试题编号：

重庆邮电大学 2019-20 学年一学期（试卷）

《线性代数 A》课程（期末）（A 卷）（闭卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、A； 2、B； 3、C ； 4、D ； 5、A 。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、-2； 7、$\begin{pmatrix} -8 & 16 & -16 \\ -12 & 24 & -24 \\ -4 & 8 & -8 \end{pmatrix}$；8、$B-E$；9、48； 10、$a^2+b^2<1$。

三、计算题 1（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

11、解：$M_{41}-M_{42}-M_{43}+M_{44}=-A_{41}-A_{42}+A_{43}+A_{44}$ ………………2 分

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{…………………2 分}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{……2 分}$$

$=1\times3\times3\times1=9$。……………2 分

12、解：设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}=O$…2 分，

则 $\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=0 \end{cases}$ ………2 分，故 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$，其中 $a^2+bc=0$ ………4 分。

四、计算题 2（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

13、解：因为$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ………5 分，

所以 A 可逆，且矩阵方程 $AX=B$ 的解 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ………4 分。

14、解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5')$$ ，…3 分

易得 $\alpha_1',\alpha_3',\alpha_5'$ 是 $\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5'$ 的一个最大无关组，…1 分

且 $\alpha_2'=-2\alpha_1',\alpha_4'=-2\alpha_1'+\frac{1}{2}\alpha_3'$，…1 分

故 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个最大无关组，…2 分

且 $\alpha_2=-2\alpha_1,\alpha_4=-2\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$。…2 分

五、应用题（本大题共 2 小题，第 1 小题 10 分，第 2 小题 14 分，共 24 分）

15、解：设V中任意两个向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\beta=(y_1,y_2,y_3)^T$，任意实数k，

则$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)^T\in V$，$k\alpha=(kx_1,kx_2,kx_3)^T\in V$，

这是因为$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=0+0=0$

$kx_1+kx_2+kx_3=k(x_1+x_2+x_3)=k\times 0=0$，

所以V是向量空间，…………3 分

而且容易得到$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$是它的一个基，………1 分

因此其维数为 2。………1 分

先把ξ_1,ξ_2正交化得$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$$\eta_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\eta_1]}{[\eta_1,\eta_1]}\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

再单位化得

$$e_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ e_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

则e_1,e_2就是所求的一个标准正交基。……1 分

16、解：（1）二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$……1 分，其特征多项式$|A-\lambda E|$

$=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)$…1 分，所以的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=4$。…1 分

对于$\lambda_1=2$，解$(A-\lambda_1 E)x=\mathbf{0}$可得对应于$\lambda_1=2$的一个特征向量$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

再单位化得$e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，…1 分

对应于$\lambda_2=4$的一个特征向量$p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，再得$e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，…1 分

于是有正交变换$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ …1 分 把f化为$2x'^2+4y'^2$…1 分。

（2）在正交变换$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$下二次曲线

$3x^2+3y^2-2xy+2\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y=0$化为$2x'^2+4y'^2+8x'+4y'=0$，……2 分

即$\frac{(x'+2)^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{(y'+\frac{1}{2})^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$，…1 分 即是椭圆，且半轴长分别为$\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2}$，…2 分

对称中心$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\\-\frac{5}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。……2 分

六、证明题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

17、证：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

$\Leftrightarrow$ 只有全为 0 的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，……2 分

$\Leftrightarrow$ 只有全为 0 的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，………1 分

$\Leftrightarrow$ $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)x=\mathbf{0}$只有$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ …………1 分

$\Leftrightarrow$ $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$。………2 分

18、证：因为$ABp=\lambda p, p\neq\mathbf{0}$， …………1 分

于是$BA(Bp)=\lambda(Bp)$，………2 分

且$Bp\neq\mathbf{0}$，事实上，若$Bp=\mathbf{0}$，则由$ABp=\lambda p, p\neq\mathbf{0}$得$\lambda p=\mathbf{0}, p\neq\mathbf{0}$，故$\lambda=0$，这与前提$\lambda\neq 0$矛盾。………2 分

因此λ也是矩阵BA的特征值。……1 分