1) Considere el espacio vectorial de matrices complejas 2x2 con la siguiente definición

$$\langle a|b\rangle \Rightarrow Tr(A^T B) \equiv (A^T)^i_j B^j_i = (A^+)^i_j B^j_i.$$

a) Compruebe si ésta es una buena definición de producto interno

→ Para comprobar si es una buena definición de producto interno tenemos que cumplir:

1./ Linealidad 2./ Conjugado simétrico 3./ Positividad

⇒ 1./ Linealidad en el primer argumento

$\langle a|\alpha b+\beta c\rangle = Tr((A^T)(\alpha B+\beta C))$

$= \alpha Tr((A^T)B) + \beta Tr((A^T)C) = \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$ cumple

2./ Conjugado simétrico:

$\langle a|b\rangle = \overline{\langle b|a\rangle} \Rightarrow Tr((A^T)B) = Tr((B^T)^T A)$ cumple

3./ Positividad:

$\langle a|a\rangle \geq 0 \Rightarrow Tr(A^T|A) \geq 0$ se cumple si y solo si $A \neq 0$

⇒ ya que tomamos $A \neq 0$ entonces cumple

b) para encontrar la norma de Frobenius, utilizamos la definición que

$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} \Rightarrow \sqrt{Tr(A^T A)} \Rightarrow$

c) Para encontrar la distancia entre dos matrices A y B, utilizamos la definición de distancia:

$d(A,B) = \|A-B\| = \sqrt{\langle A-B|A-B\rangle}$ ← Utilizamos:

⇒ Quedaría: $\sqrt{Tr((A-B)^T)(A-B))}$ para nuestro problema.

Scanned with ACE Scanner

$$A = \begin{pmatrix} 1+3i & 2+9i \\ 2+5i & 1+2i \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 2+5i & 7-2i \\ 1-2i & 2-5i \end{pmatrix}$$

$$d(|A\rangle, |B\rangle) = \|A-B\|$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1-2i & -5+7i \\ 1+3i & -1+7i \end{pmatrix} \Rightarrow \|A-B\| = \sqrt{|-1-2i|^2 + |-5+7i|^2 + |1+3i|^2 + |-1+7i|^2}$$

$$\|A-B\| = \sqrt{5+74+10+50} = \sqrt{139}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad 1 \cdot i$$

$$\big(1(i)+i(1)+0\big)+\big(1(-i)+i(-1)\big) = 4i$$

Si forman una base para el espacio vectorial de matrices complejas 2x2 hermíticas.

b) Comprobar que la base es ortogonal luego la definición de producto interno $\langle a|b\rangle \Rightarrow Tr(A^T B)$ que forman una base para ese espacio vectorial.

$\Rightarrow$ $\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1|\sigma_0\rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_2|\sigma_3\rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\|A-B\| = \sqrt{5+74+10+50} = \sqrt{139}$$ //

ⓔ Sabiendo:

$$d(A,B) = \|A-B\| \Rightarrow \sqrt{Tr(A-B)^T(A-B)}$$

$$\Rightarrow \|\sigma_0-\sigma_1\| = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{Tr\left(\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right)} = \sqrt{Tr\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}} = \sqrt{4} = 2$$ //

$$\sigma_0-\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&i\\-i&1\end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{Tr\left(\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\\-i&1\end{pmatrix}\right)} = \sqrt{Tr\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}} = \sqrt{4} = 2$$ //

$$\|\sigma_0-\sigma_3\| = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{Tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right)} = \sqrt{Tr\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}} = \sqrt{4} =$$

$\vdots$

$= 2$

$= 2$

Nombre Jeicer Florez Pabón   Fecha día mes año

Profesor Luis A. Núñez   Materia Métodos 1

Institución U.I.S   Curso   Nota

2.3.6 //

f) Mostrar que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial

Matrices de pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son matrices complejas 2x2 hermíticas

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que tenemos 4 matrices complejas de dimensión 4 y todas hermíticas solo nos quedaría ver si son linealmente independientes.

El método que utilizaré será convertir cada matriz en una columna y conformar una matriz 4x4 para sacarle el determinante el cual me tiene que dar $\neq 0$ para ser L.i

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad L.i$$

$$(1(i) + i(1) + 0) - (1(-i) + i(-1)) = 4i$$

Si forman una base para el espacio vectorial de matrices complejas 2x2 hermíticas.

... definición de producto

9) Compruebe que la base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons Tr(A^{\dagger}B)$ que forman una base para ese espacio vectorial.

$$\Rightarrow \langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Tenemos:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+iy_1 & x_2+iy_2 \\ x_3+iy_3 & x_4+iy_4 \end{pmatrix}$$

podemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy_1 & iy_2 \\ iy_3 & iy_4 \end{pmatrix}$$

en donde tenemos:

$$R = \{ x_i \in R \mid iy_1 = iy_2 = iy_3 = iy_4 = 0 \}$$

y $I = \{ iy_i \in \mathbb{C} \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \}$

~~E~~ En donde se cumple:

* ¿0 esta en el espacio R e I?

si: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ y $\begin{pmatrix} 0i & 0i \\ 0i & 0i \end{pmatrix} = I$

* Cerrado bajo la adición, R_c e I cumplen?

Si: $\begin{pmatrix} z_1 + x_1 & z + x_2 \\ z_3 + x_3 & z_4 + x_4 \end{pmatrix} \in R_c$

y $\begin{pmatrix} iw_1 + iy_1 & iw_2 + iy_2 \\ iw_3 + iy_3 & iw_4 + iy_4 \end{pmatrix} \in I$

* Cerrado bajo la adición por escalar, R_c e I cumplen?

Si: $\alpha \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in R_c$

Un numero real pero se puede entender un escalar, multiplicando entre estos el también un escalar.

$\alpha \begin{pmatrix} iy_1 & iy_2 \\ iy_3 & iy_4 \end{pmatrix} \in I$

alfa afecta su cantidad y no cambia la comparación sigue perteneciendo al espacio.

②

9) Considere el polinomio $P^P(x) = x^2+x+3$ y expréselo en términos de la base de polinomios de legendre $\{|P_i^P\rangle\} \Rightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$

$\Rightarrow$ Tenemos:

La base de polinomios:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$\Rightarrow$ Para encontrar C_0, C_1, C_2 calculamos las integrales necesarias utilizando la relación de ortogonalidad de los polinomios de legendre:

$$C_i = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

$\Rightarrow$ Tenemos: $P^P(x) = x^2+x+3$ y

$P_0(x) = 1 \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_1(x) = x$

$\Rightarrow$ 1/ Para C_0:

$$C_0 = \int_{-1}^{1}(x^2+x+3)(1)\, dx = 0$$

$$C_0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3\right) - \left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}-3\right)$$

$$= \frac{2}{3} + 6 = \frac{2}{3} + \frac{18}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{3} \div 2 = \frac{10}{3}$$

2/ $$C_1 = \int_{-1}^{1}(x^2+x+3)(x)\, dx = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad = \int_{-1}^{1}(x^3+x^2+3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$C_1 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$C_2 = \int_{-1}^{1} (x^2+x+3)\left(\frac{1}{2}(3x^2-1)\right)dx = \frac{2}{5}$

$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{3x^4}{2} + \frac{3x^3}{2} + 4x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)dx = \frac{2}{5}$

$\left.\frac{3x^5}{10} + \frac{3x^4}{8} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{8} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{10} + \frac{3}{8} - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5}$

$\frac{6}{10} + \frac{8}{3} - \frac{6}{2} = \frac{2}{5}$

$\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}$

Ahora que tenemos los coeficientes C_i podemos expresar $P^p(x)$ en terminos de la base de Legendre como:

$P^p(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x)$

$\Rightarrow P^p(x) = \frac{10}{3}(1) + 0 + \frac{2}{3}(3x^2 - 1)$

$P^p(x) = \frac{10}{3} + 2x^2 - \frac{2}{3}$ //

(5) $P(x) = x^2 + x + 3 \qquad S(y) = y + 1$

$\Rightarrow P(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad S(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

El [illegible] [illegible] sería: $\qquad u \wedge v = u \cdot v^T$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos una matriz 3x3 el cual es un tensor de rango 2 en $\mathbb{R}^3$.

(6) Tenemos:

$B_x = \{1, x, x^2\} \qquad B_y = \{1, y, y^2\}$

$\Rightarrow$ tenemos que $P^{\otimes S}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $C^{11} = 0 ; C^{12} = 1 ; C^{13} = 1 ; C^{21} = 0 ; C^{22} = 1 ; C^{23} = 1 ; C^{31} = 0 ; C^{32} = 3$

$C^{33} = 3$

$$C^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\hat{J}_\alpha = (0, 0, 0, r \sin\theta)$

$d\hat{s}^2 = \eta_{\alpha\beta} d\hat{x}^\alpha = ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$

(3)

(a) A partir de las condiciones de ortogonalidad para la tétrada $\{\hat{V}, \hat{K}, \hat{I}, \hat{J}\}$ en coordenadas esféricas $(t, r, \theta, \phi) = (\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ encontrar sus componentes contravariantes.

Para ello utilizamos las siguientes relaciones de transformación:

(1) $\hat{V}^\alpha = g^{\alpha\beta} \hat{V}_\beta$

$\hat{K}^\alpha = g^{\alpha\beta} \hat{K}_\beta$

$\hat{I}^\alpha = g^{\alpha\beta} \hat{I}_\beta$

$\hat{J}^\alpha = g^{\alpha\beta} \hat{J}_\beta$

Donde $g_{\alpha\beta}$ es la matriz métrica contravariante

dado: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\hat{x}^\alpha d\hat{x}^\beta$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Tenemos las componentes de la tetrada dad en el sistema esférico:

$\hat{V}_\alpha = (-1, 0, 0, 0)$

$\hat{K}_\alpha = (0, 1, 0, 0)$

$\hat{I}_\alpha = (0, 0, r, 0)$

$\hat{J}_\alpha = (0, 0, 0, r \sin\theta)$

Para calcular las componentes contravariantes necesitaremos la inversa de la matriz métrica para esto.

la inversa de $\eta_{\alpha\beta}$ es $\eta^{\alpha\beta}$

$\hat{V}^\alpha = h^{\alpha\beta}\hat{V}_\beta$ (1) $\qquad h^{00} = -1$

$\hat{k}^\alpha = h^{\alpha\beta}\hat{k}_\beta \qquad h^{11} = 1$

$\hat{i}^\alpha = h^{\alpha\beta}\hat{i}_\beta \qquad h^{22} = \frac{1}{r^2}$

$\hat{j}^\alpha = h^{\alpha\beta}\hat{j}_\beta \qquad h^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$

por tanto:

$$\hat{V}^\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{k}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{i}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \end{pmatrix}$$

(4) Las fórmulas para convertir de coordenadas cartesianas a esféricas en cuatro dimensiones:

1) Para $\hat{a}_0$ (componente radial temporal)

$$\hat{a}_0 = t$$

2) Para $\hat{a}_1$ (componente radial espacial):

$$\hat{a}_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3) Para $\hat{a}_2$ (ángulo azimutal temporal):

$$\hat{a}_2 = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

4) Para $\hat{a}_3$ (Ángulo azimutal espacial):

$$\hat{a}_3 = \operatorname{Arccos}\left(\frac{z}{\hat{a}_1}\right)$$

*) para el vector $\alpha = (5, 3, 2, 1)$, aplicamos estas fórmulas:

1. $\hat{a}_0 = 1$
2. $\hat{a}_1 = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{38}$
3. $\hat{a}_2 = \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) =$
4. $\hat{a}_3 = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right) \quad = \left(1, \sqrt{38}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{5}\right), \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right)\right)$

(c) Tensor de Maxwell se define:

$$f^{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

y el tensor métrico es

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

relacionados: $\xrightarrow{}$ tetrad dual

$$F^{\mu\alpha} = F_{\mu\nu} e^{\mu}_{(\alpha)} e^{\nu}$$

Proyecciones a calcular:

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} V^{\alpha},\quad f_{\mu\alpha} K^{\mu} K^{\alpha},\quad f_{\mu\alpha} l^{\mu} l^{\alpha},\quad f_{\mu\alpha} S^{\mu} S^{\alpha}$$

y las proyecciones cruzadas:

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} K^{\alpha},\quad f_{\mu\alpha} V^{\mu} l^{\alpha},\quad f_{\mu\alpha} V^{\mu} S^{\alpha}$$

Calculando las proyecciones directas:

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} V^{\alpha} = f_{\mu\alpha}(-V^{\alpha})(-V^{\alpha}) = -f_{\mu\alpha} V^{\mu} V^{\alpha}$$

Antisimetrico $\Rightarrow$ $f_{\mu\alpha} V^{\mu} V^{\alpha} = 0$

mediante la ortogonalidad de la tetrad todas las demas proy directas tambien son cero.

Proyecciones cruzadas:

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} K^{\alpha} = f_{\mu\alpha}(-V^{\mu})(K^{\alpha}) = -f_{\mu\alpha} V^{\mu} K^{\alpha} = -(-E_x) = E_x$$

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} l^{\alpha} = f_{\mu\alpha}(-V^{\mu})(l^{\alpha}) = -f_{\mu\alpha} V^{\mu} l^{\alpha} = -(-E_y) = E_y$$

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} S^{\alpha} = f_{\mu\alpha}(-V^{\mu})(S^{\alpha}) = -f_{\mu\alpha} V^{\mu} S^{\alpha} = -(-E_z) = E_z$$

Entonces:

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} V^{\alpha} = f_{\mu\alpha} K^{\mu} K^{\alpha} = f_{\mu\alpha} l^{\mu} l^{\alpha} = f_{\mu\alpha} S^{\mu} S^{\alpha} = 0$$

$$f_{\mu\alpha} V^{\mu} K^{\alpha} = E_x \;;\; f_{\mu\alpha} V^{\mu} l^{\alpha} = E_y \;;\; f_{\mu\alpha} V^{\mu} S^{\alpha} = E_z$$

Scanned with ACE Scanner