2016 年同济大学数学建模竞赛

题号：A

参赛队信息

姓名	学号	学院	专业	联系方式

去库存问题

摘要

在产品的生产及销售的过程中，货物通过各公司，进而向下级子公司直至零售商流通，在多个公司间形成多层、网状的关系系统。由于供应链的复杂性，流通过程中存在着诸多问题。本文结合附件中的运输销售流程和产品流转数据，就产品流通过程中的若干问题进行进一步的研究，基于供应链网状结构模型，建立了该模型的多级库存控制模型，并对具体问题进行了分析研究。

针对第一问，首先引入货物流通过程中相邻两层公司之间的日需求量，订货周转时间，缺货期望等概念。建立到货率与库存之间的约束关系，利用 Matlab 编程计算，绘制库存与到货率的变化曲线，得出结论：库存与到货率成正相关的关系。

针对第二问，利用相同的数据处理方法，建立三级库存控制的模型，基于最小库存量的目标函数，到货率为约束条件的模型，通过 Matlab 编程，求解得到以到货率为 90%的情况下，使所有分销商的库存量总和最小时，公司上报时的临界库存量r为和订单量 q 的值。

针对第三问，生产能力提高为 95%后，首先对前两问的模型进行修改，并增加考虑生产厂家的库存量，重新估算最优库存。

最后，给分析了该模型的优缺点，给该模型进行了客观的评价。

关键词：到货率 库存 非线性规划

一、问题重述

1.1 背景

某行业货物供应商通过各公司，进而向下级子公司直至零售商发行某种专业商品，如图一所示。一般地，某个发货商有可能同时在其它订单中也作为收货商，通常它们会形成一个网状结构。即某个上级发货商到下级收货商的某货物批次的情况，包括某上级供应商的某批次产品在某天流通到某个下级收货商的具体信息。在平日里，各公司都有一个初始库存，假设公司的库存量一旦小于某个r值就会立即向其某个上级下订单补货，订单量为常数q。而上级供应商要向多个下级供货，因此下级发来的订单请求未必能得到满足，记下级收货商实际收到的货量占其需求量的百分比的值为到货率。目前该商品较为紧俏，末端收货商（实际使用部门）需求旺盛，到货率也仅有 90%。

在供货链的网状结构中，库存管理始终是企业生产经营过程中不可缺少的重要组成部分，是价值链实现增值的重要环节。

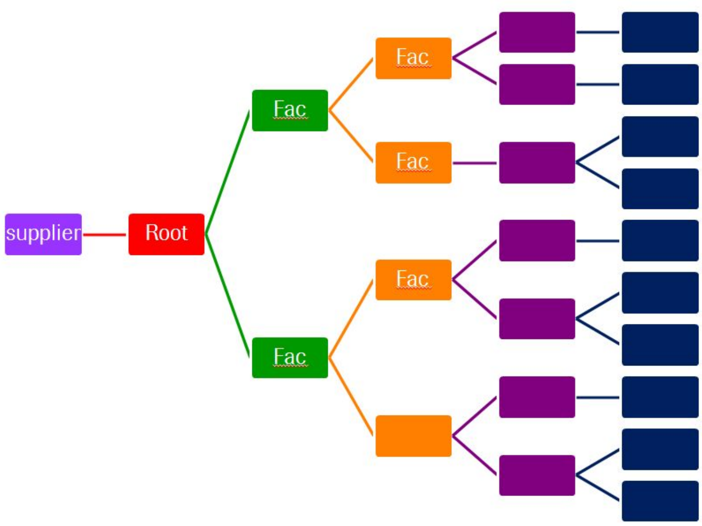
1.2 需要解决的问题

围绕行业货物流通的过程，由于库存系统涉及到的库存量大，我们对其进行了深入的研究，提出了以下问题：

（1）在各层级的公司货物流通中，库存与到货率之间究竟有什么关系？要求基于供应链网状结构模型，建立该模型的多级库存控制模型，并在此基础上给出库存与到货率关系的数学描述

（2）在供应链环节中，库存的成本至关重要，减少库存，降低成本，得到经济条件的优化。但由上一问所知，库存受到到货率的限制。因此，在在求若要满足目前到货率 90%不变的前提下，需努力使所有分销商的库存量总和最小。研究在此情况下订货临界点r和订单量q的值。

（3）若生产能力提高，当末端收货商的到货率提高至 95%，需要重新估算满足约束条件供应商的最优库存。



二、模型假设

1.假设所得数据真实可靠，能够准确反映供应链中的上下级关系

2.假设供货环节平稳顺畅，无突发事件产生

3.假定同层次供应商之间无物料流通，高层次供应商向低层次供应商提供物料，低层次供应商不向高层次供应商提供物流。

4.假设缺货费用无穷大，即不存在缺货现象

5.需求是连续的，均匀的，需求速度为常数（单位时间的需求量）

三、符号说明

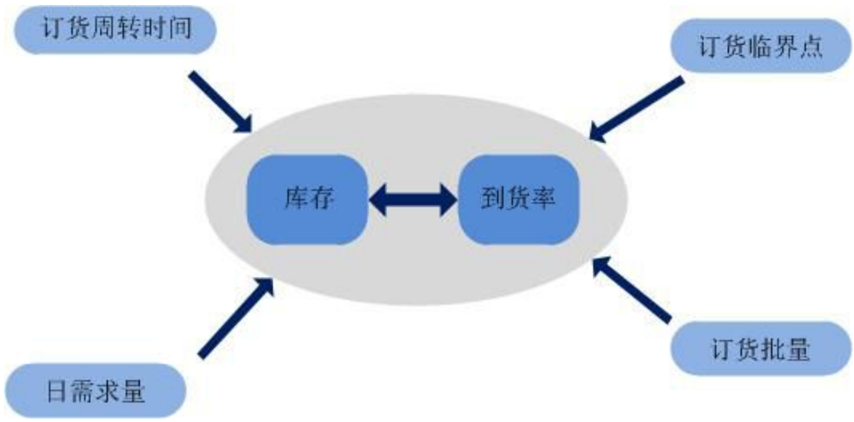
符号	意义
K	层数
r_k^i	第 k 层第 i 个企业的订货临界点
D_{k}^i	第 k 层 i 公司对第 k-1 层公司的日需求量
$\mu_{D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}}$	D_{k}^i 的均值
$\sigma_{D_{\mathrm{k}}^i}$	D_{k}^i 的标准值
q_k^i	第 k 层 i 公司向第 k-1 层公司订货批量
ρ_k^i	到货率
$L_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}$	订货周转时间
P_{tk}	$L_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}$ 的分布函数
$V_{k(t)}^i$	第 k 层第 i 个企业库存
T	一个订货周期
$S_{\mathrm{t_k}}(\mathrm{r_k^i})$	第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间某一确定周期内缺货期望值
S_k^i	第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间总体缺货期望值
M_{k}	第 K 层的公司数

四、问题分析

这是研究管理供应链的实际应用问题，需要基于供应链网状结构模型，建立了该模型的多级库存控制模型。利用附件所给的数据，得到所需参数，进而展开相应的研究。

4.1 问题一的分析：

高层次供应商的库存直接影响到低层次供应商的到货率，探究库存与到货率之间的关系，更彻底的了解供应链的内在联系，反映货物的流通过程。实际的库存和到货率，不仅影响整个供给系统的贯通流畅，更影响流通过程的经济成本。直接确定库存和到货率的关系似乎不是那么容易，因此考虑库存和到货率的共同影响因素，用单一变量法逐个研究二者的变化趋势。二者共同受到多个影响因素如图，但主要分析订货量 q，临界补货库存量 r 的影响，实际计算中，需要引入相关的参数，确定具体的到货率与库存的等式关系。



4.2 问题二的分析：

由第一问可得到库存和到货率存在特定的数学关系，为了实现分销商的库存量最低，需要其库存的具体表达式，以其为目标函数，又由于库存受到到货率的限制，必须以到货率为 0.9 作为约束条件，以此建模，利用 matlab 软件求解，可以得到所得库存最小值时，订货临界点r和订单量q的值。

4.3 问题三的分析：

当生产能力得到提高，到货率ρ发生变化时，库存必定需要相应的调整，又由于题目所涉及为供应商的库存，即分销商和总供应商的总和，故所建立的模型需要做出相应的调整，加入总供销商的库存量，利用与问题二相似的方法，重新估算约束条件下的最优库存。

五、模型建立和解决

5.1 问题一的模型建立和解决

5.1.1 模型的准备

1、第 K 层第 i 个企业的订货临界点为r_k^i。

2、第 k 层 i 公司对第 k-1 层公司的日需求量为D_k^i，且假定D_k^i服从泊松分布 P（λ），其均值为$\mu_{D_k^i}$，标准值为$\sigma_{D_k^i}$。

3、第 k 层 i 公司向第 k-1 层公司订货批量为q_k^i，到货率为ρ_k^i

4、订货周转时间为L_k^i，即下订单到货物到达的时间，分布函数为 P（$L_k^i = t_k$）$= P_{tk}$，平均值为$\mu_{L_k^i}$，标准差为$\sigma_{L_k^i}$

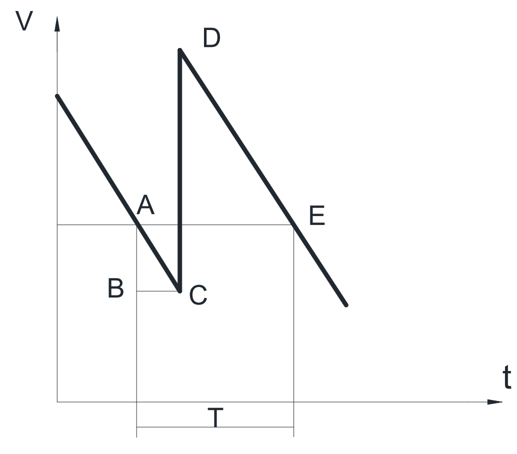
5、第 k 层第 i 个企业库存为$V_{k(t)}^i$，令$\overline{V_k^i} = \frac{1}{T}\int_0^T V_{k(t)}^i dt$，T 为一个订货周期。

6、设第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间某一确定周期内缺货期望值为$S_{t_k}(r_k^i)$该，周期的订货周转时间为t_k。

第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间总体缺货期望值为S_k^i

5.1.2 模型的建立

第 k 层第 i 个企业库存为$V_{k(t)}^i$，$\overline{V_k^i} = \frac{1}{T}\int_0^T V_{k(t)}^i dt$，T 为一个订货周期。



图示:

斜率的绝对值为公司的平均日需求量 $\mu_{D_k^i}$

BC 为平均周转时间（下订单到货物到达的时间）： $\mu_{L_k^i}$，

AB 为在周转时间内货物的需求量： $\mu_{L_k^i} \times \mu_{D_k^i}$

CD 为单次订单补货量 q_k^i

由 $\overline{V_k^i} = \frac{1}{T}\int_0^T V_{k(t)}^i dt$ 结合上图，可知

$$\overline{V_k^i} = r_k^i + \frac{q_k^i}{2} - \mu_{L_k^i} \times \mu_{D_k^i}$$

第 k 层 i 公司在周转时间内的需求量为泊松分布，故可以将其需求量表示为

$$P(D_k^i = j) = \frac{e^{-\lambda_k t_k}(\lambda_k t_k)^j}{j!}$$

当 $D_k^i < r_k^i$ 时，表现为及时到货，

而当 $D_k^i > r_k^i$ 时，表现为缺货，缺货量为 $D_k^i - r_k^i$

因此，某一确定周期内缺货量期望为

$$S_{t_k}(r_k^i) = \sum_{j=r_k^i}^{\infty}(j - r_k^i)P(D_k^i = j) = \sum_{j=r_k^i}^{\infty}\frac{(j-r_k^i)e^{-\lambda_k t_k}(\lambda_k t_k)^j}{j!}$$

总体缺货期望值为 $S_k^i = \sum_{t_k=1}^{\infty} S_{t_k}(r_k^i) \times P_{t_k} = \sum_{t_k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=r_k^i}^{\infty}\frac{(j-r_k^i)e^{-\lambda_k t_k}(\lambda_k t_k)^j}{j!}\right) \times P_{t_k}$

到货率为 ρ_k^i，即缺货率为 1- ρ_k^i

当向上级发出订单后，可得到上级补给的货物可以表示为

（1- ρ_k^i ）× q_k^i

如果要实现正常供货，则需满足缺货的期望值小于等于缺货的目标值，即

S_k^i ≤（1- ρ_k^i ）× q_k^i

将 S_k^i 代入，可得到表达式如下

$$\sum_{t_k=1}^{\infty}(\sum_{j=r_k^i}^{\infty}\frac{(j-r_k^i)e^{-\lambda_k t_k}(\lambda_k t_k)^j}{j!})\times P_{t_k} \leqslant (1-\rho_k^i)\times q_k^i$$

5.1.3 模型的解决

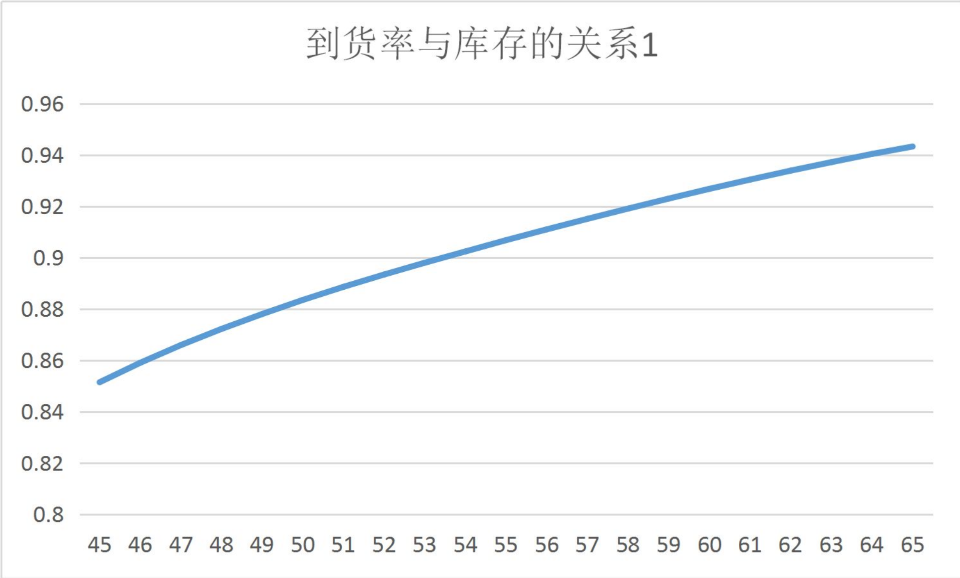
由于到第 k 层 i 公司库存受到订货临界点 r_k^i，订货周转时间 L_k^i，公司的日需求量 D_k^i，公司订货批量 q_k^i 的影响，其中周转时间 L_k^i 受运输条件影响，日需求量 D_k^i 受市场条件影响，且某一公司的 L_k^i，D_k^i 分布基本不变，其期望可视为常数，因此库存主要受订货临界点 r_k^i，订货批量 q_k^i 的影响。

（1）q 不变 r 变化时，库存和到货率之间的关系

现假定订货批量 q_k^i 不变，订货临界点 r_k^i 变化时，库存和到货率之间的关系。

假定 q=50，库存简化为 $V^i=r+\frac{q}{2}$，到货率定义为 $\rho=1-\frac{S^i}{q}$，取定 r 在 20~40 范围内研究，利用 Matlab 得到一下表格：

r	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
S^i	7.4276	7.0513	6.7063	6.3896	6.0977	5.8265	5.5721	5.3311	5.1003	4.8775
V^i	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
ρ	0.8514	0.8590	0.8659	0.8722	0.8780	0.8835	0.8886	0.8934	0.8980	0.9024
r	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
S^i	4.6613	4.4505	4.2450	4.0448	3.8502	3.6618	3.4803	3.3061	3.1400	2.9823
V^i	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
ρ	0.9068	0.9110	0.9151	0.9191	0.9230	0.9268	0.9304	0.9339	0.9372	0.9404

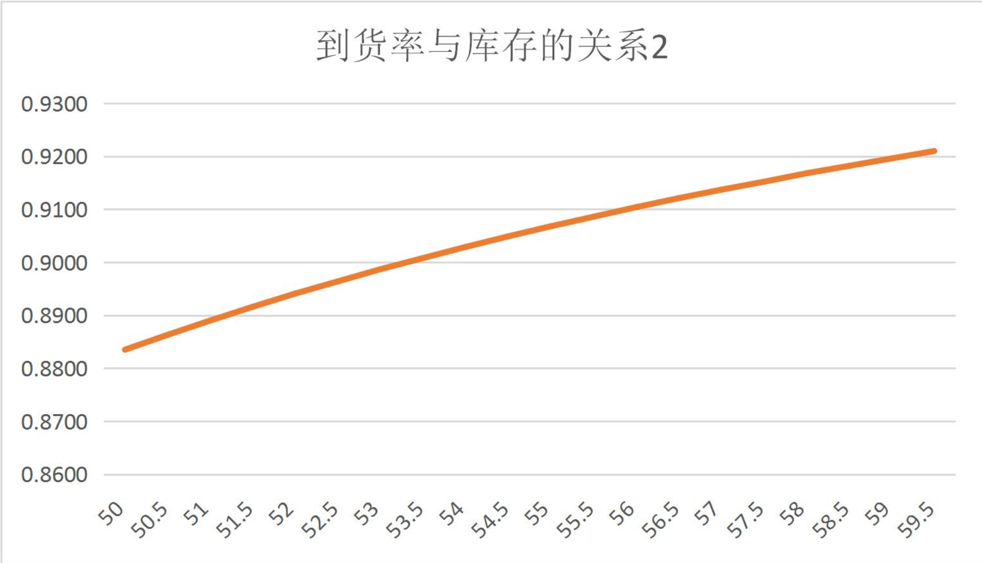


（2）r 不变，q 变化时，库存和到货率之间的关系

现假定订货批量 q_k^i 变化，订货临界点 r_k^i 不变时，库存和到货率之间的关系。

假定 r=30，库存简化为 $V^i = r + \frac{q}{2}$，到货率定义为 $\rho = 1 - \frac{S^i}{q}$，由（1）得 S^i（r=30）为 4.661，q 取定在 40~60 范围内研究，利用 Matlab 得到以下表格：

r	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
V^i	0.8835	0.8863	0.8890	0.8916	0.8941	0.8964	0.8987	0.9008	0.9029	0.9049
ρ	50	50.5	51	51.5	52	52.5	53	53.5	54	54.5
r	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
V^i	0.9068	0.9086	0.9104	0.9121	0.9137	0.9152	0.9168	0.9182	0.9196	0.9210
ρ	55	55.5	56	56.5	57	57.5	58	58.5	59	59.5



综合（1）（2）库存与到货率的关系，可知到货率与库存正相关。即随着库存增大，到货率逐渐增大，但到货率有上限值为 100%，故其上升趋势逐渐放缓，到一定程度后会保持几乎不变。

5.2 问题二的模型建立和解决

5.2.1 模型的准备

1、第 K 层第 i 个企业的订货临界点为 r_k^i。

2、第 k 层 i 公司对第 k-1 层公司的日需求量为 D_k^i，且假定 D_k^i 服从泊松分布 P（λ），其均值为 $\mu_{D_k^i}$，标准值为 $\sigma_{D_k^i}$。

3、第 k 层 i 公司向第 k-1 层公司订货批量为 q_k^i，到货率为 ρ_k^i

4、订货周转时间为 L_k^i，分布函数为 P（$L_k^i = t_k$）$= P_{tk}$，平均值为 μ_{Lk}^i，标准差为 σ_{Lk}^i

5、第 k 层第 i 个企业库存为 $V_{k(t)}^i$，令 $\overline{V_k^i} = \dfrac{1}{T}\int_0^T V_{k(t)}^i dt$，T 为一个订货周期。

6、设第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间某一确定周期内缺货期望值为 $S_{t_k}(r_k^i)$ 该，周期的订货周转时间为 t_k。

第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间总体缺货期望值为 S_k^i

7、第 K 层有 M_k 个公司

5.2.2 模型的建立

为建立网状结构模型，不妨进一步假设

$M_0=1$

$M_k=10\times 2^{\mathrm{k}-1}$，k=1, 2, 3

$\rho_{\mathrm{k}}=0.9$

每层的各个公司有相同的需求分布

即当第 k 层企业需求 D_{k}^i 服从 ρ（λ_{k}）的泊松分布时，若 Mk≥20，则第 k-1 层公司需求呈泊松分布

且 $\lambda_{\mathrm{k}-1}=\dfrac{M_k\lambda_k}{M_{k-1}}$

并根据附件进一步假设

$\lambda_3=10 \qquad \lambda_2=20 \qquad \lambda_1=40$

分析附件中所有公司的周转时间 $L_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}$，都服从期望为 1，方差为 1 的 gamma 分布

P（$L_k^i=x$）$=\dfrac{x^{a-1}\cdot e^{-\frac{x}{b}}}{\Gamma(a)\cdot b^a}$，　Γ (a)为 gamma 函数

其中，方差为 $\mathrm{a}b^2$，期望为 ab

即 a=1，b=1

由第一问所得满足供货条件的约束方程

$$\sum_{t_k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=r_k^i}^{\infty}\frac{(j-r_k^i)e^{-\lambda_k t_k}(\lambda_k t_k)^j}{j!}\right)\times P_{t_k} \leqslant (1-\rho_k^i)\times \mathrm{q}_k^i$$

库存方程为 $\overline{V_{\mathrm{k}}^i}=r_k^i+\dfrac{q_k^i}{2}-\mu_{L_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}}\times\mu_{D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}}$

分销商总库存为除总供应商以外各层次上所有公司的库存库存总和，即

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{m}}\sum_{i=1}^{M_k}\overline{V_{\mathrm{k}}^i}$$

为使分销商总库存最小，即确定

目标函数为$(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M_k}\overline{V_{\mathrm{k}}^i})_{\min}$

建立 3 层结构建立模型，即需

S_1≤（1-ρ_1）q1

S_2≤（1-ρ_2）q2

S_3≤（1-ρ_3）q3

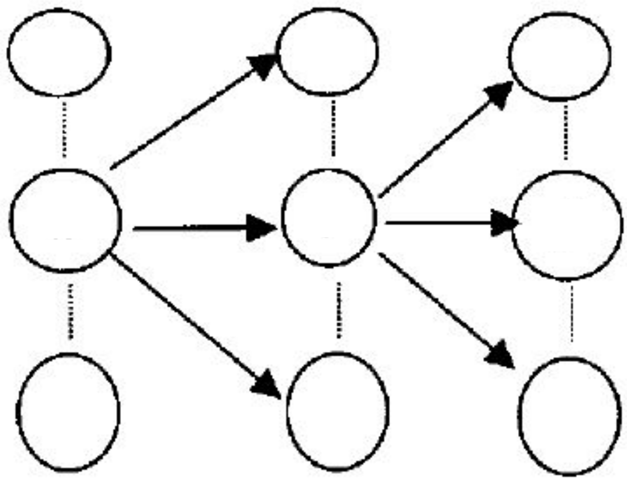
$\mathrm{q}_{k-1}=Nq_k$（N 为正整数）

qi 指第 i 层某公司向第 i-1 层某公司发出的订单量

$\mathrm{r_k}$≥1

5.2.3 模型的求解

建立三层结构模型，k=1，2，3



k=1　　　　　　k=2　　　　　k=3

目标函数

$$(\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{M_k}\overline{V_{\mathrm{k}}^i})_{\min}$$

$$=(\sum_{\mathrm{i}=1}^{M_1}\overline{V_1^i}+\sum_{i=1}^{M_2}\overline{V_2^i}+\sum_{i=1}^{M_3}\overline{V_3^i})_{\min}$$

$=(M_1\times\overline{V_1^{\mathrm{i}}}+M_2\times\overline{V_2^{\mathrm{i}}}+M_3\times\overline{V_3^{\mathrm{i}}})_{\min}$

$=(10\times\overline{V_1^{\mathrm{i}}}+20\times\overline{V_2^{\mathrm{i}}}+40\times\overline{V_3^{\mathrm{i}}})_{\min}$

$=[10\times(r_1^i+\frac{q_1^i}{2}-\mu_{L_1^{\mathrm{i}}}\times\mu_{D_1^{\mathrm{i}}})+20\times(r_2^i+\frac{q_2^i}{2}-\mu_{L_2^{\mathrm{i}}}\times\mu_{D_2^{\mathrm{i}}})+40\mathrm{x}(r_3^i+\frac{q_3^i}{2}-\mu_{L_3^{\mathrm{i}}}\times\mu_{D_3^{\mathrm{i}}})]\min$

$=[10\times(r_1^i+\frac{q_1^i}{2}-40)+20\times(r_2^i+\frac{q_2^i}{2}-20)+40\times(r_3^i+\frac{q_3^i}{2}-10)]\min$

$=[10\times(r_1^i+\frac{q_1^i}{2})+20\times(r_2^i+\frac{q_2^i}{2})+40\times(r_3^i+\frac{q_3^i}{2})]\min-1200$

$=[10\times(r_1^i+\frac{q_1^i}{2})]\min+[20\times(r_2^i+\frac{q_2^i}{2})]\min+[40\times(r_3^i+\frac{q_3^i}{2})]\min-1200$

当 k=1 时

取目标函数 Q1=$r_1^i+\frac{q_1^i}{2}$

类比问题 1 的求解

在 $S_1\leqslant(1-\rho_1)\,q_1$ 条件下，

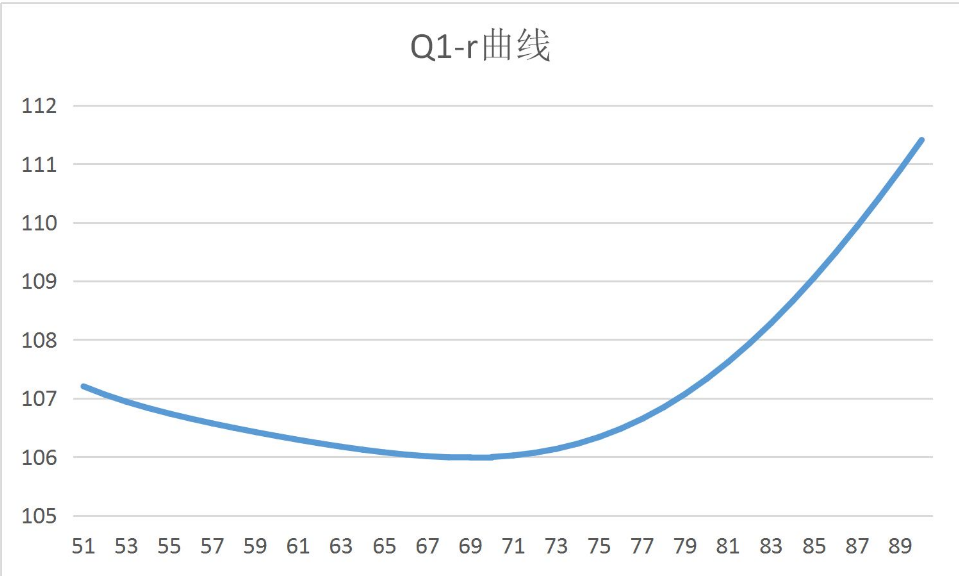
即$\sum_{t_k=1}^{\infty}(\sum_{j=r_1^i}^{\infty}\frac{(j-r_1^i)e^{-\lambda_1 t_1}(\lambda_1 t_1)^j}{j!})\times P_{t_1}\leqslant(1-\rho_1)\,q_1$

求 Q1 的最小值

利用 Matlab，可得以下结果

r1	q1	Q1	r1	q1	Q1	r1	q1	Q1
51	112.4047	107.2023	64	84.2413	106.1206	77	59.2973	106.6487
52	110.1217	107.0608	65	82.1510	106.0755	78	57.6931	106.8465
53	107.8782	106.9391	66	80.0760	106.0380	79	56.1484	107.0742
54	105.6649	106.8324	67	78.0191	106.0095	80	54.6640	107.3320
55	103.4741	106.7370	68	75.9838	106.9919	81	53.2399	107.6199
56	101.3002	106.6501	69	73.9739	106.9869	82	51.8754	107.9377

57	99.1390	106.5695	70	71.9934	106.9967	83	50.5690	108.2845
58	96.9876	106.4938	71	70.0464	106.0232	84	49.3186	108.6593
59	94.8443	106.4221	72	68.1373	106.0687	85	48.1217	109.0608
60	92.7080	106.354	73	66.2702	106.1351	86	46.9750	109.4875
61	90.5787	106.2894	74	64.4491	106.2246	87	45.8751	109.9376
62	88.4570	106.2285	75	62.6779	106.3389	88	44.8183	110.4092
63	86.3440	106.1720	76	60.9597	106.4798	89	43.8007	110.9004



由图表得，Q1min=105.9869

此时，r1=69，q1=73.97

同理，

当 k=2 时

取目标函数 Q2=$r_2^i+\frac{q_2^i}{2}$

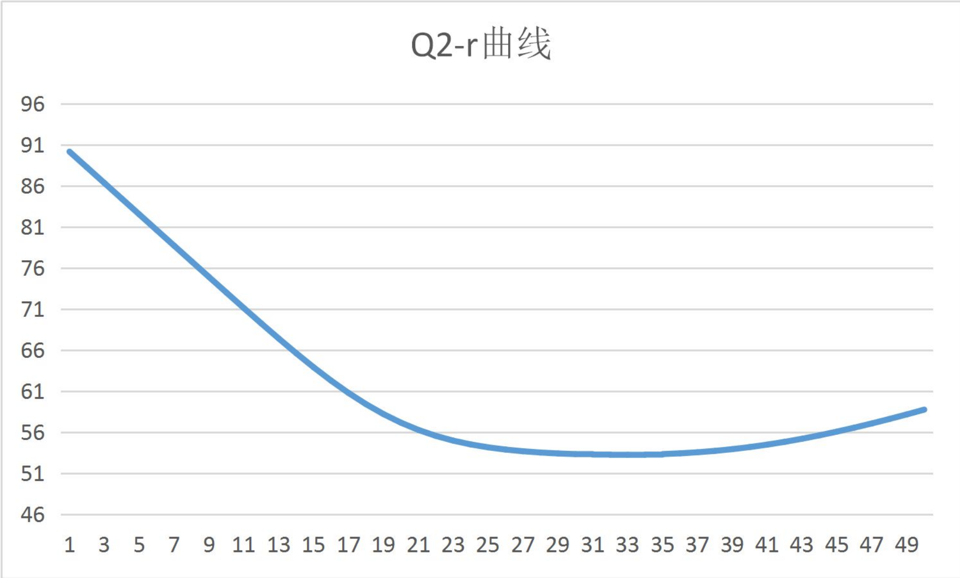
在 S_2≤（1-ρ_2）q_2 条件下，

即 $\sum_{t_k=2}^{\infty}(\sum_{j=r_2^i}^{\infty}\frac{(j-r_2^i)e^{-\lambda_2 t_2}(\lambda_2 t_2)^j}{j!})\times P_{t_2}$ ≤（1- ρ_2）q_2

求 Q2 的最小值

利用 Matlab，可得以下结果

r2	q2	Q2	r2	q2	Q2	r2	q2	Q2
1	178.3149	90.1575	17	87.5090	60.7545	33	40.4482	53.2241
2	172.4952	88.2476	18	82.7820	59.3910	34	38.5023	53.2511
3	166.6754	86.3377	19	78.3655	58.1827	35	36.6183	53.3091
4	160.8557	84.4278	20	74.2759	57.1380	36	34.8026	53.4013
5	155.0360	82.5180	21	70.5135	56.2567	37	33.0614	53.5307
6	149.2165	80.6082	22	67.0627	55.5314	38	31.4001	53.7001
7	143.3976	78.6988	23	63.8958	54.9479	39	29.8226	53.9113
8	137.5807	76.7904	24	60.9765	54.4883	40	28.3309	54.1654
9	131.7686	74.8843	25	58.2649	54.1324	41	26.9252	54.4626
10	125.9672	72.9836	26	55.7215	53.8607	42	25.6037	54.8019
11	120.1872	71.0936	27	53.3106	53.6553	43	24.3629	55.1815
12	114.4462	69.2231	28	51.0027	53.5014	44	23.1979	55.5989
13	108.7699	67.3850	29	48.7752	53.3876	45	22.1026	56.0513
14	103.1934	65.5967	30	46.6125	53.3063	46	21.0706	56.5353
15	97.7594	63.8797	31	44.5055	53.2527	47	20.0953	57.0476
16	92.5154	62.2577	32	42.4505	53.2252	48	19.1703	57.5851



由图表得，Q2min=53.2241

此时，r2=33，q2=40.45

同理，

当 k=3 时

取目标函数 Q3=$r_3^i + \frac{q_3^i}{2}$

在 S_3 ≤（1−ρ_3）q_3 条件下，

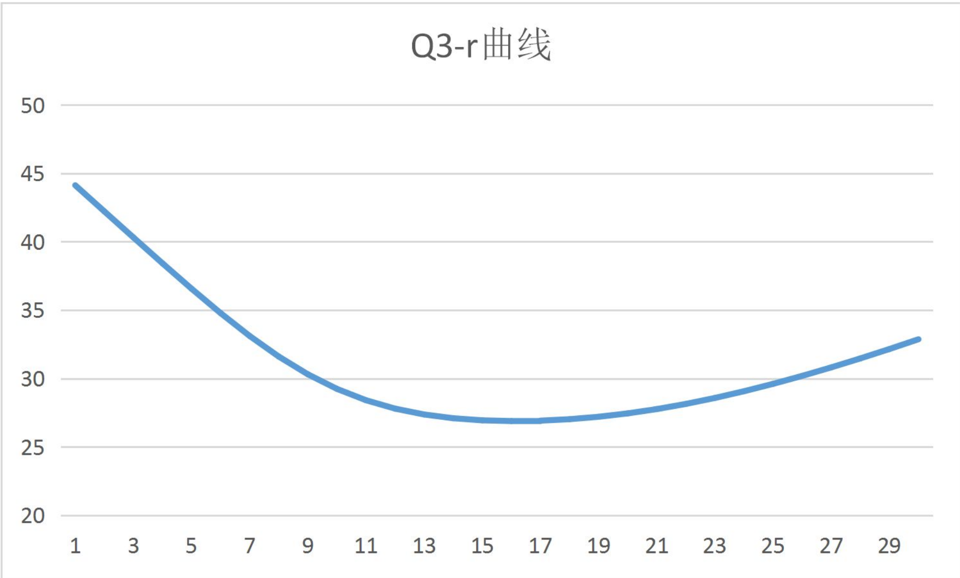
即 $\sum_{t_k=3}^{\infty}(\sum_{j=r_3^i}^{\infty}\frac{(j-r_3^i)e^{-\lambda_3 t_3}(\lambda_3 t_3)^j}{j!})\times P_{t_3}$ ≤（1−ρ_3）q_3

求 Q3 的最小值

利用 Matlab，可得以下结果

r3	q3	Q3	r3	q3	Q3	r3	q3	Q3
1	86.2478	44.1239	11	34.8231	28.4116	21	13.5269	27.7634
2	80.4298	42.2149	12	31.5956	27.7978	22	12.2817	28.1408
3	74.6202	40.3101	13	28.7407	27.3703	23	11.1553	28.5776
4	68.8385	38.4193	14	26.1908	27.0954	24	10.1371	29.0686

5	63.1264	36.5632	15	23.8852	26.9426	25	9.2163	29.6081
6	57.5535	34.7768	16	21.7777	26.8888	26	8.3819	30.1910
7	52.2128	33.1064	17	19.8384	26.9192	27	7.6242	30.8121
8	47.2043	31.6021	18	18.0505	27.0252	28	6.9348	31.4674
9	42.6117	30.3059	19	16.4057	27.2029	29	6.3069	32.1534
10	38.4833	29.2417	20	14.8994	27.4497	30	5.7345	32.8673



由图表得，Q3min=26.8888

此时，r3=16，q3=21.78

综上，为实现分销商的库存量最小

第一层的订货临界值为 r1=69，订货批量 q1=73.97

第二层的订货临界值为 r2=33，订货批量 q2=40.45

第三层的订货临界值为 r3=16，订货批量 q3=21.78

库存量 Q=10Q1+20Q2+40Q3-1200=1999.903

5.3 问题三的模型建立和解决

5.3.1 模型的准备

1、第 K 层第 i 个企业的订货临界点为r_k^i。

2、第 k 层 i 公司对第 k-1 层公司的日需求量为D_k^i，且假定D_k^i服从泊松分布 P（λ），其均值为$\mu_{D_\mathrm{k}^\mathrm{i}}$，标准值为$\sigma_{D_\mathrm{k}^i}$。

3、第 k 层 i 公司向第 k-1 层公司订货批量为q_k^i，到货率为ρ_k^i

4、订货周转时间为L_k^i，分布函数为 P（$L_\mathrm{k}^\mathrm{i}=\mathrm{t}_\mathrm{k}$）=$P_\mathrm{tk}$，平均值为$\mu_{L\mathrm{k}}^\mathrm{i}$，标准差为$\sigma_{L\mathrm{k}}^\mathrm{i}$

5、第 k 层第 i 个企业库存为$V_{k(t)}^i$，令$\overline{V_k^i}=\frac{1}{T}\int_0^T V_{k(t)}^i dt$，T 为一个订货周期。

6、设第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间某一确定周期内缺货期望值为$S_{\mathrm{t_k}}(\mathrm{r_k^i})$该，周期的订货周转时间为$\mathrm{t_k}$。

第 k 层公司 i 与第 k-1 层公司之间总体缺货期望值为S_k^i

7、第 K 层有M_k个公司

5.3.2 模型的建立

在第二问的基础上将到货率改为 $\rho_\mathrm{k}=0.95$

由第一问所得满足供货条件的约束方程

$$\sum_{t_k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=r_k^i}^{\infty}\frac{(j-r_k^i)e^{-\lambda_k t_k}(\lambda_k t_k)^j}{j!}\right)\times P_{t_k}\leqslant(1-\rho_k^i)\times \mathrm{q}_k^i$$

库存方程为$\overline{V_\mathrm{k}^i}=r_k^i+\frac{q_k^i}{2}-\mu_{L_\mathrm{k}^\mathrm{i}}\times\mu_{D_\mathrm{k}^\mathrm{i}}$

供应商总库存为分销商库存及总供应商库存的总和，即

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{m}}\sum_{i=1}^{M_k}\overline{V_\mathrm{k}^i}$$

为使供应商总库存最小，即确定

目标函数为$\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{m}}\sum_{i=1}^{M_k}\overline{V_\mathrm{k}^i}\right)_{\min}$

总供应商的库存定义为$\overline{V_0}=\frac{q_1}{2}+C(\rho)$

其中，$C(\rho)$只与ρ相关的变量，由于ρ给定为0.95，故其在该模型中忽略其影响

5.3.3 模型的求解

类比第二问，建立模型

目标函数为

$$(\sum_{k=0}^{3}\sum_{i=1}^{M_k}\overline{V_{\mathrm{k}}^{i}})_{\min}$$

$$=（\overline{V_0}+10\times\overline{V_1^{\mathrm{i}}}+20\times\overline{V_2^{\mathrm{i}}}+40\times\overline{V_3^{\mathrm{i}}})_{\min}$$

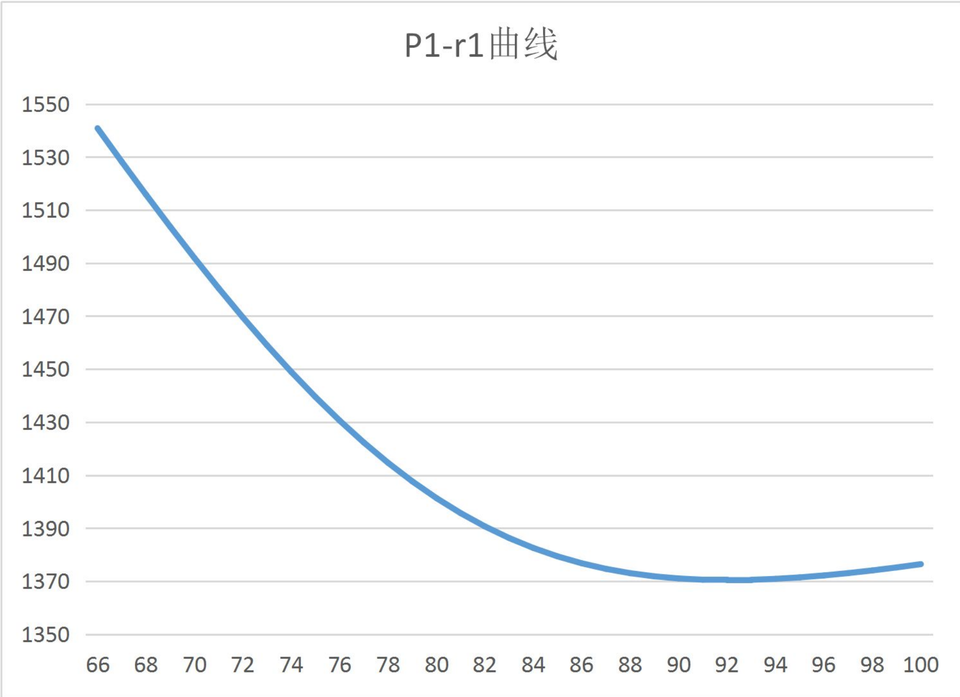
$$=[\frac{q_1}{2}+10\times（r_1^i+\frac{q_1^i}{2}）]\min+[20\times（r_2^i+\frac{q_2^i}{2}）]\min+[40\times（r_3^i+\frac{q_3^i}{2}）]\min-1200$$

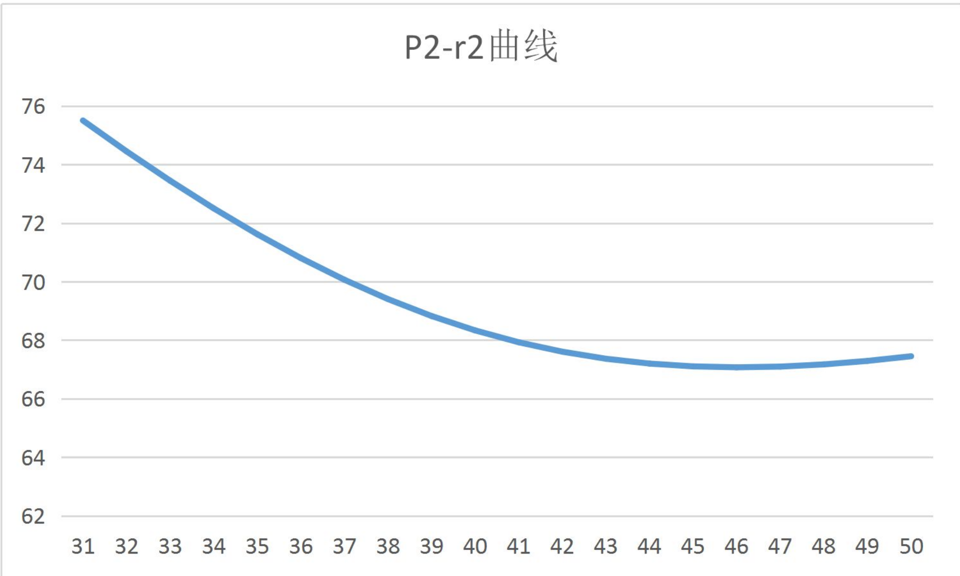
因此，取目标函数 P1=$\frac{q_1}{2}+10\times（r_1^i+\frac{q_1^i}{2}）$

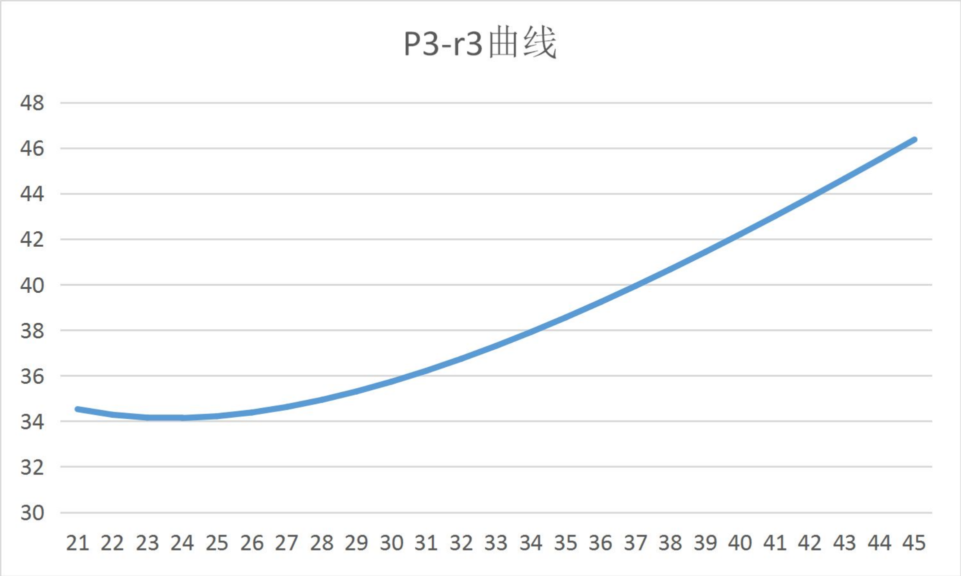
P2=$r_2^i+\frac{q_2^i}{2}$

P3=$r_3^i+\frac{q_3^i}{2}$

利用 matlab 可得到以下结果


P1-r1曲线
1550
1530
1510
1490
1470
1450
1430
1410
1390
1370
1350
66
68
70
72
74
76
78
80
82
84
86
88
90
92
94
96
98
100


P2-r2曲线
76
74
72
70
68
66
64
62
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50



综上，为实现供货商的最优库存

P1min=1370.40

此时 r1=92，q1=81.89

P2min=67.07

此时 r2=46，q2=42.14

P3min=34.14

此时 r3=24，q3=20.27

即当第一层的订货临界值为 r1=92，订货批量 q1=81.89
第二层的订货临界值为 r2=46，订货批量 q2=42.14
第三层的订货临界值为 r3=24，订货批量 q3=20.27
供应商的最优总库存为 3937.4

六、模型的优缺点与改进

本模型在供应链网状结构基础上建立了多级库存控制模型，利用运筹学原理探讨了确定各节点企业最佳订货批量和订货临界点的方法，使供应链上总的库存最小。本模型的最大成果就是多级库存研究上，而且假定需求函数和前置时间函数是随机分布的。在模型的求解过程中，巧妙地运用了非线性规划模型，巧妙使

用用 MATLAB 软件编写程序。

优点：

（1）模型简单，结果合理；

（2）具有适用性，可以推广至不同层次公司；

（3）考虑了各种因素对实际到货率的影响，当有因素因进一步的研究导致特性改变时，能够及时的在模型中反映出来，体现前沿性。

（4）给出了的具体表达式，思路清晰明确，结果定量化便于对比。

缺点：

（1）本模型简化了供应链上各公司的差异性，忽视了供应链上节点公司变化的可能性，各层公司的相对数目不够合理。

（2） 基于人工统计数据，误差相对较大。

（3）假设偏多，模型的个例性过强。

（4） 忽视了到货率对其他参数的影响可能带来的变化。

七、参考文献

[1] 姜启源，叶其孝，数学建模，北京：机械工业出版社，2009.8。

[2] 汪晓银，周保平，数学建模与数学实验（第二版），北京：科学出版式，2012.8

[3] 彭禄斌,供应链管理环境下的库存控制方法的研究，47-53，2003

[4] 孙鑫，陈秋双，龙磊，徐海涛，三层供应链联合调度算法研究，计算机集成制造系统：1006—5911(2006)04—0590—06：590-959，2006

[5]李春发,齐二石，李健,供应链网络的动态均衡问题,天津大学学报:第 39 卷增刊,2006

八、附录

程序一

```
function [ y ] = gama( a )
syms x;
y=int(x^(a-1)*exp(-x),0,inf);
end
```

程序二

```
function [ y ] = gmmd( a,b,x )
y=x^(a-1)*exp(-x/b)/gama(a)/b^a;
end
```

程序三

```
function [ y ] = psmd( lamda,tk,i )
y=poisspdf(i,lamda*tk);

end
```

程序四

```
function [ y ] = fun1( r,lamda,tk,i )
y=0;
for i = r:1:3000
y=y+(i-r)*psmd(lamda,tk,i)
end
end
```

程序五

```
function [ y ] = fun2( lamda,tk,i,r )
y=0;
for tk = 1:1:20
y=y+fun1(r,lamda,tk,i)*gmmd(1,1,tk);
end
y=eval(y);
end
end
```

程序六

```
function [ y ] = fun3( lamda,tk,i,r1,r2 )
y=1:50;
for m = r1:1:r2
    y(m)=fun2(lamda,tk,i,m);
end
end
```

程序七

```
function [ y ] = tran( x )
y=simplify(x);
y=eval(y);

end
```