Nombre Oscar Florez Pabón Fecha día mes año

Profesor Luis A. Núñez Materia Métodos 1

Institución U.I.S Curso Nota

2.3.6

(f) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para el espacio vectorial

Matrices de pauli:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Son matrices complejas 2x2 hermíticas

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ya que tenemos 4 matrices complejas de dimensión 4 y todas hermíticas solo nos quedaría ver si son linealmente independientes.

El método que utilizaré será convertir cada matriz en una columna y conformar una matriz 4x4 para calcular el determinante el cual me tiene que dar $\neq 0$ para ser L.I

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ L.I

$(1(i) + i(1) + 0) - (1(-i) + i(-1)) = 4i$

Si forman una base para el espacio vectorial de matrices complejas 2x2 hermíticas.

(b) Comprobar que la base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle = Tr(A^T B)$ que forman una base para el espacio vectorial.

$\Rightarrow \langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$

Scanned with ACE Scanner

$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

c) Para construir un subespacio vectorial de matrices reales puras dentro del espacio de matrices hermíticas complejas 2x2, se debe tener ceros en las posiciones 12 y 21 quedando de esta forma:

$M_R = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} = M_R^T = \begin{pmatrix} z_1^* & 0 \\ 0 & z_4^* \end{pmatrix}$

Para el caso de las matrices imaginarias se debe de tener ceros en las posiciones 11 y 22 quedando de esta forma:

$M_i = \begin{pmatrix} 0 & z_2 \\ z_3 & 0 \end{pmatrix} = M_i^T = \begin{pmatrix} 0 & z_3^* \\ z_2^* & 0 \end{pmatrix}$ donde $z_2^* = z_3$ complejos //

3.1.4 //

6) En el caso 3D tenemos que si $\{e_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) no necesariamente ortogonal, entonces demuestre que:

a) $e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$, $i, j, k = 1, 2, 3$ y sus permutaciones cíclicas: 2, 3, 1 y 3, 1, 2

$\Rightarrow$ tenemos:

$e^1 = \dfrac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$ ; $e^2 = \dfrac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$ ; $e^3 = \dfrac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$

Sabemos:

$e^i \cdot e_i = 1 \Rightarrow$ $\langle e^1 | e_1 \rangle = \dfrac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \cdot e_1 = \dfrac{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = 1$ //

$e^i \cdot e_j = 0$ $\langle e^1 | e_2 \rangle = \dfrac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \cdot e_2 = \dfrac{\cancel{e_2 \cdot (e_2 \times e_3)}^{0}}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = 0$ //

$\langle e^1 | e_3 \rangle = \dfrac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \cdot e_3 = \dfrac{e_3 \cdot (e_2 \times e_3)^{0}}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = 0$ //

$\langle e^2 | e_2 \rangle = \dfrac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \cdot e_2 = \dfrac{e_2 \cdot (e_3 \times e_1)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$ Permutamos: $\dfrac{\cancel{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}}{\cancel{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}} = 1$ //

$\langle e^3 | e_3 \rangle = \dfrac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \cdot e_3 = \dfrac{e_3 \cdot (e_1 \times e_2)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}$ Permutamos: $\dfrac{\cancel{e_3 \cdot (e_1 \times e_2)}}{\cancel{e_3 \cdot (e_1 \times e_2)}} = 1$ //

$\vdots$ Por lo tanto se cumple la igualdad.

(b) Si los vectores: $V = e_1\cdot(e_2\times e_3)$ y $\hat{V} = e^1\cdot(e^2\times e^3)$ demostrar $V\hat{V} = 1$

$\Rightarrow \quad V\hat{V} = e_1\cdot(e_2\times e_3)\cdot e^1\cdot(e^2\times e^3) = 1$

Sabemos:

$$e^1 = \frac{e_2\times e_3}{e_1\cdot(e_2\times e_3)} \; ; \; e^2 = \frac{e_3\times e_1}{e_1\cdot(e_2\times e_3)} \; ; \; e^3 = \frac{e_1\times e_2}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{V} = \frac{e_2\times e_3}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}\cdot\left[\frac{e_3\times e_1}{e_1\cdot(e_2\times e_3)} \times \frac{e_1\times e_2}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad = e_1\cdot(e_2\times e_3)\cdot\left(\frac{e_2\times e_3}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}\cdot\left[\frac{e_3\times e_1}{e_1\cdot(e_2\times e_3)} \times \frac{e_1\times e_2}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}\right]\right)$$

$$\frac{e_1\cdot(e_2\times e_3)}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}\cdot\left(e_2\times e_3\cdot\left(e_3\times \cancel{e_1}\right)\times\left(\cancel{e_1}\times e_2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad (e_2\times \cancel{e_3})\cdot(\cancel{e_3}\times e_2) = (e_2\times e_2) = 1$$

(c) Que vector satisface $a\cdot e^i = 1$? Demuestre que $a$ es único.

$$a\cdot e^i = a\cdot\frac{e_j\times e_k}{e_i\cdot(e_j\times e_k)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad a\cdot(e_j\times e_k) = e_i\cdot(e_j\times e_k) \Rightarrow \quad a = e_i$$

$$\Rightarrow \quad e_i\cdot e^i = 1$$

(d) Encuentre el producto vectorial de dos vectores $a$ y $b$ que están representados en un sistema de coordenadas oblicuo:

Dada la base: $w_1 = 4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$; $w_2 = 3\hat{i}+3\hat{j}$; $w_3 = 2\hat{k}$.

Encuentre:

I. Las bases recíprocas $\{e^i\}$

II. Las componentes covariantes y contravariantes del vector $a = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

I. Sabemos:

$$e^i = \frac{e_j\times e_k}{e_i\cdot(e_j\times e_k)} \qquad e^1 = \frac{e_2\times e_3}{e_1\cdot(e_2\times e_3)} \; ; \; e^2 = \frac{e_3\times e_1}{e_1\cdot(e_2\times e_3)} \; ; \; e^3 = \frac{e_1\times e_2}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}$$

$w_1 = e_1$

$w_2 = e_2$

$w_3 = e_3$

$$\Rightarrow \quad e_1\cdot(e_2\times e_3) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(6) - 2(6) = 12$$

$$e_2 \times e_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6) - \hat{j}(6) = 6\hat{i} - 6\hat{j}$$

$$e_3 \times e_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 8\hat{j}$$

$$e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\Rightarrow e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{6\hat{i} - 6\hat{j}}{12} \quad ; \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{-4\hat{i} + 8\hat{j}}{12}$$

$$e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{-3\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}}{12}$$

Componentes:

Covariantes: $e_1, e_2, e_3 = \omega_1, \omega_2, \omega_3$

Contravariantes: $e^1, e^2, e^3$

$\Rightarrow$ Sabemos: $a = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\Rightarrow$ Las componentes covariantes y contravariantes de $a$ son:

$$\underbrace{\begin{aligned} a|\omega_1\rangle &= 15 \\ a|\omega_2\rangle &= 9 \\ a|\omega_3\rangle &= 6 \end{aligned}}_{\text{Covariantes}}$$

Contravariantes

$\langle e^1 | a = -\frac{1}{2}$

$\langle e^2 | a = 1$

$\langle e^3 | a = \frac{3}{4}$

Scanned with ACE Scanner

Profesor Materia

Institución Curso Nota

3.3.5 //

8)

9) Tenemos: $A = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ; $B = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

Expresarlos en sistema de coordenadas $O' = (x', y', z')$ donde $O'$ se obtiene rotando a $O$, $\pi/6$ alrededor del eje z y $\pi/2$ alrededor del eje x', con lo cual luego y y z coinciden.

La rotación alrededor del eje z por un ángulo de $\pi/6$ se representa como:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La rotación alrededor del eje x' por un ángulo de $\pi/2$ se representa:

$$R_{x'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1) $A = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ; $B = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.) Rotación eje z

$$\Rightarrow A^* = R_z(\pi/6) \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B^* = R_z(\pi/6) \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.) Rotación alrededor eje $x'$

$$A' = R_{x'}(\pi/2) \cdot A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ -1 \\ \sqrt{3}/2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = R_{x'}(\pi/2) \cdot B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ \sqrt{3}/2 + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3} - 1/2 \end{bmatrix}$$

**b)**

Tenemos:

$$\rho^i_j = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \rho_4 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

Tensor de esfuerzos

¿Cual será su expresión en el sistema de coordenadas $O' \rightleftarrows (x', y', z')$?

se expresa en el sistema $O \rightleftarrows (x, y, z)$

$\Rightarrow \quad \rho^* = R_z(\pi/6) \cdot \rho \; ; \quad \rho' = R_{x'}(\pi/2) \cdot \rho^*$

$\Rightarrow$

$$\rho^* = R_z(\pi/6) \cdot \rho = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \rho_4 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\rho_1}{2} & -\frac{\rho_2}{2} & \frac{\sqrt{3}\rho_4}{2} \\ \rho_1/2 & \frac{\sqrt{3}\rho_2}{2} & \rho_4/2 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho' = R_{x'}(\pi/2) \cdot \rho^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \rho^* = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\rho_1}{2} & -\rho_2/2 & \frac{\sqrt{3}\rho_4}{2} \\ \frac{\sqrt{3}\rho_1}{4} & \rho_2/4 & -\frac{\sqrt{3}\rho_4}{4} \\ \rho_1/2 & \frac{\sqrt{3}\rho_2}{2} & \rho_4/2 \end{pmatrix}$$