1. Найти скалярное произв-е векторов $x, y \in R$

а) $x = (0, -3, 6)$ $y = (-4, 7, 9)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = 0\cdot(-4) + \underset{}{(-3)\cdot \overset{-21}{7}} + 6\cdot \overset{54}{9} = 33 \neq 0$$

данные вектора не перпендикулярны

б) $x = (7, -4, 0, 1)$ $y = (-3, 1, 11, 2)$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = 7\cdot(-3) + (-4)\cdot 1 + 0\cdot 11 + 1\cdot 2 =$$
$$= -21 - 4 + 2 = -23$$

2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

• Вычислим нормы вектора $(4, 2, 4)$:
(длина, модуль)

1) m-норма

$$\|a\|_m = \max(4, 2, 4) = 4$$

2) l_1-норма (манхэт.)

$$\|a\|_{l_1} = |4| + |2| + |4| = 10$$

3) l_2-норма (евклид.)

$$\|a\|_e = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

• нормы вектора $(12, 3, 4)$

1) $\|b\|_m = \max(12, 3, 4) = 12$

2) $\|b\|_{l_1} = |12| + |3| + |4| = 19$

3) $\|b\|_e = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$

• Найдем угол между ними

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a|\cdot|b|} = \frac{4\cdot 12 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4}{6\cdot 13} = \frac{48+6+16}{78} = \frac{70}{78} = \frac{35}{39}$$

$$\alpha = \arccos\frac{70}{78} = \arccos(0{,}897) = 0{,}456$$

3. Будет ли линейное пр-во евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов (нет)

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов. (да)

По теореме: вещест. е линейное прост-во E наз-ся евклидовым, если каждой паре эл-в u, v этого прост-ва поставлено в соотв-е действ-е число (u, v), назыв-е скалярным произв-ем, причем это соотв-е удовл. след. условиям:

① $(u,v)=(v,u)\ \forall u,v\in E,$

② $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)\ \forall u,v,w\in E$

не выпол для а [redacted] ③ $(\lambda\cdot u,v)=\lambda\cdot(u,v)\ \forall u,v\in E,\ \forall\lambda\in R$

④ $(v,v)>0\ \forall v\neq 0 \wedge (v,v)=0 \Rightarrow v=0$

Ответ: а - не явл., б - является.

④ Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном простр-ве R^3:

а) $(1,0,0),(0,0,1)$

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$
$(0,0,1)$

в) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)(0,0,1)$

г) $(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)$

Векторы x, y из евклидова простр-ва E называются ортогональными, если $x\cdot y=0$. Система векторов $e_1, e_2 \ldots e_n$ евкл. простр-ва назыв. ортонормир-й, если векторы системы попарно ортогональны и имеют единичную длину

Базис конечномерного евкл. пр-ва назыв. ортонормиров-м базисом, если образующие его векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину, т.е. $=1$

а) являются базисными, но не образуют базис (нужно 3 вектора)

б) образуют базис

в) не образуют базис: $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot 1$
$-\frac{1}{4}\neq 0$

г) образуют базис:

$1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0=0$

$1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1=0$

$0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1=0$

① Исслед-ть на лин-ю завис-ть

$f_1(x) = e^x$,

$f_2(x) = 1$,

$f_3(x) = x+1$,

$f_4(x) = x - e^x$

$f_4 = f_3 - f_2 - f_1$

$x - e^x = (x+1) - (1) - (e^x)$

$x - e^x = x + \cancel{1} - \cancel{1} - e^x = x - e^x$

Линейно-зависим.

② Иссл. на лин. зав.

$f_1(x) = 2$

$f_2(x) = x$

$f_3(x) = x^2$

$f_4(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$f_4 = f_3 + 2f_2 + 0,5 f_1$

Линейно-завис.

③ Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе

$b_1 = (0, 0, 10)$ $b_2 = (2, 0, 0)$ $b_3 = (0, 1, 0)$

$x = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 0 = 2 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 = 3 \\ \alpha \cdot 10 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 1 \\ \gamma = 3 \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Ответ: $\vec{x} = \frac{1}{2} b_1 + b_2 + 3 b_3$

④ Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in R^3[x]$:

~~(3, 2, 2)~~

а) в базисе $1, x, x^2$

б) в базисе $x^2, x - 1, 1$

$3x^2 - 2x + 2 = 3x^2 - 2(x - 1)$

а) 2 ; −2 ; 3

б) 3 ; −2 ; 0

⑤ Установить, явл. ли линейным подпростр-м:

а) совокупность всех векторов трехмерного простр-ва, у кот. по крайней мере одна из первых 2-х координат $= 0$;

б) все векторы, явл-ся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

а) $a = (0, a_2, a_3)$ $\quad a + b = \underbrace{(b_1, a_2, a_3 + b_3)}_{\text{ни одна не равна нулю}}$

$b = (b_1, 0, b_3)$

не является.

б) $a = 8 \cdot u_1 + 7 \cdot u_{22} - 9 \cdot u_{33}$

$b = 74 \cdot u_4 - 9 \cdot u_2 + 11 \cdot u_7$

$a + b = 8 \cdot u_1 + 7 \cdot u_{22} + 74 \cdot u_4 + 11 \cdot u_7 - 9u_{33} - 9u_2$

$k = 10$

$k \cdot a = 80 u_1 + 70 \cdot u_{22} - 90 \cdot u_{33}$

является.