ДЗ #4 (методичка 6,7)

① Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

от 2 и 3 отнимем 1-ю (от 2 умн. на 2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)^{\times 2} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) :-1 =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) :-2 \;{}^{1-2} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}5 & -2 \end{array}\right)^{2+3} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}5 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_4 = -2 \\ x_2 - 6{,}5x_4 = 0 \\ x_3 - 1{,}5x_4 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2 - 3x_4 \\ x_2 = 6{,}5x_4 \\ x_3 = 1{,}5x_4 - 2 \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет множество решений

$(-2 - 3x_4;\ 6{,}5x_4;\ 1{,}5x_4 - 2;\ x_4)$

② Проверить на совместность и выяснить, ск-ко решений будет иметь система линейных уравнений.

ⓐ $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Если $\underset{\text{число ненулевых строк, прив-й к } \Delta \text{ виду}}{Rang\ A} = \underset{\text{расширенная матрица}}{Rang\ (A|B)} \Rightarrow$ система совместна

Если $Rang\ A \neq Rang\ (A|B) \Rightarrow$ система не совместна

$$\begin{array}{c} 1-2 \\ 2:2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{17}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\times 4}^{2-3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{17}{2} \\ 4 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}_{3-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 3 & 0 & -8 & -21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :-7 \\ :-8 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{17}{7} \\ -\frac{3}{8} & 0 & 1 & \frac{21}{8} \end{pmatrix} \cdot -\frac{8}{3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{17}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{21}{3} \end{pmatrix}^{3-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & -4 & \left(-\frac{8}{3}-4\right) & \left(-\frac{4}{3}-21\right) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :-4 \end{array} \underset{3-2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 1/7 & 17/7 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ⓑ $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + \ldots \\ x_1 - 2x_2 \ldots \\ 3x_1 - 6x_2 \ldots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2\ldots \\ 1 & -2 & 3 & -\ldots \\ 1 & -2 & 3 & 5/3\ldots \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

совместность и
решений будет
линейных уравнений:

-17

$\text{ng}(A|B) \Rightarrow$
иренная
трица
а
$\text{ang}(A|B) \Rightarrow$
местна

$$4 \quad 4 \quad 21$$
$$-1\frac{5}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{17}{2} =$$
$$4 \quad -4 \quad 0 \qquad 3-1$$

$$4 \quad 21$$
$$\frac{1}{7} \quad \frac{17}{7} =$$
$$1 \quad \frac{21}{8} \cdot -\frac{8}{3}$$
$$1 \quad \frac{17}{7} =$$
$$4) \left(-\frac{4}{3} - 21\right) : -4$$
$$3-2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 1/7 & 17/7 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$ система совместна и определенная (имеет единств. решение)

(8) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 & :2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 & :3 \end{cases}$ $\text{Rang}\, A \neq (A|B) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ система не совместна;

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2c.-1c. \\ \\ 3c-2c \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{5}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3c-2c} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$r(A) = r(A|B)$ система совместна и неопределена (меньше, чем число неизвестных)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \times 3 - 2с. \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right) : 5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{23}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right)$$

3) Проверить на совместность и выяснить, ск-ко решений будет иметь система линейных уравн-й, зад-я расш. матр.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) \Rightarrow$ система совместна и определена

4) Дана систем...
заданная ра...

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ 4 & 5 & 6 \ldots \\ 7 & 8 & 9 \ldots \end{pmatrix}$$

$1_c^* 2 - 2_c$ $\quad 1_c^* 3 - \ldots$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b - 2\ldots \\ 4 & 2 & 0 & c - 3\ldots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b - 2\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 2b - c\ldots \end{array}\right)$$

1) Решить сис...

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = \ldots \\ 3x_1 - 4x_2 \ldots \end{cases}$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} \ldots$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \ldots$

$x_3 = 4$ $\quad r(A) = r(A|B)$ система совместна

$x_3 = -2$ $\quad$ и неопределена (меньше, чем число неизвестных)

$-2c.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{23}{5} & \frac{17}{5} \end{array}\right)$$

...местность и возможность, ...т иметь система ..., зад-е расш. матр.

...стема совместна ...определена

④ Дана система линейных урав-й, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$$

Найти соотнош. между параметрами a, в, c, при кот-х сист. явл. несовместной.

$1c.^{*}2 - 2c. \quad 1c.^{*}3 - 3c$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 4 & 2 & 0 & c-3a \end{array}\right) \sim \quad 2c.^{*}2 - 3c.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2b-c-a \end{array}\right)$$

Если $2b - c - a \neq 0 \Rightarrow$ система не совместна

① Решить систему уравнений методом Крамера:

ⓐ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1(-4) - 3(-2) = 2$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 1(-4) - 7(-2) = 10 \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 3\cdot 1 = 4 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$

(8)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot(-3)\cdot2 + 5\cdot1\cdot4 - 5\cdot1\cdot2 - 2\cdot(-3)\cdot4 - (-1)\cdot1\cdot1 = 2+6+20-10+24+1 = 43$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot(-3)\cdot1 + 5\cdot1\cdot1 - 10(-3)\cdot4 - (-1)(-2)\cdot1 = 10+3-40-5+120-2 = 86$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2)\cdot1 + 10(-3)\cdot2 + 5\cdot1\cdot1 - 5(-2)\cdot2 - 2(-3)\cdot1 - 10\cdot1\cdot1 = -4-60+5+20+6-10 = -43$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot(-2)\cdot2 + 10\cdot1\cdot4 - 10\cdot1\cdot2 - 2\cdot(-2)\cdot4 - (-1)\cdot1\cdot1 = 2+4+40-20+16+1 = 43$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{43}{43} = 1$$

(2) Найти ...
ния для ...

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ 2 & 9 & \dots \\ 3 & 26 & \dots \end{pmatrix}$

Матр. U

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \dots \\ 0 & 5 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \end{pmatrix}$

Матр. L

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 2 & \dots \\ 3 & 4 & \dots \end{pmatrix}$

② Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэф-в:

ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$ $\times 2$ -2с.

Матр. U $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$ $\times 3$ -3с. $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$ $\times 4$ -3с. $\sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Матр. L $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \times 2 - 2c$

Матр. U — Матр. L

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \times 5 - 3c \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \times 6 - 4c \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \times 7 - 4c \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$

U

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

③ Решить сис...
уравнени...
жения...

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3 \ldots \\ 11x_1 + 7x_2 + \ldots \\ 9x_1 + 8x_2 + \ldots \end{cases}$

Матрица

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \ldots$

Матрица ...

$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 5{,}5y_1 + y_2 = -6\ldots \\ 4{,}5y_1 + 7/3\, y_2 + y\ldots \end{cases}$

U

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

L

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Матрица коэф-в:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & -11{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -9{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & -11{,}5 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix}$$

Матрица L

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5{,}5 & 1 & 0 \\ 4{,}5 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 5{,}5y_1 + y_2 = -6 \\ 4{,}5y_1 + \frac{7}{3}y_2 + y_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -11{,}5 \\ y_3 = \frac{52}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 1{,}5x_2 - 11{,}5x_3 = -11{,}5 \\ \frac{52}{3}x_3 = \frac{52}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

④ Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

$$81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531$$
$$-45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460$$
$$45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193$$

$l_{11} = \sqrt{81} = 9 \qquad l_{22} = \sqrt{50-25} = 5$

$l_{21} = -\frac{45}{9} = -5 \qquad l_{32} = \frac{-15-5\cdot(-5)}{5} = 2$

$l_{31} = \frac{45}{9} = 5 \qquad l_{33} = \sqrt{38-25-4} = 3$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -33 \\ y_3 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$