
2016 年同济大学大学生数学建模竞赛

参赛队员

| 姓名 | 学号 | 学院 | 专业 | 联系方式 |
|----|----|----|----|------|
| | 1 | | | 1 |
| | | | | |
| | | | | |

日期： 2016 年 05 月 03 日

垃圾焚烧厂布袋式除尘系统运行稳定性分析

摘要

量化分析布袋除尘器运行稳定性问题，不仅能深入揭示现行垃圾焚烧烟气处理技术缺陷以期促进除尘技术进步，同时也能对优化焚烧工况控制及运行维护规程有所帮助，本文对此问题作了相关分析。第一步利用高斯扩散模型对空间中的排放物分布进行求解，根据结果向政府提出环境保护综合监测建议方案；第二步建立灰色模型描述预测布袋除尘器的布袋破损更换数量，通过布袋更换率描述布袋除尘系统的不稳定性，以此来描述布袋除尘系统相对的稳定性，第三步采用层次分析法分析各因素对布袋不稳定性的影响，对老工艺与新工艺的除尘系统稳定性分析比较，得出新工艺相对于老工艺稳定性增加的程度。

关键词： 高斯扩散模式 灰色模型 层次分析法 布袋式除尘系统

一、问题重述

如今焚烧法处理垃圾已经成为了我国处理垃圾的主要方式，然而，事实上，许多垃圾焚烧厂都存在“虽然排放达标，但却仍然扰民”的现象。国标控制排放量与民众环保诉求之间的落差，已成为阻碍新建垃圾焚烧厂选址落地的重要因素。而阻碍国标进一步提升的主要问题还是现行垃圾焚烧除尘工艺存在缺乏持续稳定性等重大缺陷。另外，在各地不得不建设大型焚烧厂集中处理垃圾的情况下，采用现行除尘工艺的大型焚烧厂即便其排放浓度不超标，却仍然存在排放总量限额超标的问题，也会给当地的环境带来重大的恶化影响。因此，将布袋除尘系统的稳定性加以量化分析，能够深入揭示现行垃圾焚烧烟气处理主要存在的缺陷，同时也能对优化对焚烧工况的控和运行维护规程提供参考。请收集资料，综合研究现行垃圾焚烧发电厂袋式除尘系统影响烟尘排放量的各项因素，构建数学模型分析袋式除尘系统运行稳定性问题，并分析其运行稳定性对周边环境烟尘排放总量的影响。并基于模型请回答两个问题：

1. 如果给定焚烧厂周边范围单位面积排放总量限额（地区总量/地区面积），考虑除尘系统稳定性因素的前提下，试分析讨论焚烧厂扩建规模的环境允许上限是多少。并基于分析结果向政府提出环境保护综合监测建议方案；
2. 如果采用一种能够完全稳定运行、且除尘效果超过布袋除尘工艺的新型超净除尘替代工艺，你的除尘模型稳定性能提升多少。

二、模型假设

- a. 布袋除尘系统的稳定性决定于其布袋的寿命周期
- b. 布袋更换的唯一原因为布袋到达其寿命周期终点
- c. 布袋不会被误更换
- d. 污染物在 y , z 方向上呈现着正态分布
- e. 仅考虑水平方向的风，且风速不随高度变化而变化
- f. 焚烧厂在工作时排放烟尘的速度是均匀而稳定的
- g. 不考虑在扩散的时候中其内容物的相关转化
- h. 不考虑地形起伏等因素对扩散造成的影响
- i. 地面像镜子一般对排出废气起到了全反射的作用
- j. 不考虑烟气从烟囱出去后的烟气抬升效果
- k. 认为换完袋子的三天之内的除尘系统是处于正常工作状态(除尘效率达标)

三、符号说明

| | | |
|---------------------|------------------------------|----------|
| $x^{(0)}$ | : 1#炉布袋更换偏移后形成的原始数列(偏移量+100) | |
| $y^{(0)}$ | : 2#炉布袋更换偏移后形成的原始数列(偏移量+300) | |
| $x^{(1)}$ | : 原始数列 $x^{(0)}$ 生成的一次累加数列 | |
| $y^{(1)}$ | : 原始数列 $y^{(0)}$ 生成的一次累加数列 | |
| $\lambda_x(k)$ | : 原始数列 $x^{(0)}$ 对应的级比数列 | |
| $\lambda_y(k)$ | : 原始数列 $y^{(0)}$ 对应的级比数列 | |
| $x^{(0)}(k)$ | : 原始数列 $x^{(0)}$ 第 k 项的值 | |
| $y^{(0)}(k)$ | : 原始数列 $y^{(0)}$ 第 k 项的值 | |
| $z_x^{(1)}(k)$ | : 一次累加数列 $x^{(1)}$ 对应的邻值生成数列 | |
| $z_y^{(1)}(k)$ | : 一次累加数列 $y^{(1)}$ 对应的邻值生成数列 | |
| $\varepsilon_x(k)$ | : 原始数列 $x^{(0)}$ 对应的残差 | |
| $\varepsilon_y(k)$ | : 原始数列 $y^{(0)}$ 对应的残差 | |
| $\rho_x(k)$ | : 原始数列 $x^{(0)}$ 对应的级比偏差 | |
| $\rho_y(k)$ | : 原始数列 $y^{(0)}$ 对应的级比偏差 | |
| a_x | : 原始数列 $x^{(0)}$ 对应的发展系数 | |
| a_y | : 原始数列 $y^{(0)}$ 对应的发展系数 | |
| b_x | : 原始数列 $x^{(0)}$ 对应的灰作用量 | |
| b_y | : 原始数列 $y^{(0)}$ 对应的灰作用量 | |
| $\hat{x}^{(0)}$ | : 灰色模型对原始数列 $x^{(0)}$ 的预测值 | |
| $\hat{y}^{(0)}$ | : 灰色模型对原始数列 $y^{(0)}$ 的预测值 | |
| u | : 该地平均风速 | 单位: m/s |
| q | : 烟尘排放速率 | 单位: mg/s |
| $\sigma_y(x, y, z)$ | : 侧向扩散系数, 烟尘在 y 方向分布的标准偏差值 | 单位: m |

| | | |
|---------------------|------------------------------|----------------------------|
| $\sigma_z(x, y, z)$ | : 竖向扩散系数, 烟尘在 z 方向分布的标准偏差值 | 单位: m |
| H | : 烟囱口的高度 | 单位: m |
| $\rho_1(x, y, z)$ | : 实际源产生的各点浓度 | 单位: mg/m^3 |
| $\rho_2(x, y, z)$ | : 像源产生的各点浓度 | 单位: mg/m^3 |
| T | : 单位面积排放限额 | 单位: mg/m^2 |
| ρ_{max} | : 查询材料所得到的最大烟尘浓度 | 单位: mg/m^3 |
| t | : 焚烧厂工作时间/天 | 单位: h |
| V | : 焚烧厂一天经过烟囱排放的废气总量 | 单位: m^3 |
| c | : 经过布袋除尘系统后烟尘浓度平均值 | 单位: mg/m^3 |

四、问题分析

本问题是对垃圾焚烧厂布袋式除尘系统运行的稳定性分析。

建模分析的对象是袋式除尘系统的稳定性。从附件 1 可靠性情况可分析得布袋除尘系统无法实现稳定的除尘效率的原因主要为除尘布袋的寿命问题。故在这个问题里以除尘布袋的寿命作为衡量稳定性的重要标准之一。

基于附件 1 中表 3 (2014 年底至 2016 年初某某厂布袋更换统计), 可知该工厂布袋更换的时间及更换布袋的数量, 然而由于布袋在实际生产中有烧坏、磨损等不可预知的更换原因, 而且各种原因之间又存在着些许关系, 其结构关系有着动态性以及模糊性, 因此可以认为布袋除尘系统属于一个灰色系统, 使用灰色模型来描述随时间变化布袋更换的数量, 以此为评价分析该厂的布袋除尘系统的稳定性。

对于问题 1, (如果给定焚烧厂周边范围单位面积排放总量限额 (地区总量/地区面积), 在考虑除尘系统稳定性因素的前提下, 试分析讨论焚烧厂扩建规模的环境允许上限是多少?) 基于附件 1 中表 4 给出的垃圾焚烧厂正常工作 (即及时更换布袋) 时排放的气体的烟尘含量, 从而建立高斯扩散模型, 分析焚烧厂周边范围内排放物浓度与排放源排放速率之间的关系, 以此求得焚烧厂建设规模上限。

对于问题 2, (如果采用一种能够完全稳定运行、且除尘效果超过布袋除尘工艺的新型超净除尘替代工艺, 你的除尘模型稳定性能提升多少?) 由于相关数据的缺少, 并且其是一个多层次、多因素、复杂的模型问题, 可以采用广义的“层次分析法”来分析各个因素和布袋除尘系统的稳定性之间的关系, 通过广义的“层次分析法”来处理各因素的相关性。

五、模型建立与求解

1. 扩散模型

附件 1 中表 4 给出的垃圾焚烧厂正常工作（即及时更换布袋）时排放的气体的烟尘含量，建立高斯扩散模型，分析焚烧厂周变范围内排放物浓度与排放源排放速率之间的关系，结合国家标准与环境允许上限，以此求得焚烧厂建设规模上限，建立高架连续点源的扩散模型。

由于高架源系统中地面的作用不可忽视，于是借助“镜像法”对其分析处理，可以求得空间中各点的烟尘浓度。将各点的烟尘浓度看作是实际源（烟囱口）和像源的联合作用。

建立坐标系，实际源在地面的投影设为源点， z 轴即为由源点指向实际源（垂直向）， x 轴为主风向（水平向）， y 轴为横风向；

根据 Pasquill 的分类方法，对该地大气稳定度进行确定，查表得到其对应的扩散参数 σ_y, σ_z 。（表格见附录）

1. 考虑实际源（即烟囱口）（0,0, H），不考虑地面的影响，实际源在空间各点（地面以上）所形成得烟尘浓度为

$$\rho_1(x, y, z) = \frac{q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right)}$$

2. 考虑像源（即烟囱口关于地面的对称位置）（0,0, -H），即等效为地面 对场点的影响，像源在空间各点（地面以上）所形成得烟尘浓度为

$$\rho_2(x, y, z) = \frac{q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right)}$$

则各点实际浓度应为两者叠加

$$\rho(x, y, z) = \frac{q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)} \left[e^{-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$

地面浓度即带入条件 $z=0$ 即可，此时

$$\rho(x, y, 0) = \frac{q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right)}$$

考虑地面轴线浓度(地面轴线指 x 轴),即为在条件 $z=0$ 的基础上附加条件 $y=0$, 此时

$$\rho(x, 0, 0) = \frac{q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}}$$

若要求取地面烟尘含量最大浓度位置，知其必处于地面轴线处，易知在上式中必定存在一个 x 值，使得 $\rho(x, 0, 0)$ 取得最大值。

令

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \text{const}$$

求

$$\frac{d\rho(x, 0, 0)}{d\sigma_z} = 0$$

解方程得到

$$\rho_{\max}(x, 0, 0) = \frac{2q}{\pi u H^2 e} * \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$
$$\sigma_z|_{x=x_{\max}} = \frac{H}{\sqrt{2}}$$

若如果给定焚烧厂周边范围单位面积排放总量限额，由 GB/T13201-91《制定地方大气污染物排放标准的技术方法》以及其他排放标准找出与其对应的最大烟尘浓度 $\dot{\rho}_{\max}$ ，且若烟囱高度 H 以及风速 u 已知。

通过

$$\sigma_z|_{x=x_{\max}} = \frac{H}{\sqrt{2}}$$

可以获得 $\sigma_z|_{x=x_{\max}}$

查询附录表三，即可计算得出此时 x_{\max} ，再次查表三可得 $\sigma_y|_{x=x_{\max}}$

带入到

$$\rho_{\max}(x, 0, 0) = \frac{2q}{\pi u H^2 e} * \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

可以得到

$$\dot{\rho}_{\max} = \frac{2q}{\pi u H^2 e} * \frac{\sigma_z|_{x=x_{\max}}}{\sigma_y|_{x=x_{\max}}}$$

$$q = \frac{1}{2} \dot{\rho}_{\max} * \pi u H^2 e * \frac{\sigma_y|_{x=x_{\max}}}{\sigma_z|_{x=x_{\max}}}$$

即可求解出烟尘排放速率 q。

则一天中焚烧厂排放的废气总量为 $c \cdot V = q \cdot t$ 。

若要对附件 1 中垃圾发电厂(某某厂)的扩建规模予以控制，则可以根据附件 1 中表 4 ——布袋更换前后烟尘含量的对比，计算得到更换袋子后排放气体含尘

量平均值，将其作为浓度参考值

$$c=10.84886\text{mg}/\text{m}^3$$

若要对其他发电厂的扩建规模予以控制，需要实地测量并计算该工厂排放气体含尘量平均值 c 。

由 $v=\frac{q*t}{c}$ 可以解得垃圾焚烧厂一天内允许的废气排放的体积。

在一天工作时间 t 确定的情况下，通过限制垃圾焚烧厂通过烟囱所排放的废气体积，以此为参考来限制焚烧厂的锅炉数量，即限制焚烧厂扩建的允许规模。若实际废气排放体积超出计算的上限值时，可以勒令垃圾焚烧厂减少其工作时间，或使其同时工作的锅炉数量减少，以减少其对周边范围内环境的污染。

2. 灰色模型

认为布袋除尘系统属于一个灰色系统，使用灰色模型来描述随时间变化布袋更换的数量，以此评价分析该厂的布袋除尘系统的稳定性。

基于附件 1 使用灰色模型推测材料中工厂布袋更换量与月份之间的关系：

表格 1: (提取自附件 1-表 3: 2014 年底至 2016 年初某某厂布袋更换统计:)

| 编号 | 月份 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | *1 |
|----|----|---|---|----|---|---|----|----|----|----|
| 1# | | 3 | 0 | 0 | 4 | 0 | 20 | 6 | 0 | 4 |
| 2# | | 4 | 8 | 41 | 4 | 0 | 66 | 21 | 0 | 10 |
| 合计 | | 7 | 8 | 41 | 8 | 0 | 86 | 27 | 0 | 14 |

由于第 4 月份进行了烟气检测，在检测前后对 1#，2#炉进行了较大规模的布袋更换，而其更换的原因实在太诡异了，故从 5 月开始列取数据，当年 5 月~来年 1 月共有 9 组数据，使其分别为原始数列的前 9 项。

| 编号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---|---|----|---|---|----|----|---|----|
| 1# | 3 | 0 | 0 | 4 | 0 | 20 | 6 | 0 | 4 |
| 2# | 4 | 8 | 41 | 4 | 0 | 66 | 21 | 0 | 10 |

并且由于当年 5 月~来年 1 月布袋更换数量不满足级比偏差值检验，对两组数据分别进行平移变换。

1#组数据平移量为 C_1 ，2#组数据平移量为 C_2 ，经计算 $C_1=100$ ， $C_2=300$ 的情况下，可以满足级比偏差检验。

第一步：级比检验，建模可行性分析

令 1#、2#组数据分别对应的原始数列为 $x^{(0)}$ 与 $y^{(0)}$

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4), x^{(0)}(5), x^{(0)}(6), x^{(0)}(7), x^{(0)}(8), x^{(0)}(9))$$

$$y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), y^{(0)}(3), y^{(0)}(4), y^{(0)}(5), y^{(0)}(6), y^{(0)}(7), y^{(0)}(8), y^{(0)}(9))$$

则原始数列 $x^{(0)}$ 与 $y^{(0)}$ 各项对应的数据用下表表示:

| k 取值 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x^{(0)}(k)$ | 103 | 100 | 100 | 104 | 100 | 120 | 106 | 100 | 104 |
| $y^{(0)}(k)$ | 304 | 308 | 341 | 304 | 300 | 366 | 321 | 300 | 310 |

为保证 GM(1, 1) 建模方法的可行性, 需要对已知数据进行级比的检测。
计算数列的级比:

$$\lambda_x(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, k = 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda_y(k) = \frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)}, k = 2, 3, \dots, n$$

得到的级比数列分别为

| k 取值 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_x(k)$ | 1.03 | 1 | 0.96 | 1.04 | 0.833 | 1.132 | 1.06 | 0.9615 |
| $\lambda_y(k)$ | 0.9870 | 0.9032 | 1.1217 | 1.0133 | 0.8197 | 1.1402 | 1.0700 | 0.9677 |

所有的级比均落在可容覆盖区间, 即:

$$\lambda_x(k) \in (e^{\frac{-2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}}), \lambda_y(k) \in (e^{\frac{-2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}})$$

| n 取值 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $e^{\frac{-2}{n+1}}$ | 0.513 | 0.606 | 0.670 | 0.7165 | 0.7514 | 0.7788 | 0.8007 | 0.8187 |
| $e^{\frac{2}{n+1}}$ | 1.949 | 1.6502 | 1.4925 | 1.3957 | 1.3308 | 1.2840 | 1.2489 | 1.2214 |

则数列 $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ 可以建立 GM(1,1)模型并且可以进行灰色预测。

第二步: 建立 GM(1,1)模型

通过累加生成一次累加生成数列 $x^{(1)}$ 与 $y^{(1)}$,

$$x^{(1)} = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n,$$

$$y^{(1)} = \sum_{i=1}^k y^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n,$$

则一次累加生成数列 $x^{(1)}$ 与 $y^{(1)}$ 各项对应的数据可用下表表示:

| k 取值 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| $x^{(1)}(k)$ | 103 | 203 | 303 | 407 | 507 | 627 | 733 | 833 | 937 |
| $y^{(1)}(k)$ | 304 | 612 | 953 | 1257 | 1557 | 1923 | 2244 | 2544 | 2854 |

定义 $x^{(1)}, y^{(1)}$ 的灰导数分别为 $d_x(k), d_y(k)$ 。

$$d_x(k) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)$$

$$d_y(k) = y^{(0)}(k) = y^{(1)}(k) - y^{(1)}(k-1)$$

定义 $z_x^{(1)}, z_y^{(1)}$ 为 $x^{(1)}, y^{(1)}$ 的邻值生成数列, 即

$$z_x^{(1)}(k) = \frac{1}{2}x^{(1)}(k) + \frac{1}{2}x^{(1)}(k-1)$$

$$z_y^{(1)}(k) = \frac{1}{2}y^{(1)}(k) + \frac{1}{2}y^{(1)}(k-1)$$

| k 取值 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|-----|-------|------|------|------|--------|------|------|
| $z_x^{(1)}(k)$ | 153 | 253 | 355 | 457 | 567 | 680 | 783 | 885 |
| $z_y^{(1)}(k)$ | 458 | 782.5 | 1105 | 1407 | 1740 | 2083.5 | 2394 | 2699 |

或可以表示为如下形式

$$z_x^{(1)}(k) = (153, 253, 355, 457, 567, 680, 783, 885)$$

$$z_y^{(1)}(k) = (458, 782.5, 1105, 1407, 1740, 2083.5, 2394, 2699)$$

于是可以定义 GM(1,1)的灰微分方程模型为

$$d_x(k) + a_x z_x^{(1)} = b_x$$

$$d_y(k) + a_y z_y^{(1)} = b_y$$

其中 a_x 与 a_y 称为发展系数, $z_x^{(1)}(k)$ 与 $z_y^{(1)}(k)$ 成为白化背景值, b_x 与 b_y 称为灰作用量。

引入矩阵向量记号:

$$u_x = \begin{pmatrix} a_x \\ b_x \end{pmatrix} \quad Y_x = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(8) \\ x^{(0)}(9) \end{pmatrix} \quad B_x = \begin{pmatrix} -z_x^{(1)}(2) & 1 \\ -z_x^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & 1 \\ -z_x^{(1)}(8) & 1 \\ -z_x^{(1)}(9) & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_y = \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} \quad Y_y = \begin{pmatrix} y^{(0)}(2) \\ y^{(0)}(3) \\ \vdots \\ y^{(0)}(8) \\ y^{(0)}(9) \end{pmatrix} \quad B_y = \begin{pmatrix} -z_y^{(1)}(2) & 1 \\ -z_y^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & 1 \\ -z_y^{(1)}(8) & 1 \\ -z_y^{(1)}(9) & 1 \end{pmatrix}$$

则 GM(1,1)模型可表示为

$$\begin{aligned} Y_x &= B_x * u_x \\ Y_y &= B_y * u_y \end{aligned}$$

用最小二乘法获得其估值

$$\hat{u}_x = \begin{pmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{b}_x \end{pmatrix} = (B_x^T B_x)^{-1} B_x^T Y_x$$

$$\hat{u}_y = \begin{pmatrix} \hat{a}_y \\ \hat{b}_y \end{pmatrix} = (B_y^T B_y)^{-1} B_y^T Y_y$$

通过 matlab 求解可得到:

$$\hat{u}_x = \begin{pmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{b}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.006 \\ 101.1380 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_y = \begin{pmatrix} \hat{a}_y \\ \hat{b}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0027 \\ 323.0493 \end{pmatrix}$$

即 GM(1,1)对应的白微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}^{(1)}(t)}{dt} - 0.006\hat{x}^{(1)}(t) &= 101.1380 \\ \frac{d\hat{y}^{(1)}(t)}{dt} + 0.0027\hat{y}^{(1)}(t) &= 323.0493 \end{aligned}$$

求解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}_x}{\hat{a}_x} \right) e^{-\hat{a}_x k} + \frac{\hat{b}_x}{\hat{a}_x}$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

注: $x^{(0)}(1)=103$ $\hat{a}_x=-0.006$ $\hat{b}_x=101.1380$

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \left(y^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}_y}{\hat{a}_y} \right) e^{-\hat{a}_y k} + \frac{\hat{b}_y}{\hat{a}_y}$$

$$\hat{y}^{(0)}(k+1) = \hat{y}^{(1)}(k+1) - \hat{y}^{(1)}(k)$$

注： $y^{(0)}(1)=304$ $\hat{a}_x=0.0027$ $\hat{b}_x=323.0493$

将对应的 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 与 $\hat{y}^{(0)}(k)$ 减去其相应的偏移量（C1=100，C2=300）即可获得最终该月所预计的换布袋的数量。

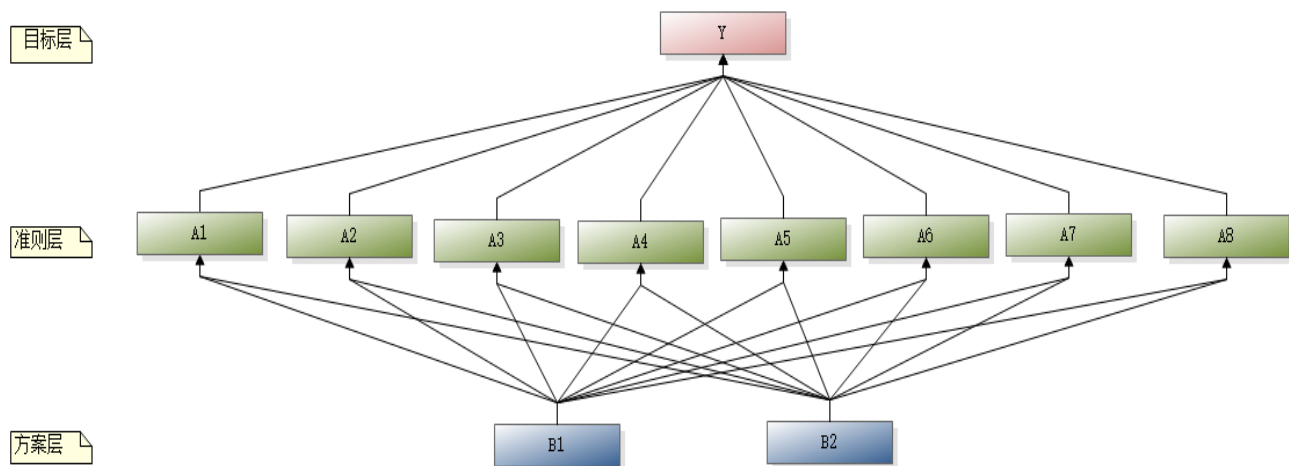
因此，经过上述讨论，利用上述公式可以对工厂更换布袋数量进行预测，布袋更换数量即为到达寿命周期的布袋的数量，由模型假设，布袋式除尘系统的稳定性与布袋的寿命周期有着决定性的关系，各组布袋更换数量除以各组布袋的总数量即为布袋的更换率，布袋更换率可用于描述该布袋式除尘系统的不稳定性，而对于布袋除尘系统的不稳定性的分析，由于其是一个多因素导致的复杂问题，故采用层次分析法对其进行分析，模型的建立与求解详见模型 3。

3. 层次分析法

层次分析法是将与决策总是有关的元素分解成目标、准则、方案等层次，在此基础上进行定性和定量分析的决策方法。这种方法一般适用于问题决策，从多个方案中根据一定的准则选出最佳方案。而我们拓展了层次分析法的适用范围，将其用于新旧工艺的布袋式除尘系统稳定性的比较衡量上。

在这种广义的层次分析法中，我们将系统的波动性（即不稳定性）作为分析的“目标层”，把影响系统效率的各个要素作为分析的“准则层”，把新旧两种工艺作为分析的“方案层”。将两种“方案”（新旧工艺的除尘系统）在分析过程中得到的关于其对“目标”（即系统的不稳定性）的影响权值作为分析结果（即两种工艺的除尘系统的不稳定性）。

层次结构模型的模型图如下：



符号说明：

| | |
|----|------------------|
| Y | 布袋系统效率的波动性（不稳定性） |
| A1 | 过滤风速 |
| A2 | 布袋间距 |
| A3 | 清灰频率 |
| A4 | 工作温度 |
| A5 | 工作压强 |
| A6 | 清洗频率 |
| A7 | 清洗环境 |
| A8 | 喷嘴中心偏差 |
| B1 | 传统工艺 |
| B2 | 新型工艺 |

（1）构造成比较矩阵

比较“准则层”的8个元素对目标的影响程度，确定在“准则层”中相对于目标的比重。上述比较是两两“准则”之间进行的比较，比较取1~9尺度，表示第*i*个因素相对于第*j*个因素的比较结果。

比较尺度：（1~9尺度的含义）

| 尺度 | 含义 |
|----|--------------------------------------|
| 1 | 第 <i>i</i> 个因素与第 <i>j</i> 个因素的影响相同 |
| 3 | 第 <i>i</i> 个因素比第 <i>j</i> 个因素的影响稍强 |
| 5 | 第 <i>i</i> 个因素比第 <i>j</i> 个因素的影响强 |
| 7 | 第 <i>i</i> 个因素比第 <i>j</i> 个因素的影响明强 |
| 9 | 第 <i>i</i> 个因素比第 <i>j</i> 个因素的影响绝对地强 |

我们经过查阅大量关于布袋式除尘系统的相关资料，对系统工作原理有了

一定的了解。结合生活经验，基于以下几点，建立了准则层的比较矩阵。

1. 布袋间距、清洗频率、清洗环境这三个影响因素是通过影响对布袋的磨损进而影响系统的除尘效率；喷嘴中心偏差这个影响因素是在布袋除尘系统的工作过程中影响系统的工作效率；而过滤风速、工作温度、工作压强、清灰频率这四个影响因素是同时通过上述的两个方面影响系统的工作效率。
2. 通过两个方面作用影响系统效率的因素影响强于通过单方面影响系统效率的因素；通过单方面影响系统效率的因素之间影响力具体分析。
3. 工作温度与工作压强对系统效率的影响大小是相同的。

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & 3 & 9 & 9 & 7 \\ 1/7 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1 & 1 \\ 1/8 & 3 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 7 & 7 & 5 \\ 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 7 & 7 & 5 \\ 1/9 & 1 & 1 & 1/7 & 1/7 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/9 & 1 & 1 & 1/7 & 1/7 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/7 & 1 & 3 & 1/5 & 1/5 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

比较“方案层”的2个元素对准则的影响程度，确定在“方案层”中相对于准则的比重。上述比较是两个方案之间进行的比较，比较取1~9尺度，表示第i个因素相对于第j个因素的比较结果。

构造“方案层”的比较矩阵：

由题可知新工艺完全克服了老工艺布袋除尘器的缺点。

1. 布袋间距、清洗频率、清洗环境这三个通过影响对布袋的磨损进而影响系统的除尘效率的因素对新工艺系统的效率几乎没有影响；
2. 喷嘴中心偏差这个是在布袋除尘系统的工作过程中影响系统工作效率的影响因素对新老工艺的影响相同；
3. 过滤风速、工作温度、工作压强、清灰频率这四个同时通过两个方面影响系统工作效率的影响因素对老工艺的影响强于对新工艺的影响。

$$B1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B6 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B7 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 计算层次单排序的权向量

成比较矩阵 A 的最大特征值 $\lambda_{max}=8.4579$

将对应特征向量归一化后可得到

$$\omega = \begin{pmatrix} 0.3838 \\ 0.0375 \\ 0.0438 \\ 0.2027 \\ 0.2027 \\ 0.0316 \\ 0.0316 \\ 0.0663 \end{pmatrix}$$

对成对比较矩阵 B1、B2、B3、B4、B5、B6、B7、B8 求层次单排序的权向量，其结果如下：

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------|--------|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|
| $\omega(k1)$ | 0.8333 | 0.9 | 0.9 | 0.75 | 0.75 | 0.9 | 0.9 | 0.5 |
| $\omega(k2)$ | 0.1667 | 0.1 | 0.1 | 0.25 | 0.25 | 0.1 | 0.1 | 0.5 |
| $\lambda(k)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

(3) 计算层次总排序的权向量

决策层对目标的权值（两种不同的工艺对应的波动性即不稳定性）

B1（旧工艺的不稳定性）：

$$0.3838 \times 0.8333 + 0.0375 \times 0.9 + 0.0438 \times 0.9 + 0.2027 \times 0.75 + 0.2027 \times 0.75 + 0.0316 \times 0.9 + 0.0316 \times 0.9 + 0.0663 \times 0.5 = 0.7871$$

B2（新工艺的不稳定性）：

$$0.3838 \times 0.1667 + 0.0375 \times 0.1 + 0.0438 \times 0.1 + 0.2027 \times 0.25 + 0.2027 \times 0.25 + 0.0316 \times 0.1 + 0.0316 \times 0.1 + 0.0663 \times 0.5 = 0.2129$$

将新老工艺系统的权值作为评价两种系统的指标。

因而可以得到换用新工艺后系统的波动性的相对变化（不稳定性）：

$$(0.7871 - 0.2129) / 0.7871 = 72.95\%$$

可知采取了新型工艺后其不稳定性降低了 72.95%

经过上述讨论，问题一结果为：

1. 在确定工厂气体排放量与工厂废气含尘量的情况下，若工厂的工作时间已知，可以计算得到烟尘排放速率，基于高斯扩散模型，我们给出了工厂周边范围排放物浓度最大值及其所在位置。综合国家标准与居民诉求，可以得到一个经济而又符合各方期望的最大排放量，当平均排放量达到规定的最大排放量时，此时工厂已达到极限规模。

2. 对政府监测的建议：政府可派遣人员基于当时的白天日照强度和夜间条件

确定当地的大气稳定度（详细评判方法见附录表 2/3），结合烟囱高度判定此时使烟尘浓度最大时 x 的坐标，以及其对应的扩散参数 σ_y, σ_z ，（详细评判方法见附录表 4）用风向标测量主风向方向，用风向仪测量风速，在该方向上距离排放源竖直投影点 x 距离的位置，即为地表烟尘浓度最大的位置，可用其推得烟尘排放速率，以此限制焚烧厂工作时间或令焚烧厂升级其除尘工艺。设立移动的烟尘浓度采样点，在烟尘浓度最大处测量烟尘浓度，可以有效防止有其余地方烟尘浓度超标，方便政府对焚烧厂排放废气对周边环境的影响进行监控管理。除此之外，还可在经过一定时间的统计后，在多个较频繁成为最大烟尘浓度点设置固定观测点，实时接收样本数据，方便实时管理焚烧厂的排放量，核定其是否符合排放标准，同时也可以得到焚烧厂除尘系统是否正常工作，若有的除尘系统因为布袋损毁而导致了稳定性下降，则会反映到各观测点的测量的烟尘浓度，若稳定性下降，烟尘浓度会上升，可以提醒人员检查除尘系统是否有环节出错。

问题二结果为：

基于广义层次分析法，可以预测，在更换了新工艺之后，除尘系统的稳定性相比于之前提升了 72.95%。

六、模型检验

1. 对灰色模型进行模型检验：

通过预测值与实际值之间的偏差来检验模型是否正确。

令其残差分别为 $\varepsilon_x(k)$, $\varepsilon_y(k)$

$$\varepsilon_x(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}, k = 1, 2, \dots, 9,$$

$$\varepsilon_y(k) = \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}, k = 1, 2, \dots, 9,$$

若对所有的 $|\varepsilon_{x/y}(k)| < 0.1$ ，则认为其达到较高的要求：否则，若对所有的

$|\varepsilon_{x/y}(k)| < 0.2$ ，则认为其达到一般要求。

令其级比偏差为 $\rho_x(k)$, $\rho_y(k)$

$$\rho_x(k) = 1 - \frac{1 - 0.5a_x}{1 + 0.5a_x} \lambda_x(k),$$

$$\rho_y(k) = 1 - \frac{1 - 0.5a_y}{1 + 0.5a_y} \lambda_y(k),$$

若对所有的 $|\rho_{x/y}(k)| < 0.1$, 则认为其达到较高的要求: 否则, 若对所有的 $|\rho_{x/y}(k)| < 0.2$, 则认为其达到一般要求。

预测值以及其对实际值偏差如下表:

| k 取值 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\hat{x}^{(1)}(k)$ | 205.06 | 307.74 | 411.03 | 514.95 | 619.49 | 724.66 | 830.46 | 936.90 |
| $\hat{x}^{(0)}(k)$ | 102.06 | 102.68 | 103.29 | 103.92 | 104.54 | 105.17 | 105.80 | 106.44 |
| $ \varepsilon_x(k) $ | 0.0206 | 0.0268 | 0.0068 | 0.0392 | 0.1288 | 0.0078 | 0.0580 | 0.0235 |
| $ \rho_x(k) $ | 0.0394 | 0.0091 | 0.0313 | 0.0495 | 0.1594 | 0.1423 | 0.0696 | 0.0298 |
| $\hat{y}^{(1)}(k)$ | 625.79 | 946.72 | 1266.80 | 1586.00 | 1904.30 | 2221.80 | 2538.40 | 2854.20 |
| $\hat{y}^{(0)}(k)$ | 321.79 | 320.93 | 320.08 | 319.20 | 318.30 | 317.50 | 316.60 | 315.80 |
| $ \varepsilon_y(k) $ | 0.0448 | 0.0589 | 0.0529 | 0.0640 | 0.1303 | 0.0109 | 0.0553 | 0.0187 |
| $ \rho_y(k) $ | 0.0157 | 0.0992 | 0.1187 | 0.0106 | 0.1825 | 0.1371 | 0.0671 | 0.0349 |

由上表可以见得, 对所有 $|\varepsilon_{x/y}(k)|$ 与 $|\rho_{x/y}(k)|$ 均满小于 0.2, 可认为其达到一般要求, 可见此模型可以对焚烧厂每月布袋更换数量进行预测, 且预测的结果可以达到一般要求。

2. 对本题中广义的层次分析法的一致性检验:

成比较矩阵 A 的最大特征值 $\lambda_{max} = 8.4579$

一致性指标 $CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} = 0.0654$

随机一致性指标 RI 的数值表

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0 | 0 | 0.58 | 0.90 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 | 1.51 |

查表获得随机一致性指标 $n=9$ 时, $RI=1.41$

一般, 当一致性比率 $CR < 0.1$ 时, 认为 A 的不一致程度在容许范围之内。

一致性比率 $CR = \frac{CI}{RI} = 0.0464 < 0.1$, 所以成对比矩阵 A 通过了一致性检验。

对成对比较矩阵 B1、B2、B3、B4、B5、B6、B7、B8 进行一致性检验, 结

果如下：

| | | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\lambda(k)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| CI(k) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| RI(k) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| CR(k) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

可知 B 系列矩阵也均通过了一致性检验。

七、结果分析

1. 对于该问题，当有足够多的数据和样本时，可以采用线性回归或岭回归的方法来求解布袋式除尘系统的稳定性，其结果准确性更高，拟合程度更好，但是在本问题中，给出的数据和样本数量十分有限，故难以采用这种方法对该问题进行分析。

2. 模型的优点：对第一问，基于高斯扩散模式，由周边烟尘浓度限值，对焚烧场废气排放量进行计算，该模型有着较佳的实用性和一定的合理性。第二问中，运用灰色模型，不需要大量的和有规律的布袋数据，也确保了预测的精准度，方便检验和进一步分析，运用层次分析法，综合考虑了多种因素对结果的影响，量化影响因子，同样是在数据较少的情况下可以给出较为正确的。

3. 模型的缺点：在高斯扩散模型中，由于没有给定各参数，仅能在处理问题时，进行实际测量才得到参数，可以继续运算和分析。在灰色模型中，由于数据的分布不规律，且在 1 个月份中出现突增的布袋更换量，导致最终求解的灰色模型在该月份的残差和级比偏差远大于其他月份，也同时导致了在减去偏移量后，各月份的预测值和实际值偏差不太乐观，若在建立模型前，对表格中数据平均化、规律化，可以获得更加准确的模型，且在假设中，把布袋的寿命周期作为衡量布袋除尘系统稳定的唯一标准，而忽视了控制系统等次要因素的影响，必然会产生误差。

八、模型的评价与推广

在本题中，我们建立的模型较好地对布袋除尘系统的稳定性作出了分析并得出了较为合理的结论。

利用灰色预测模型，我们还可以将其推广至预测市场需求和一个市场的销售额或者城市道路交通事故次数等等类似的事件。在本题中，把假设的条件适当放宽，我们还可以对除尘系统的稳定性等做进一步的详细分析。

九、参考文献

- [1] 姜启源,《数学模型》,北京:高等教育出版社,2005。
- [2] 张威,《MATLAB 基础与编程入门》,西安:西安电子科技大学出版社,2004。
- [3] 郭遵强,大气污染扩散模型的研究及在环境应急系统中的实现,中国知网,2008。
- [4] 百度文库,灰色预测模型及其应用,
http://wenku.baidu.com/link?url=hSd0yxyoBgbYxRAYZCw4VWGKy1DRpgizfHR35_d6DmqNfh6tdvXs2Yv-Piatk_GC692V7qT57Qihen16FpZklYPHE1M-BsFxU2xqjQznF4S, 检索日期 2016 年 5 月 2 日。

附录:

大气稳定度可以分为 A, B, C, D, E, F 六类, A 表示气象条件极其不稳定, B 表示气象条件中等不稳定, C 表示气象条件若不稳定, D 表示中等气象条件, E 表示气象条件弱稳定, F 表示气象条件中等程度稳定。

表 1 Pasquill 大气稳定度的确定

| 地面风速 (m/s) | 白天日照 | | | 夜间条件 | |
|---------------|------|-----|---|--------------------|-----------|
| | 强 | 中等 | 弱 | 阴天且云层薄, 或低空云量为 4/8 | 天空云量为 3/8 |
| < 2 | A | A-B | B | | |
| 2 ~ 3 | A-B | B | C | E | F |
| 3 ~ 4 | B | B-C | C | D | E |
| 4 ~ 6 | C | C-D | D | D | D |
| > 6 | C | D | D | D | D |

表 2 日照强度的确定

| 天空云层的情况 | 日照角 > 60° | 日照角 < 60° 且 > 35° | 日照角 > 15° 且 < 35° |
|---------------------------------|--------------|----------------------|----------------------|
| 天空云量为 4/8, 或高空有薄云 | 强 | 中等 | 弱 |
| 天空云量为 5/8-7/8, 云层高度为 2134-4877m | 中等 | 弱 | 弱 |
| 天空云量为 5/8-7/8, 云层高度<2134m | 弱 | 弱 | 弱 |

表 1 和表 2 中的云量是指当地天空层覆盖率。例如, 云量为 3/8 是指当地 3/8 的天空有云层覆盖。日照角是指当地太阳光线与地平线之间的夹角。例如, 阳光垂直照射地卖弄时的日照角为 90°。

一般来说, 随着大气稳定度的增加, 扩散系数减小。根据 Hanna 和 Drivas 的建议, 化学危险品事故泄漏扩散系数与大气稳定度类型和下风向的关系如下表 3。

表 3 扩散系数的计算方法

| 大气稳定度 | σ_y | σ_z |
|-------|---------------------------|---------------------------|
| A | $0.22x/(1+0.0001x)^{0.5}$ | $0.2x$ |
| B | $0.16x/(1+0.0001x)^{0.5}$ | $0.12x$ |
| C | $0.11x/(1+0.0001x)^{0.5}$ | $0.08x/(1+0.0002x)^{0.5}$ |
| D | $0.08x/(1+0.0001x)^{0.5}$ | $0.06x/(1+0.0015x)^{0.5}$ |
| E | $0.06x/(1+0.0001x)^{0.5}$ | $0.03x/(1+0.0003x)$ |
| F | $0.04x/(1+0.0001x)^{0.5}$ | $0.016x/(1+0.0003x)$ |