Oscar Flórez Pabón

2.1.6

③ ⓐ

	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_k
I	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_k
R_i	R_i	R_i	I	
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i	
X_k	X_k			I

ⓑ Cumple cerradura bajo $*$ por lo que se puede ver en la tabla, también asociatividad ya que $(R_j \cdot R_i) \cdot X_k = R_j \cdot (R_i \cdot X_k)$

$I \cdot X_k = R_j \cdot X_k$

$X_k = X_k$ //

* Cumple existencia del idéntico ya que tenemos un elemento identidad en la tabla $I \cdot R_i = R_i$

* Elemento inverso:

$R_i \cdot R_i^{-1} = I$

$R_i \cdot R_j = I \Longrightarrow R_i^{-1} = R_j$

ⓒ $\{I, R_i, R_j\}$ Subgrupo cíclico de orden 3

$\cdot$	I	R_i	R_j
I	I	R_i	R_j
R_i	R_i	R_j	I
R_j	R_j	I	R_j

Cumple que es cerrado bajo la concatenación es asociativa:

$(I \cdot R_j) R_i = I (R_j \cdot R_i)$

$R_j \cdot R_i = I \cdot I$

$I = I$

* Existe un elemento neutro (I) y también cumple con un elemento inverso:

$R_i \cdot R_j = I \Rightarrow R_i^{-1} = R_j$

Por lo tanto es un subgrupo cíclico de grado 3 //

Ahora con $\{I, x_i\}$ es este un subgrupo cíclico de grado 2?

$\Rightarrow$

$\cdot$	I	x_i
I	I	x_i
x_i	x_i	I

Cumple con la propiedad de cerradura ya que todos sus elementos pertenecen al grupo, cumple asociatividad ya que solo hay dos elementos por combinar, existe un elemento identidad y también un elemento inverso ya que:

$$x_i \cdot x_i = I \Rightarrow x_i = x_i^{-1}$$

Por lo tanto forma un subgrupo cíclico

(d) Considere las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tabla de multiplicación

x	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	I	D	A	B	I

Las matrices $\{I, A, B, C, D, E\}$ forman un grupo ya que cumple todas las propiedades anteriormente mencionadas, y es isomorfo a G_Δ porque las tablas son equivalentes

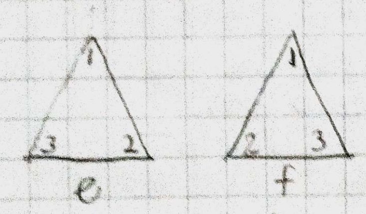
(e)

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_5	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

de igual manera las tablas debidamente ordenadas es isomorfo a G_Δ

(f) Las operaciones de simetría que dejan invariante a un triángulo isósceles y escaleno:

Sabemos:

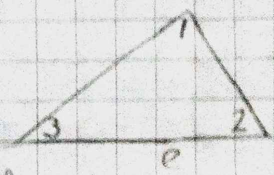


$\Rightarrow$ Este grupo tiene dos elementos: $\{e, f\}$

Por lo tanto sus operaciones están dadas de una manera simple:

	e	f
e	e	f
f	f	e

//



El triángulo escaleno es un grupo con un solo elemento, el elemento de identidad $\{e\}$

	e
e	e

//

(10) $|P_n\rangle \rightleftharpoons P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

(a) Cerrado bajo la suma

$(P_n(x)_a, P_n(x)_b \in |P_n\rangle$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i)(x^i)$

donde $(a_i + b_i) \in C_i$

Cerrado bajo la multiplicación

$\alpha P_{na} = (\alpha a_j) x^i$ donde $\alpha a_j \in C_i$

b) Si porque si $a_j \in \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z} \in P_n$ por ende sigue siendo un espacio vectorial.

c)

I) $\{P_1, P_{n-1}\}$ Si es subespacio de P_n además es cerrado bajo la suma y el producto por un escalar

II) Por definición la suma de 2 números pares da un par por lo tanto es cerrado bajo la suma, multiplicación por un escalar y es subespacio.

III) No porque se puede definir

$ax^2 - ax^2 = 0$ y el $0 \notin$ al subespacio por ende no es cerrado bajo la suma.

IV) de igual manera $(x-1)+(x-1)=0$ no es cerrado bajo la suma.

2.24

b)

$\star\ |a\rangle + |b\rangle = a^0 + a^i |q_i\rangle + b^0 + b^i |q_i\rangle = a^0 + b^0 + (a^i b^i) |q_i\rangle$

a) $= c^0 + c^i |q_i\rangle$

$\star\ \alpha|c\rangle = \alpha c^{\alpha} |q_{\alpha}\rangle = \alpha c^0 |q_0\rangle + \alpha c^1 |q_1\rangle + \alpha c^2 |q_2\rangle + \alpha c^3 |q_3\rangle$.

Si es análogo a R^3 ya que se hace la suma y la multiplicación por escalar componente a componente solo que ahora son 9 componentes y si es un espacio vectorial ya que es cerrado bajo suma y multiplicación.

(b) $|b\rangle \equiv (b^0, b)$, $|r\rangle \equiv (r^0, r)$

$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0|q_0\rangle + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle) \odot$
$(r^0|q_0\rangle + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$

$\Rightarrow d^0 = b^0 r^0 (|q_0\rangle \odot |q_0\rangle) + b^1 r^1 (|q_1\rangle \odot |q_1\rangle) + b^2 r^2 (|q_2\rangle \odot |q_2\rangle) +$
$+ b^3 r^3 (|q_3\rangle \odot |q_3\rangle)$

$\Rightarrow d^0 = b^0 r^0 - b^1 r^1 - b^2 r^2 - b^3 r^3 = b^0 r^0 - b^i r_i = b^0 r^0 - b \cdot r$

$\Rightarrow d = (b^0 r^1 + r^0 b^1 - b^2 r^3 + b^3 r^2)|q_1\rangle$
$(b^0 r^2 + r^0 b^2 - b^1 r^3 + b^3 r^1)|q_2\rangle$
$(\underbrace{b^0 r^3 + r^0 b^3}\ \underbrace{- b^2 r^1 + b^1 r^2})|q_3\rangle$

$b^0 r + r^0 b + \varepsilon_{ijk} b_j r_k |q_i\rangle = b^0 r + r^0 b + b \times r$

$\Rightarrow (d^0, d) = (b^0 r^0 - b \cdot r,\ b^0 r + r^0 b + b \times r)$

(c)
$d^0 = b^0 r^0 - b \cdot r = a|q_0\rangle \to$ Parte real
$d = r^0 b + b^0 r + b \times r$

Proponemos $r^0 b + b^0 r = S^{\alpha j} \delta^0_{\alpha} |q_j\rangle$

$\Rightarrow S^{0j}|q_j\rangle = (S^{0j} + S^{j0})|q_j\rangle = (r^0 b_j + b^0 r_j)|q_j\rangle$

$\Rightarrow r^0 b + b^0 r$

Tenemos $A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = \varepsilon^{ijk} b_j r_k |q_i\rangle$

$\Rightarrow A^{[jk]i} = -A^{kij}$ } misma definición
$\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{ikj}$

$\Rightarrow A^{[jk]i} = \varepsilon^{ijk}$

d) $\delta^{ij} = r^0 b^1 + r^0 b^2 + r^0 b^3 + b^0 r^1 + b^0 r^2 + b^0 r^3$

$A^{[jk]i} b_j r_k = \epsilon^{ijk} b_i r_j |q_k\rangle = (b \times r)_k$

Vectores $a^i c_i = a$

$a \longrightarrow a^j - c_j) = -a$

Pseudovectores

$a \times b \longrightarrow (-a) \times (-b) = c$

Por lo tanto $|d\rangle$ no es vector ni pseudovector ya que

$|d\rangle \longrightarrow d^0 - d^i |q_i\rangle$

e) $|q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0$ $\qquad |q_2\rangle = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$

$|q_1\rangle = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$ $\qquad |q_3\rangle = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3$

$|q_0\rangle \odot |q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |q_0\rangle = 1$

$|q_1\rangle \odot |q_1\rangle = i^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overset{i^2}{(-1)} = -|q_0\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_2\rangle = i^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$

$|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = i^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$

$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = i^2 \sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3 = |q_3\rangle$ anticonmutatividad

$|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = i^2 \sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3 = -|q_3\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_3\rangle = i^2 \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1 = |q_1\rangle$

$|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = i^2 \sigma_3 \sigma_2 = -i\sigma_1 = -|q_1\rangle$

Analogamente salen otras 8 ecuaciones entonces:

$(|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle) \equiv \{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3, \sigma_0\}$

Scanned with ACE Scanner

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

$$= x(\sigma_0) + b(i\sigma_1) + a(i\sigma_2) + y(i\sigma_3) = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

f) $$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle$$

Adjuntando codigo en python para no hacer tantos calculos. si son base para los cuaterniones.

g) I) $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle$

$\widetilde{\langle a|a\rangle} = |a\rangle \odot |a\rangle = a^0 - a^i|q_i\rangle =$

$= a^0a^0 + (a^i = a^i|q_i\rangle) + a^0a^i|q_i\rangle - a^0a^i|q_i\rangle$

$= (a^0)^2 \rightarrow \widetilde{\langle a|a\rangle} \geq 0$

II) $\widetilde{\langle a|a\rangle} = 0$ solo si $|a\rangle = 0$ falso porque si $|a\rangle = 0 + a^i|q_i$ cumple que $\langle a|a\rangle = 0$ $\rightarrow$ no es buena definición

h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\{\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle$

I) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\{a^{02} - |q_1\rangle \odot a^{02} \odot |q_1\rangle\}$

$\frac{1}{2}[(a^0)^2 - |q_1\rangle \odot (a^0)^2|q_1\rangle] \; \frac{1}{2}[(a^0)^2|q_1\rangle + (a^0)^2]$

$\Rightarrow \langle a|a\rangle \geq 0$ $\qquad |f\rangle = f^0 + f|q_1\rangle$

II) de igual manera que el anterior si $|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$ / $f^0 \neq 0$ / $\langle f|f\rangle = \frac{1}{2}(f^0)^2 \neq 0$

i) $w(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle}$

$w(|b\rangle) = \sqrt{|b\rangle^{*} \odot |b\rangle} = \sqrt{(b^0)^2} = |b^0| \geq 0$

pero al igual que la pregunta g.) si $|b\rangle = b^0 + b^i |q_i\rangle$ con $b^0 = 0$ y $b^i|q_i\rangle \neq 0$ se puede encontrar infinitos vectores tal que su norma es 0 por lo tanto no actua como espacio vectorial normado.

j) $\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{*}}{\| |a\rangle \|^2} \rightarrow \frac{a|q_0\rangle - a|q_i\rangle}{(a^0)^2}$

$\Rightarrow |a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = 1 = |q_0\rangle$

$(a^0|q_0\rangle + a^i|q_i\rangle) \odot \left(\frac{a^0}{(a^0)^2}|q_0\rangle - \frac{a^i}{(a^0)^2}|q_i\rangle\right)$

$\cancel{|q_0\rangle |q_0\rangle}^{1} - \frac{a^i}{(a^0)}\underbrace{|q_0\rangle|q_i\rangle}_{|q_i\rangle} + \frac{a^i a^0}{(a^0)^2}\underbrace{|q_i\rangle|q_0\rangle}_{|q_i\rangle}$

$-\frac{(a^i)^2}{(a^0)^2}\cancel{|q_i\rangle|q_i\rangle}^{-1} = 1 - \frac{a^i}{a^0}|q_i\rangle + \frac{a^i}{a^0}|q_i\rangle + \frac{(a^i)^2}{(a^0)^2}$

$= \left(\frac{(a^i)}{(a^0)}\right)^2 + 1 \neq 1$

K.) queremos ver que si es un grupo el cual cumple todas las propiedades en donde su inverso es $1 - |q_i\rangle$ ya que $|q_i\rangle \odot (-|q_i\rangle) = -(-1) = 1$

l) $|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$|v'\rangle = (\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle) \cdot |v\rangle$

$= \left(\left(\frac{a^i}{a^0}\right)^2 + 1\right) \odot |v\rangle = \underbrace{\left(\left(\frac{a^i}{a^0}\right)^2 + 1\right)}_{\alpha} |v\rangle - |v'\rangle$

Scanned with ACE Scanner

$u(\langle V \rangle) = 0 \rightarrow$ no tiene parte real

$u(\langle x_i | V_i \rangle) = 0 \rightarrow$ no tiene parte real

se conserva la norma //

2.3.6

5

a) Verifiquemos si $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ son L.I

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$a + d = 0 \qquad b - ci = 0$

$a - d = 0 \qquad b + ci = 0$

$\Rightarrow a = -d$ y $a = d$ solo es cierto si $d = 0$

$b = ci$ y $b = -ci$ solo es cierto si $c = 0$

entonces $a = b = c = d = 0$ son L.I

miramos si podemos obtener la matriz hermítica a través de las matrices de pauli

$$A = \begin{bmatrix} a+d & b+ci \\ b-ci & a-d \end{bmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

$$= a\sigma_0 + d\sigma_3 + b\sigma_1 + c\sigma_2$$

b) $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons Tr(A^{+}B)$

$\langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_0 | \sigma_2 \rangle = tr(\sigma_0 \sigma_2) = Tr(\sigma_2) = 0$

$\langle \sigma_0 | \sigma_3 \rangle = tr(\sigma_0 \sigma_3) = tr(\sigma_3) = 1 - 1 = 0$

$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix} = 0$ Es ortogonal

$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = tr\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$

c. Podremos construir un subespacio con las matrices reales $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_0\}$ notando que son base para matrices 2x2 de la forma

$$a\sigma_0 + b\sigma_1 + d\sigma_3 = \begin{pmatrix} a+d & b \\ b & a-d \end{pmatrix}$$

también podemos construir subespacios de matrices imaginarias puras con $\{\sigma_2\}$ de la forma:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & ci \\ -ci & 0 \end{pmatrix}$$