Базовая математика

Урок 4. Геометрическая прогрессия

Определение 1. *Геометрическая прогрессия* — это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый следующий член равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число. Геометрическая прогрессия обозначается:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n$$

Отношение любого члена геометрической прогрессии к её предыдущему члену равно одному и тому же числу, то есть

$$b_2/b_1 = b_3/b_2 = b_4/b_3 = \cdots = b_n/b_{n-1} = b_{n+1}/b_n = q$$

Это число называют *знаменателем геометрической прогрессии* (и обозначают q).

Одним из способов задания геометрической прогрессии является задание её первого члена b_1 и знаменателя геометрической прогрессии q. Например, $b_1 = 4$, $q = -2$. Эти два условия задают геометрическую прогрессию:

$$4, -8, 16, -32, \ldots$$

Если $q > 0$ (q не равно 1), то прогрессия является *монотонной* последовательностью. Например, последовательность,

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

является монотонно возрастающей последовательностью ($b_1 = 2$, $q = 2$).

Если в геометрической прогрессии знаменатель $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии будут равны между собой. В таких случаях говорят, что прогрессия является постоянной последовательностью.

Для того, чтобы числовая последовательность (b_n) являлась геометрической прогрессией, необходимо, чтобы каждый её член, начиная со второго, являлся средним геометрическим соседних членов. То есть необходимо выполнение следующего уравнения:

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$$

для любого $n > 0$, где $n \in \mathbb{N}$.

Формула *n-ого члена* геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Пример 1. Вычислить первые пять членов геометрической прогрессии и написать формулу нахождения n-го члена, если $b_1 = 8$ и $q = 0.5$.

Решение.

1. $b_1 = 8$
2. $b_2 = b_1 \cdot q = 8 \cdot 0.5 = 4$
3. $b_3 = b_2 \cdot q = 4 \cdot 0.5 = 2$
4. $b_4 = b_3 \cdot q = 2 \cdot 0.5 = 1$
5. $b_5 = b_4 \cdot q = 1 \cdot 0.5 = 0.5$
6. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_n = 8 \cdot 0.5^{n-1}$

Ответ: $b_1 = 8$; $b_2 = 4$; $b_3 = 2$; $b_4 = 1$; $b_5 = 0.5$; $b_n = 8 \cdot 0.5^{n-1}$.

Сумму первых n членов геометрической прогрессии можно вычислить с помощью одной из двух формул. *Первая формула*:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1},$$

где

- n — количество членов последовательности (порядковый номер),
- b_1 — первый член последовательности,
- b_n — n-ый член последовательности,
- q — знаменатель.

Вторая формула:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Пример 2. Вычислить сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 8$ и $q = 0.5$.

Решение.

1. С помощью первой формулы $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ для $n = 5$, $b_1 = 8$, $q = 0.5$:

$$b_n = b_5 = b_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot 0.5^4 = 0.5$$

$$S_5 = \frac{0.5 \cdot 0.5 - 8}{0.5 - 1} = 15.5$$

2. С помощью второй формулы $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$:

$$S_5 = \frac{8 \cdot (0.5^5 - 1)}{0.5 - 1} = 15.5$$

Ответ: 15.5.

Определение 2. *Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия* — это геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$.

Для неё определяется понятие *суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии* как число, к которому неограниченно приближается сумма первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа n:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Пример 3. Выразить бесконечную периодическую дробь $0.131313\ldots$ рациональным числом.

Решение. Запишем периодическую дробь в следующем виде:

$$0.131313\dots = \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + \dots = \frac{13}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \dots\right)$$

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ со знаменателем $q = \dfrac{1}{100}$, получаем:

$$0.131313\dots = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{13}{99}$$

Ответ: $\frac{13}{99}$.

Домашнее задание

1. Найдите восьмой член геометрической прогрессии и сумму её восьми первых членов, если $b_1 = 6$, $q = 3$.
2. Найдите восьмой член геометрической прогрессии и сумму её восьми первых членов, если $b_1 = 3$, $q = 2$.
3. Выразите бесконечную периодическую дробь $0.888888\dots$ рациональным числом.