

参赛人（一）：

参赛人（二）：

参赛人（三）：

去库存问题的研究

摘要

近年来，随着市场竞争的加剧，企业愈发重视对货物供应链中库存的控制与管理。在满足一定客户需求的条件下对库存量的优化能够有效地降低运营成本，提高企业竞争力。

为降低流通库存，本文通过对供应链中供应商、分销商、零售商三个环节的分析，在引入“供货提前期”概念，且提出各个供应链中节点日需求量服从正态分布等假设前提下，建立了库存量与到货率的关系模型，并在到货率给定的条件下求得了最优库存的数值。

针对第一问，首先从商品供应链网状结构出发，依据模型系统信息共享假设，供应商根据供应链中各个分销商及零售商的需求信息向生产商发出订单请求，再将产品分配给各个节点。我们将供应商作为研究对象，通过题目中对商品供应链中 (r, q) 补货模型的描述，得到末端零售商到货率与参数 r, q 的关系，并引入库存安全系数的概念，从而成功建立了库存与到货率关系模型。

针对第二问，我们首先定义分销商库存总和为所有分销商节点平均库存之和。由于假设中各节点平均库存相互独立，要使分销商库存总和达到最小，每个分销商节点库存均应取最小值。选取 r, q 作为指标描述供应链中单个节点库存；再通过引入的库存安全系数，确定补货库存点、缺货量与此节点单位时间内需求量、安全系数相关的函数表达式，建立节点库存与到货率关系。再求库存的极值条件下对应的 r, q 。最后代入题目中给定的到货率为90%的条件，即可成功求解出在到货率为90%条件下使库存总和最小的 r, q 值。

针对第三问，结合问题一与问题二中所得模型结果，利用第二问的求解思路，得到保证到货率为95%的条件下供应商的库存安全系数、补货库存点和订货批量，并以此进一步表示出供应商的最优库存。通过对产品流转数据对末端零售商的需求进行分析，针对不同产品给出供应商的最优库存。

关键词：供应链网 库存优化 到货率 提前期 (r, q) 补货模型

1. 问题重述

某行业货物供应商 (Supplier) 通过各公司 (Fac), 进而向下级子公司 (Fac) 直至零售商发行某种专业商品, 货物的流通过程如下图。一般地, 某个发货商有可能同时在其它订单中也作为收货商, 所以该图只是显示了某批货物可能的运输销售流程, 但不足以表示发货商与收获商的上下级关系, 通常它们会形成一个网状结构, 如附件。

另一附件数据集“产品流转数据”是一份销售链行为记录表。数据集的每条观测记录了一次订单情况，即某个上级发货商到下级收货商的某货物批次的情况，包括某上级供应商的某批次产品在某天流通到某个下级收货商的具体信息。在平日里，各公司都有一个初始库存，假设公司的库存量一旦小于某个 r 值就会立即向其某个上级下订单补货，订单量为常数 q 。而上级供应商要向多个下级供

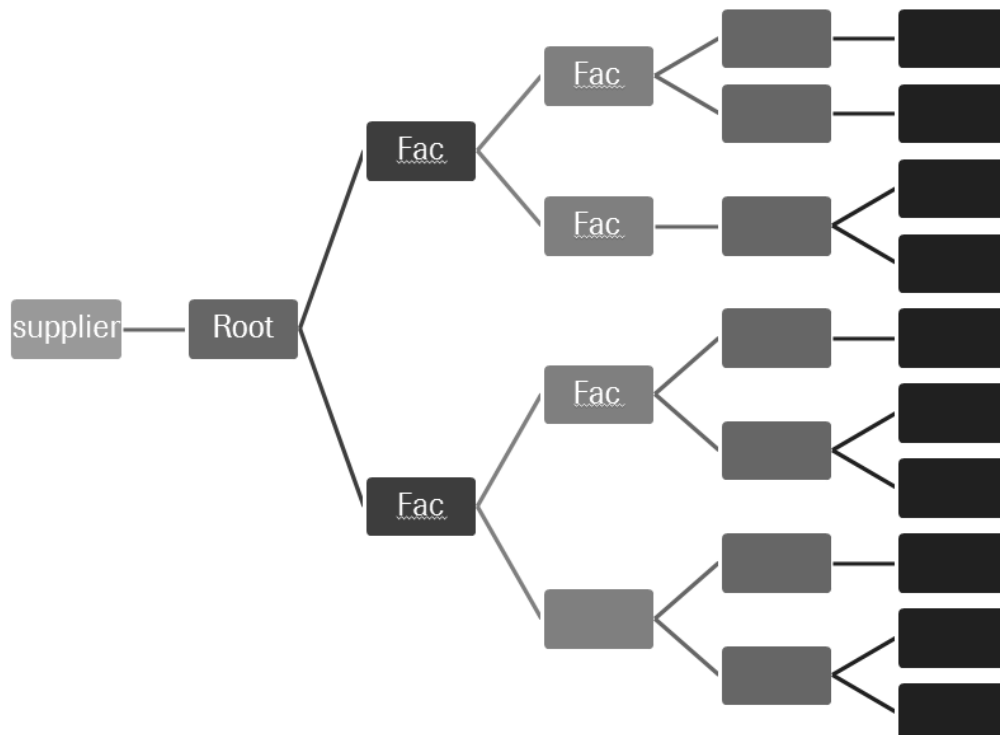
货,因此下级发来的订单请求未必能得到满足,记下级收货商实际收到的货量占其需求量的百分比的值为到货率。目前该商品较为紧俏,末端收货商(实际使用部门)需求旺盛,到货率也仅有 90%。

该行业供应商关心如下问题，邀请你们小组在尚未提高生产能力之前提升到货率，降低流通库存。

- (1) 库存与到货率之间究竟有什么关系?
- (2) 求若要满足目前到货率 90% 不变, 并且使所有分销商的库存量总和最小, r

和 q 的值应该为多少？库存总和需要你自已定义。

- (3) 若生产能力提高, 估算能使末端收货商的到货率提高至 95%, 请重新估算供应商的最优库存。



2、问题分析

在强调成本优势的今天，货物的供应链必须要能够协调好库存成本与顾客需求之间的关系。在该模式下对库存进行控制的目的是保证在满足顾客需求的前提下，减少供应链系统中的库存量，降低运行总成本，从而提高供应链的竞争力，才在竞争日益激烈的市场环境下立于不败之地。

2.1 问题一

在问题一中，由于库存随时间动态变化，我们在这里考虑的库存为包括净库存和在途库存（已预定量）在内的平均库存。根据题意分析可知，平均库存与订货量 q 和订货点 r 有关。在另一方面，从到货率的定义出发，我们又找到了 r ， q 与到货率之间的关系，综合以上可用 r, q 将库存与到货率的关系表示出来。

2.2 问题二

在问题二中，我们定义库存总和为所有分销商节点平均库存之和。根据各节点平均库存相互独立的假设条件，要使库存总和取到极小值，则各个节点平均库存均为最小，即对单个节点库存求导，导数为 0 时所得的对应参数值即为所求目标。最后代入题目中给定的到货率为 90% 的条件，即可成功求解出在到货率为 90% 条件下使库存总和最小的 r, q 值。

2.3 问题三

在问题三中，末端收货商的到货率变为 95%，在此条件下，使库存总和最小的供应商库存即为最优库存。由问题二的步骤，我们可以在新的到货率下，求得最优库存对应的最优 r, q 值。再利用第一问求得的 r, q 与库存的关系式求得此时供应商的最优库存。

3、模型假设

1. 假设一种网状供应链中只有一种核心产品；
2. 假设不相邻层次的节点之间无物流，下级节点向上级节点方向无逆向物流；
3. 假设各个节点日需求量均服从正态分布，不同节点的需求相互独立；
4. 假设上级节点向下级节点的提前期已知。提前期定义为上级节点接受到订单后立即开始处理，直到货物交到下级节点所需要的时间；
5. 设定安全库存，假设安全系数可变，各个分销商节点连续观察库存水平，当库存量降低到补货库存点时提出订货，订货批量为常量；
6. 整条供应链各个销售节点具有相同的到货率，且需达到给定的到货率；
7. 假设每个节点按照相同的分配策略向其下级收货商发货；
8. 假设整个模型系统信息完全透明化，信息在各个节点之间完全、及时的共享；
9. 在一个生产周期开始与结束时，所有分销商的库存总和值不变。

2、符号说明

D_j	供应链网中第 j 个零售商
a_0	零售商的到货率
P_{D_i}	D_j 的日需求量，服从正态分布
u_{D_j}	P_{D_i} 的均值
σ_{D_j}	P_{D_i} 的标准差
L_0	供应商的平均库存
q_0	供应商每次的订货批量
r_0	供应商的补货库存点
t_0	供应商库存安全系数
T_0	供应商的提前期
n	供应链网中零售商个数
Z	供应链网中分销商层数
m_K	第 K 层分销商个数
K_i	供应链网中的第 K 层第 i 个分销商
a_{K_i}	分销商 K_i 下层节点的到货率
q_{K_i}	分销商 K_i 每次的订货批量
r_{K_i}	分销商 K_i 的补货库存点
L_{K_i}	分销商 K_i 的平均库存
T_{K_i}	分销商 K_i 的提前期
X_{K_i}	分销商 K_i 单位时间内需求量，服从正态分布

μ_{K_i}	X_i 的均值
σ_{K_i}	X_i 的标准差
B_{K_i}	分销商 K_i 提前期内订货的缺货量
S_{K_i}	分销商 K_i 安全库存
t_{K_i}	分销商 K_i 库存安全系数
L	所有分销商平均库存的总和
M_{K_i}	分销商 K_i 在提前期内的需求量
$f_{K_i}(x)$	M_{K_i} 服从的正态分布的概率密度函数 $f_{K_i}(x)$
$\varphi(x)$	标准正态分布密度函数
$\phi(x)$	标准正态分布函数
$\psi(x)$	$\varphi(x) - x[1 - \phi(x)]$
$\phi^{-1}(x)$	$\phi(x)$ 的反函数

5、模型的建立与求解

5.1 问题一：库存与到货率关系模型建立

5.1.1 模型建立

货物供应商各层分销商直至零售商发行专业商品。根据该种货物流通模式，基于其中绝大部分关系，可建立起如下图所示的供应链关系网示意图

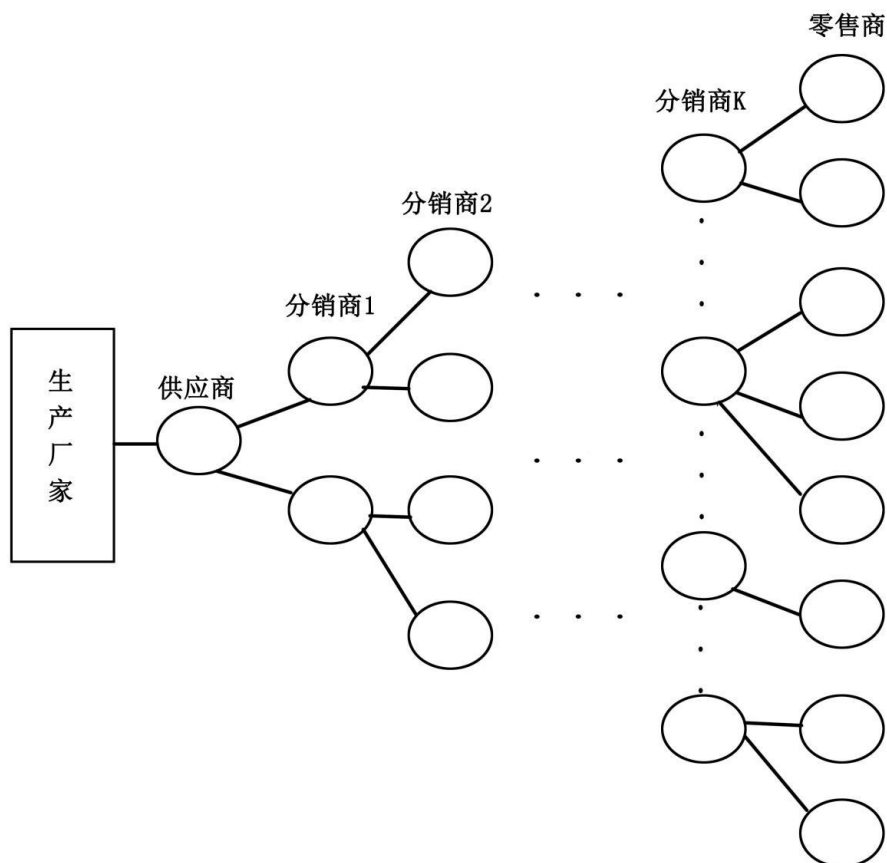


图1 商品供应链网状结构示意图

供应商管理库存是由供应链中各个分销商及零售商将需求信息与供应商分享后，供应商根据此信息，评估整体供应链的需求之后，向生产商发出订单请求，生产商生产的货物由供应商将分配给供应链中各个节点。

本题中以平均库存来反映库存水平，具体定义如下：

平均库存=节点现有库存+正在转移给本节点的库存

根据题目叙述，各个节点均采用 (r, q) 补货模型：即节点连续观察库存水平，当库存量降低到补货库存点 r ，就立即向上级节点发出订单申请，订货批量为 q 。

根据假设3、4、5，整条供应链在经历一次完整的订购周期之后，可认为生产企业生产的货物数量即为零售商最终收到的货物数量。在一个订货提前期内，

供应商的日需求量 $\sum_{j=1}^n P_{D_j} T_0 \sim N(T_0 \sum_{j=1}^n u_{D_j}, \sqrt{T_{K_i} \sum_{j=1}^n \sigma_{D_j}^2})$ ，供应商平均库存 L_0 为在一个完整的订购周期内的库存量的平均水平：

$$L_0 = (r_0 - T_0 \sum_{j=1}^n u_{D_j} + r_0 - T_0 \sum_{j=1}^n u_{D_j} + q_0) / 2 = r_0 - T_0 \sum_{j=1}^n u_{D_j} + q_0 / 2 \quad (1)$$

引入库存安全系数 t_0 ，取

$$r_0 = T_0 \sum_{i=1}^n u_{iD} + t_0 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \quad (2)$$

$$S_{k_i} = t_0 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2}$$

其中：安全库存

根据到货率的定义

$$\text{到货率} = \frac{\text{供应量}}{\text{需求量}} \times 100\% = (1 - \frac{\text{缺货量}}{\text{需求量}}) \times 100\% \quad (3)$$

而缺货量期望值为

$$B_0 = \int_{r_0}^{\infty} (x - r_0) f(x) dx = \int_{r_0}^{\infty} (x - r_0) \varphi\left(\frac{x - T_0 \sum_{j=1}^n u_{D_j}}{\sqrt{T_0 \sum_{j=1}^n \sigma_{D_j}^2}}\right) dx = \psi(t_0) \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{D_j}^2} \quad (4)$$

其中 $\psi(t_0) = \varphi(t_0) - t_0 [1 - \phi(t_0)]$ ， $\psi(t_0) > 0$

可得零售商的到货率

$$a_0 = 1 - \frac{B_0}{q_0} = 1 - \frac{\psi(t_0) \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{D_j}^2}}{q_0} \quad (5)$$

则有

$$q_0 = \frac{\psi(t_0) \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{D_j}^2}}{(1 - a_0)} \quad (6)$$

将(5) (6)代入(1)式得到

$$L_0 = r_0 - T_0 \sum_{j=1}^n u_{D_j} + q_0 / 2 = \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{D_j}^2} \left[t_0 + \frac{\psi(t_0)}{2(1 - a_0)} \right] \quad (7)$$

5.2 问题二：已知给定到货率与库存量条件求解参数值 r, q

5.2.1 模型建立

定义分销商库存总和 L 为所有分销商平均库存的总和。由供应链网中分销商总共有 Z 层，第 K 层有 m_k 个节点，则分销商的库存总量之和为：

$$L = \sum_{K=1}^J \sum_{i=1}^{m_k} L_{K_i} \quad (8)$$

根据假设 3 各节点的 L_{K_i} 相互独立，若想使得 L 最小，则应分别使每个节点 K_i 的平均库存量 L_{K_i} 最小。

根据假设 3、4、5，在一个订货提前期内，分销商 K_i 日需求量 $M_{K_i} = X_{K_i} T_{K_i} \sim N(u_{K_i} T_{K_i}, \sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}})$ ，分销商 K_i 的平均库存为

$$L_{K_i} = (q_{K_i} + r_{K_i} - u_{K_i} T_{K_i} + r_{K_i} - u_{K_i} T_{K_i}) / 2 = r_{K_i} - u_{K_i} T_{K_i} + q_{K_i} / 2 \quad (9)$$

同样对分销商 K_i ，考虑安全库存的情况下

$$r_{K_i} = u_{K_i} T_{K_i} + t_{K_i} \sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}} \quad (10)$$

$$S_{K_i} = t_{K_i} \sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}}$$

其中：安全库存

分销商 K_i 在提前期内的缺货量为：

$$B_{K_i} = E(x > r_{K_i}) = \int_{r_{K_i}}^{\infty} (x - r_{K_i}) f_{K_i}(x) dx = \int_{r_{K_i}}^{\infty} (x - r_{K_i}) \phi\left(\frac{x - u_{K_i} T_{K_i}}{\sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}}}\right) dx = \psi(t_{K_i}) \sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}} \quad (11)$$

其中 $\psi(t_{K_i}) = \phi(t_{K_i}) - t_{K_i} [1 - \phi(t_{K_i})]$ ， $\psi(t_{K_i}) > 0$ ^[1]

根据到货率的定义，对于分销商 K_i 所有下层节点到货率

$$a_{K_i} = 1 - \frac{B_{K_i}}{q_{K_i}} = 1 - \frac{\sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}} \psi(t_{K_i})}{q_{K_i}} \quad (12)$$

则对于分销商 K_i

$$q_{K_i} = \frac{\sigma_{K_i} \sqrt{T_{K_i}} \psi(t_{K_i})}{1 - a_{K_i}} \quad (13)$$

$$L_{K_i} = r_{K_i} - u_{k_i} T_{k_i} + q_{K_i} / 2 = \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} \left[t_{k_i} + \frac{\psi(t_{k_i})}{2(1-a_{K_i})} \right] \quad (14)$$

对方程(14)左右两边同时求导，得：

$$\begin{aligned} \frac{dL_{K_i}}{dt_{k_i}} &= \frac{d(t_{k_i} \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} + \frac{\sigma_{k_i} \sqrt{T_{K_i}} \psi(t_{k_i})}{2(1-a_{K_i})})}{dt_{k_i}} \\ &= \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} (1 + \frac{\psi'(t_{k_i})}{2(1-a_{K_i})}) = \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} (1 + \frac{\phi(t_{k_i}) - 1}{2(1-a_{K_i})}) \end{aligned} \quad (15)$$

由 $\frac{dL_{K_i}}{dt_{k_i}} = 0$ 得到，

$$t_{k_i}^* = \phi^{-1}(2a_{k_i} - 1) \quad (16)$$

$$\text{此时 } \frac{d^2 L_{K_i}}{dt_{k_i}^2} = \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} \frac{\phi(t_{k_i}^*)}{2(1-a_{k_i})} > 0$$

则有：

$$r_{k_i}^* = u_{k_i} T_{k_i} + t_{k_i}^* \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} = u_{k_i} T_{k_i} + \phi^{-1}(2a_{k_i} - 1) \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} \quad (17)$$

$$q_{K_i}^* = \frac{\sigma_{k_i} \sqrt{T_{K_i}} \psi(t_{k_i}^*)}{2(1-a_{K_i})} \quad (18)$$

5.2.2 模型求解

当 $a_{k_i} = 0.9$ ，查标准正态分布分位数表得到： $\phi^{-1}(2a_{k_i} - 1) = \phi^{-1}(0.8) = 0.8416$

则

$$\psi(t_{k_i}^*) = \phi(t_{k_i}^*) - t_{k_i}^* [1 - \phi(t_{k_i}^*)] = 0.7995 - 0.8416 \times (1 - 0.8) = 0.63118$$

$$r_{k_i}^* = u_{k_i} T_{k_i} + \phi^{-1}(2a_{k_i} - 1) \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}} = u_{k_i} T_{k_i} + 0.8416 \sigma_{k_i} \sqrt{T_{k_i}}$$

$$q_{K_i}^* = \frac{\sigma_{k_i} \sqrt{T_{K_i}} \psi(t_{k_i}^*)}{2(1-a_{K_i})} = \frac{\sigma_{k_i} \sqrt{T_{K_i}} \times 0.63118}{2(1-0.9)} = 3.1559 \sigma_{k_i} \sqrt{T_{K_i}}$$

5.3 问题三：改变到货率后对供应商库存量的重新估算

5.3.1 模型建立

由问题一可知

$$L_0 = r_0 - T_0 \sum_{i=1}^n u_{iD} + q_0 / 2 = \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \left[t_0 + \frac{\psi(t_0)}{2(1-a_0)} \right] \quad (19)$$

当不考虑成本等问题时，认为供应商库存的最优即为库存最小

$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{dt_0} &= \frac{d(t_0 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} + \frac{\sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \psi(t_0)}{2(1-a_0)})}{dt_0} \\ &= \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} (1 + \frac{\psi'(t_0)}{2(1-a_0)}) = \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} (1 + \frac{\phi(t_0) - 1}{2(1-a_0)}) \end{aligned} \quad (20)$$

当 L_0 取得最小值时，有 $\frac{dL_0}{dt_0} = 0$ ，解得

$$t_0^* = \phi^{-1}(2a_0 - 1) \quad (21)$$

$$\text{此时有 } \frac{d^2 L_0}{dt_0^2} = \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \frac{\phi(t_0^*)}{2(1-a_0)} > 0$$

5.3.2 模型求解

当 $a_0 = 0.95$ ， $t_0^* = \phi^{-1}(2a_0 - 1) = \phi^{-1}(0.90) = 1.282$

$$\psi(t_0^*) = \phi(t_0^*) - t_0^* [1 - \phi(t_0^*)] = 0.8997 - 1.282 \times (1 - 0.9) = 0.7715$$

$$\begin{aligned} r_0 &= T_0 \sum_{i=1}^n u_{iD} + 1.282 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \\ q_0 &= \frac{\sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \psi(t_0)}{(1-a_0)} = \frac{\sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \times 0.7715}{(1-0.95)} = 15.43 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} \end{aligned}$$

此时最优库存为

$$L_0 = 1.282 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} + 7.715 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2} = 8.997 \sqrt{T_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{iD}^2}$$

分析产品流转数据可以得到产品的需求情况

零售商需求统计			
产品名	平均日需求量	日需求量方差	日需求量标准差
KPTBP	7519.22	38226747.6	6182.78
JYECGRS α -2aZSY	1583.48	223270	472.5146
MTMKF酯JN	4837.52	12853223.8	3585.14
ZSYQTZDK	324.45	40928.7	202.3085
BFZDKZSY	所给订单中均为生产企业直接销售出库		

当 T_0 取不同值，代入(21)可分别计算出四种产品的最优库存以及此时的参数 r, q

当取 $T_0 = 15$ ，代入得

产品名	最优库存	r	q
KPTBP	215440.3394	143486.8123	369483.6542
JYECGRS α -2aZSY	16464.87873	26098.31254	28237.53237
MTMKF酯JN	124925.0077	90363.60692	214248.4015
ZSYQTZDK	7049.483937	5871.244655	12089.97856

当取 $T_0 = 30$ ，代入得

产品名	最优库存	r	q
KPTBP	304678.6498	268990.8524	522528.7948
JYECGRS α -2aZSY	23284.8548	50822.30417	39933.90125
MTMKF酯JN	176670.6401	170299.7426	302992.9951
ZSYQTZDK	9969.475791	11154.06996	17097.81166

当取 $T_0 = 45$ ，代入得

产品名	最优库存	r	q
KPTBP	373153.6138	391536.283	639964.4616
JYECGRS α -2aZSY	28518.00649	75320.18612	48908.84075
MTMKF酯JN	216376.4604	248520.302	371089.1168
ZSYQTZDK	12210.06435	16340.08578	20940.45714

当取 $T_0 = 60$ ，代入得

产品名	最优库存	r	q
KPTBP	430880.6787	512550.2246	738967.3083
JYECGRS α -2aZSY	32929.75745	99701.02508	56475.06474
MTMKF酯JN	249850.0153	325852.8138	428496.803
ZSYQTZDK	14098.96787	21475.98931	24179.95713

从以上代入 T_0 计算的不同最优库存可以看出，最优库存受 T_0 影响较大，因而缩短提前期对降低库存有重要意义

注：

1. 根据产品流转数据，产品 BFZDKZSY 的订单收发货只存在于生产企业与批发企业之间，没有多级网状供应关系，不满足题目所要讨论的情况，在此不予讨论
2. T_0 的取值视实际情况而定，从所给数据中难以归纳总结出各种产品的流转周期。

6、模型评价

6.1 模型的优点：

1. 引入了供货提前期，模型建立考虑周全；
2. 从该公司的实际网状关系出发，模型与该公司的实际结构有较高的契合度，具有较高的应用价值；
3. 模型尽可能地将各个因素量化，并用严谨的数学公式进行了表达；

6.2 模型的缺点：

1. 本模型提出的是一种基于到货率的去库存问题，在给定的到货率下，各级库存仍需要在复杂的需求过程中进行优化，而本模型忽略了这些复杂因素
2. 考虑需求为连续型随机变量，则用观测值进行估计时要求样本容量足够大，否则估计的误差较大
3. 在考虑最优库存时，未考虑到成本等问题，直接用满足给定到货率情况下的最小库存来代替最优库存，与实际情况不是特别符合。

7、参考文献

- [1] 陈春锋. 供应链模式下的库存控制系统研究[D]. 江苏大学, 2005.
- [2] 戢守峰, 李佳, 李峰, 黄小原. 周期性需求下多级库存缺货控制模型研究[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2007, No. 20106:879-882.
- [3] 李华, 李益强, 徐国华. 供应链配送中的提前期模型研究[J]. 管理工程学报, 2004, 03:112-114.
- [4] 赵红梅, 詹俊琼, 韩丽萍, 孙保华. 基于服务水平约束的供应链订货提前期优化研究[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2012, v. 31;No. 9903:59-66.

8、附录

标准正态分布分位数表

P	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.50	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
0.51	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
0.52	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
0.53	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
0.54	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231
0.55	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
0.56	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
0.57	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
0.58	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
0.59	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
0.60	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
0.61	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
0.62	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
0.63	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
0.64	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
0.65	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
0.66	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
0.67	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
0.68	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
0.69	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
0.70	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
0.71	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
0.72	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
0.73	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
0.74	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
0.75	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
0.76	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
0.77	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
0.78	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
0.79	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
0.80	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
0.81	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
0.82	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502
0.83	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
0.84	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
0.85	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
0.86	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
0.87	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
0.88	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
0.89	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
0.90	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
0.91	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
0.92	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
0.93	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
0.94	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
0.95	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
0.96	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
0.97	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
0.98	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904