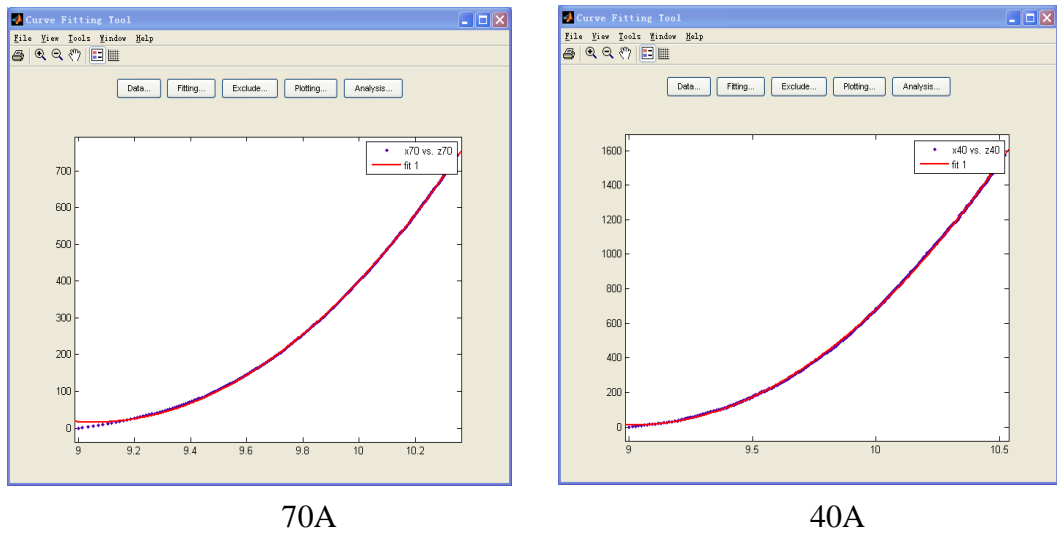


图 6 电压与剩余放电时间的函数曲线拟合图像

通过拟合得到放电时间倒序后的函数方程如表 9 所示：

表 8 电压与剩余放电时间的拟合函数

电流(A)	放电时间倒序后的函数方程
30	$T(u)=878.1\times u^2-1.57\times 10^4\times u+7.012\times 10^4$
40	$T(u)=690.5\times u^2-1.245\times 10^4\times u+5.611\times 10^4$
50	$T(u)=591.8\times u^2-1.073\times 10^4\times u+4.864\times 10^4$
60	$T(u)=492.1\times u^2-8918\times u+4.042\times 10^4$
70	$T(u)=430.4\times u^2-7793\times u+3.529\times 10^4$

在附件一中从 Um 开始按不超过 0.005V 的最大间隔提取 231 个电压样本点计算平均相对误差，观察数据发现，给出的数据里有不同时间点对应同一电压值的情况，使得计算 MER 时，值不能一一对应，针对这种情况，本文采取的数据处理方法为取相同电压对应下所有时间的平均值为该电压值对应的放电时间，这样便可以得到 231 个点代入电压与剩余放电时间模型进行平均相对误差计算，相应 MRE 计算公式为：

$$MRE=\frac{1}{231}*\sum_{i=1}^{231}\frac{|ti-T|}{Tb}*100\% \tag{2}$$

注： ti—模型剩余放电时间

表 9 40A 电压与剩余放电时间 MRE 值统计表

序号	采样数据电压值 (V)	采样已放电时间 (min)	采样数据剩余放电时间 (min)	倒序模型剩余放电时间 (min)	绝对误差	相对误差
1	9.0000	1724	0	-9.5	9.5	0.005510441
2	9.0166	1722	2	-9.65833	11.65833	0.006770224
3	9.0280	1720	4	-9.54665	13.54665	0.007875958
4	9.0393	1718	6	-9.25883	15.25883	0.00888174
5	9.0507	1716	8	-8.78978	16.78978	0.009784252
.....
230	9.8279	1266	458.	446.3955	11.60449	0.009166262
231	9.8314	1264	460.	450.3321	9.667875	0.007648635
平均相对误差		1.2803175%				

表 10 各电流强度下的平均相对误差 MRE 表

电流强度 (A)	平均相对误差 MRE
30	0.7362612%
40	1.2803175%
50	0.7090448%
60	0.8532904%
70	0.265733%

可以看到, MRE 误差小, 所以采用倒叙法建立的电压与剩余放电时间的模型拟合精度高, 根据该模型, 将电压值 9.8V 代入计算得到 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度下的放电剩余时间:

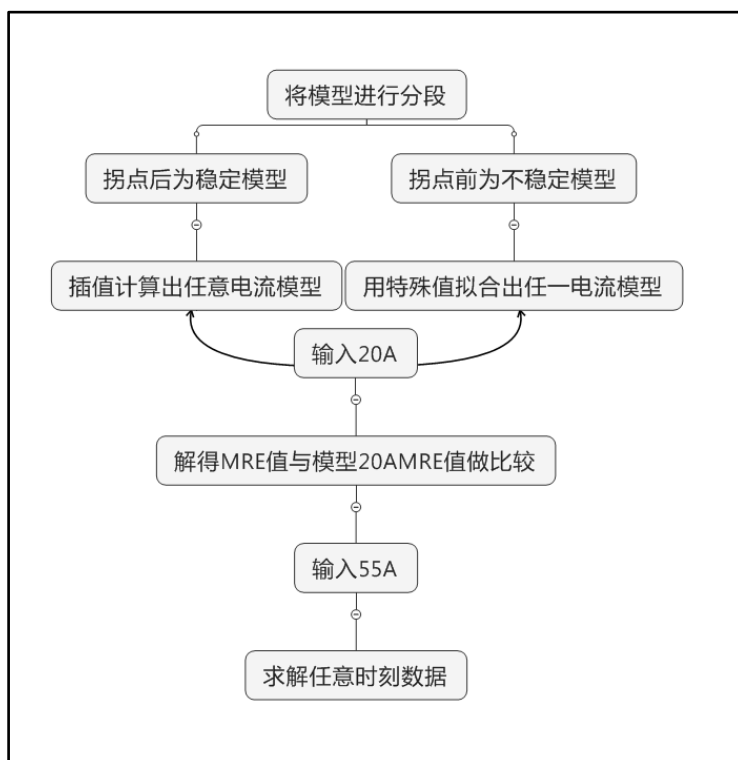
表 11 各电流强度下 9.8V—Um 的剩余放电时间

电流强度 (A)	30	40	50	60	70
模型计算的剩余放电时间 (min)	592.7240	415.6200	322.4720	284.8840	254.2160
由采样点估算的剩余时间 (min)	594	430	312	278	256

通过和实际采样点估算的剩余时间作对比可以看到, 模型计算出的 9.8 伏到 Um 伏剩余放电时间非常接近.

5.2 问题 2 模型的建立与求解

5.2.1 问题分析及解题思路



问题二思路图

此问要建立 20A 到 100A 内任意恒定电流强度放电的放电曲线函数模型，由于附录一只给出了 9 组数据，这些数据是离散的，而第二问实际是一个连续性的问题，所以必然要使用插值的方法，对问题一中建立的模型进行分析，由于放电曲线在初始阶段波动较大，用函数整体拟合效果不佳，所以在第二问，本文采取了分段建模的方法，对放电曲线进行研究。

由于问题一中已发现放电曲线由波动到稳定的分界点是其拐点，所以此处依然利用拐点将放电曲线进行分割，稳定阶段采用模型参数插值法得到任意电流的稳定阶段模型，前半段利用单调性、凹凸性、极值点、拐点等数据进行拟合得到相应的模型，并利用该分段模型，计算出 20A 时的 MRE 与第一问的结果进行比对来评估模型，最后将 55A 的放电曲线用表格和图形给出。

5.2.2 问题 2 模型的建立

5.2.2.1 任意电流放电整体模型

由于第一问得到的九个放电曲线的指数函数模型，均具有以下形式：

$$f(x) = a_1 e^{a_2 x} + a_3 e^{a_4 x}$$

所以任意电流的放电曲线函数也应具有上述结构，所以将表 1 中的九个函数的参数进行插值处理，这样就由离散数据得到了一组连续数据，便可以表示任意电流的放电曲线了，下图以 55A 电流为例，

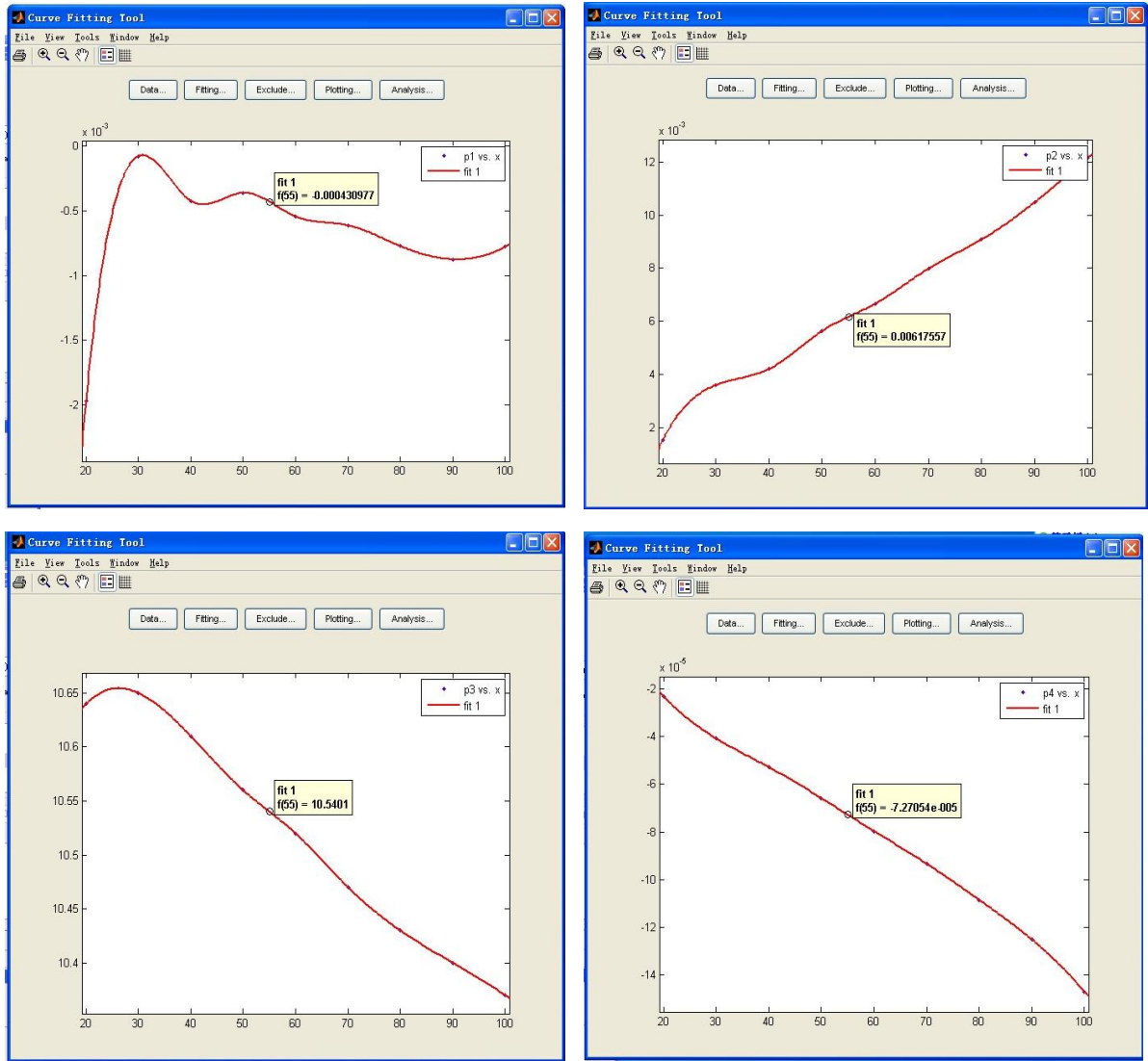


图 7 模型参数插值结果示意图（左上到右下顺时针分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 ）

以 55A 为例，它的放电曲线模型为： $U(t) = -0.00043e^{0.0062t} + 10.5401e^{-0.0000727t}$ 。

但是由于放电指数函数模型对初始波动阶段的拟合效果不佳，所以，仅以此方法得到的模型作为稳定阶段的模型。

5.2.2.2 任意电流放电分段模型

在第一问放电指数函数模型的基础上利用二阶导数计算出九条放电曲线的拐点，并将这九个拐点进行拟合得到如下函数关系：

$$f(x) = 4338e^{-0.05884x} - 8.605 \times 10^7 e^{-1.71x} \quad (3)$$

利用（3）式可计算出任意放电曲线的拐点，利用拐点可将放电曲线分段，并使用 4.2.2.1 的方法将稳定阶段的模型表示出来

表 12 放电稳定阶段的模型举例

电流(A)	拐点后段放电曲线拟合函数方程
20	$U(t) = -0.0006143 \times e^{(0.001819t)} + 10.66 \times e^{(-2.544 \times 10^{-5} \times t)}$
30	$U(t) = -4.555 \times 10^{-5} \times e^{(0.003823t)} + 10.66 \times e^{(-4.183 \times 10^{-5} \times t)}$
40	$U(t) = -0.000175 \times e^{(0.004693t)} + 10.63 \times e^{(-5.6 \times 10^{-5} \times t)}$
50	$U(t) = -0.0001182 \times e^{(0.006457t)} + 10.59 \times e^{(-7.082 \times 10^{-5} \times t)}$
60	$U(t) = -0.0001182 \times e^{(0.006457t)} + 10.59 \times e^{(-7.082 \times 10^{-5} \times t)}$
70	$U(t) = -0.0002115 \times e^{(0.009157t)} + 10.49 \times e^{(-0.0001018t)}$
80	$U(t) = -0.0008421 \times e^{(0.008974t)} + 10.43 \times e^{(-0.0001077t)}$
90	$U(t) = -0.001143 \times e^{(0.01009t)} + 10.39 \times e^{(-0.000122t)}$
100	$U(t) = -0.0001496 \times e^{(0.01104t)} + 10.36 \times e^{(-0.000138t)}$

对于放电初始波动阶段的研究，可以利用单调性、凹凸性、极值点、拐点等图像特点，将任意电流初始阶段的放电曲线进行描绘并拟合出相应的数学模型。

对附录一的数据采用横向数据插值拟合的方法，

放电时间 (min)	电流 (A) / 电压 (V)								
	20A	30A	40A	50A	60A	70A	80A	90A	100A
0	11.1781	11.0514	11.0650	11.0821	11.1043	11.1243	11.1536	11.1864	11.2179
2	10.8913	10.7179	10.6421	10.5650	10.5086	10.4257	10.3736	10.3250	10.2750
4	10.7419	10.6171	10.5521	10.4793	10.4221	10.3450	10.2979	10.2529	10.2150
6	10.6288	10.5886	10.5321	10.4657	10.4157	10.3507	10.3143	10.2843	10.2636
8	10.5581	10.5807	10.5300	10.4714	10.4264	10.3707	10.3379	10.3107	10.2857
10	10.5181	10.5786	10.5300	10.4786	10.4379	10.3850	10.3521	10.3236	10.2957
12	10.4956	10.5793	10.5321	10.4843	10.4493	10.3943	10.3607	10.3300	10.3014
14	10.4850	10.5829	10.5379	10.4914	10.4543	10.4007	10.3657	10.3343	10.3036
16	10.4819	10.5843	10.5414	10.4921	10.4586	10.4050	10.3686	10.3364	10.3050
18	10.4850	10.5871	10.5429	10.4979	10.4629	10.4071	10.3707	10.3379	10.3057

得到 20A 到 100A 的初始电压函数、拐点函数、极值函数。

$$\text{初始电压函数: } U_0(i) = 7.33 \times e^{(-0.1889i)} + 10.95 \times e^{(0.000237ki)}$$

$$\text{极小值函数: } U_{\min}(i) = 10.74 \times e^{(-0.0005159i)} - 2.36 \times 10^{13} \times e^{(-1.634i)}$$

$$\text{极大值函数: } U_{\max}(i) = 10.73 \times e^{(-0.0004116i)} - 4.824 \times 10^{11} \times e^{(-1.477i)}$$

$$\text{拐点函数: } U_{fendua}(i) = 4338 \times e^{(-0.05884i)} - 8.605 \times 10^{17} \times e^{(-1.7xi)}$$

代入任意电流值，即可以得到该电流放电曲线对应的初始电压值、拐点值、极小值和极大值，利用这四个点，用拟合的方法可得到拐点前放电初始阶段的函数图形及模型。

20A 的放电分段模型

$$U(t) = \begin{cases} 0.6857e^{-0.2985t} + 10.5e^{0.00006446t}, & t \in [0, 130) \\ -0.0006143 \times e^{(0.001819t)} + 10.66 \times e^{(-2.544 \times 10^{-5} \times t)}, & t \in [130, 3764] \end{cases}$$

55A 的放电分段模型

$$U(t) = \begin{cases} 0.633e^{-0.387t} + 10.49e^{-3.509 \times 10^{-5}t}, & t \in [0, 170) \\ -0.00043099e^{(0.006176t)} + 10.54 \times e^{(-7.27 \times 10^{-5} \times t)}, & t \in [170, 581] \end{cases}$$

利用 20A 的分段模型计算出拟合数据，得出该模型对应的 MRE=2.0153%，和问题一模型计算的 2.6452% 接近，说明任意电流分段函数模型较为可靠可用。

5.2.3 问题 2 模型的求解

将 55A 电流值代入上述模型计算得到放电曲线数据值如下表所示：

表 13 55A 电流强度下电压与放电时间关系表

时间(分)	0	2	4	6	8	10	12	14
电压(V)	11.0940	10.8759	10.6578	10.4397	10.4395	10.4583	10.4668	10.4729
时间(分)	16	18	20	22	1140	1142	1144
电压(V)	10.4754	10.4804	10.4832	10.4858	9.1774	9.1688	9.1601
时间(分)	1146	1148	1150	1152	1154	1156	1158	1160
电压(V)	9.1513	9.1424	9.1334	9.1243	9.1151	9.1058	9.0963	9.0867

根据建立的模型及得到的数据，用 Matlab 画出 55A 的放电曲线图形如图 8 所示：

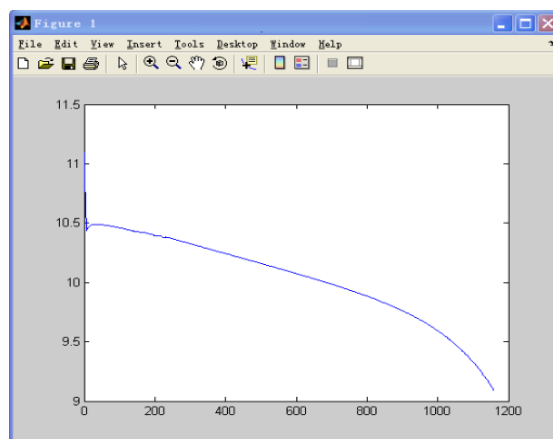


图 8 55A 的电流放电曲线

5.3 问题 3 模型的建立与求解

5.3.1 问题分析及解题思路

通过对问题 3 的数据分析，发现这里电压以 0.005V 为间隔给出相应的衰减时间，需要建立的模型是以电压为自变量，以时间为因变量，这与第一问中模型以时间为自变量，以电压为因变量恰好相反，这也启发我们，在第一问模型的基础上去寻找放电曲线反函数模型来解决第三问，由于第一问的模型结构具有指数函数模型特点，即：

$U(t) = a_1e^{a_2t} + a_3e^{a_4t}$ ，且在第一问中已经使用模型的反函数模型用于求解，并且对放电

曲线反函数曲线拟合效果最好的是二次多项式函数，所以第三问本文就尝试用二次多项式来拟合衰减状态 3，补全时间.

5.3.2 模型的求解

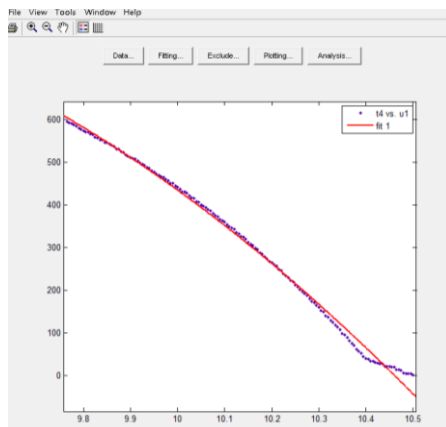


图 9 衰减状态 3 的多项式拟合图像

拟合出的模型为 $T(u) = -316.1x^2 + 5524x - 2.319 \times 10^4$

将自变量 $x=9.00: 0.005:10.5$ 带入模型解出的数据为：

表 14 衰减状态 3 的剩余放电时间表

电压 (V)	9.7700	9.7650	9.7600	9.7550	9.7500	9.7450	9.7400	9.7350
时间 (分)	593.6	596.2	596.96	600.26	603.55	606.82	610.07	613.31
电压 (V)	9.7300	9.7250	9.7200	9.7150	9.7100	9.7050	9.7000	9.6950
时间 (分)	616.54	619.74	622.94	626.11	629.27	632.42	635.54	638.66
电压 (V)	9.6900	9.6850	9.6800	9.6750	9.6700	9.6650	9.6600	9.6550
时间 (分)	641.75	644.84	647.9	650.95	653.98	657	660.01	662.99
.....								
电压 (V)	9.0750	9.0700	9.0650	9.0600	9.0550	9.0500	9.0450	9.0400
时间 (分)	842.16	843.3	844.42	845.52	846.61	847.69	848.75	849.79
电压 (V)	9.0350	9.0300	9.0250	9.0200	9.0150	9.0100	9.0050	9.0000
时间 (分)	850.81	851.82	852.82	853.8	854.76	855.71	856.64	857.56

由于问题三模型方法均来自于问题一建立、检验过的模型，因此该模型可靠性，计算精度较好.

§ 6 模型的评价及推广

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

- 1.对模型进行分层评价，优化后的方法简单易懂，便于实际计算；
- 2.运用误差分析模型，使结果更加精确；
- 3.从多角度，全方位考虑问题，有多种模型的比较和优化，模型使用效果好可靠性

高;

4.在问题一求解过程中,利用了剩余时间算法,建立相应模型,联系实际应用广泛.

6.1.2 模型的缺点

1.在第二问中, MRE 评估模型的精度时只计算了一种电流值的 MRE 值, 缺少说服力.

2.差值拟合得到模型的精确度、严谨性有待提高.

6.2 模型的推广

利用该模型可在实测数据的基础上对新产品的性能测试进行评估.

§ 7 参考文献

[1]张志勇.精通 MATLAB [M].北京: 北京航空航天大学出版社, 2003.03.

[2]袁新生, 邵大宏, 郁时炼.LINGO 和 Excel 在数学建模中的应用[M].北京: 科学出版社, 2006.

[3]韩中庚.数学建模实用教材[M].北京: 高等教育出版社, 2013.11.

[4]同济大学等.高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.6,135~146.

§ 8 附录

1.MATLAB程序

(1) 问题一中9组电流图像

```
clc
clear
hold on
x20=0:2:3764; %实际测量使用时间
z20=load('shuju20.txt'); %使用时间对应的实测剩余电压
plot(x20,z20,'y')
x30=0:2:2454;
z30=load('shuju30.txt');
plot(x30,z30,'m')
x40=0:2:1724;
z40=load('shuju40.txt');
plot(x40,z40,'c')
x50=0:2:1308;
z50=load('shuju50.txt');
plot(x50,z50,'r')
x60=0:2:1044;
z60=load('shuju60.txt');
plot(x60,z60,'g')
x70=0:2:862;
z70=load('shuju70.txt');
plot(x70,z70,'b')
x80=0:2:730;
z80=load('shuju80.txt');
plot(x80,z80,'r')
```

```

x90=0:2:620;
z90=load('shuju90.txt');
plot(x90,z90,'k')
x100=0:2:538;
z100=load('shuju100.txt');
plot(x100,z100)
x=0:2:581*2-1
z1=load('A55.txt')
z1=z1'
plot(x,z1)

```

(2) 求第一问全数据拟合函数, 也可倒序求倒序拟合函数, 在Matlab工具箱处理

```

clc
clear
x20=0:2:3764; %时间作为因变量
z20=load('shuju20.txt'); %剩余电压作为自变量
x30=0:2:2454;
z30=load('shuju30.txt');
x40=0:2:1724;
z40=load('shuju40.txt');
x50=0:2:1308;
z50=load('shuju50.txt');
x60=0:2:1044;
z60=load('shuju60.txt');
x70=0:2:862;
z70=load('shuju70.txt');
x80=0:2:730;
z80=load('shuju80.txt');
x90=0:2:620;
z90=load('shuju90.txt');
x100=0:2:538;
z100=load('shuju100.txt');
cftool

```

(3) 求各电流对应拐点

```

clc
clear
x=20:10:100 %各电流
f= 4338*exp(-0.05884*x) + (-8.605e+017) *exp(-1.71*x) %对应拐点时间

```

(4) 拐点曲线对应的电压值

```

clc
clear
x=20:10:100

```

```
fgd= 10.73*exp(-0.0004268*x) + -2.017e+005*exp(-0.7226*x) %求对应电流的电压值
```

(5) 求初始点, 极小值点, 最大点, 拐点

```
clc
clear
x=20:10:100
csd=[11.1781 11.0514 11.0650 11.0821 11.1043 11.1243 11.1536 11.1864 11.2179]
jzd=[10.48 10.58 10.53 10.47 10.42 10.35 10.3 10.25 10.22]
zdd=[10.57 10.6 10.56 10.51 10.47 10.41 10.37 10.34 10.31];
gd=[10.5369 10.5986 10.5557 10.5086 10.4693 10.4093 10.3679 10.33 10.2936];
md=[0 0 0 0 0 0 0 0 0]
jz=[csd;jzd;zdd;gd]
z20=jz(:,1)
z30=jz(:,2)
z40=jz(:,3)
z50=jz(:,4)
z60=jz(:,5)
z70=jz(:,6)
z80=jz(:,7)
z90=jz(:,8)
z100=jz(:,9)
cftool
```

(6) 55A前四点电压取值

```
clc
clear
x=55;
fcsd= 7.733*exp(-0.1889*x) + 10.95*exp(0.0002371*x);
fjzd = 10.74*exp(-0.0005159*x) + -2.366e+013*exp(-1.634*x);
fzdz= 10.73*exp(-0.0004116*x) + -4.824e+011 *exp(-1.477*x);
fgd= 10.73*exp(-0.0004268*x) + -2.017e+005*exp(-0.7226*x); %ĆóĆ°4µā
z=[fcsd fjzd fzdz fgd]
```

(7) 9.8A用到9A对应电流时间

```
clc
clear
x=9.8;
f20=1375*x^2+(-2.469e+004)*x + (1.108e+005);
f30= 878.1*x^2 -1.57e+004*x +7.012e+004;
f40= 690.5*x^2 -1.245e+004 *x + 5.611e+004;
f50=591.8*x^2 -1.073e+004*x + 4.864e+004;
f60= 492.1*x^2 -8918 *x + 4.042e+004;
f70= 430.4*x^2 -7793*x + 3.529e+004;
f80 = 385.5*x^2 -6980*x +3.161e+004;
f90= 342.5*x^2 -6201*x + 2.808e+004;
```

```

f100=301.7*x^2 -5445*x + 2.458e+004;
t98=[f20 f30 f40 f50 f60 f70 f80 f90 f100]
x=9;
f20=1375*x^2+(-2.469e+004)*x + (1.108e+005);
f30= 878.1*x^2 -1.57e+004*x +7.012e+004;
f40= 690.5*x^2 -1.245e+004 *x + 5.611e+004;
f50=591.8*x^2 -1.073e+004*x + 4.864e+004;
f60= 492.1*x^2 -8918 *x + 4.042e+004;
f70= 430.4*x^2 -7793*x + 3.529e+004;
f80 = 385.5*x^2 -6980*x +3.161e+004;
f90= 342.5*x^2 -6201*x + 2.808e+004;
f100=301.7*x^2 -5445*x + 2.458e+004;
t90=[f20 f30 f40 f50 f60 f70 f80 f90 f100]

```

(8) 全数据9条曲线图

```

clc
clear
hold on
x20=0:2:3764;
z20=load('shuju20.txt');
plot(x20,z20,'y')
x30=0:2:2454;
z30=load('shuju30.txt');
plot(x30,z30,'m')
x40=0:2:1724;
z40=load('shuju40.txt');
plot(x40,z40,'c')
x50=0:2:1308;
z50=load('shuju50.txt');
plot(x50,z50,'r')
x60=0:2:1044;
z60=load('shuju60.txt');
plot(x60,z60,'g')
x70=0:2:862;
z70=load('shuju70.txt');
plot(x70,z70,'b')
x80=0:2:730;
z80=load('shuju80.txt');
plot(x80,z80,'r')
x90=0:2:620;
z90=load('shuju90.txt');
plot(x90,z90,'k')
x100=0:2:538;
z100=load('shuju100.txt');
plot(x100,z100)

```

```
cftool
```

(9) 求通用模型系数

```
clc
clear
x=20:10:100
p1=[-0.0006143 -0.000175 -0.000175 -0.0001182 -0.0001376 -0.0002115 -0.0008421
-0.001143 -0.001496]
p2=[0.001819 0.003823 0.004693 0.006457 0.007917 0.009157 0.008974 0.01009
0.01104]
p3=[10.66 10.66 10.63 10.59 10.56 10.49 10.43 10.39 10.36]
p4=[-2.544e-005 -4.183e-005 -5.6e-005 -7.082e-005 -8.777e-005 -0.0001018
-0.0001077 -0.000122 -0.0001381]
cftool %´ò;ª¹¼ßïäÇó55°-ÊýÇúïß
```

(10) 求拐点前曲线

```
clc
clear
x20=0:2:130
y20=load('qian20.txt')
x30=0:2:742
y30=load('qian30.txt')
x40=0:2:412
y40=load('qian40.txt')
x50=0:2:228
y50=load('qian50.txt')
x60=0:2:128
y60=load('qian60.txt')
x70=0:2:70
y70=load('qian70.txt')
x80=0:2:40
y80=load('qian80.txt')
x90=0:2:22
y90=load('qian90.txt')
x100=0:2:12
y100=load('qian100.txt')
cftool
```

(11) 求拐点函数，可用来求55A时拐点时间

```
x=55
f= 4338*exp(-0.05884*x) + (-8.605e+017) *exp(-1.71*x)
```

(12) 拐点拟合曲线，可求各拐点电压

```
clc
clear
```

```

x=20:10:100
fgd= 10.73*exp(-0.0004268*x) + -2.017e+005*exp(-0.7226*x)
(13) 末点曲线
x=55
fmd = 9087*exp(-0.07148*x) + 2090*exp(-0.01371*x)
(14) 求拐点
clc
clear
guaidian20=diff('f= -0.001965*exp(0.001531*x) + 10.64*exp(-2.317e-005*x)',2);
guaidian30=diff('f= -0.0008066e*exp(0.003597*x) +
10.65*exp(-4.078e-005*x)',2);
guaidian40=diff('f=-0.000425*exp(0.004204*x) + 10.61*exp(-5.282e-005*x)',2);
guaidian50=diff('f= -0.0003639*exp(0.005637*x) + 10.56*exp(-6.58e-005
*x)',2);
guaidian60=diff('f=-0.0005453*exp(0.006667*x) + 10.52*exp(-7.959e-005
*x)',2);
guaidian70=diff('f=-0.0006155*exp(0.007988*x) +
10.47*exp(-9.326e-005*x)',2);
guaidian80=diff('f=-0.0007741*exp(0.009083*x) +10.43*exp(-0.0001084*x)',2);
guaidian90=diff('f=-0.0008763*exp(0.01049*x) +10.4*exp(-0.000125*x)',2);
guaidian100=diff('f=-0.0007764*exp(0.01216*x) + 10.37*exp(-0.0001468*x)',2);
dian20=solve('0 =
-.4605883365e-8*exp(.1531e-2*x)+.5712072296e-8*exp(-.2317e-4*x)')
dian30=solve('0 =
-.104361206994e-8*exp(.3597e-2*x)+.17711039460e-7*exp(-.4078e-4*x)')
dian40=solve('0 =
-.7511286800e-8*exp(.4204e-2*x)+.29601394964e-7*exp(-.5282e-4*x)')
dian50=solve('0 =
-.115632023391e-7*exp(.5637e-2*x)+.457209984e-7*exp(-.658e-4*x)')
dian60=solve('0 =
-.242379791717e-7*exp(.6667e-2*x)+.66639656412e-7*exp(-.7959e-4*x)')
dian70=solve('0 =
-.392739126320e-7*exp(.7988e-2*x)+.91062066972e-7*exp(-.9326e-4*x)')
dian80=solve('0 =
-.638639381749e-7*exp(.9083e-2*x)+.1225583408e-6*exp(-.1084e-3*x)')
dian90=solve('0 =
-.9642813963e-7*exp(.1049e-1*x)+.1625000e-6*exp(-.125e-3*x)')
dian100=solve('0 =
-.11480285184e-6*exp(.1216e-1*x)+.2234759888e-6*exp(-.1468e-3*x)')
d=[138.49669157660551074057771539272, 778.35941249219482763010870688616,
322.16882353729729468063250672177, 241.06225575571094935017895813246,
149.90966573353619164593428781126, 104.06555795892587568096548131959,
70.917631021710731212729704794609, 49.164384161442547579508450086339,
54.123545538350284884542571859657]
x=20:10:100

```

```
plot(x,d)
```