同济大学2016年数学建模竞赛A题

到货率与库存最优解问题

姓名：　　　　　　　　　　　　　　学院：

姓名：

姓名：

同济大学2016年数学建模竞赛A题

到货率与库存最优解问题

摘要

本文在供应链管理思想和库存控制模式的基础上，通过建立相关数学模型及算法，研究了供应链管理环境下的库存控制问题以及相应的成本优化问题。首先通过分析SPSS统计软件得出的部分数据确定了零售商货物需求量的概率分布，在合理假设的基础上确定了 EOQ 模型的建立，结果显示在供应商库存量有限的情况下，到货率必然小于1。即供应商、分销商库存量与零售商到货量间存在约束条件，并且此约束条件为后续多级网状供应链系统研究的基础。为简化分析，对供应链上具有相同特性的企业进行合并，建立二级供应链分销系统的库存控制模型，即一个分销中心给 n 个下游零售商提供产品,采用(r，q)模型，在到货率固定的情况下，把总的库存费用定义为购买费用、存储费用、运输费用三者之和，并假定需求函数和提前期是随机分布，以最小化供应链库存成本为目标，通过运用 matlab 软件及遗传算法，求解得出最优订货点 r 和最佳固定订货量 q。再将二级供应链扩展到多级，使每一级拥有多个节点企业，更符合实际情况。本文期望以供应链整体库存最优为目标，通过合理分配供应链上各节点企业的库存量，最终实现供应链整体利益最大化。

关键词：最优库存 供应链 遗传算法 库存成本 到货率

一、问题重述

某行业产品的供应商和零售商之间的货物流通关系是一个网状结构的多级供应链模型，供应商通过各公司向下级子公司直至零售商发行某产品。公司的库存量小于某值时，就向上级供应商下订单进行定量补货，而下级供应商的需求可能无法满足，其实际收到的货量占需求量的百分比即为到货率。附件 1 中的数据给出了供应商与零售商之间的产品流转网状关系，附件 2 中给出了销售链的行为记录表，记录了订单情况。请尝试建立数学模型讨论下列问题：

1 供应商的库存与零售商的到货率之间有什么数学关系？试从产品流通供应之间的关系进行分析讨论。

2 在到货率不变的情况下，求满足分销商的库存总和最小时的定量订货值和订货库存值。

3 生产能力提高可以使到货率提高，在到货率提高的情况下求供应商的库存最优解，即使供应链成本最小的库存值。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

零售商的到货率定义为实际收到的货量占其需求量的百分比，零销商的需求量是与顾客的需求有关系，服从复杂泊松分布，当均值较大时，泊松分布可近似看成正态分布，而零售商的实际收到货量与上一级分销商的库存量有关，而零售商和分销商的库存可以建立 EOQ 模型，其在提前期中的需求量服从正态分布，供应商的库存量不是无限的，因此分销商和零售商的需求量在某些情况下并不能得到满足，即到货率小于 1。我们通过建立二级供应的（r,q）模型来讨论满足正态分布的供应商的库存、分销商的库存与零售商到货量之间的数学关系和约束条件，进而推广到多级网状供应链系统，得到供应商库存和零售商到货率之间的关系。

2.2 问题二的分析

在已知到货率的前提下，要使分销商的库存量总和最小，求出相应条件下的 r,q 的值。我们准备采用遗传算法，利用目标函数的取值信息，不必非常明确地描述问题的全部特性，首先我们小组通过 SPSS 统计软件整理出附件 2 中的部分数据作为求解的初始数据，然后根据问题一中的数学关系和约束条件，利用 matlab 软件来形象地表示出各变量之间的关系，最终得到所要求的数值。

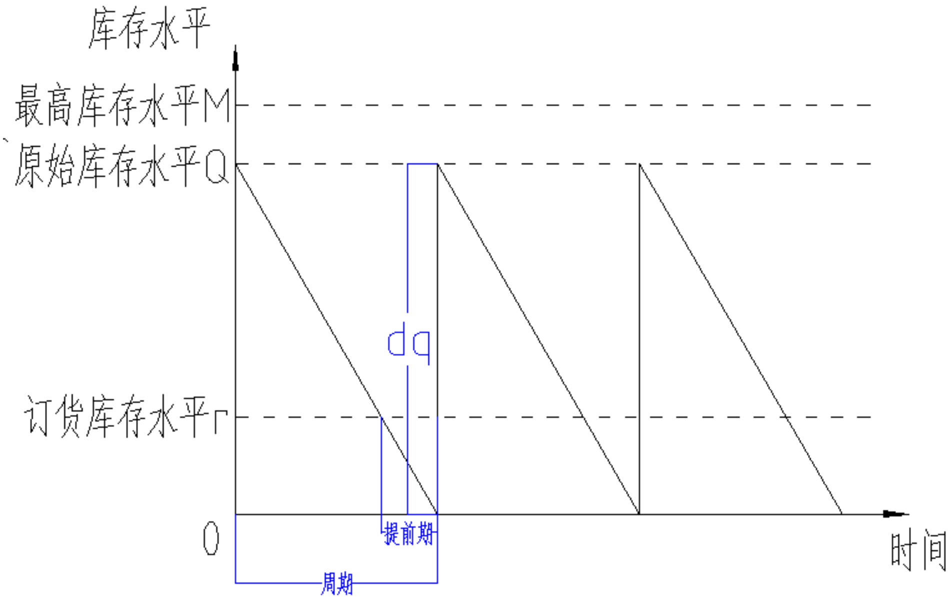
2.3 问题三的分析

公司的生产能力提高，使末端收货商的到货率提高，要求出供应商的最优库存，我们可以在问题一所建立的模型的基础上，重新考虑供应链成本问题，通过计算供应链中的购买费用，存储费用和运输费用，建立他们与 r 和 q 的关系式，从而使供应链最优库存问题，简化成为每个企业寻找最佳固定订货量 q 和最优订货点 r 上。通过把新模型建立的数学关系和约束条件与问题一结合起来，最终通过遗传算法利用 matlab 软件得到我们所需要的最佳库存。

三、模型假设

(1)在库存系统中分销商向供应商订货,零售商向分销商订货,并且产品是单一品种产品的情形，不存在逆向流通;

(2)系统中的零售商和分销中心都实施连续性盘点的(r,q)订货策略,即零售商和分销商分别对各自的库存水平进行连续性观察,当库存水平降低到订库存量 r 时开始订货,订货量为 q;【1】



(3)供应商的供应能力有限,分销商和零售商的提前期是随机变量,服从正态分布，提前期间不计流通库存;

(4)在零售商和分销商处,商品的需求是随机的，符合正态分布;

(5)零售商每次的订货不会超过其最高库存水平;

(6)同级供应商之间的直调库存记入同级库存量;

(7)不允许缺货。

四、符号和概念说明

d 一到货率，即实际收到的货量与需求量的百分比;

n 一零售商的个数;

L_0一分销商的提前期;

L_i一零售商 i 的提前期;

q_0一分销商订货量;

q_i一零售商 i 的订货量;

Q_0一分销商的原始库存;

Q_i 一零售商的原始库存;

Q_m 一最大库存容量;

r_0一分销商的订货点;

r_i一零售商 i 的订货点;

C_0一分销商每次的订购费用;

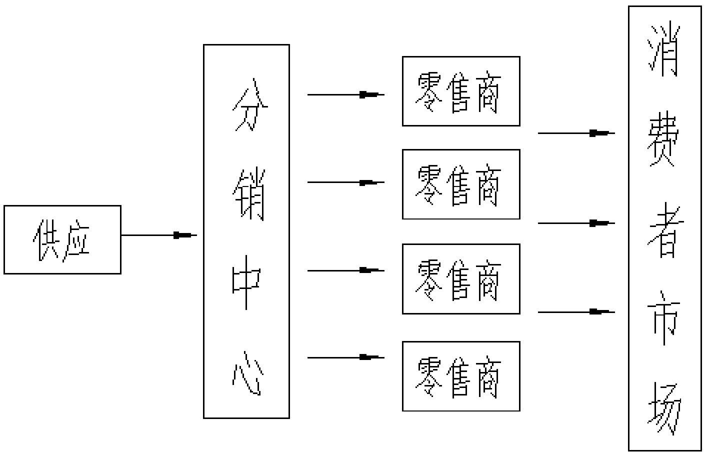
C_i 一零售商 i 每次的订购费用;

d_0一分销商的单位购买费用；
di 一零售商 i 的单位购买费用；
K_g一供应商库存总量；
K_f一分销商库存总量；
K_1一零售商库存总量；
T 一两次到货时间差；
c_0一分销商单位库存持有成本率；
c_i一零售商 i 的单位库存持有成本率；
α 一提前期内人为设定的安全水平,从概率论角度看, α 为不缺货的概率，提前期不缺货可认为α 是 1；
k 一与安全水平对应的安全因子,从概率论角度看,k 为标准正态分布的α 分位数。

五、模型建立与求解

5.1.1 二级供应链库存系统

我们小组考虑，先从一个简单的二级供应链库存系统着手,即由一个分销商和若干个零售商组成的系统（系统的结构图如图)。在零售商提前期和需求为随机变量的前提下,研究二级供应链库存系统中的零售商的实际到货情况。



两级分销零售系统

一、分销中心库存模型

假设零售商 i 处的需求服从复合泊松分布,即消费者到达零售商 i 处单位时间内的平均数服从参数为λ_i的泊松分布，j 为消费者的需求量，$f_{i,j}$表示零售商 i 处需求量 j 大于 0 的概率,$f_{i,j}$服从几何分布,设 $f_{i,j}=pq^{j-1}$(j=1, 2, 3……n)(p+q=1)。设μ_i为零售商 i 的单位时间平均需求,σ_i^2为零售商 i 的单位时间需求方差,【2】则

$$\mu_i = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} j * f_{i,j} \quad (5-1)$$

$$\sigma_i^2 = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} j^2 * f_{i,j} \quad (5-2)$$

上述两个式子中，$\sum_{j=1}^{n} j^2 * f_{i,j}$ 为几何分布的数学期望，值为1/p；$\sum_{j=1}^{n} j^2 * f_{i,j}$ 为几何分布的方差，值为（1-p）/p^2。

零售商 i 在分销商提前期内的需求均值和方差分别为【2】

$$\mu_i(L_0)=L_0\mu_i \tag{5-3}$$

$$\sigma_i^2(L_0)=L_0\sigma_i^2 \tag{5-4}$$

消费者的需求为泊松分布,当均值较大时,泊松分布近似于正态分布,故可假设零售商 i 在分销商提前期内的需求近似服从正态分布。另外,可设零售商 i 在分销商提前期内发出订单的次数为1,那么分销中心在提前期内的需求均值和方差为

$$\mu_0(L_0)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0) \tag{5-5}$$

$$\sigma_0^2(L_0)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(L_0) \tag{5-6}$$

分销中心的总需求是由 n 个独立零售商的随机需求组成，根据中心极限定理，当 n 足够大时，分销商在提前期内的需求服从正态分布，设需求为 D_{L0},则

$D_{L0}\sim N(\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0),\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(L_0))$，则 $(D_{L0}-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0))/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(L_0)}$ 服从标准正态分布。

再订货点r_0的确定只跟提前期内的需求有关,k 为标准正态分布的 α 分位数。【3】设

$$r_0=\sum_{i=1}^{n}\mu_I(L_0)+k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i{}^2(L_0)} \tag{5-7}$$

则$P(D_{L0}<r_0)=$ α

即提前期内的需求小于再订货点的概率为。α 越接近于1,提前期内就越不容易发生缺货,所以,再订货点

$$r_0=\sum_{i=1}^{n}\mu_I(L_0)+k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i{}^2(L_0)} \tag{5-8}$$

二、零售商的库存模型

零售商 i 的提前期服从$N(L_i,\sigma_{L_i}^2)$，在提前期内需求近似服从正态分布，此时，

零售商 i 在其提前期内的需求量服从 $N(\mu_i(L_i),\sigma_i^2(L_i))$，则

$$\mu_i(L_i)=\mu_i L_i \tag{5-9}$$

$$\sigma_i^2(L_i)=L_i\sigma_i^2+\mu_i^2\sigma_{L_i}^2 \tag{5-10}$$

零售商的需求是通过分销商来满足的，所以在这样的情况下，应该考虑分销商的提前期对零售商的影响。零售商在自己提前期和分销商提前期中心提前期内的需

求量服从$N(\mu_i(L_i+L_0)，\sigma_i{}^2(L_i+L_0))$，数学期望和方差为：

$$\mu_i(L_i+L_0)=\mu_i L_i+\mu_i L_0 \tag{5-11}$$

$$\sigma_i{}^2(L_i+L_0)=(L_i+L_0)\sigma_i{}^2+\mu_i{}^2\sigma_{L_i}{}^2 \tag{5-12}$$

同样,零售商的再订货点不仅要考虑提前期内的顾客需求,而且也要考虑分销商提前期内的需求,所以再订货点较之分销商的订货点,要多考虑一个提前期内的需求,计算式子如下

$$r_i=\mu_i(L_i+L_0)+k\sqrt{(L_i+L_0)\sigma_i{}^2+\mu_i{}^2\sigma_{L_I}{}^2} \tag{5-13}$$

则供应商总库存量与到货率之间应满足的关系式如下：

$$K_g-dq_0=dq_i \tag{5-14}$$

约束条件为：

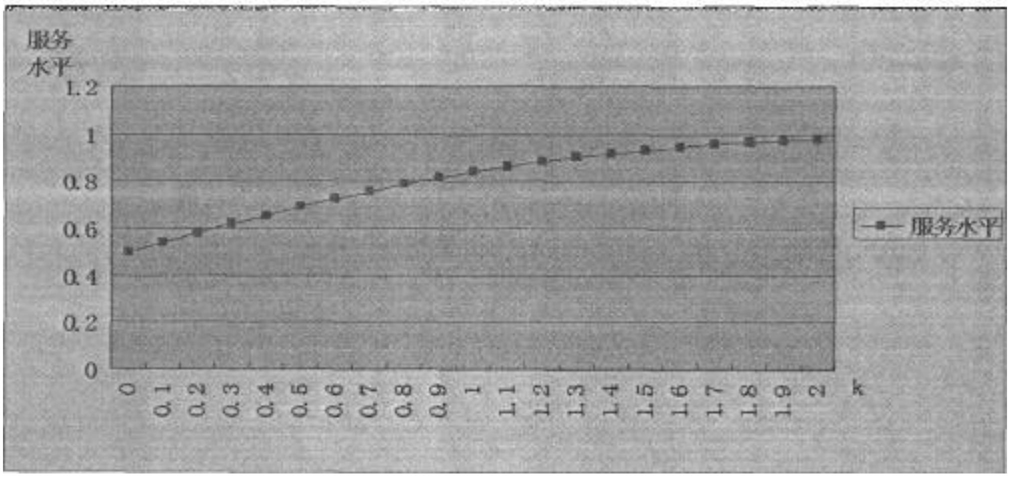
$$q_0>q_i \tag{5-15}$$

$$q_i\le maxq_i \tag{5-16}$$

$$q_i\ge 0 \tag{5-17}$$

三、安全因子 k 与α 关系讨论

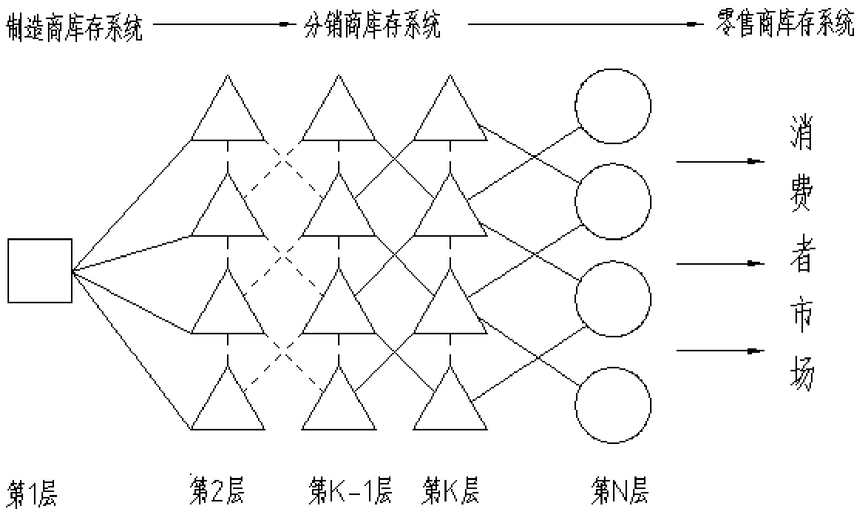
安全因子 k 在建立模型的时候，非常重要。它不仅与再订货点的确定有关，而且涉及到缺货量的大小。k 是标准正态分布的α 分位数，它们之间的关系如下图。【4】



由图中可以看出，k 越大，缺货概率越小。由假设不缺货情况，可知此时 k 值取 2。

5.1.2 多级供应链库存系统

多级供应链库存系统是呈网状结构，根据附件 1 中所给出的产品流转网状关系，我们小组选取了部分数据分析其结构，得出了如下图所示的结构关系图。



设第k层节点企业i向第$k-1$层节点企业h订货时的订货批量为以$q_k^{(h,\ i)}$，对产品的需求量为均值为$D_k^{(h,\ i)}$(均值为$\mu_{D_k^{(h,\ i)}}$、方差为$\sigma_{D_k^{(h,\ i)}}{}^2$)、订货的前置时间为$L_k^{(h,\ i)}$服从正态分布，第k层节点企业$i$的订货点为$r_k^i$。平均前置时间为$\mu_{L_k^{(h,\ i)}}$，前置时间的方差为$\sigma_{L_k^{(h,\ i)}}{}^2$，则节点企业 i 在前置时间内对第$k-1$层节点企业的产品的需求量同样服从正态分布，其均值和方差分别为

$$\mu\left(L_k^{(h,\ i)}\right) = \mu_{D_k^{(h,\ i)}}\mu_{L_k^{(h,\ i)}} \tag{5-18}$$

$$\sigma^2 = \mu_{L_k^{(h,\ i)}}\sigma_{D_k^{(h,\ i)}}{}^2 + \mu_{D_k^{(h,\ i)}}{}^2\sigma_{L_k^{(h,\ i)}}{}^2 \tag{5-19}$$

再订货点的计算公式为

$$r_k^i = \mu_{D_k^{(h,\ i)}}\mu_{L_k^{(h,\ i)}} + k\sqrt{\mu_{L_k^{(h,\ i)}}\sigma_{D_k^{(h,\ i)}}{}^2 + \mu_{D_k^{(h,\ i)}}{}^2\sigma_{L_k^{(h,\ i)}}{}^2} \tag{5-20}$$

则供应商库存量与到货率之间满足的关系式如下：

$$K_g = d\sum_{i=R}^{N} q_k^{(h,i)} \tag{5-21}$$

约束条件为：

$$q_k^{(h,\ i)} > \mu_{D_k^{(h,\ i)}} \tag{5-22}$$

$$q_k^{(h,\ i)} \le max q_k^{(h,\ i)} \tag{5-23}$$

$$q_k^{(h,\ i)} > 0 \tag{5-24}$$

5.2.1 到货率已知情况下求使分销商库存量最小的 r,q 值

首先，我们定义，分销商的库存量总和等于供应商的库存量减去零售商的

库存量，即

$$K_f = K_g - K_l \tag{5-25}$$

其中，提前期内的从上一级到下一级的流通库存记入上一级的库存，同级之间的直调库存直接记入本级库存。

我们准备采用遗传算法来进行结果模拟，给定初值并通过迭代的方式得到满足结果的最优解。下面对遗传算法进行简单的介绍。

一、遗传算法介绍

遗传算法（GA）是模拟达尔文生物进化论的自然选择和遗传学机理的生物进化过程的计算模型，是一种通过模拟自然进化过程搜索最优解的方法。遗传算法是从代表问题可能潜在的解集的一个种群开始的，而一个种群则由经过基因编码的一定数目的个体组成。每个个体实际上是染色体带有特征的实体。染色体作为遗传物质的主要载体，即多个基因的集合，其内部表现（即基因型）是某种基因组合，它决定了个体的形状的外部表现。因此，在一开始需要实现从表现型到基因型的映射即编码工作。由于仿照基因编码的工作很复杂，我们往往进行简化，如二进制编码，初代种群产生之后，按照适者生存和优胜劣汰的原理，逐代演化产生出越来越好的近似解，在每一代，根据问题域中个体的适应度大小选择个体，并借助于自然遗传学的遗传算子进行组合交叉和变异，产生出代表新的解集的种群。这个过程将导致种群像自然进化一样的后生代种群比前代更加适应于环境，末代种群中的最优个体经过解码，可以作为问题近似最优解。【5】

二、模型求解过程

在求解过程中，因为多级供应链网状模型网络层次多,节点之间的联系错综复杂,其中的许多参数未知待定,因此问题的计算难度比较大。我们小组谈论认为，多级网状供应链模型是由多个二级供应链模型组合而成，在求解过程上可以先以二级供应链模型为例，确定订货点 r 值和订货量 q 值，使得在到货率一定的条件下分销商的库存总量最小。由于再订货点只与提前期内的需求有关，在 k 值确定之后，其值可以根据式子（5-8）和（5-13）求出。另外我们还要求出分销商和零售商的订货量 q。利用问题一给出的约束条件，采用遗传算法，进行局部搜索，寻找符合约束条件的最优解。下面是遗传算法的简单求解步骤：

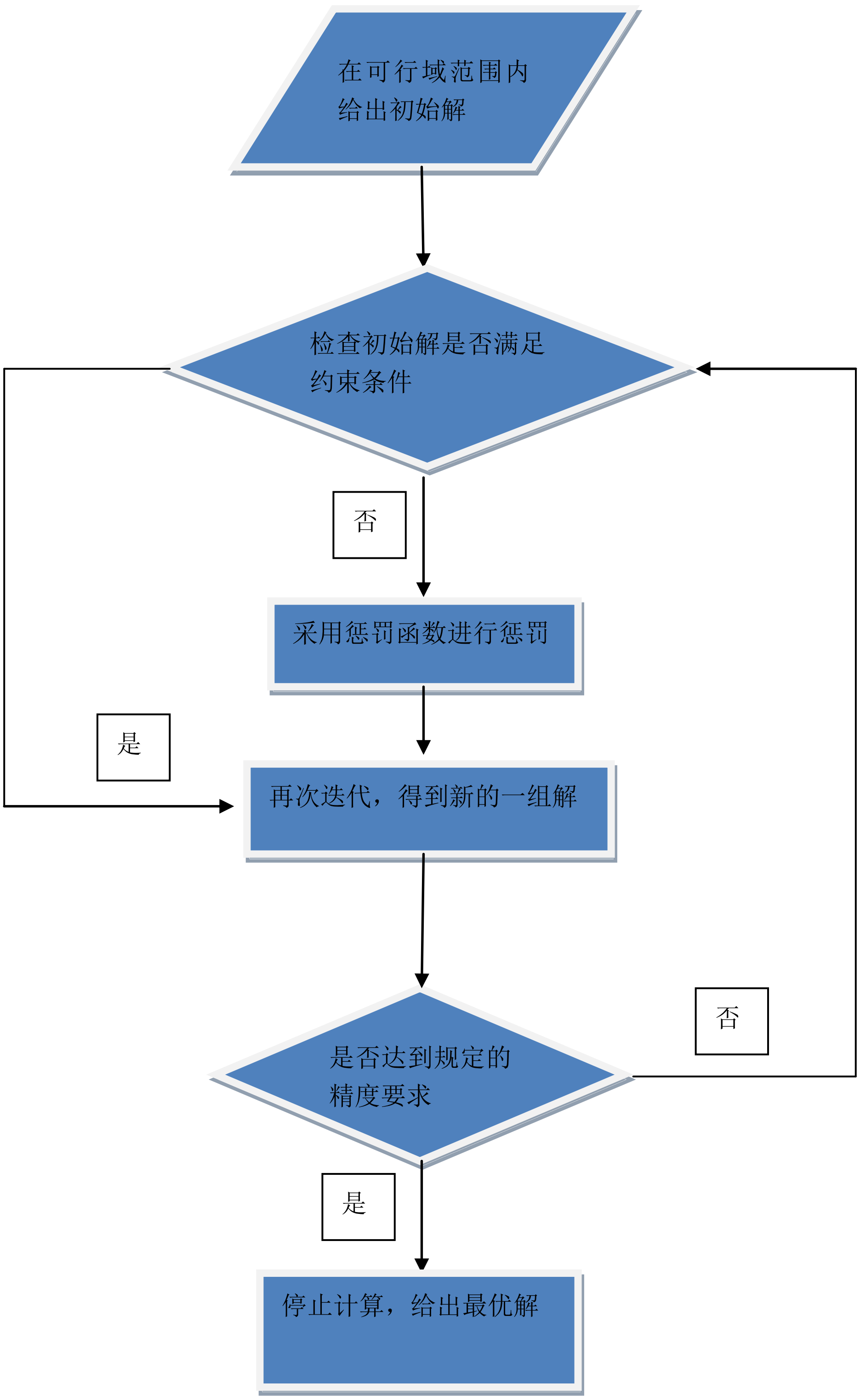
Step 1 在可行域范围内给出一组初始解,并令迭代次数为 0；

Step 2 就给定的初始解计算出其适应度的值,检查各个初始解是否满足约束条件,如果不满足约束条件,则采用惩罚函数进行惩罚,否则,适应度值不变；

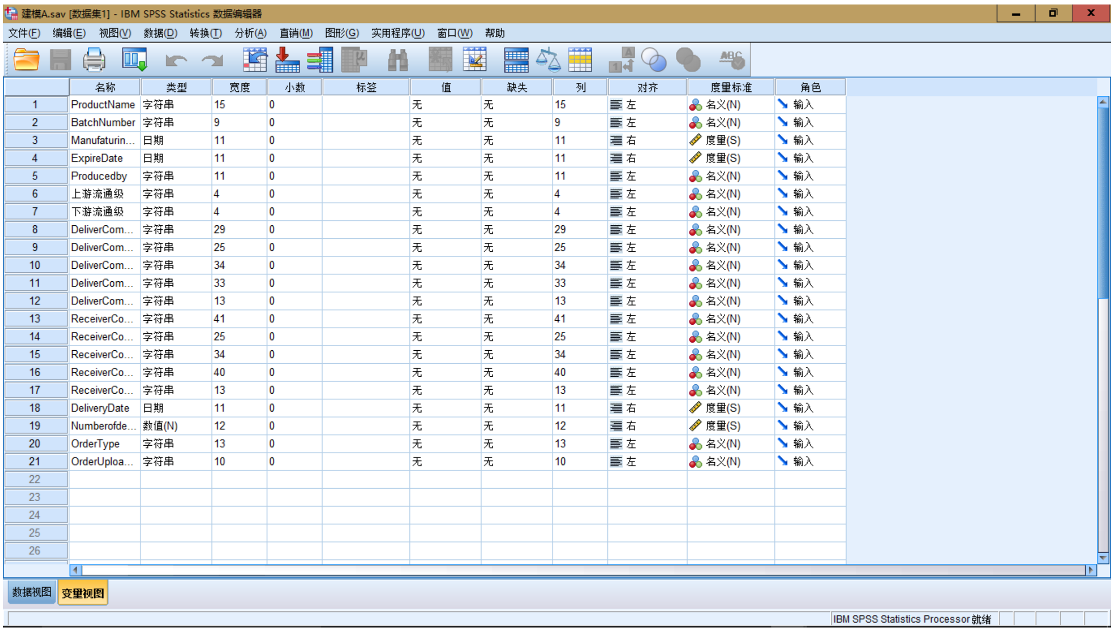
Step 3 对惩罚后的初始解进行再次迭代,得到新的一组解；

Step 4 如果达到规定的精度要求,停止计算,给出最优解,否则,转到第二步,循环操作,直至最优解求出。

程序框图如下：【6】


在可行域范围内
给出初始解
检查初始解是否满足
约束条件
否
采用惩罚函数进行惩罚
是
再次迭代，得到新的一组解
否
是否达到规定的
精度要求
是
停止计算，给出最优解

我们小组根据附件 2 中的数据整理得到：



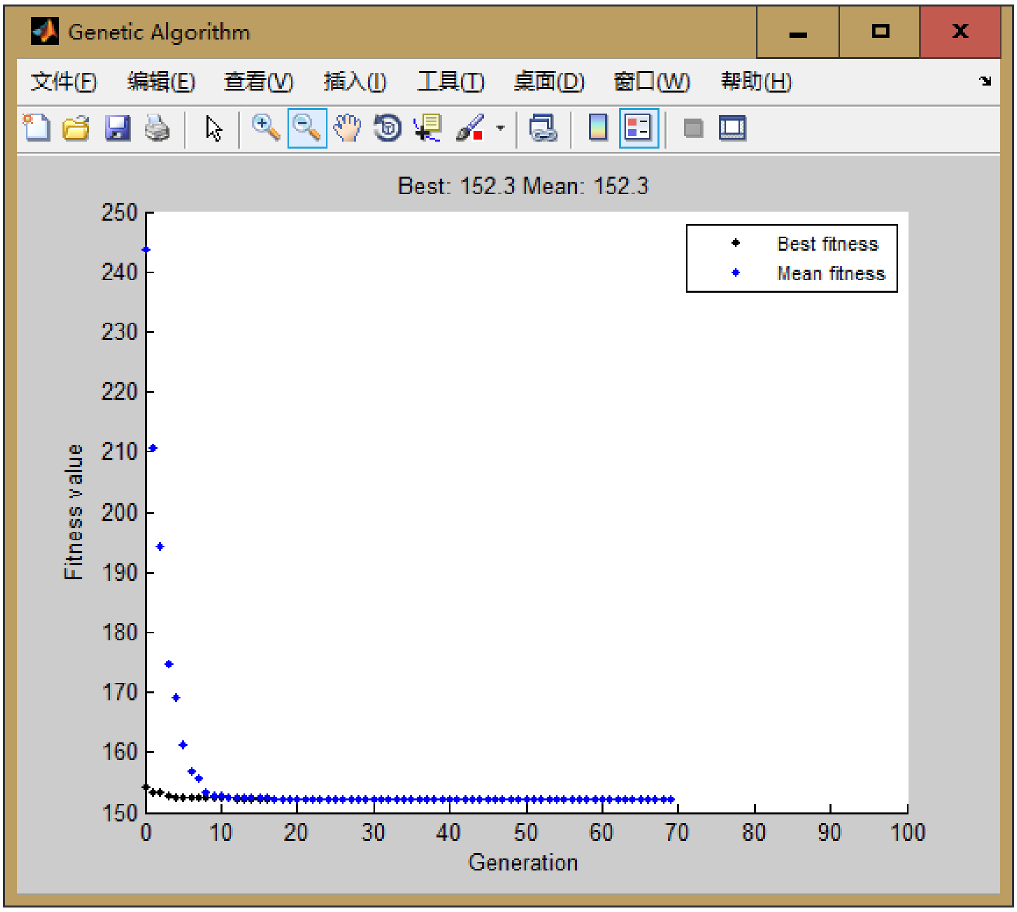
	名称	类型	宽度	小数	标签	值	缺失	列	对齐	度量标准	角色
1	ProductName	字符串	15	0		无	无	15	左	名义(N)	输入
2	BatchNumber	字符串	9	0		无	无	9	左	名义(N)	输入
3	Manufaturin...	日期	11	0		无	无	11	右	度量(S)	输入
4	ExpireDate	日期	11	0		无	无	11	右	度量(S)	输入
5	Producedby	字符串	11	0		无	无	11	左	名义(N)	输入
6	上游流通级	字符串	4	0		无	无	4	左	名义(N)	输入
7	下游流通级	字符串	4	0		无	无	4	左	名义(N)	输入
8	DeliverCom...	字符串	29	0		无	无	29	左	名义(N)	输入
9	DeliverCom...	字符串	25	0		无	无	25	左	名义(N)	输入
10	DeliverCom...	字符串	34	0		无	无	34	左	名义(N)	输入
11	DeliverCom...	字符串	33	0		无	无	33	左	名义(N)	输入
12	DeliverCom...	字符串	13	0		无	无	13	左	名义(N)	输入
13	ReceiverCo...	字符串	41	0		无	无	41	左	名义(N)	输入
14	ReceiverCo...	字符串	25	0		无	无	25	左	名义(N)	输入
15	ReceiverCo...	字符串	34	0		无	无	34	左	名义(N)	输入
16	ReceiverCo...	字符串	40	0		无	无	40	左	名义(N)	输入
17	ReceiverCo...	字符串	13	0		无	无	13	左	名义(N)	输入
18	DeliveryDate	日期	11	0		无	无	11	右	度量(S)	输入
19	Numberofde...	数值(N)	12	0		无	无	12	右	度量(S)	输入
20	OrderType	字符串	13	0		无	无	13	左	名义(N)	输入
21	OrderUploa...	字符串	10	0		无	无	10	左	名义(N)	输入

在此基础上给出合理假设的初始变量范围，得到一组初始解如下表格：

分销商/零售商	零售商 T1	零售商 T2	零售商 T3	零售商 T4	分销商 T0
需求量均值	20	10	15	8	
需求量方差	16	8	10	4	
提前期	1	1	1	1	3
提前期方差	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
服务水平	100%	100%	100%	100%	100%
安全因子	2	2	2	2	2

经过计算和 matlab 软件模拟，最终我们得到如下表所示的结果：

分销商/零售商	零售商 T1	零售商 T2	零售商 T3	零售商 T4	供应商 T0
再订货点 r	17	12	14	11	66
再进货量 q	20	10	15	8	48



我们小组认为，在二级供应链系统中，若是已知到货率，求要使分销商的库存量总和最小的 r 和 q 值，我们先整理了附件 2 中给出的数据，得出了订货量 q 的大致取值范围，然后根据问题一中得到的数学关系和约束条件，根据公式（5-8）和（5-13），假设出提前期的满足的正态分布，给出具体的期望和方差，然后求出各个零售商和供应商的再订货点 r 值，接下来，在求 q 的过程中，我们考虑在用遗传算法，给出了一组（q1, q2, q3, q4）的初始值，然后通过迭代和惩罚函数，最终得到关于供应商 q0 的值。要使分销商的库存总量处于最小值，在不记流通库存的情况下，即从供应商流出的库存量尽可能多的在分销商停留较短的时间，然后流向零售商，在分销商和零售商的需求量都服从正态分布的情况下，分销商的原始库存设为 200，则在分销商向供应商的需求量和零售商向分销商的总需求量达到一个动态平衡之后，我们得到分销商的库存总量维持在 152 左右。在此情况下，我们得到了满足条件的（r, q）值。【7】

5.3.1 二级供应链库存系统优化模型

在问题一的基础上，我们已知到货率，要考虑多级供应链系统下的最优库存问题，我们认为，所谓最优库存，即使供应链的总成本达到最低时的库存值。因此，我们决定重新建立关于供应链的成本的数学关系和约束条件，进而求得满足条件的库存量。

二级供应链库存总成本包括分销商库存成本和n个零售商库存成本两部分，因此我们分别考虑，然后综合求解。

一、分销商库存成本分析【8】

周期T开始时库存期望值为$Q_0+r_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0)$，期末库存期望值为$r_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0)$，

周期的期望值为$\frac{Q_0}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}$，故周期内的期望库存为$\frac{Q_0}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}[\frac{1}{2}Q_0+(r_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0))]$，库存持有成本

$$C_a=c_0\frac{Q_0}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}[\frac{1}{2}Q_0+(r_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0))]*d_0$$

分销商向上级企业订购产品批量为q_0，采购单位产品的费用为d_0，而分销商每一次的订购固定成本为C_0，那么分销商的订货和购买成本为$Cb=q_0 d_0+C_0$。

分销商向上级企业订购产品批量为q_0，采购单位产品的费用为而单位产品的运输费用是关于订货批量q_0的函数，记为$g(q_0)$，所以分销商的运输成本为

$$C_c=g(q_0)*q_0。$$

那么，单位时间内的库存成本为

$$C_d=C_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{Q_0}+c_0[\frac{1}{2}Q_0+r_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0)]*d_0+g(q_0)\sum_{i=1}^{n}\mu_i+d_0\sum_{i=1}^{n}\mu_i \quad (5\text{-}26)$$

二、零售商的库存成本分析

通过分销商的库存成本可以类推到零售商的库存成本。

首先计算零售商 i 的库存持有成本；期初库存期望值为$Q_i+\mathrm{r}_i-\mu_i(L_i+L_0)$，

期末库存期望值为$r_i-\mu_i(L_i+L_0)$，周期期望值为Q_i/μ_i，周期内的期望库存为$\frac{Q_i}{\mu_i}\left[\frac{1}{2}Q_i+r_i-\mu_i(L_i+L_0)\right]$，所以零售商 i 的库存持有成本为

$$C_{ai}=c_i\frac{Q_i}{\mu_i}\left[\frac{1}{2}Q_i+r_i-\mu_i(L_i+L_0)\right]*d_i,$$

零售商 i 向分销中心订购产品批量为q_i，产品的批发价格为di，零售商 i 固定向分销中心订购产品，零售商 i 的购买和订货成本为$C_{bi}=q_i*d_i+C_{0i}$。

零售商 i 向分销中心订购产品批量为q_i，而单位产品的运输费用是关于订货批量q_i的函数，记为 g(q_i)，所以零售商 i 的运输成本为$C_{ci}=g(q_i)*q_i$。

那么，零售商 i 的单位库存成本为

$$C_{di}=C_{0i}\frac{\mu_i}{Q_i}+c_i\left[\frac{1}{2}Q_i+r_i-\mu_i(L_i+L_0)\right]*d_i+d_i\mu_i+g(q_i)\mu_i \qquad (5\text{-}27)$$

三、二级供应链模型库存成本分析

将上面的分销商和零售商的库存成本综合考虑，要是总成本最小，我们可以得到下面的数学关系：

$$\begin{aligned}\min Cn &= C_d+\sum_{i=1}^{n}C_{di}\\ &= C_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{Q_0}+c_0[\frac{1}{2}Q_0+r_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(L_0)]*d_0+g(q_0)\sum_{i=1}^{n}\mu_i\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left\{C_{0i}\frac{\mu_i}{Q_i}+c_i\left[\frac{1}{2}Q_i+r_i-\mu_i(L_i+L_0)\right]*d_i+d_i\mu_i+g(q_i)\mu_i\right\}\end{aligned} \qquad (5\text{-}28)$$

约束条件如下，

$$q_0>0 \qquad (5\text{-}29)$$

$$q_0>\max(q_1,q_2,q_3,q_4) \qquad (5\text{-}30)$$

$$\frac{q_0}{L_0}\geq\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{L_i} \qquad (5\text{-}31)$$

$$q\leq Q_m \qquad (5\text{-}32)$$

5.3.2 多级供应链库存系统优化模型

由二级供应链系统推导到多级供应链系统，考虑的库存成本、订货与购买成本以及运输成本的思路是一样的，所以多级库存系统的成本分析如下：

一、库存持有成本

周期内的期望库存为$\frac{q_k^{(h,i)}}{2}+\mathrm{r}_k^i-\mu_{D_k^{(h,i)}}\mu_{L_k^{(h,i)}}$

周期的期望值为$\frac{q_k^{(h,i)}}{\mu_{D_k^{(h,i)}}}$

那么库存的持有成本为

$$Ca_k^i=\sum_{h=1}^{m_{k-1}}c_0(\frac{q_k^{(h,i)}}{2}+r_k^i-\mu_{D_k^{(h,i)}}\mu_{L_k^{(h,i)}})$$

二、订货和购买成本

一个周期内，第 k 层节点企业 i 向第 k-1 层节点企业 h 的订购批量为 $q_k^{(h,i)}$，那么购买成本为 $Cb_k^i=\sum_{h=1}^{m_{k-1}}(q(q_k^{(h,i)})q_k^{(h,i)}+C_k^i)$，$m_{k-1}$ 表示第 k-1 层节点企业的个数。

三、运输成本

由假设可知单位产品的运输成本为 g($q_k^{(h,i)}$)，那么周期内的运输费用为

$$Cc_k^i=\sum_{h=1}^{m_{k-1}}g(q_k^{(h,i)})q_k^{(h,i)}$$

总的库存费用为购买费用、存储费用和运输费用的综合，于是，所有的问题都集中在为每个节点企业寻找最佳订货批量和最优订货点上，从而最小化整个系统单位内的库存费用。【9】设整个系统的单位时间库存费用为，此问题的最优化模型为：

$$\text{minCn}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m_k}(Ca_k^i+Cb_k^i+Cc_k^i)\frac{\mu_{D_k^{(h,i)}}}{q_k^{(h,i)}} \quad (5\text{-}33)$$

约束条件如下：

$$q_k^{(h,\,i)}>\mu_{D_k^{(h,\,i)}} \quad (5\text{-}34)$$

$$q_k^{(h,\,i)}\le max q_k^{(h,\,i)} \quad (5\text{-}35)$$

$$q_k^{(h,\,i)}>0 \quad (5\text{-}36)$$

5.3.3 系统优化模型求解

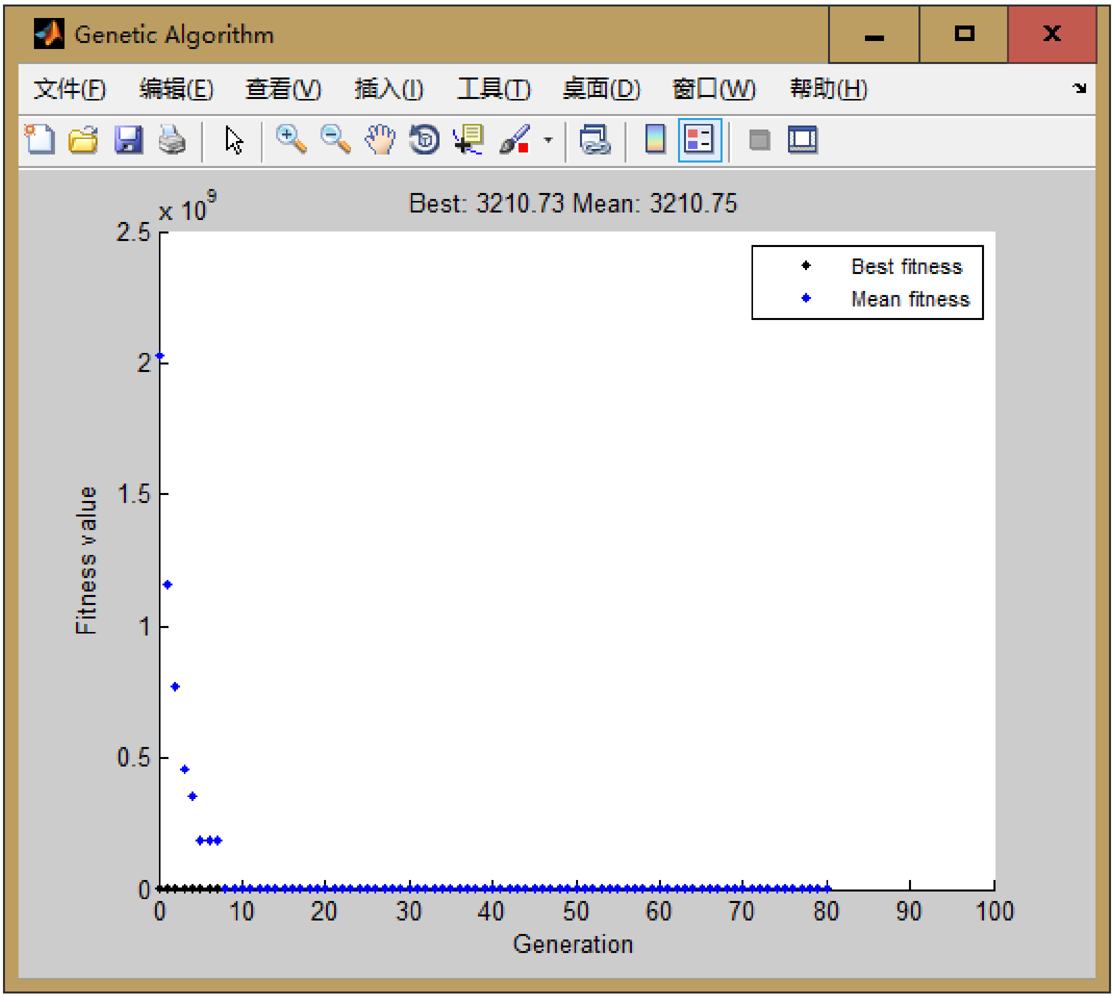
在模型求解过程中，我们小组的思路是，按照得到的数学关系和约束条件，依然利用遗传算法来求解，给出一组初始解，通过多次迭代，找到符合约束条件的最优解。

首先，我们给出一组初始值如下表：

分销商/零售商	零售商 T1	零售商 T2	零售商 T3	零售商 T4	分销商 T0
需求量均值	22	18	10	12	
需求量方差	22	8	10	12	
提前期	1	1	1	1	3
提前期方差	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
服务水平	100%	100%	100%	100%	100%
安全因子	2	2	2	2	2

同时给出我们在计算中所需要的初始值：
分销商每次订购费用：C_0=1000
零售商每次订购费用：C_i=300
分销商库存总量 Kf=200
供应商库存总量 Kg=400
分销商单位库存持有成本 h0=20
零售商单位库存持有成本 hi=22
分销商的单位购买费用 di=110
零售商的单位购买费用 d0=100

然后，我们根据遗传算法，利用我们已经得到的数学关系和约束条件，通过 matlab 软件拟合找到库存供应链系统的最优解。利用 matlab 得到的结果如下图所示。



从上图我们可以得到如下表所示的结果。

分销商/零售商	零售商 T1	零售商 T2	零售商 T3	零售商 T4	分销商 T0
再订货点	24	20	13	15	32
再进货量 q	22	18	10	12	87

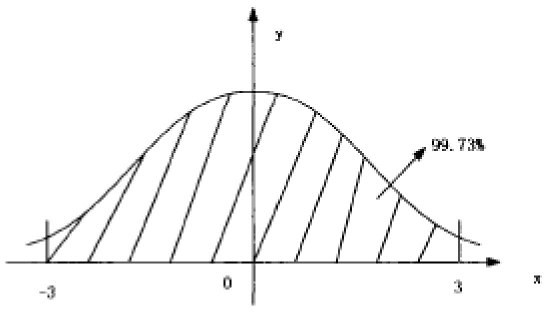
此时，最低库存成本 Cn = 3210；
供应商的最优库存 Kg = 400-0.95*87=317。

六、模型评价与总结

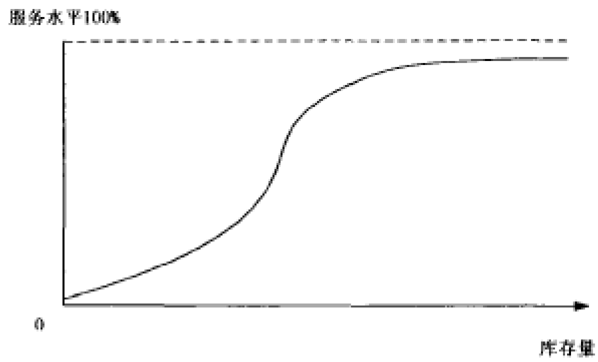
首先，我们小组根据题意所建立的二级供应链库存系统和多级供应链库存系统，即供应商—分销商—零售商模型，是在假设零售商和分销商的需求量符合正态分布的前提下，并且提前期也符合正态分布，但是在实际情况下，可能会因为供应链中信息传递的扭曲和不真实而出现市场营销中的“牛鞭效应”。所谓“牛鞭效应”，即市场营销中普遍存在的高风险现象，是零售商与供应商在需求预测修正、订货批量决策、价格波动、短缺博弈、库存责任失衡和应付环境变异等方面博弈的结果，增大了供应商的生产、供应、库存管理和市场营销的不稳定性。供应链上的信息流从最终零售商向原始供应商传递的时候，由于无法有效地实现信息的共享，使得信息扭曲而逐渐放大，导致了需求信息出现越来越大的波动。这一点在我们的模型中没有涉及到。【10】

其次，在模型的求解过程中，由于多级网状供应链库存系统模型结构复杂，数据量大，不易操作，而多级网状供应链库存系统可以看成是二级供应链库存系统的组合叠加，所以我们选择了更容易研究的二级供应链库存系统作为主要的分析对象，并在此基础上进行数据的合理假设和迭代求解，最终实现解决问题的目的。

最后，在模型的条件设定中，我们假设的不缺货情况也是一种比较理想化的状态，在实际情况中，缺货情况是存在的，即可以体现在服务水平上。根据正态分布中的 3σ 原理，顾客在运作提前期(L_i+L_0)内的需求量 D 以99.73%的概率落在$\mu_i(L_i+L_0)\pm 3\sigma$ 的范围内。（如下图所示）也就是说，如果零售商对顾客的需求3σ 实行管理，那么，就要满足顾客99.73%的需求，缺货概率仅为0.27%。【11】



通常情况下，服务水平越高，所要求的安全库存量也就越多。但是，当库存量增加到一定量时，服务水平可能上升很少、甚至出现下降的现象。（如下图所示）这是由于大量库存可能带来管理上的问题。因此，除了一些缺货会造成无法估量的损失的产品以外，一般不设置100%(不允许缺货)的服务水平。



因此，我们所假设的不缺货情况也是一种理想情况下的假设，在模型的应用和推广过程中还需要加以考虑。

七、参考文献

【1】陈长彬等.供应链与物流管理【M】北京：清华大学出版社,2013：123.
【2】杨红军.基于物流的一、二级库存控制模型和解法的研究【D】.长安大学硕士学位论文.2005.
【3】阳永生.供应链分销系统库存与订货模型及算法研究【D】.中南大学硕士学位论文.2006.11
【4】张慧颖.不确定需求下的供应链库存协调管理研究【D】.天津大学博士学位论文.2003.4
【5】贾春兰.供应链多级库存成本控制模型及算法研究【D】.重庆大学硕士学位论文.2012.6.
【6】秦海燕.供应链库存系统模型研究及仿真【D】.大连海事大学硕士学位论文.2007.3.
【7】许中荣.多级供应链条件下库存优化及算法研究【D】.北京交通大学硕士学位论文.2009.6
【8】彭禄斌等.供应链网状结构中多级库存控制模型【J】.东南大学学报.2002.32（2）:218-222.
【9】黄丽燕.供应链分销系统多级库存优化模型研究【D】.北京交通大学硕士学位论文.2011.6
【10】代红砚等.多级供应链中库存不准确性对牛鞭效应的影响【J】.工程管理学报.2013.2：195-201.
【11】陈春峰.供应链模式下的库存控制系统研究【D】.江苏大学硕士学位论文.2005.6

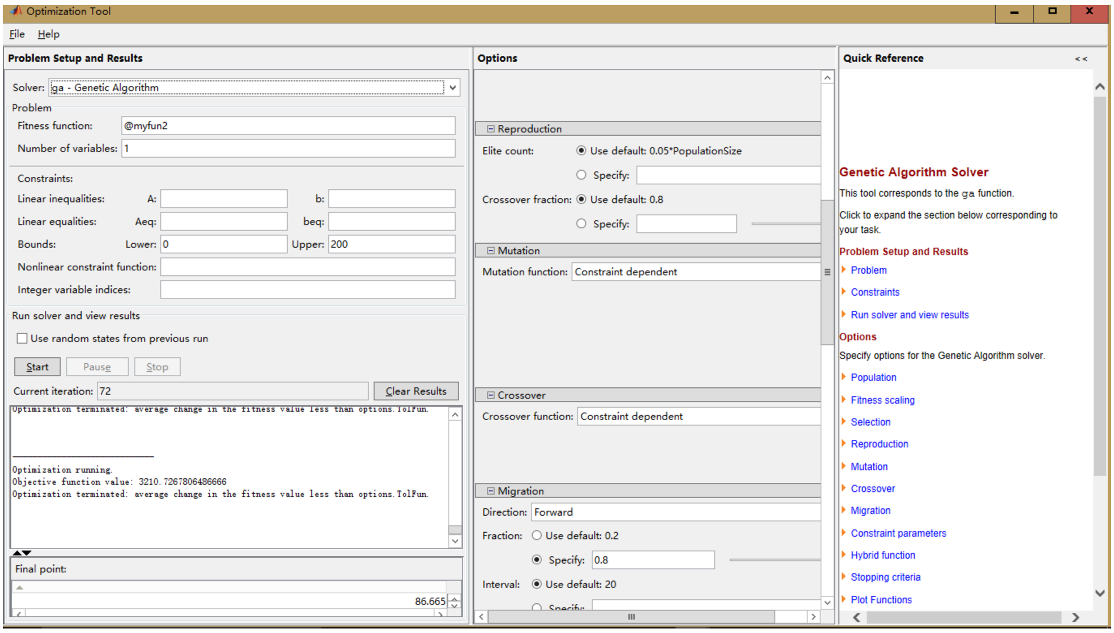
附录：

问题二算法

目标函数及程序

```
function z=myfun(q)
d=0.9;              %到货率
q0=200;             %分销商 T0 原始库存
q1=20;              %零售商 T1 需求量均值
q2=10;              %零售商 T2 需求量均值
q3=15;              %零售商 T3 需求量均值
q4=8;               %零售商 T4 需求量均值
p1=min(0,q)^2;  %惩罚函数 p1
p2=min(0,q-q1)^2+min(0,q-q2)^2+min(0,q-q3)^2; %惩罚函数 p2
a=max(q1,q2);
b=max(a,q3);
c=max(b,q4);
p3=min(0,q-c)^2; %惩罚函数 p3
z=q0-d*(q1+q2+q3+q4)+d*q+p1+p2+p3;%目标函数
```

程序截图如下：



问题三算法

目标函数及程序

```
function z=myfun2(q)
q1=22; %零售商 T1 需求量均值
q2=18; %零售商 T2 需求量均值
q3=10; %零售商 T3 需求量均值
q4=12; %零售商 T4 需求量均值
r1=24; %零售商 T1 再订货点
r2=20; %零售商 T2 再订货点
r3=13; %零售商 T3 再订货点
r4=15; %零售商 T4 再订货点
c0=1000; %分销商一次订购固定成本
c0i=300; %零售商一次订购固定成本 i=1，2，3，4
d0=100; %分销商采购单位产品的费用
h0=20;  %分销商单位库存成本
hi=22;  %零售商单位库存成本 i=1，2，3，4
di=110; %零售商采购单位产品的费用 i，2，3，4
r0=32;  %分销商 T0 再订货点
d=0.95; %各级到货率
li=1; %零售商订货提前期 i=1，2，3，4
l0=3; %分销商订货提前期
A=200; %分销商最大容许库存
Q=q1+q2+q3+q4; %零售商总需求量
Cic=h0*(q/Q)*(0.5*q+(r0-21))*d0+(2000-10*q)*Q+d0*Q;%分销商 T0 单位时间内的库存成本
Cic1=c0i*d+hi*(0.5*q1+r1-q1*(li+l0))*di+di*q1+(2000-10*q1)*q1; %零售商 T1 单位时间内的库存成本
Cic2=c0i*d+hi*(0.5*q2+r2-q2*(li+l0))*di+di*q2+(2000-10*q2)*q2; %零售商 T2 单位时间内的库存成本
Cic3=c0i*d+hi*(0.5*q3+r3-q3*(li+l0))*di+di*q3+(2000-10*q3)*q3; %零售商 T3 单位时间内的库存成本
Cic4=c0i*d+hi*(0.5*q4+r4-q4*(li+l0))*di+di*q4+(2000-10*q4)*q4; %零售商 T4 单位时间内的库存成本
p1=min(0,q)^2; %惩罚函数 1
a=max(q1,q2);
d=max(q3,a);
e=max(d,q4);
p2=min(0,q-e)^2; %惩罚函数 2
b=q/l0-(q1/li+q2/li+q3/li+q4/li);
p3=min(0,b)^2; %惩罚函数 3
p4=min(A-q,0)^2; %惩罚函数 4
y=Cic+Cic1+Cic2+Cic3+Cic4+p1+p2+p3+p4;
```

```
p5=min(0,y)^2; %惩罚函数 5
p6=min(30-q,0)^2; %惩罚函数 6
z=y+p5+p6; %目标函数
```

程序截图如下：