2018-2019(1)线性代数 A（48）学时课程试卷（A）答案评分标准参考

一 、（1）D（2）B（3）B（4）A 或 D(都对)（5）C

二、（6）<u>正（或+)</u>（7）<u>6</u>（8）<u>0</u>（9）<u>3</u>（10）<u>n-1</u>

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

11、解：

$\boldsymbol{A}_{31}+3\boldsymbol{A}_{32}-2\boldsymbol{A}_{33}+2\boldsymbol{A}_{34}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_4+c_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}=24 \qquad \cdots\cdots 6\text{分}$$

12、解：

法（1）：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & -1 \\ 1 & -1 & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}+1)^2(\boldsymbol{a}-2)=0, \boldsymbol{a}=-1\text{或}\boldsymbol{a}=2 \qquad \cdots\cdots 6\text{分}$

法（2）：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & -1 \\ 1 & -1 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & \boldsymbol{a}+1 & -\boldsymbol{a}-1 \\ 0 & 0 & -(\boldsymbol{a}-2)(\boldsymbol{a}+1) \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots 4\text{分}$

向量组线性相关，则$\boldsymbol{R}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$, 故$-(\boldsymbol{a}-2)(\boldsymbol{a}+1)=0$，则
$\boldsymbol{a}=-1\text{或}\boldsymbol{a}=2$ ……6分

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

13、解：$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}, \text{则}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$,

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{array}\right),\text{故}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$$ ………8分

14. 解：

$|\boldsymbol{A}|=1\times1\times(-2)=-2\neq0$, 故$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-2\boldsymbol{A}^{-1}$ ………2分

若记$\boldsymbol{A}$的特征值为λ，则

$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$的特征值为

$\varphi(\lambda)=-\dfrac{2}{\lambda}+3\lambda-2$ ………4分

可得$\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值为$\varphi(1)=-1,\varphi(-1)=-3,\varphi(2)=3,$……6分

故$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=-1\times-3\times3=9.$ ………8分

五．解答题.（本大题共 1 小题，共 10 分）

15、解：由已知，解集的秩 $\boldsymbol{R}_S=4-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2,$则$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2$ …………2分

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&\boldsymbol{a}&\boldsymbol{a}\\1&\boldsymbol{a}&0&\boldsymbol{a}\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&\boldsymbol{a}&\boldsymbol{a}\\0&\boldsymbol{a}-2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&\boldsymbol{a}&\boldsymbol{a}\\0&0&-(\boldsymbol{a}-1)^2&-(\boldsymbol{a}-1)^2\end{pmatrix}$$ ………5分

当$\boldsymbol{a}=1$时，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2$.此时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&2&2\\1&2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\text{得同解方程组}\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_4\end{cases},$$

令$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 得基础解系$\xi_1=(1,-1,1,0)^T,\xi2_1=(0,-1,0,1)^T$,则通解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}_1\xi_1+\boldsymbol{k}_2\xi_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\in\boldsymbol{R})$ ⋯

六．解答题（本大题共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

16、解 ：

$$A(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&0&4&1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ …………………6分

从上可知，a_1,a_2,a_3 是 A 的列向量组的一个最大无关组 ……………………8分

且 $a_4=a_1+3a_2-a_3, a_5=-a_2+a_3$ ……………………10分.

17、解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ ………2分

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0,得\lambda_1=2，\lambda_2=\lambda_3=4$$ ……4分

对于$\lambda_1=2,(A-2E)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$(不唯一)　　注：同解方程为$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\end{cases}$

对于$\lambda_2=\lambda_3=4,(A-4E)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$(不唯一) ……7分

(注　同解方程组：$x_3=x_2$)

由此看出，ξ_1,ξ_2,ξ_3 已经正交，下面将它们单位化，得到以下三个向量:

得$p_1=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$(不唯一)

构造正较矩阵$P=(p_1\quad p_2\quad p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$,使得$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$,且有$f$的标准形：

$$f=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$$ …………10分

七．证明题（本大题共 2 小题，每题 6 分，共 12 分）

18、证明：由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{A\alpha}_3=0$, 知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=0$,

同理 $A(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$, 故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{Ax}=0$的解 ……2分；

设 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$,即（$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$）$\boldsymbol{\alpha}_1$+（$\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3$）$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，由

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知，则 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=0,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=0,\boldsymbol{x}_3=0\Rightarrow\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_3=0$，故

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以它们是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一组基础解系。 ……6分.

或用以下方法证明线性无关

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,而$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$可逆，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

19、证明:

由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$, 可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$, $\therefore\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|\cdot\left|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right|=\left|2\boldsymbol{E}\right|\neq 0$……2分，

故 $\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$. ………6分