

Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Сборник задач по алгебре

Часть 2. Иррациональные,
тригонометрические, показательные
уравнения и неравенства. Прогрессии

В помощь учащимся 10–11 классов

Москва 2009

УДК 512(076)
ББК 22.143я7
С23

Сборник задач по алгебре. Часть 2. Иррациональные, тригонометрические, логарифмические уравнения и неравенства. Прогрессии. В помощь учащимся 10–11-х классов/ О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, С.А. Гришин, Н.В. Мирошин, Р.Р. Резванов. – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 160 с.

Данная книга является второй частью пособия, составленного в соответствии с программой углубленного изучения математики в 10–11-х классах. Сборник включает задачи, относящиеся к тригонометрическим и логарифмическим уравнениям и неравенствам, а также прогрессиям. Задачи сгруппированы по трем уровням сложности. В некоторых разделах даны краткие теоретические сведения. Задачи второй и третьей группы сложности могут быть использованы при проведении математических олимпиад.

Пособие предназначено для слушателей подготовительных курсов, а также поможет подготовиться к олимпиадам, поступлению в физико-математические лицеи и НИЯУ МИФИ. Учителя могут использовать данное пособие для подготовки к занятиям.

Рекомендовано редсоветом МИФИ
в качестве учебного пособия

Рецензент проф. *Н. А. Кудряшов*

© *Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ», 2009*

ISBN 978-5-7262-1171-8

Редактор *Е. Н. Кочубей*
Макет подготовлен *Е. Н. Кочубей*

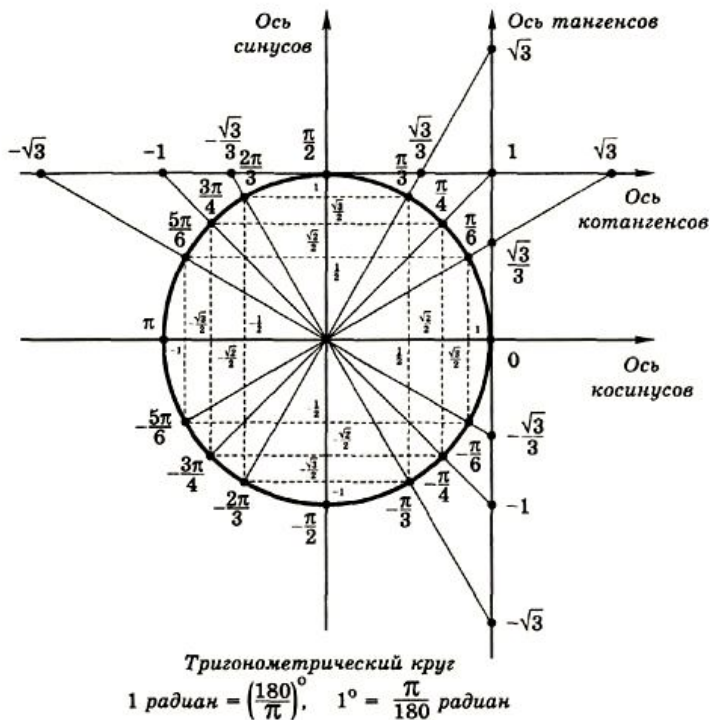
Подписано в печать 15.07.2009. Формат 60×84 1/16.
Изд. № 068-1. П.л. 10,0. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 4500 экз. Заказ №
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

СОДЕРЖАНИЕ

I. Тригонометрия	4
1. Начала тригонометрии	7
2. Тожественные преобразования тригонометрических выражений	16
3. Обратные тригонометрические функции	20
4. Тригонометрические уравнения	26
5. Тригонометрические системы уравнений	44
6. Тригонометрические неравенства	47
II. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	55
1. Тожественные преобразования	55
2. Показательные и логарифмические уравнения	68
3. Показательные и логарифмические неравенства	78
4. Системы показательных и логарифмических уравнений.....	84
5. Уравнения и неравенства с параметрами	86
6. Построение графиков	93
III. Понятие функции, область определения, область значений, свойства функций	95
1. Область определения функции	95
2. Область значения функции	98
3. Четность и нечетность функции	103
4. Периодичность	105
IV. Прогрессии	107
1. Арифметическая прогрессия	107
2. Геометрическая прогрессия	116
Ответы	123

I. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Для решения задач данной темы необходимо вспомнить тригонометрический круг (рис. 1.1) и некоторые формулы, чаще всего используемые при тождественных преобразованиях.



I. Знаки тригонометрических функций по квадрантам.

Функция	1-я четверть (0–90°)	2-я четверть (90–180°)	3-я четверть (180–270°)	4-я четверть (270–360°)
Синус	+	+	–	–
Косинус	+	–	–	+
Тангенс	+	–	+	–
Котангенс	+	–	+	–

(Перед результатом ставится знак "+" или "–" по таблице.)

II. Формулы приведения.

Функция	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

III. Тригонометрические функции основных углов.

Функция	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

IV. Соотношения между тригонометрическими функциями одного угла.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

V. Формулы тригонометрических функций суммы и разности углов.

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta; \\ \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta; \\ \cos (\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

VI. Тригонометрические функции двойного и тройного угла.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; & \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \\ & & \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha. \end{aligned}$$

VII. Тригонометрические функции половинного угла.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \sin \alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; & \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

VIII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; & \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \end{aligned}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

IX. Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму.

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

1. Начала тригонометрии

– А –

1.1. Перевести угол из градусной системы измерения в радианную и отметить угол на тригонометрической круге.

- 1) 30° ; 2) -45° ; 3) 90° ; 4) 150° ; 5) -240° ;
 6) 300° ; 7) -120° ; 8) -540° ; 9) 135° ; 10) 1500° ;
 11) -270° ; 12) $-22,5^\circ$; 13) 105° ; 14) 200° ; 15) -315° .

1.2. Перевести угол из радианной системы измерений в градусную и отметить угол на тригонометрическом круге.

- 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) π ; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$;
 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 7) -3π ; 8) $-\frac{17\pi}{4}$; 9) $\frac{17\pi}{6}$; 10) $-\frac{13\pi}{6}$;
 11) $\frac{7\pi}{4}$; 12) $-\frac{10\pi}{3}$; 13) $\frac{7\pi}{12}$; 14) $\frac{11\pi}{18}$; 15) $\frac{121\pi}{24}$.

1.3. Найти синусы углов.

- 1) 30° ; 2) -45° ; 3) 90° ; 4) 150° ; 5) -240° ;
 6) 300° ; 7) -120° ; 8) -540° ; 9) 135° ; 10) 1500° ;
 11) -270° .

1.4. Найти косинусы углов.

- 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) π ; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$;
6) $-\frac{3\pi}{2}$; 7) -3π ; 8) $-\frac{17\pi}{4}$; 9) $\frac{17\pi}{6}$ 10) $-\frac{13\pi}{6}$;
11) $\frac{7\pi}{4}$; 12) $-\frac{10\pi}{3}$.

1.5. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

- 1) $y = \sin 2x + \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
2) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, $x_0 = \frac{7\pi}{6}$;
3) $y = \sin^2 x + \cos^2 2x$, $x_0 = -\frac{\pi}{12}$;
4) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;
5) $y = \sin 5x \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

1.6. Вычислить.

- 1) $\sin(450^\circ) + \cos(-690^\circ) \cdot \sin(780^\circ)$;
2) $\operatorname{ctg} 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 240^\circ + \sin(1260^\circ)$;
3) $\sin(105^\circ) \cos(15^\circ) + \frac{1}{2} \sin(960^\circ)$;
4) $\cos^2(570^\circ) : \sin^2(-840^\circ)$;
5) $\sin(-105^\circ) + \sin(-915^\circ)$.

1.7. На тригонометрическом круге отметьте точки, соответствующие сериям.

- 1) πk , $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

- 5) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 7) $\pm \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$;
 9) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 10) $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
 11) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$; 12) $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
 13) $\pi + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 14) $(-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 15) $(-1)^n \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 16) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 17) $(-1)^{n+1} \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1.8. Найти знак $\sin x$, если:

- 1) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 2) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -2\pi\right)$; 3) $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.9. Найти знак $\operatorname{tg} x$, если:

- 1) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 2) $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$.

Вычислить.

- 1.10.** 1) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;
 2) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;
 3) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$;
 4) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$;

$$5) \sin \alpha, \text{ если } \cos \alpha = \frac{-3\sqrt{5}}{7} \text{ и } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

$$\mathbf{1.11.} \quad 1) \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right);$$

$$2) \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{35} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right);$$

$$3) \cos \alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3} \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$4) \cos \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3} \text{ и } \alpha \in \left(2\pi; \frac{5\pi}{2} \right);$$

$$5) \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{39}}{5} \text{ и } \alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2} \right).$$

$$\mathbf{1.12.} \quad 1) \text{ Знак } \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \alpha \in (\pi; 2\pi);$$

$$2) \text{ знак } \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \alpha \in (-\pi; 0);$$

$$3) \text{ знак } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right);$$

$$4) \text{ знак } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \alpha \in (-3\pi; -2\pi).$$

$$\mathbf{1.13.} \quad 1) \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{15}{17} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right);$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{24}{25} \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$3) \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \cos \alpha = \frac{31}{49} \text{ и } \alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2} \right);$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{21}{29} \text{ и } \alpha \in (2\pi; 3\pi).$$

1.14. 1) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha, \beta < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha - 2\beta)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg} \beta = -2$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$,
 $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

3) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\alpha \in (3\pi; 4\pi)$.

1.15. 1) $\cos 22,5^\circ$; 2) $\sin 15^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$; 4) $\sin 67,5^\circ$.

– В –

1.16. Упорядочить по возрастанию тройки чисел.

1) $\cos 1$; $\cos 2$; $\cos 3$; 2) $\sin \frac{7\pi}{13}$; $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin 2$;

3) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$; $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4}$; $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$;

5) $\cos(-1)$; $\cos(4)$; $\sin(-3)$.

1.17. Найти расстояние между точками x_1 и x_2 на \mathbb{R} .

1) $x_1 = \cos \frac{8\pi}{3}$; $x_2 = \cos \frac{17\pi}{3}$;

2) $x_1 = \sin \frac{17\pi}{12}$; $x_2 = \sin \frac{61\pi}{12}$;

3) $x_1 = \cos^2 \frac{\pi}{12}$; $x_2 = \sin^2 \frac{\pi}{8}$;

4) $x_1 = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{12}$; $x_2 = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{12}$;

5) $x_1 = \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{12}$; $x_2 = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12}$.

1.18. Значение $\cos \alpha = 0,2$. Вычислить значения выражений.

- 1) $2 \sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) + 3 \cos(\alpha + 5\pi)$;
- 2) $2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
- 3) $\sin^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$;
- 4) $\sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$;
- 5) $\cos\left(2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{2}\right)$.

Вычислить.

- 1.19.** 1) $\frac{6 \sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 20^\circ}$;
- 2) $\frac{\sin 54^\circ}{\cos 63^\circ \sin 117^\circ}$;
- 3) $\frac{\cos 35^\circ + 2 \cos 85^\circ}{\sqrt{3} \cos 55^\circ}$;
- 4) $\frac{\sin 50^\circ + 2 \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ}$;
- 5) $\cos 195^\circ \cos 105^\circ + \sin 105^\circ \cos 75^\circ$.

- 1.20.** 1) $\sin^4 \frac{7\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}$;
- 2) $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12}}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}$;
- 3) $\frac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}{\sin \frac{13\pi}{4} + 1}$;
- 4) $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{12}}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}$;
- 5) $\frac{\cos(2,9\pi) \operatorname{tg}(2,4\pi) \operatorname{tg}(1,1\pi)}{\cos(0,9\pi)}$.

- 1.21.** 1) $(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2$;
- 2) $\sin 15^\circ \cos 75^\circ \sin^2 105^\circ$;
- 3) $\frac{\sin^2 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}{\cos 105^\circ}$;
- 4) $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ - \cos 105^\circ - \cos 165^\circ$;
- 5) $\frac{\sin 22^\circ \cdot \sin 68^\circ}{2 \cos^2 23^\circ - 1}$.

1.22. Какие значения принимает функция $f(x)$ на множестве X ?

1) $X = \left\{ (-1)^{3k+2} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z \right\}, f(x) = \cos x;$

2) $X = \left\{ (-1)^{k(k+1)} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \right\}, f(x) = 2 \sin x;$

3) $X = \left\{ (-1)^{k^2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in Z \right\}, f(x) = \cos^2 2x;$

4) $X = \left\{ \pm \frac{7\pi}{6} + \pi k, k \in Z \right\}, f(x) = 2 \cos 2x;$

5) $X = \left\{ (-1)^{2k+3} \cdot \frac{13\pi}{3} + \pi k, k \in Z \right\}, f(x) = \operatorname{tg} x.$

1.23. Определить значения, которые может принимать функция, при условии, что $\cos x = \frac{1}{5}$.

1) $y = \sin^2 x;$

2) $y = \cos 2x;$

3) $y = \operatorname{tg} x;$

4) $y = \sin 2x;$

5) $y = \operatorname{ctg}^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$

1.24. Вычислить значение функции, если известно, что $\sin x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$

1) $y = \frac{1}{\cos x};$

2) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x};$

3) $y = \operatorname{tg} 2x;$

4) $y = \sin x + \sin 2x;$

5) $y = \cos 3x.$

1.25. Определить, при каких x справедливы равенства.

1) $\frac{\cos 2x}{2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right);$

2) $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2;$

$$3) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{1 + \cos x} = -1; \quad 4) \frac{4 - 5 \sin x - 2 \cos^2 x}{2 \sin x - 1} = \sin x - 2;$$

$$5) \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$

1.26. Вычислить значение $\cos 3\alpha$, если:

$$1) \sin 2\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right); \quad 2) \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$3) \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}, \quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right); \quad 4) \operatorname{ctg} 2\alpha = -\sqrt{3}, \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$5) \sin \alpha + \cos \alpha = -1, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right).$$

1.27. Вычислить значение $\sin^2 \alpha$, если:

$$1) \cos 2\alpha = \frac{1}{4}; \quad 2) \sin 2\alpha = \frac{3}{5}; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2};$$

$$4) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}; \quad 5) \operatorname{tg} 2\alpha = 2\sqrt{2}; \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

1.28. Найти пересечения серий.

$$1) x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$3) x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$4) x_1 = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{16} k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{8} k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$5) x_1 = \frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{45} k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{9} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.29. Найти функцию $g(t)$, если:

$$1) g(\sin x) = \sin 2x \cos x + \operatorname{ctg}^2 x; \quad 2) g(\cos x) = 2 \sin^2 3x \cos x;$$

$$3) g(\operatorname{tg} x) = \sin 2x \cos 2x; \quad 4) g(\operatorname{ctg} x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x};$$

$$5) g(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x.$$

1.30. Для числа $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, для которого $\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$, найти значение $\sin x + \cos x$.

1.31. Для числа $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, для которого $\sin x = \frac{1}{4}$, найти значение $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

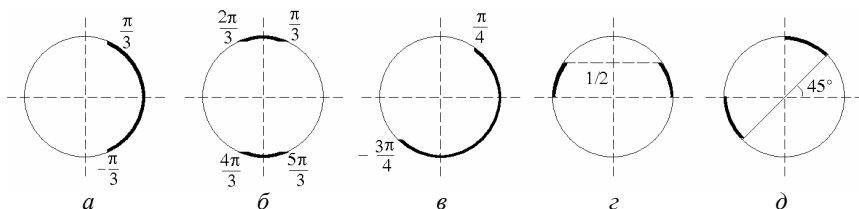
1.32. Изобразите на единичном круге точки, которые соответствуют числам x , удовлетворяющим условиям:

- 1) $\sin x = p$ для $p \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- 2) $\cos x = p$ для $p \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;
- 3) $\operatorname{tg} x = p$ для $p \in (-\infty; \sqrt{3}]$;
- 4) $\operatorname{ctg} x = p$ для $p \in [1; +\infty)$;
- 5) $\sin x = p$ для $p \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

1.33. Изобразите на единичном круге точки, которые соответствуют числам x , удовлетворяющим условиям:

- 1) $\sin x = p + 1$ для всех $p \in \left[-\frac{\sqrt{3}+2}{2}; -\frac{3}{2}\right]$;
- 2) $\cos x = \frac{1}{p}$ для всех $p \in [-2; +\infty)$;
- 3) $\operatorname{tg} x = \frac{p}{2}$ для всех $p \in [-2; 2\sqrt{3})$;
- 4) $\operatorname{ctg} x = p^2$ для всех $p \in [-1; 1]$;
- 5) $\sin x = |p|$ для всех $p \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

1.34. На единичном тригонометрическом круге изображены множества. Запишите эти множества на числовой оси.



2. Токдественные преобразования тригонометрических выражений

– А –

Упростить выражения.

2.1. 1) $7\cos^2\alpha - 5 + 7\sin^2\alpha$;

2) $-4\sin^2\alpha + 7 - 4\cos^2\alpha$;

3) $\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$;

4) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

5) $1 - \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha$;

6) $\frac{(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$;

7) $\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$.

2.2. 1) $\frac{(\sin\alpha/2 + \cos\alpha/2)^2}{1 + \sin\alpha}$;

2) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;

3) $\frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(\pi/2 - \alpha)}{\cos^2\alpha - 1}$;

4) $\frac{\sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha}$; 5) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

2.3. 1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(\pi + \alpha)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$;

$$4) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha);$$

$$5) \cos(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$6) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(4\pi - \alpha)}; \quad 7) \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin \alpha};$$

$$8) \frac{\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{-1 + \cos^2 \alpha}; \quad 9) \frac{\operatorname{tg}(3\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}.$$

2.4. 1) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \sin 2\alpha;$

2) $\cos \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha;$

3) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cos 5\alpha + \cos(2\pi - 2\alpha);$

4) $\sin 4\alpha \sin 3\alpha - \cos 4\alpha \cos 3\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right);$

5) $\sin 2,5\alpha \cos 1,5\alpha + \sin 1,5\alpha \cos 2,5\alpha + \cos(\pi + \alpha);$

6) $\sin 2\alpha \sin 4\alpha - \cos 2\alpha \cos 4\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$

7) $\cos 5\alpha \sin 4\alpha - \sin 5\alpha \cos 4\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$

Вычислить.

2.5. 1) $\sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ;$

2) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ;$

3) $\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ;$

4) $\cos^2 67,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ.$

2.6. 1) $\sin 13^\circ \cos 47^\circ + \sin 47^\circ \cos 13^\circ;$

2) $\cos 27^\circ \cos 63^\circ - \sin 27^\circ \sin 63^\circ;$

3) $\sin 68^\circ \cos 23^\circ - \sin 23^\circ \cos 68^\circ;$

4) $\cos 103^\circ \cos 43^\circ + \sin 103^\circ \sin 43^\circ;$

- 5) $\sin 48^\circ \cos 72^\circ + \cos 48^\circ \sin 72^\circ$;
 6) $\cos 53^\circ \cos 82^\circ - \sin 53^\circ \sin 82^\circ$;
 7) $\sin 13^\circ \cos 58^\circ - \cos 13^\circ \sin 58^\circ$;
 8) $\cos 24^\circ \cos 54^\circ + \sin 24^\circ \sin 54^\circ$.

$$\begin{array}{ll} 2.7. 1) \frac{\sin 20^\circ + \cos 290^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}; & 2) \frac{\sin 40^\circ + \cos 310^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}; \\ 3) \frac{2(\cos^2 80^\circ - \sin^2 80^\circ)}{\cos 160^\circ - \sin 110^\circ}; & 4) \frac{2(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ)}{\cos 40^\circ - \sin 230^\circ}. \end{array}$$

– В –

2.8. Упростить выражения, преобразовав их произведения.

- 1) $\sin^2 x - 2 \sin x - 3$; 2) $\sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x$;
 3) $\sin 2x - \cos 3x - 4 \cos x$; 4) $\cos(5x + 1) - \cos(x - 1)$;
 5) $\cos^3 x - \sin^3 x$.

2.9. Доказать тождества.

- 1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$;
 2) $\sin^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 5\alpha \sin \alpha$;
 3) $\frac{\sin 2\alpha (1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)}{1 - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$;
 4) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$;
 5) $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x$;
 6) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha$;
 7) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{4}$;

$$8) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha ;$$

$$9) \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) - \sin^3\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \sin^2 \alpha ;$$

$$10) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)} - 2 \cos(135^\circ + \alpha) \cos(315^\circ - \alpha) = 0;$$

$$11) \sqrt{2} \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \alpha \right) \right) = \sin 2\alpha .$$

Упростить выражения.

$$2.10. \frac{\sin(\alpha + 3\beta) + \sin(\alpha - 3\beta)}{\sin(\alpha + 3\beta) - \sin(\alpha - 3\beta)} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2.11. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta).$$

$$2.12. \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}.$$

$$2.13. 1) \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1} ;$$

$$2) \frac{\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} ;$$

$$3) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 60^\circ}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 60^\circ} - 3 \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{ctg} \alpha ;$$

$$4) \frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha.$$

$$2.14. 1) \frac{\sin 38^\circ + \sin 22^\circ}{\cos 8^\circ} ;$$

$$2) \frac{\cos 41^\circ - \cos 49^\circ}{\sin 4^\circ} ;$$

$$3) \frac{\sin 70^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 110^\circ};$$

$$5) \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

$$4) \frac{\sin 74^\circ - \cos 74^\circ}{\sin 89^\circ - \cos 59^\circ};$$

2.15. 1) $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$;
 2) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;
 3) $4 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

2.16. 1) $\frac{\sin x - \cos x - \cos 2x}{\sin x - \cos x};$

2) $\frac{1 + \sin 2x \cos 2x + \sin 2x + \cos 2x}{\cos^2 x};$

3) $\frac{\cos^2 3x - \cos^2 5x}{\sin 8x};$

4) $\frac{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}{\cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x};$

5) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x}.$

2.17. Сократить дроби.

1) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x};$

2) $\frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 + \cos 2x)}{\cos 2x};$

3) $\frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x}{\sin x \sin 2x};$

4) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos^2 x};$

5) $\frac{\sin 2x(1 + 2 \cos 2x)}{\sin 3x}.$

3. Обратные тригонометрические функции

– А –

3.1. Найти значения выражений.

1) $\arcsin \frac{1}{2} - \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3});$

- 2) $\operatorname{arccctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$
- 3) $\arcsin 1 - \arccos(-1) + \operatorname{arctg} 1;$
- 4) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-1);$
- 5) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\operatorname{arctg}\sqrt{3};$
- 6) $\operatorname{arctg} 1 + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right);$
- 7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos 0 + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2};$
- 8) $\arcsin 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arccctg}\frac{1}{\sqrt{3}};$
- 9) $\arcsin 1 + \arccos\frac{1}{2} + \operatorname{arccctg} 0;$
- 10) $\arcsin\frac{3}{5} - 3\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{3}{5};$
- 11) $\operatorname{arctg} 10 + \arcsin 1 + \operatorname{arccctg} 10.$

Вычислить.

- 3.2.** 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right);$
- 2) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right);$
- 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3})\right);$
- 4) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin 1 - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

$$5) \cos\left(2\operatorname{arctg}(-1) + 2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

– В –

3.3. Вычислить.

$$1) \sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right);$$

$$2) \cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right);$$

$$3) \operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right);$$

$$4) \operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right);$$

$$5) \sin(\operatorname{arctg}(-2));$$

$$6) \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right);$$

$$7) \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2\sqrt{6}}{5}\right);$$

$$8) \cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right);$$

$$9) \sin\left(2\arccos\frac{5}{13}\right);$$

$$10) \operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right);$$

$$11) \cos(2\operatorname{arctg}3);$$

$$12) \sin\left(3\arcsin\frac{1}{3}\right);$$

$$13) \cos\left(3\arccos\frac{4}{5}\right);$$

$$14) \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right);$$

$$15) \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{15}\right);$$

$$16) \cos\left(\arcsin\frac{12}{13} + \arccos\frac{5}{13}\right);$$

$$17) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right);$$

$$18) \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{7}\right);$$

$$19) \operatorname{tg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right);$$

$$20) \operatorname{tg}^2\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - 0,25\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$21) \sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right).$$

$$22) \cos(2\operatorname{arctg}2).$$

$$23) \cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right).$$

$$24) \sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

3.4. Найти значение выражений.

$$1) \arcsin\left(\sin\frac{93}{5}\pi\right);$$

$$2) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{47}{7}\pi\right);$$

$$3) \arccos\left(\sin\frac{101}{7}\pi\right);$$

$$4) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{89}{5}\pi\right);$$

$$5) \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{17}{5}\pi + \cos\frac{27}{5}\pi\right)\right];$$

$$6) \arcsin\left(\cos\frac{239}{42}\pi - \cos\frac{253}{42}\pi\right);$$

$$7) \arcsin(\cos 2);$$

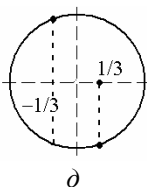
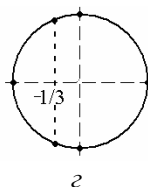
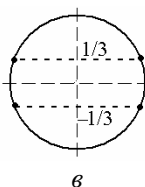
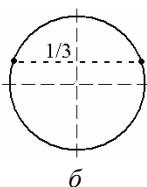
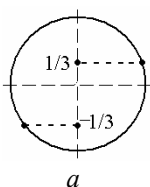
$$8) \arccos\left(\sin\left(-\frac{1}{2}\right)\right);$$

$$9) \arcsin(\sin 5);$$

$$10) \arccos(\cos 10);$$

$$11) 2\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 2).$$

3.5. На единичном круге отмечены точки. Записать соответствующие им серии на числовой оси.



3.6. 1) Вычислить значение функции $f(x) = \cos^2(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + 3x})$ в точке $x = 1$.

2) Вычислить значение функции $f(x) = \arcsin(\cos(x^2 + 3x))$ в точке $x = 1$.

3.7. Решить уравнения.

1) $\arccos 2x = \frac{\pi}{3};$

2) $\arcsin(1-3x) = \frac{\pi}{6};$

3) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(x+1)) = -\frac{\pi}{6};$

4) $2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3};$

5) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(-x) = -\frac{\pi}{2}.$

3.8. Определить, сколько целых значений принимает функция.

1) $f(x) = 2\arcsin(2x+3) + 3;$

2) $f(x) = 3\arccos(1-x) - 1;$

3) $f(x) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - 2;$

4) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2;$

5) $f(x) = 2(\arccos x - \arccos(-x)).$

3.9. Найти наибольшее целое x из области определения функций.

1) $f(x) = \arcsin(x^2 - 6x + 9);$

2) $f(x) = \arccos\frac{3x-2}{5};$

3) $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x-2};$

4) $f(x) = \arccos(\sqrt{x-1}-1);$

5) $f(x) = \sqrt{4-x} \arccos\frac{1}{4-x^2}.$

3.10. Определить, что больше.

1) $\arccos\frac{1}{3}$ или $\arcsin\frac{4}{5};$

2) $\arcsin\frac{3}{5}$ или $\operatorname{arctg}2;$

3) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ или $\operatorname{arctg}(-2);$

4) $\operatorname{arctg}2$ или $\operatorname{arctg}\frac{1}{3};$

5) $\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$ или $\arccos\frac{2}{5}.$

3.11. Вычислить.

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} - \arcsin\frac{2}{3}\right);$

2) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \arccos\frac{1}{4}\right);$

$$3) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2 - \arcsin \frac{2}{3}\right); \quad 4) \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$5) \sin\left(\arcsin \frac{1}{4} - (-1)^k \frac{\pi}{4}\right).$$

3.12. Решить неравенства.

$$1) \arcsin(2x + 3) < \frac{\pi}{3};$$

$$2) \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \frac{2\pi}{3};$$

$$3) 2\operatorname{arctg}(3x + 1) > \frac{\pi}{3};$$

$$4) \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2x - 1) < \operatorname{arctg} 1;$$

$$5) \frac{\pi}{6} < \arccos \frac{1}{x} < \frac{5\pi}{6}.$$

3.13. Определить, при каких x справедливы тождества.

$$1) \sin(\arcsin 2x) = 2x; \quad 2) \arcsin(\sin x) = x; \quad 3) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x;$$

$$4) \arcsin \sqrt{1-x^2} = \arccos x; \quad 5) \arccos \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

3.14. Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{9}{\pi} \arccos\left(\frac{2x^2 - 4x + 3}{2}\right).$$

– C –

3.15. Решить уравнения.

$$1) \sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = 5x + a;$$

$$2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(2x + a);$$

$$3) \arcsin(\sin 2x) = a;$$

$$4) \arcsin \sqrt{1-x^2} = \arccos(a-x);$$

$$5) \arccos \frac{1}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg}(3x+a).$$

4. Тригонометрические уравнения

– А –

4.1. Запишите решения простейших уравнений.

1) $2\sin x = -1$;

2) $\cos 2x = 1$;

3) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $\sin(3x + 2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\cos = -\frac{1}{2}$;

7) $\sin 2x = -1$;

8) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;

9) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$;

10) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

11) $\cos x = \frac{\pi}{2}$;

12) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$;

13) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

14) $\sin(3x + 2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

15) $\sin 2x \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$;

16) $\cos 3x (\sin x + 1) = 0$;

17) $(\operatorname{tg} 2x + 1) \left(\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$;

18) $\operatorname{ctg}(3x + 4) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

19) $3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$;

20) $2\sin^2 x = \sin x$;

21) $2\cos x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x = 0$;

22) $\cos x \cos 2x = \cos x$.

4.2. Записать решения простейших уравнений с помощью обратных тригонометрических функций.

1) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{3}$; 3) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = -1$;

4) $2 - 3\operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 3$; 5) $4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

4.3. Определить, сколько корней имеет уравнение на отрезке.

1) $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right];$

2) $-2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{3}, \quad x \in \left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right];$

3) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right) = -1, \quad x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right];$

4) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x - \pi/3}{6}\right) = 1, \quad x \in [-\pi; 2\pi];$

5) $2\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{12}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$

4.4. Укажите наибольший корень уравнения на отрезке.

1) $3\operatorname{tg}(2x + 1) = \sqrt{3}, \quad x \in [-2; 4];$

2) $2\cos(2 - 3x) = 1, \quad x \in [-3; 5];$

3) $-2\sin(x + 3) = 1, \quad x \in [-2; 6];$

4) $3\operatorname{ctg}(3 - 4x) = \sqrt{3}, \quad x \in [2; 8];$

5) $2\cos(2x - 1) = -\sqrt{3}, \quad x \in [-5; -1].$

Решить уравнения.

4.5. 1) $4\sin^2 \frac{x}{3} = 3;$ 2) $4\cos^2 3x = 1;$ 3) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$

4) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3};$ 5) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

4.6. 1) $\sqrt{3}\sin x - \operatorname{tg} x = 0;$

2) $\sin x + 2\cos x = 0;$

3) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0;$

4) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 0;$

5) $5\sin x - 3\cos x = 0;$

6) $3\cos x + 2\sin x = 0.$

4.7. 1) $2\cos^2 x = 3\sin x;$

2) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x;$

3) $\cos x + 2\cos 2x = 1;$

4) $6\cos^2 x - 13\sin x - 13 = 0;$

- 5) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$; 6) $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$;
 7) $\operatorname{tg}^2 2x - 7\operatorname{tg} 2x + 10 = 0$; 8) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = -4$;
 9) $6\cos^2 x = 9\cos x - 4\sin^2 x$; 10) $\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$;
 11) $2\cos^2 x - 11\sin x - 7 = 0$; 12) $7\cos^2 x - 3\sin x = 5$;
 13) $5\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = 5$; 14) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
 15) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$; 16) $3\sin x + \cos^2 x = 2$;
 17) $5\sin^2 5x + 20\cos 5x = 20$;
 18) $7\cos\left(\frac{3x}{4}\right) + 3\sin^2\left(\frac{3x}{4}\right) - 5 = 0$;
 19) $2\cos^2 x = 12 - 21\sin x$;
 20) $5 + 2\cos 2x - 4\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$;
 21) $3\cos 2x - (2 + 3\sqrt{3})\cos x + 3 + \sqrt{3} = 0$;
 22) $4\cos 2x - 2(1 + 2\sqrt{2})\cos x + 4 + \sqrt{2} = 0$.

4.8. 1) $\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$;

2) $\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$;

3) $\cos^2 x + 4\sin^2 x + 2\sin 2x = 0$;

4) $4\cos^2 x + 2\sin^2 x = 3\sin 2x$;

5) $5\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2$;

6) $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 3$;

7) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x + 4\sin 2x = 0$;

8) $2\sin^2 x - \sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$;

9) $\sin^2 x - 30\sin x \cos x + 25\cos^2 x = 25$;

10) $(\sin x + 2\cos x)(3\sin x + \cos x) = \sin 2x$;

11) $5 - 4\sin^2 x = 5\cos^2 x$;

12) $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$;

13) $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos^2 x$;

14) $4\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 0$.

4.9. Найти сумму корней уравнения на данном отрезке.

1) $\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,5, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right];$

2) $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1,5, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right];$

3) $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right];$

4) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 3, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right];$

5) $4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right].$

4.10. Найти x , удовлетворяющий уравнению: 1) $\sin 2x = 0,5$;
2) $\cos(1 - x) = -1$; 3) $\operatorname{tg}(3x) = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(2x + 3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\sin x =$
 $= \sin 2x$, для которого функция $y = x^2 - 2x + 3$ принимает наименьшее значение.

Решить уравнения.

4.11. 1) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\sin x - \cos x = 1$;

3) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$; 4) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$;

5) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{3}$.

4.12. 1) $(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$;

2) $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 5 \cos x + 5\sqrt{3} \sin x - 6 = 0$.

4.13. 1) $\sin x + 3 \cos x = 2$; 2) $3 \sin 2x - 2 \cos 2x = 3$;

$$3) 3\cos x - 4\sin x = \frac{5}{2}.$$

- 4.14.** 1) $\sin 5x = \sin 3x$; 2) $\cos 6x + \cos 4x = 0$;
 3) $\sin 7x + \sin x = 0$; 4) $\cos 10x - \cos 4x = 0$;
 5) $\sin 3x - \cos 5x = 0$; 6) $\sin 2x + \cos 6x = 0$;
 7) $\cos 3x + \sin(9x + 2) = 0$.

4.15. Найти наименьший положительный корень уравнения.

- 1) $\sin 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$;
 3) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
 5) $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$.

Решить уравнения.

- 4.16.** 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
 2) $\cos x + \cos 4x + \cos 7x = 0$.

- 4.17.** 1) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$; 2) $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$;
 3) $\cos 3x \sin 7x = \cos 2x \sin 8x$; 4) $\sin 5x \cos 3x = \sin 2x \cos 6x$.

- 4.18.** 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$;
 2) $\sin 9x + \sqrt{3}\cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3}\cos 9x$;
 3) $2\cos 3x \sin x + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$;
 4) $\sin^2 4x + \sin^2 2x = \frac{9}{16}$;
 5) $\cos^2 x + 2\sin^2 5x = \frac{3 - \cos 10x}{2}$;
 6) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$;

$$7) \cos^2 2x + \cos^2 3x = \cos^2 x + \cos^2 4x;$$

$$8) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}; \quad 9) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos x;$$

$$10) \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) = -\cos^4 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2;$$

$$11) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}; \quad 12) \sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2};$$

$$13) \operatorname{tg}^2 x = 12 \cos^2 x.$$

$$4.19. \quad 1) 1 - \sin 2x = \cos x - \sin x;$$

$$2) 2(\cos x - \sin x)^2 - 5(\cos x - \sin x) + 2 = 0;$$

$$3) \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = 1 + 2 \sin 2x;$$

$$4) \sqrt{2}(\sin 2x + \cos 2x) = 3 - \sin 4x.$$

$$5) 2 \cos 4x + 7(\sin x + \cos x)^2 + 2 = 0;$$

$$6) 1 + 5 \sin x = 3 \sin 2x + 5 \cos x;$$

$$7) 7 \sin 2x + 15 \sin x = 9 + 15 \cos x.$$

$$4.20. \quad 1) 4 \cos \left(x - \frac{5\pi}{6} \right) \sin x - 1 = 0;$$

$$2) \cos x \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3} - 1}{4} = 0;$$

$$3) 4 \sin x \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}.$$

$$4.21. \quad 1) 2 \sin^2 x \cos x = \frac{5}{2} \sin 2x + 3 \cos x;$$

$$2) \sin 2x = \operatorname{tg} x (4 - 7 \cos x);$$

$$3) 4 \sin x \sin 2x \sin 3x = -\sin 12x;$$

$$4) 4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 - \cos 8x;$$

$$5) \sin 2x \sin x - 0,5 \sin x - \sin 2x = -\frac{1}{2};$$

$$6) \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 2 \cos 2x = 2;$$

- 7) $\sqrt{3} \cos 3x = 4(\sin 3x - \sin^3 3x)$;
 8) $\sin x = 2\sqrt{2}(\cos^3 x - \cos x)$;
 9) $4\operatorname{ctg} x + 8\cos x - 2\sin x - 1 = 0$;
 10) $5\operatorname{tg} x - 15\sin x - 3\cos x + 1 = 0$;
 11) $\cos^3 2x - \sin^3 2x = \cos 2x - \sin 2x$;
 12) $8\cos^3 x + 1 = 2\cos x + 1$;
 13) $3\sin x + 3\sqrt{3} \cos x - \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$;
 14) $\cos 7x(3\cos 3x + \sin 3x)^2 = 10\cos^3 7x$;
 15) $\sin^3 x - \cos^3 x = -\sqrt{17}(\sin^4 x - \cos^4 x)$;
 16) $\cos x(6\sin^2 x - 4) = -5\sin 2x$;
 17) $\cos x - 1 = \cos 2x - \cos 3x$;
 18) $\sqrt{x}(\cos 5x + \cos 3x) = \sqrt{2x} \cos x$.

4.22. 1) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2$;

2) $2\left(\sqrt{2}\sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

4.23. 1) $\cos 6x - 12\cos^3 x = 4 - 9\cos x$;

2) $48\sin x - 6\cos 6x = 5 + 64\sin^3 x$;

3) $27\sin 3x + 81\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4$.

4.24. 1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{6} - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}$.

4.25. 1) $2\cos x + \cos 2x + 1 = 2\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2}\right)$;

2) $\cos x + \cos \frac{x}{3} = \cos \frac{2x}{3} + 1$; 3) $\sin 2x - \sin \frac{2x}{3} = \cos \frac{4x}{3} - 1$.

4.26. Найти возможное значение $\operatorname{tg} 4x$, если x удовлетворяет уравнению:

- 1) $\cos 4x - 3\sin 2x + 1 = 0$;
- 2) $2\sin^2 2x + (\sqrt{3} - 2)\cos 2x + \sqrt{3} - 2 = 0$;
- 3) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 8x - 2\operatorname{tg} 8x - \sqrt{3} = 0$;
- 4) $4\sin^2 8x - 2(1 + \sqrt{2})\sin 8x + \sqrt{2} = 0$;
- 5) $2\cos^2 4x + (\sqrt{3} - 2)\cos 4x - \sqrt{3} = 0$.

4.27. Найти число корней уравнения на указанном на отрезке.

- 1) $\sin 2x + 2\sin x = 1 + \cos x$, $[-4; -3]$;
- 2) $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$, $x \in (0^\circ, 45^\circ)$;
- 3) $\operatorname{ctg}^2\left(\pi x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$, $\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$;
- 4) $\sin 7\pi x = \cos 3\pi x$, $[0, 1; 0, 9]$.

Решить уравнения.

4.28. 1) $(\sin x + \cos x)^2 \sqrt{3x - x^2} = 0$; 2) $\frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$;

3) $\sqrt{x - 2\pi} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 4) $\sqrt{2x + \pi} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

5) $\frac{\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x - 2}} = 0$; 6) $\frac{\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{(x + \pi)(\pi - 2x)}} = 0$.

4.29. 1) $(\cos 3x - 1)\sqrt{6 + 5x - x^2} = 0$;

2) $(\sin^2 x + 2 - \sqrt{3} \sin 2x - \cos^2 x)\sqrt{x(4 - x)} = 0$;

3) $\sqrt{30 - x - 20x^2} (\cos 6\pi x + \cos 2\pi x) = 0$;

4) $(\sin x - \cos x)\sqrt{x^2 - 19x + 34} = 0$;

$$5) \sqrt{\frac{x-3}{1-x}} (\cos 4x + \sin 3x - \cos 2x) = 0;$$

$$6) \frac{2\sin^2 2\pi x + 3\cos 4\pi x}{\sqrt{x-3}} = 0.$$

$$4.30. 1) \sqrt{\cos x} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$2) \sqrt{-\operatorname{tg} x} \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0;$$

$$3) \sqrt{-\sin x} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0;$$

$$4) \sqrt{\operatorname{ctg} x} \left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$5) \sqrt{\sin x - \cos x} (\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0.$$

4.31. Найти число x , удовлетворяющее уравнению:

$$1) 2\sin 2x + 2(\sin x - \cos x) - 1 = 0;$$

$$2) 2\sin^2 x + \sin x - \sin 2x - \cos x = 0;$$

$$3) 2(\sin x + \cos x) + \operatorname{tg} x + 1 = 0;$$

$$4) 2\sin 2x - \sin x - \cos x + 1 = 0;$$

$$5) \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1.$$

для которого функция $y = 3 - |x - 2|$ принимает наибольшее значение.

4.32. Найти целые решения уравнений.

$$1) \sin 2x = \sin(x^2 + 1);$$

$$2) \cos 3x = \cos(2x - 3);$$

$$3) \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(3x + 4);$$

$$4) \operatorname{ctg}(3x + 2) = \operatorname{ctg}(5x - 4);$$

$$5) \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{2x + 3\pi}{6}.$$

4.33. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$) – два решения уравнения, принадлежащие интервалу $(0; \pi)$. Найти $\operatorname{tg}(x_1 + x_2)$ для уравнений:

$$1) \sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0;$$

$$2) 2\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0;$$

$$3) 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 1;$$

$$4) (\sin x + \cos x)^2 - 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 0,5;$$

$$5) \cos 2x - 3\sin x \cos x = 0.$$

4.34. Найти x – решения уравнения $f(x) = 0$, для которых $g(x) \neq 0$.

1) $f(x) = 4 \sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - 3$; $g(x) = 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 1$;

2) $f(x) = 2 \cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$; $g(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 3$; $g(x) = \sin x \cos 2x$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) - 1$; $g(x) = \cos x - \sin 2x$;

5) $f(x) = \cos^2 2x - \cos^2 x$; $g(x) = 4 \cos^2 x - 1$.

Решить уравнения.

4.35. 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 1$;

2) $\frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \sqrt{2}$;

3) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 0$;

4) $\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$;

5) $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = -\frac{3}{2}$;

6) $\frac{2 - 3 \sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$.

7) $\frac{2 \sin x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$.

8) $\frac{1 + 2 \sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{2 \sin x \cos x - 1} = 1$.

9) $\frac{6 \sin x - 2 \cos 2x - 4 \cos^2 x - 3}{\sqrt{7} \sin x - 3 \cos x} = 0$.

10) $\frac{10 \cos^2 x - 3 \cos x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}} = 0$.

11) $\frac{\cos 2x \cos 8x - \cos 10x}{\cos x + 1} = 0$.

12) $\frac{\sin 3x \sin 5x + \cos 8x}{\sin x + 1} = 0$.

$$13) \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x + 4\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

$$4.36. 1) \sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3;$$

$$2) \sqrt{6 - \sin x - 7\cos^2 x} + \sin x = 0;$$

$$3) \sqrt{2\cos 2x - 4\cos x + 3} \cdot \cos x = 1;$$

$$4) \sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x} - \sqrt{\sin x} = 0;$$

$$5) \sqrt{\frac{\cos x + 2}{2}} = -\sin x;$$

$$6) \sqrt{\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 1} = \cos x;$$

$$7) \sqrt{\sin^2 x + 3\sin x - \frac{17}{9}} = -\cos x.$$

4.37. Найти наименьшее расстояние между решениями уравнений.

$$1) \sqrt{1 + 4\cos x} = -2\sin x;$$

$$2) \sqrt{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x;$$

$$3) \sqrt{\operatorname{tg} x + 2} = -\operatorname{tg} x;$$

$$4) \sqrt{\sin x - \cos x} = \frac{\sin x}{|\sin x|};$$

$$5) \sqrt{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x.$$

4.38. Найти x – решения уравнения $f(x) = 0$, для которых $g(x) \geq 0$.

$$1) f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1; \quad g(x) = 2\cos x - 1;$$

$$2) f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2\pi\cos x - \frac{5\pi}{4}\right) - 1; \quad g(x) = \operatorname{tg} x - 1;$$

$$3) f(x) = \frac{|\sin x|}{\cos x} - 1; \quad g(x) = 1 - 2\sin x;$$

$$4) f(x) = \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} 4x + 1; \quad g(x) = (\operatorname{tg} x - 1)|2\cos x - 1|;$$

$$5) f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + (\sin x - \cos x)^2 - 3; \quad g(x) = \sin x - \cos x.$$

4.39. Решить уравнения.

1) $|\sin x| = 2\cos x$; 2) $|1 + 2\sin x + \cos x| + \cos x = 0$;

3) $|\sin x - \cos x| = 1 - \sin 2x$; 4) $\left| \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5} \right| = 5\cos x + 1$;

5) $1 + 2|\cos x|\sin x = 0$; 6) $|\cos x + \cos 3x| = -\cos 2x$;

7) $\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}\cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

8) $\sqrt{3 - 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x} \cdot \sin x = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$;

9) $\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = -\cos x + 8\sin(x - \pi)$;

10) $\sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}(1 - \cos x)} = \sin x + 4\cos(-x)$;

11) $\sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}(1 + \cos x)} = -\sin(-x) - 5\cos x$.

4.40. Найти наибольшее решение $x \in [\pi; 2\pi]$ уравнений.

1) $\sqrt{2}\sin x + \frac{\cos x}{|\cos x|} = 0$; 2) $2\cos x + \frac{\sin x}{|\sin x|} = 0$;

3) $2\cos x + \frac{3\sin x}{|\sin 2x|} = 0$; 4) $4\cos^2 x + \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{ctg} x|} = 3$;

5) $\operatorname{tg} x - \frac{\sin 2x}{|\sin 2x|} = 0$.

4.41. Найти отрицательное число x , наименее удаленное от $x = 0$, удовлетворяющее уравнению:

1) $\sin\left(2|x| + \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 2) $2\cos\left(|x| + \frac{\pi}{3}\right) = -1$;

3) $\operatorname{tg}(|x - 1|) = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(|x + 1| + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$5) \cos^2\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right) = 0,5.$$

4.42. Найти решения системы уравнений с одним неизвестным.

$$1) \begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \\ 4\cos^2 x = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,75, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -0,5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \sin^2\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = 0,25, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x. \end{cases}$$

Решить уравнения.

$$4.43. 1) \sin x \cos 2x = -1;$$

$$2) 3\cos^2 x + 5\cos^2 7x = 8;$$

$$3) \sin^7 x + \cos^6 x = 1;$$

$$4) \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 2x} = 1.$$

$$4.44. \cos^4 x - \cos^3 x + \frac{9}{4}\cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \sin 2x.$$

$$4.45. \sin\left(\frac{13}{9}\pi \sin x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4.46. 2\pi \cos x = |x| - |x - \pi|.$$

$$4.47. \arcsin \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} x.$$

4.48. Пусть x_1 и x_2 – два решения уравнения $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, причем $x_1 \neq \pm x_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Найти значение выражения $4\cos(x_1 + x_2)$.

4.49. Сколько решений уравнения $\sin\left(\frac{\pi \cos x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi \sin x}{2}\right)$ принадлежат отрезку $[0; 100]$?

4.50. Решить систему
$$\begin{cases} \sin(2\pi x) = \sin \frac{\pi}{12}; \\ \cos(3\pi x) = \cos \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$
 В ответе указать ко-

личество решений в интервале $(0; 10)$.

4.51. Решить уравнение $\sin x + \sin 5x = -2$. В ответе указать отношение наименьшего решения на отрезке $[-15; -1]$ к наибольшему.

4.52. При каких значениях a уравнения имеют решения?

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $a \sin x = a + 1$; | 2) $(a + 1) \cos x = 2a - 3$; |
| 3) $\sin x + a = a^2 + 1$; | 4) $2a \sin x = a^2 + 1$; |
| 5) $(a^2 + 1) \cos x = 2a$. | |

4.53. При каких значениях a уравнения не имеют решений?

- | | |
|--|---|
| 1) $a \sin^2(3x) = a + 1$; | 2) $a - \cos(3x + 1) = a^2 - 1$; |
| 3) $a^2 \sin(2x - 1) = a - 2$; | 4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{a + 2}$; |
| 5) $\cos^3(2x) = \frac{2a - 1}{a + 2}$. | |

4.54. При каких значениях a уравнение $a \sin x + (a^2 - 4) \cos x = 1$ имеет решение $x = \frac{5\pi}{3}$? В ответе указать произведение таких a .

4.55. Найти наименьшее положительное значение a , при котором число $x = \frac{\pi}{3}$ является решением уравнения:

1) $2 \sin^2\left(\frac{ax}{3}\right) - \cos(2x + a\pi) = 1$;

- 2) $2\cos^2(ax) - \sin\left(3x + \frac{a\pi}{2}\right) = 1;$
- 3) $\sin(a+2x)\cos(x+2a) = 1;$
- 4) $\sin(ax+2\pi a) + \cos\left((a+2)x + \frac{\pi}{3}\right) = 0;$
- 5) $2\cos(2ax) - 8\sin(ax) + 3 = 0.$

4.56. Определить, при каких значениях a уравнение $f(x; a) = 0$ имеет решения на отрезке $[\alpha; \beta]$.

- 1) $f(x, a) = (x+1)\sin a + \cos a, \alpha = 0, \beta = 1;$
- 2) $f(x, a) = (a+1)\sin x + \cos x, \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4};$
- 3) $f(x, a) = x^2\sin a + x\cos a, \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \beta = \sqrt{3};$
- 4) $f(x, a) = a^2\sin x + a\cos x, \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}.$

4.57. Найти все значения a , при которых любое решение уравнения $f(x) = 0$ является решением уравнения $g(x, a) = 0$.

- 1) $f(x) = \frac{1 - \cos 2x + \sin x}{\operatorname{tg} 2x}; g(x, a) = a\sin x + (a^2 - 7)\cos^2 x;$
- 2) $f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{4\sin^2 x - 3}; g(x, a) = a^2\cos x + a\sin 2x + 2a - 3;$
- 3) $f(x) = \frac{\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x - 1}{1 + 2\cos 2x}; g(x, a) = a\cos^2 2x + a^2\sin 2x + 3a + 2;$
- 4) $f(x) = \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x - \cos x - \sin x}{2\cos 2x - 1}; g(x, a) = a^2\cos^2 x + a\sin 2x - 4;$
- 5) $f(x) = \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x - \sin 2x \cos 2x}{\cos 2x}; g(x, a) = a\sin x + (a^2 + 1)\cos 2x + 2a - 4.$

Решите уравнения при всех значениях параметров.

4.58. 1) $4\sin 2x + a\cos x = \cos 3x;$

$$2) \sin^4 x + (a - 5)\sin^2 x - 2(a - 3) = 0;$$

$$3) \cos^2 x + a \sin x = 1.$$

$$4.59. 1) \frac{b}{b + 5\sin^2 5x} = 5; \quad 2) \frac{a^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x};$$

$$3) |3\sin x - a + 1| = 2\sin x - 4a + 7;$$

$$4) |2\cos x - a| - 2a = 3\cos x + 1; \quad 5) \sqrt{a + \sqrt{a + \cos x}} = \cos x.$$

4.60. При каких значениях параметра a уравнение $\cos x = \sqrt{\frac{4-a}{a+1}}$ имеет на отрезке $\left[\frac{43}{12}\pi; \frac{13}{3}\pi\right]$ два различных решения?

4.61. При каких значениях параметра a уравнение $[10\cos^2 x + (2 - \sqrt{50})\cos x - \sqrt{2}](a\cos x + 2a - 3) = 0$ имеет на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ ровно два различных решения?

4.62. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(1-a)\operatorname{tg}^2 x - \frac{2}{\cos x} + 3a + 1 = 0$ имеет на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ более одного решения.

4.63. При каких значениях параметра a уравнение $\cos x - \sin^2 x = a(3\cos x - 2)$ имеет на интервале $\left(\arccos \frac{2}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ единственное решение?

4.64. При каких значениях параметра a уравнение $2\operatorname{tg} x(8 - 7\sin^2 x) + 2\cos 2x = a\sin 2x + 10$ имеет на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ровно три различных решения?

4.65. При каких значениях параметра a уравнение $a^2 \cos x + \sin^2 \left(\frac{2x}{a+1}\right) - 2a\sqrt{x^2 + 1} = 3$ имеет единственное решение?

4.66. При каких значениях параметра a уравнение $4\cos(\arcsin x) - 2\sin(\arccos x) - \cos(\arccos x) = 2a$ имеет единственное решение?

4.67. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x + a \cos y = 1, \\ 2a \sin x - \cos y = 2. \end{cases}$$

4.68. При каких значениях p неравенство $\sin 2x - (p+1)(\sin x + \cos x) + 2p + 1 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x ?

4.69. При каких значениях c неравенство $\cos^2 x + (c+1)\sin x < 3c + 2$ выполняется при всех действительных значениях x ?

4.70. Найдите все $a \in R$, при которых все корни уравнения $(4x-1)[2+2\sin 2x - \sqrt{2}(a-2)(\sin x + \cos x) + 1] - 5a^2x + \frac{5}{4}a^2 = 0$ неотрицательные.

4.71. При каждом значении параметра a найти наименьшее значение функции $y = (\arccos x)^2 - 2 \cdot a \cdot \arccos x - 1 + a^2$.

4.72. При каждом действительном значении a найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \cos^2 \frac{\pi(1+2\sqrt{4x-x^2-3})}{3} - 4a \cos \frac{\pi(1+2\sqrt{4x-x^2-3})}{3} + 3a - 1.$$

– С –

4.73. При каких целых значениях параметра a уравнения имеют на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ровно пять решений?

1) $\sin(a+1)x = 0$; 2) $\cos(2ax) = 1$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}\right) = 1$;

$$4) \operatorname{ctg}\left(a\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt{3}; \quad 5) \sin ax + \cos ax = \sqrt{2}.$$

4.74. При каких значениях параметра a уравнение $\sin((3a+2)(x+1)\pi) = 1$

не имеет решений на отрезке $[1; 2]$?

4.75. При каких значениях параметра a расстояние между любыми различными решениями уравнения

$$\sin\left(2ax\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\pi\right)$$

на числовой прямой будет не менее 1?

4.76. При каких значениях параметра a на любом отрезке длины $\frac{\pi}{3}$ числовой оси содержатся решения уравнения

$$\sin\left(a\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos(ax) ?$$

4.77. Найти наименьшее положительное целое число a , при котором уравнения не имеют решений.

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{a + \cos x} = -\sin x; & 2) \sqrt{2 + a \sin x} = -\cos x; \\ 3) \sqrt{a^2 - 9a \sin x} = 3 \cos x; & 4) \sqrt{a \sin x + 8} = a \sin x. \end{array}$$

4.78. При каких значениях параметра a ($a > 0$) уравнение

$$\sin\left(a\pi\left(x - \frac{1}{3}\right)\right) = 1$$

имеет на отрезке $[0; 1]$ ровно два решения?

4.79. При каких значениях параметра a положительные решения уравнения $f(x, a) = 0$ образуют арифметическую прогрессию? В ответе указать сумму таких a .

$$\begin{array}{l} 1) f(x, a) = a \sin(x + a) - (a - 2)^2; \\ 2) f(x, a) = \sin^2 x + (a^2 - a) \sin x - a^3; \end{array}$$

$$3) f(x, a) = |\sin x| / \sin(x + a); \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right);$$

$$4) f(x, a) = \cos x \sin(2x + a); \quad a \in (-5\pi; 3\pi);$$

$$5) f(x, a) = \sin x \cos x + \left|1 - \frac{a}{2}\right| - 1.$$

4.80. При каких значениях a уравнение $f(x, a) = 0$ имеет хотя бы одно решение?

$$1) f(x, a) = a \sin^2 x - (a - a^2 - 1) \sin x - a(a - 1);$$

$$2) f(x, a) = \sqrt{3 \sin^2 x + a} + 3 - a.$$

4.81. При каких значениях a уравнение $f(x, a) = 0$ имеет решение? В ответе указать наибольшее целое $a \leq 100$.

$$1) f(x, a) = \sqrt{a^2 - 4} \sin x + 2 \cos x + a^2 - 2;$$

$$2) f(x, a) = \cos^2 x + a^2 \sin x.$$

4.83. При каких значениях a уравнение $\sin ax = \sin x$ не имеет решений на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

5. Тригонометрические системы уравнений

– В –

Решить системы уравнений.

$$5.1. \begin{cases} \cos 2x + \sin y = 2 \cos^2 30^\circ; \\ 2 \cos 2x - \sin y = \sin 540^\circ. \end{cases}$$

$$5.2. \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}; \\ \cos 2x + 2 \cos y = 3. \end{cases}$$

$$5.3. \begin{cases} \sin(2x+y)=0; \\ \cos(x+y)=1 \end{cases} \quad (-\pi \leq x \leq \pi; -2\pi \leq y \leq \pi).$$

$$5.4. \begin{cases} x+y=\frac{3\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

$$5.5. \begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3}; \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$5.6. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}; \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$5.7. \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 2\cos y = -\frac{11}{2}; \\ 4x + 10\cos y = 7. \end{cases}$$

$$5.8. \begin{cases} \sin x + \cos y = 0; \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$$

$$5.9. \begin{cases} \cos x \sin 2y = \frac{3}{4}; \\ \sin x \cos 2y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$5.10. \begin{cases} \sin(x-y) = 3\sin x \cos y - 1; \\ \sin(x+y) = -2\cos x \sin y. \end{cases}$$

$$5.11. \begin{cases} \sin^2 x = 3\cos^2 x; \\ |x-1| \leq 2. \end{cases}$$

$$5.12. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

$$5.13. \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

$$5.14. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin \left(y - \frac{3\pi}{4} \right); \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

$$5.15. \begin{cases} 16xy(x^2 + y^2) = -\pi(\pi^2 + 1); \\ (4x^2 + 4x) \sin^2 y = -1. \end{cases}$$

$$5.16. \begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x + \cos y} = 3; \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$$

$$5.17. \begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x; \\ \cos x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$$

$$5.18. \begin{cases} (\arctg x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k; \\ \arctg x + \arccos y = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5.19. \begin{cases} \arccos x + (\arcsin y)^2 = \frac{\pi^2}{4} k; \\ (\arcsin y)^2 \arccos x = \frac{\pi^4}{16}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Тригонометрические неравенства

– А –

6.1. Изобразить на единичном круге решения простейших неравенств.

- 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < 1$; 3) $1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$;
4) $-1 < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\sin x > \cos x$.

6.2. Записать на числовой прямой решения неравенств.

- 1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x > \frac{1}{2}$; 3) $1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$;
4) $\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$; 5) $\sin x + \cos x < 1$.

6.3. Определить, сколько целых решений имеет неравенство на интервале $(0; 2\pi)$.

- 1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geq \sqrt{3}$;
3) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x + \pi}{3}\right) \geq -1$;
5) $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{4}$.

6.4. На единичном круге отметить множество решений неравенств (применить метод интервалов).

- 1) $(2\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{3}) \geq 0$; 2) $(2\cos x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) \leq 0$;
3) $(2\cos x - \sqrt{2})(1 - 2\sin x) \geq 0$; 4) $(\operatorname{tg} x + 1)(\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x) \leq 0$;
5) $(2\sin x + 1)(\operatorname{tg} x - 1) \geq 0$.

6.5. Записать решения неравенств на числовой оси.

- 1) $(2\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{3}) < 0$; 2) $(2\cos x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) > 0$;

- 3) $(2 \cos x - \sqrt{2})(1 - 2 \sin x) < 0$; 4) $(\operatorname{tg} x + 1)(\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x) > 0$;
 5) $(2 \sin x + 1)(\operatorname{tg} x - 1) < 0$.

6.6. Решить «квадратные» тригонометрические неравенства на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- 1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0$; 2) $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \cos x - \sqrt{3} \geq 0$;
 3) $\operatorname{tg}^2 x + (1 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0$; 4) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x + (\sqrt{3} + 1) \operatorname{ctg} x + 1 \geq 0$;
 5) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \cos^2 x > 0$.

– В –

6.7. Определить, при каких значениях параметра a неравенство справедливо для всех значений x .

- 1) $\cos\left(\frac{(a-1)x}{a+1}\right) \geq 0$; 2) $\sin((a^2 - 3a + 2)x) \leq 0$;
 3) $\operatorname{tg}(x \sin a) \geq 0$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x \cos a + \frac{2\pi}{3}\right) \leq 0$;
 5) $\sin ax + \cos ax \geq 0$.

6.8. Решить неравенства.

- 1) $\sqrt{2 \sin x - 1}(\cos 2x - 1) \geq 0$;
 2) $\sqrt{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}(\sin 2x + 1) \leq 0$;
 3) $\sqrt{\sin 2x + \sin \frac{\pi}{6}}(\sin x + \cos x)^2 \leq 0$;
 4) $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} \sin^2 2x \leq 0$;
 5) $\sqrt{1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} x} |\sin x - \cos x| \leq 0$.

6.9. Найти значения параметра p , при которых неравенство не имеет решений.

- 1) $2\sin 3x \geq p(p+1)$; 2) $p\sin 2x < p-3$;
 3) $p\sin x + (p+1)\cos x > 1$; 4) $(p^2-1)\sin 4x < p-5$;
 5) $\sin^2 x + p\sin x + 2 < 0$.

6.10. Найти x на отрезке $[a; b]$, удовлетворяющий системе неравенств $\begin{cases} f(x) \leq 0; \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

- 1) $f(x) = (1 - \sin x)(2\cos x + 1)$, $g(x) = \operatorname{tg} 2x - 1$, $a = 0, b = \pi$;
 2) $f(x) = (\cos x - 1)(2\sin x - 1)$, $g(x) = \cos x - \sin x$, $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$;
 3) $f(x) = \cos x - \cos 2x - 1$, $g(x) = 2\sin 2x - 1$, $a = \frac{3\pi}{2}, b = \frac{5\pi}{2}$;
 4) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\sin x} - 1$, $g(x) = \sin x - \cos x$, $a = \frac{\pi}{2}, b = 2\pi$;
 5) $f(x) = \sin x - |\cos x|$, $g(x) = 2\sin|x| - 1$, $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{3\pi}{2}$.

– С –

6.11. Найти x , для которых неравенство $4x\sin a - \cos^2 a(1 + x^2) + 2x^2 + 0,2 \geq 0$ выполняется при всех a .

6.12. Найти x , удовлетворяющие неравенству $\sqrt{4-a}\sin x + \sqrt{a+12}\cos x \geq -2$, для всех допустимых значений a .

7. Тригонометрические функции

– В –

7.1. Построить графики функций на указанных отрезках. В ответе указать наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке.

$$1) y = 2 \sin\left(\frac{x+2\pi}{3}\right), \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right];$$

$$2) y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in [0; 2\pi];$$

$$3) y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right];$$

$$4) y = \operatorname{ctg}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right];$$

$$5) y = \sin x - \cos x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

7.2. Определить, при каких x справедливы тождества.

$$1) \sin|x| = |\sin x|; \quad 2) \cos x = \cos|x|; \quad 3) \operatorname{tg}|x - \pi| = \operatorname{tg} x;$$

$$4) |\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg}|x|; \quad 5) \sin\left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \cos x.$$

7.3. Найти x , при которых верны равенства.

$$1) \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = (\cos x - \sin x);$$

$$2) \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2 \cos x}{4 \cos^2 x - 1};$$

$$3) \frac{\cos 3x}{\sin 2x - \cos x} = -2 \sin x - 1;$$

$$4) \frac{\sin x (\sin 2x - \sin 4x)}{\cos x - \cos 3x} = \frac{1 - 2 \cos 2x}{2};$$

$$5) \frac{\cos x + \cos 5x}{\sin x - \sin 3x} = \operatorname{ctg} x (1 - 2 \cos 2x).$$

7.4. Найти наименьший положительный период функции.

$$1) y = \sin 15x + \cos 21x; \quad 2) y = \cos^2\left(\frac{2x+1}{3}\right);$$

$$3) y = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right); \quad 4) y = \sin x \cos 2x;$$

$$5) y = \sin^2 x - \cos^2 2x.$$

7.5. Пусть $f(x) = \cos 2x$. Найти наибольшее значение величины $|f(x_1) - f(x_2)|$, если $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

7.6. Пусть $f(x) = \sin 2x$. Найти наибольшее значение величины $|f(x_1) - f(x_2)|$, если $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$.

7.7. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 2\cos x + 3\cos 5x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7.8. Найти наибольшее возможное значение функции $f(x) = (\sin x + \sin 3x)^2$.

7.9. Определить, сколько найдется на отрезке $[5; 10]$ чисел, являющихся периодами функции $y = \sin(4\pi x + 1)$?

7.10. Построить графики функций на указанных отрезках. В ответе указать множество значений этих функций.

$$1) y = \sin^2 x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right];$$

$$2) y = \sin x \cos x, \quad x \in \left[\frac{13\pi}{4}; \frac{27\pi}{8}\right];$$

$$3) y = \sin x / \cos x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right];$$

$$4) y = |\sin x / \cos x|, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right];$$

$$5) y = \frac{\sin x}{|\cos x|}, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

7.11. Функция $y = f(x)$ в точке x_1 принимает значение A . Найти значение функции в точке x_2 .

$$1) y = \sin 2x, \quad A = \frac{3}{5}, \quad x_2 = x_1 + \frac{\pi}{4}, \quad x_1 \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right);$$

$$2) y = \cos \frac{x}{2}, \quad A = -\frac{5}{13}, \quad x_2 = x_1 - \frac{3\pi}{2}, \quad x_1 \in (2\pi; 3\pi);$$

$$3) y = \operatorname{tg} 3x, \quad A = \frac{1}{2}, \quad x_2 = x_1 + \frac{7\pi}{9};$$

$$4) y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}, \quad A = 2, \quad x_2 = x_1 - \frac{3\pi}{4};$$

$$5) y = \sin 2x + \cos 2x, \quad A = \frac{1}{3}, \quad x_2 = x_1 + \frac{3\pi}{4}, \quad x_1 \in \left(\frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \right).$$

– C –

7.12. Найти значения a , при которых неравенства не выполняются ни при каких x .

$$1) a \sin 2x - a \geq 3;$$

$$2) a \cos x \leq a - 2;$$

$$3) a |\sin x| \leq a - 2;$$

$$4) (3 - 2a) |\cos x| \geq a - 1;$$

$$5) |\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x| < a.$$

7.13. Указать наименьшее положительное целое число x из области определения функций.

$$1) f(x) = \frac{\sin \pi x}{\cos \frac{\pi x}{2}};$$

$$2) f(x) = \frac{\cos x}{(\cos \pi x + \cos 2\pi x) \cos \frac{3\pi x}{4}};$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\cos \frac{13\pi x}{30} - \cos \frac{23\pi x}{30}};$$

$$4) f(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8}}{\sqrt{10x - x^2 - 21}};$$

$$5) f(x) = \sqrt{\cos(x+2)}.$$

7.14. При каких x функция $f(x)$ принимает целые значения?

$$1) f(x) = 2 - \frac{\sin 2x \sin x}{\cos x};$$

$$2) f(x) = 2 - \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos^2(3\pi + x)};$$

$$3) f(x) = \cos(\pi - 2x) + \sin(\pi + 2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$4) f(x) = \cos\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{tg}(\pi - x);$$

$$5) f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{tg}(8\pi - x).$$

7.15. При каком положительном k наибольшее значение функции $y = k \sin x + (k + 1) \cos x$ равно 5?

7.16. Определить, при каком наибольшем целом $a < 0$ график функции $y = f(x)$ проходит через точку A .

$$1) y = \sin\left(ax + \frac{5\pi}{6}\right), \quad A\left(\frac{\pi}{3}; 1\right);$$

$$2) y = \cos\left(x + \frac{\pi a}{2}\right), \quad A\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right);$$

$$3) y = \operatorname{tg}\left(ax + \frac{\pi}{6}a\right), \quad A\left(\frac{\pi}{4}; -1\right);$$

$$4) y = \operatorname{ctg}\left(\frac{ax + \pi}{a}\right), \quad A\left(\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right);$$

$$5) y = \sin(ax) - \cos(ax), \quad A\left(\frac{\pi}{6}; 1\right).$$

7.17. Определить, при каких значениях параметров a и b график функции $y = f(x)$ проходит через точки A и B . В ответе указать наименьшее возможное значение $|a| + |b|$.

$$1) y = \sin(ax + b\pi), \quad A \left(\frac{\pi}{3}; 1 \right); \quad B \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{1}{2} \right);$$

$$2) y = \cos(2ax - b\pi), \quad A \left(\frac{\pi}{2}; 1 \right); \quad B \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2} \right);$$

$$3) y = \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + b\pi \right), \quad A \left(\frac{\pi}{4}; 1 \right); \quad B \left(-\frac{\pi}{4}; \sqrt{3} \right);$$

$$4) y = \operatorname{ctg} \left(3ax + \frac{b\pi}{2} \right), \quad A \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad B \left(\frac{\pi}{4}; -1 \right);$$

$$5) y = \sin(ax + b\pi) + \cos(ax + b\pi), \quad A(\pi; 1), \quad B(-\pi; \sqrt{2}).$$

7.18. Для каждого допустимого a найти множество значений функции $f(x, a)$.

$$1) f(x, a) = \sqrt{a^2 - 4} \sin x + 2 \cos x + a^2 - 2;$$

$$2) f(x, a) = a \cos^2 x + a^2 \sin x;$$

$$3) f(x, a) = \sin(x + a) + \cos(x - a) - 1;$$

$$4) f(x, a) = x^2 \sin a + x \cos a + \frac{3}{8}.$$

II. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Основные формулы, используемые при тождественных преобразованиях степенных и логарифмических выражений:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a > 0;$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}, \quad a > 0;$$

$$a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha;$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c),$$

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b,$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1, \quad c \neq 1.$$

$$\log_c b = \frac{1}{\log_b c},$$

1. Тождественные преобразования

– А –

1.1. Вынести множитель из-под знака корня.

$$1) \sqrt{8}; \quad 2) \sqrt{a^4}; \quad 3) \sqrt{n^5 m^2};$$

$$4) \sqrt[3]{27 \cdot b^3}; \quad 5) \sqrt[4]{32 a^6}; \quad 6) \sqrt[3]{125 x^6}.$$

1.2. Внести множитель под знак корня.

$$1) a^5 \sqrt{3}; \quad 2) 9 \sqrt[7]{q^3}; \quad 3) b^5 \sqrt{2};$$

$$4) 2a \sqrt{3a}; \quad 5) 3b^3 \sqrt{b}; \quad 6) n^2 \sqrt{n};$$

$$7) m^{23} \sqrt{m^2}; \quad 8) 2q^7 \sqrt[7]{q^3}.$$

1.3. Упростить выражения.

- | | |
|---|---|
| 1) $0,3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{15} - 0,1$; | 2) $\sqrt[4]{27 \cdot 48}$; |
| 3) $\sqrt[3]{60 \cdot 450}$; | 4) $\sqrt[4]{625 \cdot 0,0016}$; |
| 5) $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$; | 6) $\sqrt[4]{0,0625 \cdot 81}$; |
| 7) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$; | 8) $\sqrt[3]{-27 \cdot 0,064}$; |
| 9) $\sqrt{64 \cdot 0,01}$; | 10) $\sqrt[6]{5^{10} \cdot 3^7} \cdot \sqrt[3]{3^{2,5} \cdot 5}$; |
| 11) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 9} \cdot \sqrt[3]{16 \cdot 3^4}$; | 12) $\sqrt[4]{27 \cdot 5} \cdot \sqrt[4]{3^5 \cdot 125}$; |
| 13) $\sqrt[4]{(-3)^2 \cdot 2} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 9}$; | 14) $\frac{\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{2}}$; |
| 15) $\frac{\sqrt[3]{152}}{4\sqrt[3]{19}}$; | 16) $\frac{8\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{144}}$; |
| 17) $\frac{\sqrt[4]{1620}}{6\sqrt[4]{20}}$; | 18) $\sqrt[6]{256} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; |
| 19) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$; | 20) $\sqrt[3]{38} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{19}}$; |
| 21) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; | 22) $\frac{\sqrt[4]{40} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{10}}$; |
| 23) $\frac{\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt[4]{27}}$; | 24) $\frac{\sqrt[4]{162} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt[4]{8}}$; |
| 25) $\frac{\sqrt[4]{4^3} \cdot \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{100}}$; | 26) $\frac{\sqrt[4]{\frac{5}{8}} \cdot \sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{125}}$. |

1.4. Вынести множитель из-под знака корня.

- | | |
|---|---|
| 1) $\sqrt[4]{81a^{16}}$; | 2) $\sqrt[6]{64b^{18}}$; |
| 3) $\sqrt[5]{2^{20}b^{15}}$; | 4) $\sqrt[3]{7^{12}c^{15}}$; |
| 5) $\sqrt[5]{11^{15}d^{10}}$; | 6) $\sqrt[5]{3^{10}a^5}$; |
| 7) $\sqrt[4]{a^{12}b^4}$ при $a > 0, b < 0$; | 8) $\sqrt{a^6b^4}$ при $a < 0, b > 0$; |

- 9) $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3}$ при $a > 0$; 10) $\frac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}}$;
- 11) $\sqrt[3]{16ab^{12}} : \sqrt[3]{2a^4b^9}$; 12) $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$;
- 13) $\frac{\sqrt[3]{c^{20}} \cdot \sqrt[3]{c^8}}{\sqrt[3]{c}}$; 14) $\frac{\sqrt[3]{c^{16}} \cdot \sqrt[3]{c^7}}{\sqrt[3]{c^{17}}}$;
- 15) $\frac{\sqrt[8]{16a^5b^7}}{\sqrt{2ab}} + 2\sqrt[8]{ab^3}$, если $a > 0, b > 0$;
- 16) $\sqrt[3]{8a^3} - (2a + \sqrt[4]{a^2b^8})$, если $a \geq 0$.

1.5. Упростить выражения.

- 1) $b^{-5,6} \cdot 11b^{0,4}$; 2) $k^{-5,2} \cdot 4k^{0,1}$;
- 3) $c^{4,5} \cdot 13c^{-0,5}$; 4) $7c^{\frac{1}{3}} \cdot 2c^{\frac{10}{3}}$;
- 5) $8c^{\frac{11}{4}} \cdot 3c^{\frac{3}{4}}$; 6) $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{9}}$;
- 7) $2b^{\frac{2}{7}} : (0,2b^{\frac{3}{7}})$; 8) $a^{0,75} : a^{\frac{1}{6}}$;
- 9) $(a^{0,45} : a^{0,3})^2$; 10) $(a^{2,05} \cdot a^{-0,85})^{10}$;
- 11) $a^{-2,5} : a^{-3\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; 12) $\frac{m^{2,4} \cdot m^{-2\frac{4}{5}}}{m^{-5,4}}$;
- 13) $5c^{\frac{4}{9}} + 3(c^{\frac{2}{9}})^2$; 14) $7c^{\frac{5}{6}} - 2(c^{\frac{1}{6}})^5$.

1.6. Найти:

наименьшее из чисел

- 1) $\{(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}; 4^{\frac{3}{5}}; 2^{\frac{1}{3}}; (\sqrt[3]{2})^{4,7}\}$; 2) $\{(\sqrt{3})^{4,2}; 9^{\frac{3}{4}}; (\sqrt[3]{3})^{4,7}; 3^{\frac{1}{3}}\}$;

наибольшее из чисел

- 3) $\{(0,5)^{2,8}; 4^{0,1}; 2^{-0,5}; (0,25)^{0,25}\}$;

$$4) \left\{ \left(\frac{1}{25} \right)^{-\frac{1}{6}}; (\sqrt{5})^{0,8}; (25)^{-\frac{1}{2}}; (125)^{-0,5} \right\}.$$

1.7. Представить в виде степени с основанием 2.

$$\begin{array}{lll} 1) 2^3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}; & 2) 4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}; & 3) 2 \cdot (8 + 2^3); \\ 4) 2^2 \cdot 4^4 \cdot 8^2; & 5) \frac{8 \cdot 2^{-1/4}}{4^{1,5}}. \end{array}$$

1.8. Представить в виде степени с основанием 3.

$$\begin{array}{lll} 1) 3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}; & 2) 3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt[4]{81}; & 3) (3^{-2,3} : 3^{-3\frac{4}{5}})^2; \\ 4) (3^{1,3} \cdot 3^{0,45})^2; & 5) \frac{3^{2,4} \cdot 3^{-3\frac{4}{5}}}{3^{-5,4}}. \end{array}$$

1.9. Найти значения выражений.

$$\begin{array}{ll} 1) 3^{4a} \cdot 3^{-2a} \text{ при } a = \frac{1}{2}; & 2) 2^{7a} \cdot 2^{-3a} \text{ при } a = \frac{1}{2}; \\ 3) 8^{3b} \cdot 8^{-5b} \text{ при } b = -\frac{1}{2}; & 4) 9^{-4b} \cdot 9^{2b} \text{ при } b = \frac{1}{4}; \\ 5) 8^{4a} \cdot 8^{-2a} \text{ при } a = \frac{1}{6}; & 6) \frac{n^{3/5}}{n^{-7/5}} \text{ при } n = 8; \\ 7) (a^{-2,3} : a^{-3\frac{4}{5}})^2 \text{ при } a = 3; & 8) \frac{1}{32} (a^{-2,5} : a^{-3})^4 \text{ при } a = 4; \\ 9) \frac{1}{4} (a^{1,5} : a^{-0,5})^2 \text{ при } a = 2; & 10) \frac{1}{162} (a^{-1,5} : a^{-3\frac{1}{4}}) \text{ при } a = 9; \\ 11) \frac{a^{-0,75} - 1}{a^{-0,5} + a^{-0,25} + 1} \text{ при } a = 16; & \\ 12) \frac{1 - a^{-0,75}}{a^{-0,25} (a^{-0,5} + a^{-0,25} + 1)} \text{ при } a = 16; & \end{array}$$

$$13) \frac{a^{1,5} + 8b^{1,5}}{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 4b} - 3b^{\frac{1}{2}} \text{ при } a = 4 \text{ и } b = 25;$$

$$14) \frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{4}}} : \frac{1+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}} \cdot \sqrt[4]{a} + 2 \text{ при } a = 81.$$

Вычислить.

$$1.10. 1) -7 \cdot 125^{\frac{1}{3}} + 18; \quad 2) 6 - 2 \cdot 625^{\frac{1}{4}}; \quad 3) 5 + 64^{\frac{1}{6}} + 0,7^0;$$

$$4) 3^{-\frac{5}{2}} : 3^{-\frac{2}{3}};$$

$$5) \frac{11^{1,5}}{11^{0,3}};$$

$$6) \frac{6^{1,4}}{6^{10}};$$

$$7) \frac{96^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 12^{\frac{2}{3}}};$$

$$8) \frac{\sqrt{2} \cdot 81^{\frac{3}{2}}}{18^{\frac{3}{2}}};$$

$$9) \frac{36^{1,8}}{4 \cdot 36^{0,3}};$$

$$10) \frac{2^{2,4}}{5 \cdot 2^{0,4}};$$

$$11) \frac{7^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{196^{\frac{1}{6}}};$$

$$12) \frac{(3^{\frac{2}{3}})^6 \cdot 2^{-4}}{3^{-2}};$$

$$13) \frac{5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{4}}{10^{\frac{3}{5}}};$$

$$14) \frac{\sqrt{32} \cdot 9^{5/4}}{\sqrt{6}};$$

$$15) \frac{25^{\frac{3}{2}} - 27^{\frac{2}{3}} - 6^2}{2^5};$$

$$16) \left(\left(7\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2\frac{7}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-3};$$

$$17) 4 \left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{2}{3}} + 25^{-\frac{1}{2}};$$

$$18) 64 \left(\frac{16}{25} \right)^{-\frac{3}{2}} + 9 \cdot 81^{-\frac{1}{4}}.$$

$$1.11. 1) \log_7 7;$$

$$2) \log_{16} 4;$$

$$3) \log_5 25;$$

$$4) \log_{0,3} \frac{1}{0,09};$$

$$5) \log_{625} \frac{1}{5};$$

$$6) \log_{0,5} 32;$$

$$7) \log_8 \frac{1}{16}; \quad 8) \log_{0,1} 0,01; \quad 9) \log_{\frac{1}{3}} 9; \quad 10) \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32}.$$

$$1.12. 1) \log_2 \log_2 \sqrt[4]{2};$$

$$2) \log_3 \log_3 \sqrt[3]{3};$$

$$3) \log_2 \log_2 (2^6 \cdot \sqrt{16});$$

$$4) \log_5 \log_5 \sqrt[5]{5};$$

$$5) \log_3 \log_3 \sqrt[3]{3};$$

$$6) \log_2 \log_5 \sqrt{\sqrt{5}}.$$

$$1.13. 1) \log_3 54 + \log_3 \frac{1}{2};$$

$$2) \log_{12} \frac{7}{144} - \log_{12} 7;$$

$$3) \log_5 \frac{35}{3} + \log_5 \frac{75}{7};$$

$$4) \frac{1}{3} (\log_{1/2} \frac{1}{27} + \log_{1/2} 64);$$

$$5) \log_5 20 - \log_5 500;$$

$$6) \lg 50 + \lg 20;$$

$$7) \log_2 80 - \log_2 5;$$

$$8) \log_{36} 16 + \log_6 \frac{1}{9};$$

$$9) 2\log_3 75 + \log_3 \frac{1}{625};$$

$$10) \log_8 14 + \log_8 \frac{32}{7};$$

$$1.14. 1) \log_{0,5} 32 - \log_7 \frac{\sqrt{7}}{49};$$

$$2) \log_{16} \frac{1}{8} - \log_{25} 5;$$

$$3) \log_2 \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{3}} 9;$$

$$4) \log_{\frac{1}{49}} 7 - \log_{0,1} 100;$$

$$5) \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} + \log_{64} 16;$$

$$6) \log_{0,25} \sqrt{2} + \log_{0,5} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right);$$

$$1.15. 1) \log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9;$$

$$2) \log_3 15 - \log_3 \frac{5}{8} + \log_3 \frac{1}{8};$$

$$3) \log_7 14 + \log_7 \frac{49}{4} - \log_7 3,5;$$

$$4) \log_4 96 - \log_4 3 + \log_4 2;$$

$$5) \log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 81;$$

$$6) \log_3 90 - \log_3 2 - \log_3 5;$$

$$7) \log_4 48 - \log_4 9 + \log_4 3;$$

$$8) \log_5 65 + \log_5 10 - \log_5 26.$$

- 1.16.** 1) $7^{2-\log_7 5}$; 2) $(\sqrt{5})^{\log_5 16}$; 3) $10^{1-\lg 5}$;
 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4\log_3 \frac{1}{2}}$; 5) $16^{\log_4 5}$; 6) $3^{\log_9 2}$;
 7) $4,5^{\log_{4,5} 9} - 15$; 8) $6 \cdot 4,5^{\log_{4,5} 9}$; 9) $3 \cdot 6^{\log_6 4}$;
 10) $5^{\log_5 3} \cdot \log_2 8$.

– В –

1.17. Вычислить.

- 1) $8^{\frac{2}{3}} - 250 \cdot 25^{-\frac{3}{2}} + (21^3)^0$;
 2) $4^{\frac{3}{2}} - 18 \cdot 27^{-\frac{2}{3}} - 32^0$;
 3) $0,001^{-\frac{2}{3}} + (-3)^{-2} \cdot 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^0$;
 4) $27^{\frac{2}{3}} - 320 \cdot 16^{-\frac{3}{2}} + (25^2)^0$;
 5) $\frac{3}{(5^0)^3 \cdot 4 - 27^{-1\frac{2}{3}} + 3^{-6} \cdot 81 \cdot 9^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}$;
 6) $\frac{2^{-2} + 5^0}{(0,5)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75$;
 7) $\frac{4}{12 \cdot (7^0)^3 + 16^{\frac{5}{4}} - (0,01)^{-\frac{1}{2}} - 16 \cdot 2^{-5} \cdot 64^{\frac{2}{3}}}$;
 8) $\frac{42}{\left[\left(128^{\frac{1}{7}}\right)^0 + \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} + 32^{\frac{2}{5}}\right] \cdot \left[16^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}\right]}$;

- 9) $\frac{20}{(25)^{-\frac{3}{2}} + 9 \cdot (7^0)^3 - 125^{-1} + 27 \cdot 9^{-\frac{5}{2}} \cdot 3^2}$;
- 10) $\frac{36}{(8^0)^7 \cdot 4 - 27^{-1\frac{2}{3}} + 3^{-6} \cdot 81 \cdot 9^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}$;
- 11) $3^{-4} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 - 27^{-1\frac{1}{3}} + (8^0)^3 \cdot 2 + (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;
- 12) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - 8^{-1\frac{2}{3}} + (12^0)^2 \cdot 7 + 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-\frac{3}{2}}$;
- 13) $(3,4 \cdot \sqrt[3]{25\sqrt{5}} + 1,6\sqrt{5\sqrt[3]{25}})^{-\frac{6}{11}}$;
- 14) $(7,3 \cdot \sqrt[3]{49\sqrt{7}} - 0,3\sqrt{7\sqrt[3]{49}})^{-\frac{6}{11}}$;
- 15) $\sqrt[3]{81\sqrt{2} - 54\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{38 + 12\sqrt{10}} \cdot \sqrt[6]{16}$.

1.18. Найти значение выражения.

- 1) $\frac{100 - t^{-1}}{10 + t^{-0,5}} - 6t^{0,5}$ при $t = 25$;
- 2) $\frac{25 - d^{-1}}{5 + d^{-0,5}} - 4t^{0,5}$ при $d = 64$;
- 3) $\frac{16 - p^{-1}}{4 + p^{-0,5}} - 10p^{0,5}$ при $p = 4$;
- 4) $\frac{49 + d^{-1}}{7 - d^{-0,5}} + 6p^{0,5}$ при $d = 64$.

Вычислить.

- 1.19.** 1) $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_3 81}$; 2) $5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{4+2\sqrt{3}}} + 5^{\log_{25} (2\sqrt{3}-4)^2}$;
- 3) $7^{\log_{\sqrt{7}} 2 + \log_{\sqrt{7}} 3 - \log_{\sqrt{7}} 10}$; 4) $13^{\log_{\sqrt{13}} \sqrt{3+\sqrt{2}}} + 11^{\log_{121} (\sqrt{2}-3)^2}$;

- 5) $4^{\log_2 \sqrt{5+\sqrt{3}}} + 2^{\log_{16} (\sqrt{3}-5)^4}$;
 6) $(\sqrt{13})^{\log_{13} (27-10\sqrt{2})} + (\sqrt{5})^{\log_5 (6\sqrt{2}+11)}$;
 7) $(\sqrt{7})^{\log_7 (21-12\sqrt{3})} - (\sqrt{3})^{\log_3 (13+4\sqrt{3})}$;
 8) $100^{1-\lg 2} + 3^{\log_9 25} - 49^{\log_{1/4} 0,5}$.

1.20. 1) $(2 \cdot \log_{25} 1,4 - \log_5 7 - 1) \cdot 13^{2\log_{13} 6}$;

2) $(2 \cdot \log_4 2,5 - \log_2 5 + 4) \cdot 9^{3\log_9 2}$;

3) $(3 \cdot \log_8 15 - \log_2 60 + 3) \cdot 7^{4\log_{49} 2}$;

4) $(6 \cdot \log_{27} 5 - \log_3 75 + 3) \cdot 5^{2\log_{25} 7}$;

5) $(2\log_9 2 - \log_3 18 + 5) \cdot 7^{\frac{1}{2}\log_7 4}$;

6) $(\log_7 245 - \log_{49} 25 + 1) \cdot 5^{\log_{25} 4}$;

7) $(5 - \log_2 48 + \log_2 3) \cdot 6^{\frac{1}{\log_2 6}}$;

8) $(\log_3 108 + 2\log_9 5 - 2\log_3 2\sqrt{5}) \cdot 7^{\left(\frac{\log_3 2}{\log_3 7}\right)}$;

9) $(2\log_{25} 1,6 - \log_5 8 + 3) \cdot 6^{2\log_6 3}$.

1.21. 1) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;

2) $(7^{\frac{1}{\log_{13} 7}} + 5^{\frac{1}{\log_{14} 5}})^{\frac{1}{3}}$;

3) $(121^{\frac{1}{\log_4 11}} + 49^{\frac{1}{\log_3 7}})^{\frac{1}{2}}$;

4) $(3^{\frac{1}{\log_{16} 9}} + 7^{\frac{1}{\log_9 49}})^2$.

1.22. 1) $(36)^{\left(\frac{1}{3}\log_6 8 + 2\log_6 3\right)}$;

2) $(49^{\left(\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6\right)} + 5^{-\log \sqrt{5} 4}) \cdot 72$;

3) $(25^{(2\log_5 3\sqrt{2} - \log_5 6)} + 3^{\log \sqrt{3} \sqrt{5}}):7$;

4) $(27^{(2\log_9 20 - \log_3 5)} + 7^{\log \sqrt{7} \sqrt{5}}):23$;

5) $(8^{(6\log_8 \sqrt{15} - \log_2 5)} - 7^{\log \sqrt{7} 5})^2$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{1.23. 1)} \frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3 \log_2 2}; & 2) \frac{\log_3 5 + \log_3 \sqrt{7}}{\log_3 35 + \log_3 5}; \\
 3) \frac{\log_5 2 + \log_5 72}{\log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 3}; & 4) \frac{\log_7 8 + \log_7 3}{\log_7 2 + \frac{1}{3} \log_7 3}; \\
 5) \frac{\log_{11} 3 + \frac{1}{3} \log_{11} 5}{\log_{11} 9 + \log_{11} 15}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{1.24. 1)} 7^{\log_{\sqrt{7}} 2 + \log_{\sqrt{7}} 3 - \log_{\sqrt{7}} 10}; \\
 2) 3^{\log_{\sqrt{3}} 4 + \log_{\sqrt{3}} 2 - \log_{\sqrt{3}} 20}; \\
 3) 25^{2 \log_5 2 + 1} + \lg 25 - 2 \lg 0,5; \\
 4) (\log_6 9 + \log_6 4 + 2,7^{\log_{2,7} 3})^{\log_5 7}; \\
 5) (\log_{13} 52 - \log_{13} 4 + 7,8^{\log_{7,8} 5})^{\log_6 5}; \\
 6) (\log_{14} 7 + \log_{14} 2 + 3,5^{\log_{3,5} 6})^{\log_7 3}; \\
 7) (\log_{48} 6 + \log_{48} 8 + \sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 10})^{\log_{11} 5}; \\
 8) (\lg 2 + \lg 5 + 3^{\log_3 7})^{\log_2 3}; \\
 9) (\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 7^{\log_7 4})^{\log_5 11}.
 \end{array}$$

1.25. Упростить и вычислить выражения.

$$\begin{array}{l}
 1) (a^{\frac{\log_9 25}{\log_3 125}} \cdot b^{\frac{\log_{27} 3}{\log_{ab} (2a+3b)^3}}) \text{ при } a = 0,5, b = 3; \\
 2) (b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}})^{2 \log_{ab} (a+b)} \text{ при } a = 2, b = 0,01; \\
 3) (m^{\frac{\log_4 n}{\log_2 n}} \cdot n^{\frac{\log_4 m}{\log_2 m}})^{2 \log_{mn} 3} \text{ при } m = 7, n = 0,2; \\
 4) (a^{\frac{\log_8 b}{\log_2 b}} \cdot b^{\frac{\log_8 a}{\log_2 a}})^{3 \log_{ab} 5} \text{ при } a = 0,5, b = 0,2; \\
 5) (a^{\frac{\log_{27} b}{\log_3 b}} \cdot b^{\frac{\log_{27} a}{\log_3 a}})^{3 \log_{ab} 2} \text{ при } a = 4,3, b = 7;
 \end{array}$$

- 6) $2^{(\log_a b + \log_a 9) \cdot (3 \log_a 2 - \log_a 8b)}$ при $a = 7$, $b = 3$;
 7) $5^{(\log_{b+1}(a-2) - 2 \log_{a-2}(b+1)) \cdot (2 \log_b(a-1) - \log_b(a+3))}$ при $a = 5$, $b = 2$.

1.26. Найти значения выражений.

- 1) $13 \cdot \log_{9\sqrt[3]{3}}(27\sqrt[6]{3})$; 2) $4 \log_{5\sqrt[7]{5}}(125\sqrt[7]{5})$;
 3) $22 \log_{27\sqrt[7]{3}}(9\sqrt[7]{3})$; 4) $5 \log_3 25 \cdot \log_5 81 + 5^{\log_5 7}$;
 5) $((9 - \log_3^2 5) \cdot \log_{135} 3 + \log_3 5) \cdot 11^{\log_{11} 19}$;
 6) $((1 - \log_2^2 7) \cdot \log_{14} 2 + \log_2 7) \cdot 5^{\log_5 24}$;
 7) $\log_2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \log_2(1 + \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \log_2(\sin 2x)$ при $x = 14^\circ$;
 8) $3 \log_3(3 + \operatorname{tg}^2 x) - \log_3(3 - \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \log_2 \cos^2 3x$ при $x = \pi/3$.

Вычислить.

- 1.27.** 1) $2^{\log_4(x-2\sqrt{x+1}+2)} + 5^{\log_{25}(x+2\sqrt{x+1}+2)}$ при $x = -0,81$;
 2) $5^{\log_{25}(x+4\sqrt{x-2}+2)} + 4^{\log_{16}(x-4\sqrt{x-2}+2)}$ при $x = 3,1$;
 3) $4^{\log_2(6-\sqrt{x-5})} + 36^{\log_6(3+2\sqrt{x-5})}$ при $x = 7$;
 4) $25^{\log_5(6+2\sqrt{x-1})} + 64^{\log_8(3-4\sqrt{x-1})}$ при $x = 2,1$.

- 1.28.** 1) $\log_2 14 - \log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 7$;
 2) $\log_4 36 - \log_2 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6$;
 3) $\log_3 36 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4$;
 4) $\log_5 35 - \log_5 11 \cdot \log_{11} 9 \cdot \log_9 7$;
 5) $\log_{11} 187 - \log_{11} 17 \cdot \log_{17} 23 \cdot \log_{23} 17$.

- 1.29.** 1) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$; 2) $\frac{\log_3 45}{\log_5 3} - \frac{\log_3 15}{\log_{15} 3}$;
 3) $\frac{\log_2 96}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 3}{\log_{384} 2}$; 4) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$;
 5) $\frac{\log_5 250}{\log_2 5} - \frac{\log_5 50}{\log_{10} 5}$; 6) $\frac{\log_3 36}{\log_4 3} - \frac{\log_3 12}{\log_{12} 3}$;

$$\begin{aligned}
7) & \log_6^2 7 + \frac{\log_8 7}{\log_8 6} - \frac{\log_6 7}{\log_{42} 6}; & 8) & \log_2^2 3 + \frac{\log_5 3}{\log_5 2} - \frac{\log_2 3}{\log_6 2}; \\
9) & \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_7 5}{\log_2 5} - \log_5 10; \\
10) & \frac{\log_2^2 6 + \log_2 6 \cdot \log_2 3 - 2\log_2^2 3}{\log_2 6 + 2\log_2 3}.
\end{aligned}$$

$$1.30. \quad 1) 3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}; \quad 2) 11^{\log_3 5} - 5^{\log_3 11}; \quad 3) 5^{\log_9 7} - 7^{\log_9 5}.$$

– C –

1.31. Упростить выражения.

$$\begin{aligned}
1) & \sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}} : \sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2 + 4mn}{m^2 - n^2}}}; \\
2) & \frac{(\sqrt[5]{a^{4/3}})^{3/2} \cdot (\sqrt{a^3 \sqrt{a^2 b}})^4}{(\sqrt[5]{a^4})^3 \cdot (\sqrt[4]{a \sqrt{b}})^6}; \\
3) & \frac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} b} : a^{\frac{1}{3}}; \\
4) & \frac{(a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}})^2 + 4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}} - a^{\frac{2}{n}})^1 \cdot (\sqrt[m]{a^{m+1}} + \sqrt[n]{a^{n+1}})}; \\
5) & \frac{(x^{\frac{2}{m}} - 9x^{\frac{2}{n}}) \cdot (\sqrt[m]{x^{1-m}} - 3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{\frac{1}{m}} + 3x^{\frac{1}{n}})^2 - 12x^{\frac{m+n}{mn}}}; \\
6) & \frac{m^{\frac{4}{3}} - 27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[3]{mn} + 9n^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right) - \sqrt[3]{m^2};
\end{aligned}$$

$$7) z^{\frac{p-3}{p^2+3p}} : z^{\frac{12}{9-p^2}} \cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}};$$

$$8) \frac{b^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{a^3 b} \cdot \sqrt[3]{a^3 b} - \sqrt{a^3 b^2} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{(2a^2 - b^2 - ab) \cdot \sqrt[6]{a^9 b^4}} : \left(\frac{3a^3}{2a^2 - b^2 - ab} - \frac{ab}{a-b} \right).$$

1.32. Вычислить.

$$1) \log_{\sqrt[3]{3}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \log_3(5 - 2\sqrt{6});$$

$$2) 2 \log_4(8(\sqrt{7} - \sqrt{3})) + \log_4(10 + 2\sqrt{21});$$

$$3) 2 \log_4(8(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \log_4(12 + 2\sqrt{35});$$

$$4) 2 \log_3(37 - 8\sqrt{10}) + \log_{\sqrt[3]{3}}(4\sqrt{2} + \sqrt{5});$$

$$5) \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}\right) - \log_2(38 + 6\sqrt{33});$$

$$6) \log_3(5 - \sqrt{7}) + \frac{\log_5(32 + 10\sqrt{7})}{2 \log_{25} 9} - \frac{1}{\log_4 9};$$

$$7) \log_{121}(\sqrt{23} - 1) + \frac{\log_7(24 + 2\sqrt{23})}{2 \log_{\sqrt{7}} 11} - \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 11};$$

$$8) 11^{\log_{\sqrt{11}} 2} + \log_3 \frac{5 + 2\sqrt{6}}{9} - \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

1.33. Найти.

$$1) \log_2 784, \text{ если } \log_2 7 = a;$$

$$2) \lg 5, \text{ если } \lg 64 = b;$$

$$3) \log_{60} 4, \text{ если } \lg 5 = a \text{ и } \lg 3 = b;$$

$$4) \log_8 30, \text{ если } \lg 5 = a \text{ и } \lg 3 = b;$$

$$5) \lg 56, \text{ если } \lg 2 = a \text{ и } \log_2 7 = b;$$

$$6) \log_3 200, \text{ если } \log_3 5 = a \text{ и } \log_2 3 = b.$$

1.34. Определить.

$$1) a = \log_{0,3} 0,09 \text{ и } b = \log_{1/3} \frac{1}{11};$$

- 2) $a = \sqrt{8}$ и $b = 2$;
 3) $a = \log_3 4$ и $b = \log_4 5$;
 4) $a = \log_n(n+1)$ и $b = \log_{n+1}(n+2)$, $n \geq 2$;
 5) $a = 2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6}$ и $b = 3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3} \log_6 3}$.

2. Показательные и логарифмические уравнения

– А –

Решить уравнения.

- 2.1. 1) $2^x = \frac{1}{8}$; 2) $3^x = \sqrt{3}$; 3) $4^x = 2\sqrt{2}$;
 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$; 5) $9^x = 27\sqrt[3]{3}$; 6) $6^x = 216$;
 7) $2^x = 512\sqrt{2}$; 8) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 64$; 9) $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$;
 10) $3^{x-5} = 7$; 11) $5^{2x+1} = \frac{1}{2}$; 12) $4^x = 81$;
 13) $17^{x^2-1} = 1$; 14) $3^{x+5} = -\frac{1}{9}$.

- 2.2. 1) $2^{x^2} = 4^x$; 2) $3^{1-2x} = 9^{x+1}$;
 3) $25^{2x-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}$; 4) $8^{2-3x} = 4^{3+x}$;
 5) $(\sqrt[3]{3})^{2x+4} = 9^{x-1}$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = (64)^{3-x}$;
 7) $(\sqrt{2}-1)^{3x} = (3-2\sqrt{2})^{x+2}$;
 8) $(2+\sqrt{3})^{7-x} = \left(\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right)^{2x+1}$;
 9) $(\sqrt{5}-2)^{3x-1} = (9-4\sqrt{5})^{2-x}$;

$$10) (9)^{x^2-2} = (27)^{x-\frac{4}{3}};$$

$$11) 3^{\frac{x+2}{2-3x}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}}.$$

$$2.3. 1) 3^{x+2} - 3^x = 216;$$

$$2) 5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180;$$

$$3) 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39;$$

$$4) 4^{x+1} - 2^{2x-3} = 62;$$

$$5) 9^{x+1} - 3^{2x+1} + 3^{2x+3} = 33;$$

$$6) 5^{2x-1} + 25^{x+1} = 126.$$

$$2.4. 1) 6^x - 7^x = 0;$$

$$2) 5^{x+2} = 3^{-x-2};$$

$$3) 2^{3-x} = (\sqrt{3})^{3-x};$$

$$4) 6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2};$$

$$5) 5^{x+2} - 3 \cdot 5^{x+1} = 3^{x+2} + 3^x;$$

$$6) 4^{x+1} + 2^{2x+1} = 9^{x+2} - 25 \cdot 3^{2x+1};$$

$$7) 3^{3x+4} - 18 \cdot 9^{\frac{3}{2}x-1} - 10 \cdot 27^x = 4^{2x+3} + 2 \cdot 2^{4x+1} + 16^x;$$

$$8) 2^{x+3} - 2^{x+1} = 9^{x+1} + 6 \cdot 3^{2x+1};$$

$$9) 5^{x+2} - 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1+x} - 3 \cdot 25^{\frac{1-x}{2}} = 8^{x+1} - 3 \cdot 4^{\frac{3x}{2}}.$$

$$2.5. 1) \log_3 x = -1;$$

$$2) \log_{\sqrt{2}}(x+2) = 4;$$

$$3) \log_2(x^2 - 3) = 0;$$

$$4) \log_{1/2}(3 - 5x) = -2;$$

$$5) \log_5(x^2 + 9) = 2;$$

$$6) \log_{\sqrt[3]{3}}(x^2 - 16) = 6;$$

$$7) \log_{1/3}(x-1) = 2;$$

$$8) \log_3(x^2 + 4x + 12) = 2;$$

$$9) \log_{1/\sqrt{6}}(x^2 - 6x + 2) = -2;$$

$$10) \log_{\sin \frac{\pi}{4}}(x^2 - 5x + 8) = -4.$$

$$2.6. 1) \log_{1/2}(5 - \log_3 x) = -2;$$

$$2) \log_3(2 - \log_{1/3} x) = 1;$$

$$3) \log_3(1 + \log_2(x-1)) = 1;$$

$$4) \log_{1/3}(2 + \log_3(x+1)) = -1.$$

$$2.7. 1) \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7;$$

$$2) \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_9 x = 26;$$

$$3) \log_{125} x - 2\log_{25} x + 3\log_5 x = 7;$$

$$4) \log_{1/9} x + 2\log_{1/3} x + \log_9 x = 6;$$

$$5) 4\log_3 x - \log_{1/3} x + 2\log_{\sqrt{3}} x = 3.$$

$$2.8. 1) \log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = 0,5;$$

$$2) \log_2 \log_3 \lg x = 0,5;$$

$$3) \log_2 \log_3 \log_4 x = 0;$$

$$4) \lg \log_2 (\log_3 \sqrt{x} + 1) = 0;$$

$$5) \log_2 \log_2^2 (x - 4) = 0;$$

$$6) \log_{1/2} (5 - \log_3 x) = -2;$$

$$7) \log_3 (2 - \log_{1/3} x) = 1.$$

– В –

Решить уравнения.

$$2.9. 1) \left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9;$$

$$2) \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x+2} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^{x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2};$$

$$3) 32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}};$$

$$4) 27^{\frac{x+1}{2x+5}} = \frac{1}{81} \cdot 9^{\frac{2x+1}{x+2}};$$

$$5) 16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,5 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-5}};$$

$$6) (0,6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3.$$

$$2.10. 1) \sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x (0,125)^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2};$$

$$2) ((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}} \sqrt{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x}{3}}} = 4\sqrt[3]{7}.$$

$$2.11. 1) 3^{|3x-4|} = 9^{2x-2};$$

$$2) 2^{|2x+1|} = 64^{-x};$$

$$3) 5^{2|x-1|} = 5 \cdot 125^{x-2};$$

$$4) 3^{-|5x-3|} = 8^{\log_2 \frac{1}{3}};$$

$$5) 2^{|3x-5|} = 4 \cdot 8^{|x-1|};$$

$$6) 5^{|2x+1|} = (\sqrt{5})^{-4x+3}.$$

2.12. 1) $2^x \cdot 3^{x-2} = 6^x \cdot 3^x$; 2) $2^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 0,2 \cdot 10^{1-x}$;
 3) $4^{x-3} \cdot 5^{x-2} = 100 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{x+2}$; 4) $2^{x+8} \cdot 5^{3x} = 10^{2x+4}$;
 5) $32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$; 6) $3^{16+x} \cdot 4^{4+x} \cdot 5^{3x} = 540^{8-x}$.

2.13. $\left(5^{\frac{x}{\sqrt{x+2}}} \cdot (0,2)^{\frac{4}{\sqrt{x+2}}}\right)^{\frac{1}{x-4}} = 125 \cdot (0,04)^{\frac{x-2}{x-4}}$.

2.14. $16 \cdot (\sqrt{2})^x - 4 = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x+1}$, $x \in \mathbb{N}$.

2.15. 1) $7^{3x} + 9 \cdot 2^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x}$; 2) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 8 \cdot 3^{2x}$;
 3) $5^{x+\frac{1}{2}} - 9^x = 3^{2x-2} - 5^{x-\frac{1}{2}}$; 4) $3^{x^2-2} - 2^{x^2+1} = 2^{x^2-1} - 3^{x^2}$.

2.16. 1) $4^{3(x-2)} = 7^{x^2-5x+6}$; 2) $3^{x^2-1} = 5^{3x-x^2-2}$; 3) $5^{2(x+3)} = 7^{9-x^2}$.

2.17. 1) $(x+5)^{x^2-x-1} = (x+5)^{2x+3}$; 2) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$;
 3) $(3-x)^{x^2-2x-5} = (3-x)^{x-1}$; 4) $|x+2|^{2x^2+x-6} = 1$.

2.18. 1) $49 \cdot 7^{2x} - 50 \cdot 7^x + 1 = 0$; 2) $4^x - 2^{x+1} = 48$;
 3) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$; 4) $2^{2x} + 14 \cdot 2^{x+2} = 29$;
 5) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; 6) $4^x + 2^{x+1} = 80$;
 7) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$; 8) $5^{2x+1} - 575 \cdot 5^{x-1} - 250 = 0$;
 9) $8^{2/x} + 2^{\frac{2x+3}{x}} - 12 = 0$; 10) $4^{\sqrt{2x-1}} - 3 \cdot 2^{1+\sqrt{2x-1}} - 2^4 = 0$;
 11) $3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0$; 12) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$;
 13) $16^{x+\frac{1}{2}} = 15 \cdot 4^x + 4$. 14) $289^x - 20 \cdot 17^x + 51 = 0$.
 15) $4^{2x} - 5 \cdot 4^{1/x} + 4 = 0$; 16) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$;
 17) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;
 18) $(11+6\sqrt{2})^x - 6(3+\sqrt{2})^x + 7 = 0$;
 19) $9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2 = 4^{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

2.19. 1) $2^x - 2^{-x} = \frac{15}{4}$; 2) $3^{x+3} - 3^{-x-1} - 8 = 0$;
 3) $3^{2+x} - 3^{2-x} = 24$; 4) $8^{-x} - 2 \cdot 8^x = \frac{7}{2}$;
 5) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$; 6) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$;
 7) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$; 8) $2^{3x-3} - 5 + 6 \cdot 2^{3-3x} = 0$;
 9) $3 \cdot 2^{2-x} - 2^{x-1} - 5 = 0$; 10) $2^x \cdot 3^{x-\log_3 2} - 6^{2-x} + 3 = 0$.

2.20. 1) $(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = 6$;
 2) $(4-\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^x = 62$;
 3) $(\sqrt[3]{5+\sqrt{24}})^x + (\sqrt[3]{5-\sqrt{24}})^x = 10$;
 4) $(\sqrt{5\sqrt{2}-7})^x + 6(\sqrt{5\sqrt{2}+7})^x = 7$.

2.21. 1) $4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0$; 2) $4^x + 10^x - 2 \cdot 25^x = 0$;
 3) $2^{4x} - 7 \cdot 4^x \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} = 0$; 4) $3^{2x+3} - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 4^x = 0$;
 5) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; 6) $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x$;
 7) $4^{-1/x} + 6^{-1/x} = 9^{-1/x}$; 8) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x$;
 9) $\sqrt{3} \cdot 4^x + \sqrt{2} \cdot 9^x = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 6^x$;
 10) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x = 5 \cdot 25^x$; 11) $5 \cdot 4^x + 23 \cdot 10^x - 10 \cdot 25^x = 0$;
 12) $4 \cdot 9^x + 13 \cdot 12^x - 12 \cdot 16^x = 0$.

2.22. 1) $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$;
 2) $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0$.

2.23. 1) $x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2 \cdot 2^{x-2}$;
 2) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

2.24. 1) $\sqrt{9^x - 10 \cdot 3^x + 21} = \sqrt{9 - 2 \cdot 3^x}$;
 2) $\sqrt{4^x - 2^{x+3} + 8} = \sqrt{3 - 2^{x+1}}$;
 3) $2 = 4 \cdot 3^x - \sqrt{4 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{3x} + 3^{4x}}$;

$$4) \sqrt{7 \cdot 2^x + 9} = 2^x - 5;$$

$$5) \sqrt{24 \cdot 3^x - 2 \cdot 9^x - 5} = 2 - 3^x;$$

$$6) \sqrt{11 \cdot 25^x + 102 \cdot 5^x - 1} = 2(3 \cdot 5^x - 1).$$

$$2.25. 1) \log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1; \quad 2) \log_2(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4;$$

$$3) \log_3 \left(3^{x^2 - 13x + 28} + \frac{2}{9} \right) = \log_5 0,2.$$

$$2.26. 1) \log_{x+1}(x^2 + 8x + 37) = 2;$$

$$2) \log_{x+2} x^2 - x - 13 = 1;$$

$$3) \log_{x+2}(2x^2 - 4x + 11) = 2;$$

$$4) \log_{\frac{1}{4-3x}} 10x^2 - 23x + 14 = -2.$$

$$2.27. 1) \log_2(3x^2 - x - 4) = \log_2(1 - 3x);$$

$$2) \log_{1/3}(x^2 + 4x - 3) = \log_{1/3}(3x - 1);$$

$$3) \log_{\pi}(2x^2 + x - 7) = \log_{\pi}(2x + 3);$$

$$4) \log_9(x^2 + 2x - 11) = \log_3(2x - 8);$$

$$5) \log_{25}(4x - x^2 + 5) = \log_5(1 - 2x);$$

$$6) \log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{x-1}.$$

$$2.28. 1) \log_2(x-3) = \log_{1/2}(3x-5);$$

$$2) \log_3(2x-3) = \log_{1/3}(3-x);$$

$$3) \log_2(x+2) = \log_{1/4}(3x+4);$$

$$4) \log_3 x - 2 \log_{1/3} x = 6.$$

$$2.29. 1) \log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3;$$

$$2) \log_2 x + \log_2(x+2) = 3;$$

$$3) \log_6(x+1) + \log_6(2x+1) = 1;$$

$$4) \log_3 x + \log_3(x-2) = \log_3(2x-3);$$

$$5) \lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x);$$

$$6) \log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3.$$

$$2.30. 1) \lg(x^3 + 1) - \frac{1}{2} \lg(x^2 + 2x + 1) = \lg 3;$$

- 2) $\log_2 \frac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \frac{3x-7}{3x-1}$;
 3) $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$;
 4) $\log_3(5x-2) - 2\log_3 \sqrt{3x+1} = 1 - \log_3 4$;
 5) $\lg(3x-2) - 2 = \frac{1}{2}\lg(x+2) - \lg 50$;
 6) $\log_2 182 - 2\log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$;
 7) $\lg(x^3 + 8) - 0,5\lg(x^2 + 4x + 4) = \lg 7$.

2.31. 1) $\log_2(x+2)^2 + \log_2(x+10)^2 = 4\log_2 3$;

2) $\log_2^2(x-1)^2 = 5 + \log_{0,5}(x-1)$;

3) $\lg(3x-4)^2 + \lg(2x-4)^2 = 2$;

4) $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$;

5) $25\log_{32}^2(x-7)^4 + 16\log_4(x-7)^2 = 96$.

2.32. 1) $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$;

2) $\log_2^2 x - \log_2 \frac{16}{x} = 2$;

3) $\log_5^2 x - 2\log_5 x = 0$;

4) $\lg^2(2x-1) = \lg(x-0,5) + \lg 2$;

5) $(\log_2 x - 2)\log_2 x = 2^{\log_2 3}$;

6) $\log_{1/3}^2 9x + \log_3 \frac{x^2}{27} = 8$;

7) $\log_{\sqrt{3}}^2 x = \log_{\sqrt{3}}(9x^3)$;

8) $\log_2^2 4x - 4\log_4 x = 12$.

2.33. 1) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;

2) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$;

3) $\log_3 x + \log_x 9 = 3$;

4) $2\log_{x+2} 5 + 1 = \log_5(x+2)$.

2.34. 1) $\log_{9x} x = \log_x 3$;

2) $\log_{3x-5} 2 = \log_{x-1} \sqrt{2}$;

3) $\log_{x+3} \sqrt{3} = \log_{3x+7} 3$;

4) $\log_{3x} \left(\frac{3}{x} \right) + \log_3^2 x = 1$;

$$5) \log_{3x^2}(9x^4) - \log_{x^2/3} x^2 = 0;$$

$$6) \log_{1/2} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 80 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

$$2.35. 1) \|\log_5 \sqrt{x} - 1\| = 1 - \log_{25} x;$$

$$2) 1 - |\log_{\sqrt{3}} x - 1| = |\log_3 x - 1|.$$

$$2.36. 1) 3 \cdot x^{\log_2 9} + 5 \cdot 3^{\log_2 x} - 2 = 0;$$

$$2) 25 \cdot x^{\log_7 25} + 24 \cdot 5^{\log_7 x} - 1 = 0;$$

$$3) 49 \cdot (x-1)^{\log_3 49} + 97 \cdot 7^{\log_3 (x-1)} - 2 = 0.$$

$$2.37. 1) \log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2;$$

$$2) \log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2;$$

$$3) \log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4;$$

$$4) \log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3 - 4x^2)}.$$

$$2.38. 1) \sqrt{\log_2 x} = \log_2 \frac{x}{64};$$

$$2) \sqrt{1 + 2 \log_9 x} + \sqrt{4 - \log_3 x} = 3;$$

$$3) \sqrt{\log_x \sqrt{0,5x}} \cdot \log_{0,5} x = -1.$$

– C –

$$2.39. 1) \lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1);$$

$$2) \log_3(9^x + 9) = x - \log_{1/3}(28 - 2 \cdot 3^x);$$

$$3) \log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2)^2 = 2.$$

$$2.40. 1) x \log_2 x^2 + 1 = 2x + \log_2 x;$$

$$2) \log_2 x \log_3 x = \log_2 x^2 + \log_3 x^3 - 6;$$

$$3) \log_3 x \log_4 x = \log_3 x^3 + \log_4 x^4 - 12;$$

$$4) \log_3 \frac{x}{3} \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x};$$

$$5) \log_3 x \log_5 \frac{x}{5} - \log_5 \frac{25}{x^3} = \log_3 x^2 - 2.$$

$$\mathbf{2.41.} \quad 1) \lg \sin x = \lg \cos x + \lg 2;$$

$$2) \log_3 \sin x + \log_{1/3}(-\cos x) = \frac{1}{2};$$

$$3) \log_2 \sin 2x + \log_{1/2} \cos x = \frac{1}{2};$$

$$4) 1 + \log_3(5 \cos^2 x - 3 \cos x - 1) = \log_3(1 - 2 \cos x);$$

$$5) \log_2(15 \sin^2 x + 7 \sin x) = 1 + \log_2(3 \sin x + 1).$$

$$\mathbf{2.42.} \quad 1) \log_{\frac{x+2}{2-x}} \left(\frac{\cos x - 2 \sin 3x}{\sin x} \right) = \frac{1}{2 \log_3 \frac{x+2}{2-x}};$$

$$2) \log_{3+2x-x^2} \left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} \right) = \frac{1}{\log_2(3+2x-x^2)};$$

$$3) \log_{\frac{-x^2-8x}{17}} (\sin 2x - 1 + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)) = \log_{\frac{-x^2-8x}{17}} (-\cos 2x);$$

$$4) \log_{\frac{7x-x^2}{25}} (1 - \sin 2x - \sin x + \cos x) = \log_{\frac{7x-x^2}{25}} (\cos 2x);$$

$$5) \log \left(-\sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right) (1 - \sin x - \cos x) = 1;$$

$$6) \sqrt{\pi^2 - 4x^2} \left[\log_{\sin x} \left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 \right] = 0.$$

$$\mathbf{2.43.} \quad 1) 3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x);$$

$$2) \log_2[x(1-x)] = \left| \sin \frac{\pi}{x} \right| - 2;$$

$$3) 2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3};$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|\sin \frac{\pi}{4}(x-1)\right|;$$

$$5) 3 + \log_{1/2}^4(x^2 - x + 1) = 3 \cdot |\cos(\pi(x-1)) \cos 2x|;$$

$$6) \log_3(x^2 - 2x + 10) = \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{3} + \cos \frac{\pi x}{3}\right);$$

$$7) 2^{\frac{1}{x^2-6x+11}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi x}{12} + \cos \frac{\pi x}{12}}.$$

2.44. Решить уравнения.

$$1) 2 \cdot 2^{2 \cos x} - 3 \cdot 2^{\cos x} + 1 = 0;$$

$$2) 3 \cdot 3^{2 \sin x} - 10 \cdot 3^{\sin x} + 3 = 0;$$

$$3) 4^{2 \cos^2 x} + 12 \cdot 16^{\cos 2x} - 5 = 0;$$

$$4) 4^{3-2 \cos 2x} - 2 = 7 \cdot 16^{\sin^2 x}.$$

2.45. Найти корни уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, **лежащие на отрезке** $[6; 3\pi]$.

2.46. Решить уравнения.

$$1) (\operatorname{ctg} x)^{2 \sin x} = 1;$$

$$2) (1 - \sin x)^{\cos x} = 1;$$

$$3) 2^{|x-3| \cos x} = (\sqrt{2})^{x|\cos x|};$$

$$4) 5^{-|2x-3| \sin x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{|x-1| \sin x}.$$

$$\mathbf{2.47.} \quad 1) 7^x = \sqrt{52-3x};$$

$$2) 3^{x-2} = \frac{9}{x};$$

$$3) 2^{5-2x} = 3x - 4;$$

$$4) 4^x + 9^x = 25^x;$$

$$5) 8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x;$$

$$6) 5^{x+0,5} + 2 \cdot 7^{x+0,5} = 12 \cdot 16^x.$$

3. Показательные и логарифмические неравенства

– А –

Решить неравенства.

- 3.1. 1) $2^x \leq 8$; 2) $3^x > \frac{1}{3}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$;
- 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{27}$; 5) $4^x > \frac{1}{32}$; 6) $9^x \geq \sqrt{27}$;
- 7) $5^x < \frac{1}{\sqrt{5}}$; 8) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x-5} \geq \frac{1}{3}$; 9) $(\sqrt{2})^{3-5x} < 64$;
- 10) $3^{2-x} \geq 2$; 11) $\left(\frac{4}{9}\right)^{3x+1} \geq \frac{27}{8}$; 12) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+5} < \frac{25}{9}$;
- 13) $2^{\frac{x+2}{3-x}} \geq 4$; 14) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2-3x}{2x+1}} > 27$; 15) $3^{2x+1} \geq 1$;
- 16) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq -3$; 17) $\left(\frac{3}{2}\right)^{5-2x} \geq -\frac{9}{4}$; 18) $(5)^{x^2+1} \leq -\frac{1}{25}$;
- 19) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} < 27$; 20) $3^{\frac{x-5}{2}} \geq 3\sqrt{3}$; 21) $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$.
- 22) $2^x > 5$; 23) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$;
- 24) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3(x^2-2x-3)} > 1$; 25) $3^{\log_2(x^2-3x+2)} > 3$;
- 26) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$; 27) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2} \leq (6,25)^{x-24}$;
- 28) $16^x > 0,125$; 29) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

- 3.2.** 1) $\log_2 x \geq 4$; 2) $\log_{1/3}(x+1) < -2$;
 3) $\log_3 x < 1$; 4) $\log_{1/5}(3-x) \geq 0$;
 5) $\log_4 x > \frac{1}{2}$; 6) $\log_{1/7}(3+2x) \leq 1$;
 7) $\log_5(x^2 - 2x - 3) \leq 1$; 8) $\log_{1/2}(x^2 - 9) \geq -4$;
 9) $\log_3(2x^2 + x - 9) > 3$; 10) $\log_{1/3}(7x - x^2 - 1) \leq -2$;
 11) $\log_3(6x + 5) \leq 1$; 12) $\log_{1/7}(5x - 3) \geq -2$;
 13) $\log_2(x^2 - 2x) \geq 3$; 14) $\log_{1/6}(x^2 - 3x + 2) > -1$;
 15) $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} < 1$; 16) $\log_{1/4} \frac{x-3}{x+3} \geq -\frac{1}{2}$;
 17) $\lg(x^2 - 2x - 2) \leq 0$; 18) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$;
 19) $2 - \log_2(x^2 + 3x) \geq 0$; 20) $\log_4 \frac{3x+2}{x} \leq 0,5$;
 21) $\log_2 \frac{x^2 - 4x + 2}{x+1} \leq 1$; 22) $\log_8(x^2 - 4x + 3) \leq 1$;
 23) $\log_{1/3} \frac{2-3x}{x} \geq -1$; 24) $\log_{0,25} \frac{35-x^2}{x} \geq -\frac{1}{2}$.

– B –

- 3.3.** 1) $2^{x+1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x+2}}$; 2) $5^{x-2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x+3}}$;
 3) $2^{x^2-6x+0,5} \leq (16\sqrt{2})^{-1}$; 4) $3^{17x-2x^2+1} \geq (3 \cdot \sqrt[3]{3})^{-6}$;
 5) $2^{x^2} \cdot 4^{-x} < 8$; 6) $3^{x^2} \cdot 9^{-2x} \geq (9\sqrt{3})^2$;
 7) $(0,25)^{2-\sqrt{5x+1}} \leq 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$; 8) $9^{1-\sqrt{2-3x}} \leq \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-3x}}$.

- 3.4.** 1) $\log_{1/3}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$; 2) $\log_{1/6}\left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x+4}\right) < 0$;

$$3) \log_2 \left(\log_{1/3} \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{4} \right) \right) \geq 1; \quad 4) \log_{1/2} \left(\log_{1/3} \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{3} \right) \right) \geq -1.$$

$$3.5. 1) \log_3 x + 2 \log_{\sqrt[3]{3}} x - \log_{1/3} x \leq 6;$$

$$2) \log_{1/5} x + \log_{25} x \geq \log_{1/25} 9;$$

$$3) \log_{1/\sqrt{2}} x + \log_{16} x \leq \log_{1/4} x - 2,5.$$

$$3.6. 1) 4^{2x} + 4^x \leq 6;$$

$$2) 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2x} - 28 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x + 40 < 0;$$

$$3) 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} \geq 3;$$

$$4) 9^{2x^2-5x} + 3^{2x^2-5x+1} - 4 > 0;$$

$$5) 4^x + 2^{x+1} - 8 \leq 0;$$

$$6) \left(\frac{1}{9} \right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^x > 3;$$

$$7) 5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}};$$

$$8) 5^{2x+1} > 5^x + 4;$$

$$9) 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0;$$

$$10) 3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \leq 0;$$

$$11) 4^x - 7 \cdot 2^x + 12 > 0;$$

$$12) 2^{2x} - 13 \cdot 2^{x-2} > -\frac{3}{4};$$

$$13) 49^{1/x} - 343 \leq 342 \cdot 7^{1/x}.$$

$$3.7. 1) 2^x + 2^{-x} < 3;$$

$$2) (0,1)^{x+1} < 0,8 + 2 \cdot 10^x;$$

$$3) 3^x - 2 < 3^{1-x};$$

$$4) 3 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} + 2^{3-\sqrt{x-1}} > 25;$$

$$5) 2 \cdot 7^{\sqrt{2x-5}} > 7^{1-\sqrt{2x-5}} + 13.$$

$$3.8. 1) 8 \cdot 9^x + 6^{x+1} \leq 27 \cdot 4^x;$$

$$2) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leq 5 \cdot 36^x;$$

$$3) 63 \cdot 9^x - 370 \cdot 21^x + 147 \cdot 49^x \leq 0;$$

$$4) 5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x < 0;$$

$$5) 3^{2x-1} + 4 \cdot 21^{x-1} - 7^{2x-1} < 0.$$

$$3.9. 1) \frac{1}{3^x + 5} > \frac{1}{3^{x+1} - 1};$$

$$2) 2 + \frac{3}{2^x + 1} > \frac{6}{2^x};$$

$$3) \frac{6}{2^x - 1} < 2^x; \quad 4) \frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0;$$

$$5) \frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}.$$

$$3.10. 1) (20x - 25x^2 - 3)(\log_3 5x) \leq 0;$$

$$2) (9x^2 - 9x + 2)(\log_2 3x) \geq 0;$$

$$3) (x^2 - 7x + 10)(5^x - 25) \geq 0;$$

$$4) \frac{9 - x^2}{\log_3(x - 1)} \leq 0;$$

$$5) \frac{\log_5(x^2 + 3)}{4x^2 - 16x} < 0;$$

$$6) x \log_8 \left(\frac{x}{5} - 1 \right) \geq 3 \log_2 \left(\frac{x}{5} - 1 \right);$$

$$7) \frac{(\lg x - 1)(x^2 - 11x + 10)}{(2^x - 2)^2} \leq 0;$$

$$8) \frac{(5 - 7^x) \log_3 x}{x^2 - 10x + 9} \geq 0;$$

$$9) \frac{(2x - 1)^3 (5 - x)^2}{\sqrt{2^x - 1}} \leq 0;$$

$$10) x \log_3 \left(\frac{x}{3} + 2 \right) \geq 8 \log_{1/9} \left(\frac{x}{3} + 2 \right).$$

$$3.11. 1) \sqrt{\frac{5^x + 1}{2 \cdot 5^x - 4}} < 1;$$

$$2) \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9;$$

$$3) \sqrt{2 \cdot 2^x - 3} > 3 \cdot 2^x - 7;$$

$$4) \sqrt{4^x - 2^{x+3}} + 8 \geq \sqrt{3 - 2^{x+1}};$$

$$5) \sqrt{2^x + 3} - \sqrt{2^{x+1} - 1} \leq \sqrt{3 \cdot 2^x - 2};$$

$$6) \sqrt{\log_5 x - 3} < \sqrt{9 - \log_5 x}; \quad 7) \sqrt{4(\lg x) - 24} \geq 9 - \lg x;$$

$$8) \sqrt{4^{x+1} - 8} \geq 4^x - 5.$$

$$3.12. 1) \log_5(x^2 - 2x + 3) > \log_5(x + 1);$$

$$2) \log_{1/3}(3x + 5) > \log_{1/3}(x^2 + 1);$$

$$3) \log_3(x^2 - 3x - 4) < \log_3(-x^2 + 6x - 11);$$

$$4) \log_{1/2}(x^2 - 3x + 2) > \log_{1/2}(6 - x^2 + 4x);$$

$$5) \log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3);$$

$$6) \log_{1/2}(x + 1) \leq \log_2(2 - x);$$

$$7) \log_4(x + 7) > \log_4(3x + 5);$$

$$8) \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x + 1)} < -\log_2(x + 1).$$

$$\mathbf{3.13.} \quad 1) \lg^2 x + 3 \lg x - 4 \geq 0;$$

$$2) \log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0;$$

$$3) \text{ a) } \lg^2 x^3 - 2 \lg x^5 + 2 \log_3 \sqrt{3} = 0;$$

$$\text{б) } \lg^2 x^3 - 2 \lg x^5 + 2 \log_3 \sqrt{3} > 0.$$

$$4) \text{ a) } \log_3^2 3x + \log_3 x = 3^{\log_3 5};$$

$$\text{б) } \log_3^2 3x + \log_3 x \leq 3^{\log_3 5};$$

$$5) \lg^2(2x - 1) \geq \lg(x - 0,5) + \lg 2;$$

$$6) \lg(x - 1) + \lg(x - 2) < \lg(x + 2);$$

$$7) \log_2(2 - x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > \log_{\sqrt{2}} 3;$$

$$8) 1 + \log_2(x - 2) > \log_2(x^2 - 3x + 2);$$

$$9) \log_7 x - \log_7(2x - 5) \leq \log_7 2 - \log_7(x - 3);$$

$$10) \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}}(5 - x) < 1.$$

$$11) \log_4 x + \log_4 \frac{x}{4 - x} \geq \frac{1}{2};$$

$$12) \log_2 x^2 + \log_2(x - 1)^2 > 2.$$

$$\mathbf{3.14.} \quad 1) \frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{1}{1 - \lg x} < \frac{2 \lg x - 5}{1 + \lg x};$$

$$3) \frac{\log_2 x}{(\log_2 x) - 2} < \frac{2}{(\log_2 x) + 6}; \quad 4) \frac{\lg(x^2) - 2}{4 - 3 \lg(x^4)} \geq -\frac{1}{2}.$$

$$3.15. 1) \frac{3}{(\log_3 x) - 1} + \frac{2}{\log_3 \frac{x}{27}} \left(\frac{1}{(\log_3 x) - 1} - 1 \right) \geq 0;$$

$$2) \frac{3}{\log_2 2x} - \frac{2}{\log_2 4x} \left(\frac{1}{(\log_2 x) + 1} + 1 \right) \leq 0.$$

$$3.16. 1) \left(\log_{0.2} (x-2)^2 \right)^2 - 4 \log_5 |x-2| \geq 8;$$

$$2) \left(\log_{0.25} (x+3)^2 \right)^2 - 16 \log_4 |x+3| + 12 > 0.$$

$$3.17. 1) \log_3 \frac{3}{x} \log_5 x + \log_5 45 \log_3 x \geq 1 + 2 \log_5 3;$$

$$2) \log_3 \frac{16}{x} \log_4 x + \log_4 24 \log_3 x \leq 2 \log_3 24.$$

$$3.18. 1) \log_x 9 < 2;$$

$$2) \log_x \frac{15}{1-2x} < -2;$$

$$3) \log_{1-x} (2+x) < 1;$$

$$4) \log_{2-x} (5x-4-x^2) \leq 2;$$

$$5) \log_{2x+3} x^2 < 1;$$

$$6) \log_{x+1} \left(\frac{3}{6-2x} \right) \geq -2;$$

$$7) \log_{x-2} \left(4 - \frac{2x}{3} \right) \leq 2;$$

$$8) \log_{(x-3)} (2(x^2 - 10x + 24)) \geq \log_{(x-3)} (x^2 - 9);$$

$$9) \log_{x-1} \sqrt{\frac{5x-7}{2}} \geq 1.$$

$$3.19. 1) (3+x-2x^2) \log_{x+2} (3x+5) \geq 0;$$

$$2) (3x^2 - x - 2) \log_{4-3x} (7-5x) \leq 0.$$

$$3.20. 1 + \log_{0.5} (8-x) < \log_{[(x+1)(x-2)]} (x^2 - x - 2).$$

$$3.21. 1) x^{\frac{1}{\log_x \frac{1}{3}}} \leq 27x^4; \quad 2) x^{1 + \frac{1}{\log_x \sqrt[3]{3}}} \leq 9; \quad 3) x^{2 + \log \sqrt[3]{2} x} \geq 2.$$

$$\begin{aligned}
 3.22. \quad 1) \quad & \frac{(x-3)\log_2(3x-1) + (x-1)(x+1)}{x-3} \geq \\
 & \geq |\log_2(3x-1)| + \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} \right|; \\
 2) \quad & \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)\log_{x^2} \frac{2}{x^2}}}{|x+2|} > \frac{x^2 - 3x + 1 + \log_{|x|} \sqrt{2}}{x+2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.23. \quad 1) \log_2(5x+1) &\geq 7-x; & 2) \log_{1/3}(3-2x) &\leq -(8+2x); \\
 3) \log_3(2x-3) &< 4-2^x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.24. \quad 1) \quad & 4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt[3]{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6; \\
 2) \quad & 4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2 - x) \cdot 2^x + x\sqrt{2-x^2} \cdot 2^{x+1}.
 \end{aligned}$$

4. Системы показательных и логарифмических уравнений

– А –

4.1. Решить системы уравнений.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 65, \\ 3^{x/2} - 2^y = 5; \end{cases} & 2) \quad & \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{x/2} - 2^y = 7; \end{cases} \\
 3) \quad & \begin{cases} 5^x \cdot 6^y = 150, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases} & 4) \quad & \begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0; \end{cases} \\
 5) \quad & \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases} & 6) \quad & \begin{cases} 3^{x^2-2xy} = 1, \\ 2\log_3(y+2) = \log_3(5x-1); \end{cases} \\
 7) \quad & \begin{cases} x^{1+\log_7 y} = 49x, \\ \log_7 y - \log_7 x = 1; \end{cases} & 8) \quad & \begin{cases} 2\log_{25} x + \log_5 y = 1, \\ -6x + y = 1; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$9) \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 12; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 2, \\ \log_{25}(x + y) = 0,5. \end{cases}$$

– В –

4.2. Решить системы уравнений.

$$1) \begin{cases} x + y \log_2 3 = 1 + 2 \log_2 3, \\ 2^x + 3^y = 11; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_y x = 2, \\ x^2 + y^2 = 272; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 7^x - 16y = 0, \\ 4^x - 49y = 0; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2,5, \\ xy = 27; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \lg x + \lg y = 2, \\ x - y = 15; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4^{-y} \log_2 x = 4, \\ \log_2 x + 2^{-y} = 4; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{x \cdot y} = 2; \\ 2^{x^2+y} = 4^{\frac{y^2+x}{2}}. \end{cases}$$

– С –

Решить системы уравнений.

$$4.3. 1) \begin{cases} 2^{x-2} - y = 0, \\ |x-4| - y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y - x^3 = 1, \\ y - \log_2(4-x) = -1. \end{cases}$$

$$4.4. 1) \begin{cases} 5^{|x^2-2x-8|-\log_5 9} = 3^{-y-4}; \\ 3|y+1|-2|y|+(y-1)^2 \leq 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7^{|x^2-3x-28|-\log_7 4} = 2^{y-6}; \\ |y+3|+|y-1|-(y-2)^2 \geq 6. \end{cases}$$

$$4.5. 1) \begin{cases} 3x - 2 \log_{\frac{4x}{\pi}} \sqrt{\frac{64x^3}{\pi^5}} = \log_{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}} (4x) - 25^{-\frac{1}{5} \log_1 \frac{1}{5} \sqrt{y^5}}, \\ \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(y - 5); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4 \log_{\frac{6x}{\pi}} \left(\frac{\pi}{6} \right) + 27^{2 \log_9 \sqrt[3]{y}} = 2 \log_{\sqrt{\frac{6x}{\pi}}} \left(\frac{6x^2}{\pi} \right) - 3x, \\ \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{tg} \frac{y-8}{3}. \end{cases}$$

4.6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_{x^2+y} (xy) = \log_4 (xy), \\ \log_{y-x^2} (y-x) = \log_{y-x^2} (2x). \end{cases}$$

В ответе записать величину $x + y$.

5. Уравнения и неравенства с параметрами

– В –

Решить уравнения при каждом значении параметра.

5.1. 1) $(2^x + 2a - 1)(a + 1 - 2^x) = 0$;
 2) $(2^{-x} + 3c + 4)(5 - c - 2^{-x}) = 0$;
 3) $(3 + 2a - 3^x)(3^x - 3a + 4) = 0$.

5.2. 1) $16^{-x} - 4b \cdot 4^{-x} = 7b + 6$;
 2) $a \lg^2(x^2 + 10) + \lg(x^2 + 10) + 8a + 1 = 0$;
 3) $a \cdot 25^{x^2-1} - 5^{x^2-1} + 15a + 1 = 0$;
 4) $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} + a = 0$;
 5) $4^{\sin x} - a - 3 = (a + 2) \cdot 2^{\sin x}$;
 6) $4 \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{\cos x} - c = 4 + (2c + 6) \cdot 3^{-\cos x}$.

5.3. Найти все значения параметров, при которых уравнения имеют хотя бы одно решение.

1) $(a - 3) \cdot 4^x - 8 \cdot 6^x + (a + 3) \cdot 9^x = 0$;

2) $(a + 1)(a + 2) \cdot 2^{4x} - (16a + 32) \cdot 2^{x^2} = 0$;

3) $(a^2 - 4) \cdot 3^{-2x} + (a^2 - 3a + 2) \cdot 3^{x^2} = 0$.

5.4. Найти все значения параметров, при которых уравнения имеют единственное решение.

1) $27 \cdot 9^{-x - \frac{3}{2}} - (c + 2) \cdot 3^{-x} + (1 - c)(2c + 1) = 0$;

2) $(x + a)(\log_2(x - 1) + 1) = 0$;

3) $2 \cdot 9^x + (a - 16) \cdot 3^x - a^2 + 8a = 0$.

5.5. Найти все значения параметра p , при которых уравнение $p \log_2^2 x + (p - 3) \log_2 x + 1 = 0$ имеет решение на полуоси $x > 1$.

5.6. Решить уравнения при каждом значении параметра.

1) $\frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^x - a}{3^x - 4} = 0$; 2) $\frac{2^x + 3}{2^x - 1} + \frac{2^x - 7}{2^x + 1} = \frac{2a + 10}{4^x - 1}$;

3) $\frac{3^x + 5}{3^x - 3} + \frac{3^x - 7}{3^x + 1} = \frac{2b}{9^x - 2 \cdot 3^x - 3}$;

4) $\frac{4^x - 2a \cdot 2^x + a^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = 0$.

5.7. Для любого допустимого x найти y , удовлетворяющий уравнению.

1) $2x^2 - 3x \log_2 y - 2 \log_2^2 y = 0$;

2) $\log_{|x|}(x(y^2 + 2y - 2)) = 1$;

3) $\log_x y + \log_y x = \frac{10}{3}$;

4) $\log_x(x + y) + \log_y(x + y) = 0$;

5) $\log_x\left(\frac{x}{y}\right) + \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

Решить уравнения при каждом значении параметра.

$$5.8. 1) (\log_3(x-5) + 2) \sqrt{\frac{x+3a}{a-x}} = 0;$$

$$2) (\log_3(x+15) + 2) \sqrt{\frac{x+2b}{b-3x}} = 0;$$

$$3) (\lg^2(x+1) - \lg(x+1)^3 + 2)\sqrt{x-a} = 0;$$

$$4) (\log_3^2(x+6) - 6\log_{\sqrt[3]{3}}\sqrt{x+6} + 8)\sqrt{x-c-3} = 0.$$

$$5.9. 1) \log_4(x-5) = -\log_{0,25}(|a-x|-3);$$

$$2) \log_3(6-x) = 2\log_9(3-|b-x|);$$

$$3) \log_d(4x+d) = \log_d(x^2-4);$$

$$4) \log_3(31-|x^2-6x+5|) = c;$$

$$5) |49^{\sqrt{x}} - 4 \cdot 7^{\sqrt{x}} - 5| = a.$$

5.10. Найти наименьшее значение p , при котором уравнение $\log_3(x^2 + px + 3) = 2$ имеет решение на отрезке $[1; 3]$.

5.11. Найти значения параметра p , при которых расстояние между решениями уравнения $x^2 + x \log_2 \frac{p+2}{p} - \log_2 p \log_2(p+2) = 0$ больше 3.

5.12. Изобразить на плоскости множество точек $A(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям.

$$1) \log_x(4x - 2y - y^2) = \log_{xy}(x^2 y^2);$$

$$2) \log_{xy}((x-1)^2 + 2|y|) = \log_{xy}(1 + y^2);$$

$$3) \log_{y-x+7}(x+6y) = \log_{y-x+7}(y^2+7);$$

$$4) \log_{\frac{|x|}{y}}(5xy - x^2 y - y^2 x) = \log_{\frac{x}{y}} 6(5-x-y).$$

5.13. Решить неравенства при каждом значении параметра a .

$$1) (a-6) \cdot 2^{\sqrt{x-3}} < a-2; \quad 2) (a-5) < (2a-3) \cdot 4^{-\sqrt{x-2}}.$$

5.14. Решить неравенства при каждом значении параметра.

$$1) \frac{x \lg^2(x-a)}{x-4} \leq 0; \quad 2) (-x^2 + \sqrt{5}x - 6) \frac{x-a}{\log_3(x-2)} < 0;$$

$$3) \frac{(x+1) \log_3^2(x-a)}{x-2} \geq 0; \quad 4) \frac{x^2}{x-4} \log_{1/3}(x+a) < 0;$$

$$5) (x+2)(x-3) \log_3^2(2x+b) \leq 0.$$

5.15. Найти значения параметра, при которых неравенства выполняются при всех $x \in \mathbb{R}$.

$$1) a \cdot 9^x + (1-a) \cdot 3^x - \frac{7}{4}a + 1 > 0;$$

$$2) c \cdot 5^{-x} - (5c+3) \cdot 5^x + c - 1 < 0;$$

$$3) \log_{\frac{3a-6}{2}} \left(\frac{2(a-1)x^2 + 2a-4}{x^2+1} \right) < 0;$$

$$4) \log_{\frac{9+4a}{16}} \left(\frac{(4a-5)x^2 + 2x + 4a-5}{2(x^2+1)} \right) > 1;$$

$$5) \log_{\frac{b+1}{b+2}} (x^2 + 3) > 1;$$

$$6) \log_{\frac{1}{2}a(a-1)} (2|x|+6) > 1.$$

5.16. Изобразить на плоскости множество точек $A(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам. В ответе указать площадь полученной области.

$$1) \log_{|x|+|y|} (x^2 + y^2) \leq \log_{|x|+|y|} (2x);$$

$$2) \log_{xy+1} |x+y-3| \leq \log_x x^2 - \log_{\sqrt{y}} y.$$

5.17. Найти значение параметра p , при котором число $x = 1$ является решением уравнения

$$3\log_{xp-4}(p-2x) + \log_{\sqrt{p-2x}}(p-4x)^2 = \log_{\sqrt[4]{p+5x}}(xp+5)^2.$$

В ответе записать наименьшее целое значение p .

5.18. Найти значение параметра p , при котором число $x = 2$ является решением неравенства

$$\log_{|p|}(px+3) > \log_{p^2}(x^3 + 8x^2 + 7 + p).$$

В ответе записать наименьшее целое значение p .

5.19. Найти значение y , при которых неравенство

$$y\log_2^2 x + 4y\log_2 x + y + 27 > 0$$

выполняется при всех $x > 0$. В ответе записать наименьшее возможное значение y .

5.20. Совокупность точек $A(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_2 x \leq \log_2(2x+3y), \\ \log_3(x+2y) \geq \log_3(3-y), \\ x \leq p, \end{cases}$$

образуют область на плоскости. Найти площадь этой области в зависимости от p .

5.21. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$. Найти наибольшее возможное при этом значение выражения $f(x, y) = \log_2|x+y|$.

5.22. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x+y \leq 18$. Найти наибольшее возможное при этом значение выражения $f(x, y) = \log_3 x + \log_3 y$.

5.23. Найти значение параметра, при котором неравенство выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$.

$$1) \log_3(x^2 + 1) + \log_3 6 \geq -\log_{1/3}(2bx^2 + x + 2b);$$

$$2) 1 + \log_5 3 - \log_{1/5}(x^2 + 1) \geq \log_5(3cx^2 + 4x + 3c).$$

5.24. Решить системы уравнений при всех значениях параметра a .

$$1) \begin{cases} 6 \cdot 5^{-x} + 5 \cdot 7^{\sqrt{y}} = d, \\ 7 \cdot 5^{-x} + 6 \cdot 7^{\sqrt{y}} = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 11 \cos y = c, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \cos y = 1. \end{cases}$$

5.25. Найти значение параметра, при котором системы уравнений не имеют решений.

$$1) \begin{cases} 2 \cdot 3^x + (9a^2 - 2) \log_7(y - 3) = 3a, \\ 3^x + \log_7(y - 3) = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2 \log_5 x + (a^2 - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^y = 6a - 2, \\ \log_5 x + \left(\frac{1}{2}\right)^y = 5. \end{cases}$$

5.26. Найти значение параметра, при котором системы уравнений имеют единственное решение.

$$1) \begin{cases} 3 \cdot 2^x \cdot \log_2(y + 2) = a - 1, \\ 2^x + \log_2(y + 2)^2 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5^y \cdot \log_5(2x + 4) = a, \\ 2 \cdot 5^y - \log_5(2x + 4) = 2. \end{cases}$$

5.27. Найти значение параметра, при котором уравнения имеют единственное решение.

$$1) \log_{cx-7} \sqrt{8x - x^2 - 15} = 1; \quad 2) \log_{kx-7} \sqrt{6x - x^2 - 8} = \frac{1}{2};$$

$$3) \log_{1/9}(x^2 + x - 12) = -\log_9(kx - 37);$$

$$4) 1 - \log_{1/2} \frac{1}{kx + 5} + \frac{1}{2} \log_2(4 - x) = 0.$$

5.28. Найти значение параметра, при котором уравнение:

$$1) (b - x + 2)(\log_3(6 - x) + 1) = 0 \text{ имеет два различных решения};$$

$$2) \lg(x|x - 2|) = \lg\left(\frac{x}{2} + a\right) \text{ имеет три различных решения};$$

$$3) \log_2(x^2 + |x| - 2) = \log_2\left(\frac{x}{2} + a\right) \text{ имеет два различных решения}.$$

5.29. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $56 \cdot 3^x > 9^x - a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

5.30. Найти все значения параметра b , при которых наименьшее значение функции

$y = \log_2(1 + 3\sin^2 x)[\log_2(1 + 3\sin^2 x) - b - 1] - b^2 + 3b + 7$
равно 2.

5.31. Найти все значения параметра d , при которых наименьшее значение функции

$$y = \log_{1/3} \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{81} \cos^2 x \right) \left[\log_{1/9} \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{81} \cos^2 x \right) - d - 3 \right] + d^2 - d - 11$$

не меньше (-1) .

5.32. Решить неравенство $\log_p x > \log_x p$ для всех значений p .

5.33. При каких значениях параметра p уравнение

$$\log_2 \sin \left(\frac{\pi x}{1+x^2} \right) + \log_3 \left(\cos \frac{\pi p x}{1+x^2} \right) = 0$$

имеет решение? Найти это решение.

5.34. Пусть x – решение неравенства

$$\log_2 (\sin(\pi p x) + \cos(\pi p x)) \geq \frac{1}{2}.$$

Для каждого целого $p > 2$ найти максимальное значение величины $f(x) = x(2-x)$.

5.35. Для каждого допустимого p найти область значений функции $f(x) = \log_p(x^2 - 2px + p^2(1 + 2^{p-1}))$.

5.36. Найти наибольшее значение x , удовлетворяющее неравенству $y^2 \log_2(x+1) + 2y \log_2(x+1) + \log_4(x+3) \geq 0$ при всех y .

6. Построение графиков

– А –

Построить графики функций.

6.1. 1) $y = 2^x$; 2) $y = 2^{-x}$; 3) $y = 2^{x-5}$;
4) $y = 2^x - 5$; 5) $y = 2^{x+1} + 3$; 6) $y = 5 - 2^x$.

6.2. 1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$;
4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$; 5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} - 1$; 6) $y = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$.

6.3. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_3(-x)$; 3) $y = \log_3(x - 3)$;
4) $y = \log_3(x) - 3$; 5) $y = \log_3(x + 2) + 1$; 6) $y = 3 - \log_3(x - 1)$.

6.4. 1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$;
3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$; 4) $y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) + 4$;
5) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) - 3$; 6) $y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$.

6.5. Построить графики функций и уравнений.

1) $y = 2^{|x|-1}$; 2) $y = 2^{|x-2|}$;
3) $|y| = 2^{|x|} - 1$; 4) $y = 2^{\cos x}$;
5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2 x}$; 6) $|y + 2| = 2^x - 4$.

6.6. Найти области определения функций.

1) $f(x) = \sqrt{0,5^{x-3} - 0,5}$; 2) $f(x) = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$;

$$3) f(x) = \sqrt{1 - 6^{x^2} \cdot 36^x}. \quad 4) f(x) = \ln \left(9^{1.5-0.3x} - \frac{1}{27} \right).$$

$$5) f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} \log_2(x^2 - 8).$$

6.7. Найти область значений функций.

$$\begin{array}{lll} 1) y = 2^{\sin x}; & 2) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x^2}; & 3) y = 16^{x^2-x}; \\ 4) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos^2 x}; & 5) y = (4)^{x^2+\frac{1}{2}}; & 6) y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{6x-x^2}. \end{array}$$

6.8. Найти области значений функций.

$$\begin{array}{ll} 1) y = \log_2(x^2 + 16); & 2) y = \log_{1/2}(16 - x^2); \\ 3) y = \log_3(\cos^2 x); & 4) y = 3 - 2^{x^2}; \\ 5) y = 4 - \log_3(x^2 - 6x + 18). \end{array}$$

6.9. Найти области значений функций.

$$\begin{array}{ll} 1) g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x^2); & 2) g(x) = 2^x + 2^{-x}; \\ 3) g(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}}; & 4) g(x) = 3^{3-x} + 3^{x+1}; \\ 5) g(x) = \log_{0.25} \left(\frac{30 + \sqrt{4 + \log_4^2 x}}{2} \right); & \\ 6) g(x) = \log_{0.5} \left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \right). \end{array}$$

6.10. Найти количество целых чисел, принадлежащих области значений функции $g(x) = 16 \log_{\frac{1}{16}} \frac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

III. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ, ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ, СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1. Область определения функции

– А –

Найти область определения функции.

1.1. 1) $y = \sqrt{2-3x}$; 2) $y = \sqrt{\frac{1-x}{2x+2}}$;
3) $y = \sqrt{2+3x-5x^2}$; 4) $y = \sqrt{\frac{(x-2)(3-x)}{x+1}}$;
5) $y = \frac{x}{x-1} + \sqrt{\frac{x+3}{8+2x-x^2}}$; 6) $y = \sqrt{x+2} \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$;
7) $y = \sqrt{|x-2|-3}$; 8) $y = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-2}\right|+4}$;
9) $y = \sqrt{\frac{|x-1|-|x+2|}{x-3}}$; 10) $y = \sqrt{\frac{6+x-x^2}{|x-1|}}$.

1.2. 1) $y = \operatorname{tg} 3x$; 2) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; 3) $y = \operatorname{tg}(2x-3)$;
4) $y = \frac{1}{\cos x}$; 5) $y = \frac{1}{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$;
6) $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$; 7) $y = \cos \frac{1}{x}$;
8) $y = \sin \frac{2x+1}{1-x}$; 9) $y = \cos\left(\frac{1}{2-|x-3|}\right)$.

1.3. 1) $y = \arcsin(3x+2)$; 2) $y = \arccos(3-x^2)$;

$$3) y = \arccos\left(5 - \frac{x}{2}\right);$$

$$4) y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$5) y = \arccos\left(x^2 + \frac{3}{4}\right);$$

$$6) y = \arcsin\left(\frac{3-x}{2x+1}\right);$$

$$7) y = \arccos\left(\frac{x+1}{2x-1}\right).$$

$$1.4. 1) y = \frac{1}{2^x - 4};$$

$$2) y = \frac{3}{\frac{1}{9} - 3^x};$$

$$3) y = \frac{x+2}{16^x - 8}.$$

$$1.5. 1) y = \log_2(3 - 2x);$$

$$2) y = \log_{1/3}(5x - 2);$$

$$3) y = \log_4(x^2 - 3);$$

$$4) y = \log_{1/2}(3x + 1);$$

$$5) y = \log_3(4 - x^2);$$

$$6) y = \lg\left(\frac{x+1}{x-1}\right);$$

$$7) y = \log_{1/3}(2^x - 8);$$

$$8) y = \log_{x-3}5;$$

$$9) y = \frac{1}{\log_5(5 - x^2)};$$

$$10) y = \frac{1}{\log_{1/75}(3x + 5)}.$$

– В –

1.6. Сколько целых чисел принадлежит области определения функции.

$$1) y = \arcsin \frac{x+1}{3-x} + \sqrt{5+x}; \quad 2) y = \frac{\arccos \frac{x+3}{x+1}}{\sqrt{x+7}};$$

$$3) y = \log_{10-\sqrt{x}}(\sqrt{x+2}-3); \quad 4) y = \log_3(\sin(\arcsin(2x-3)));$$

$$5) y = \frac{\log_2\left(1 - \sin \frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

1.7. Заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. Найти область определения функций при: а) $f(x) \cdot g(x)$; б) $f(x) : g(x)$; в) $f(g(x))$; г) $g(f(x))$.

- 1) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 - 3$;
- 2) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$;
- 3) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{8-x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$;
- 4) $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$, $g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{1-x}$;
- 5) $f(x) = \frac{1}{|x| + |x-4| - 4}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-5}$.

1.8. Найти все значения x , для которых число $\frac{x-2}{x+1}$ не принадлежит области определения функции:

- 1) $y = \log_2 \left(\frac{x-1}{x+3} \right)$;
- 2) $y = \arcsin(2x+3)$;
- 3) $y = \frac{\arccos(x+2)}{\log_3(x+3)}$;
- 4) $y = \log_4(|x-2| + |x+4| - 6)$;
- 5) $y = \sqrt{x+2} \log_2 |x+1|$.

1.9. Область определения функции $y = f(x)$ совпадает с промежутком $(-1; 2]$. Найти область определения функций.

- 1) $y = f(2x+3)$;
- 2) $y = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;
- 3) $y = f(|x+1|)$;
- 4) $y = f(2\sin x)$;
- 5) $y = f\left(\frac{1}{2}|x+1| - \frac{1}{2}|x-3| + 1\right)$.

1.10. На координатной плоскости изобразить множество точек (x, y) для которых существует число u , равное:

- 1) $u = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$;
- 2) $u = \sqrt{x-|xy|}$;
- 3) $u = \log_{x-1}(x-y^2)$;

$$4) u = \arcsin(x^2 + y^2 - 3);$$

$$5) u = \frac{\arccos(xy)}{x + |x|}.$$

– С –

1.11. При каких значениях параметра a число 3 не принадлежит области определения функции $y = \sqrt{\frac{ax^2 + (a+1)x - 9}{|ax - 6|}} \cdot \operatorname{tg}(\pi x - a)$?

1.12. При каких значениях параметра a область определения функции $y = \log_{a-x}(ax + a - 2)$ содержит отрезок $[1; 2]$?

1.13. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x) - 1}}$, где $g(x) = \frac{(2a-3)x^2 + 2(2-a)x + (2a-3)}{(2a)(x^2 + 1)}$ определена для всех x ?

1.14. Функция $y = f(x)$ имеет отрезок $[9; 10]$ своей областью определения. При каком значении a областью определения функции $y = f(ax + 2 - 9a)$ является отрезок $[2; 5]$?

2. Область значений функции

– А –

Определить область значений функций.

$$2.1. \quad 1) y = 25 - x^2; \quad 2) y = \sqrt{25 - x^2}; \quad 3) y = 3 - \sqrt{25 - x^2};$$

$$4) y = 4x - x^2; \quad 5) y = \sqrt{4x - x^2}; \quad 6) y = 5 - \sqrt{4x - x^2};$$

$$7) y = -x^2 - 10x - 16; \quad 8) y = \sqrt{-x^2 - 10x - 16};$$

$$9) y = 2 - \sqrt{-x^2 - 10x - 16}.$$

2.2. 1) $y = 2 - 3\sin x$;

2) $y = 2\cos 3x - 5$;

3) $y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sin 2x$;

4) $y = 4\cos x - 3$;

5) $y = 2\left|\cos \frac{x}{2}\right| - 5$;

6) $y = -2 - 7|\sin 3x|$;

7) $y = \cos^2 2x + 4$;

8) $y = -3 - 2\sin^2 \frac{x}{3}$;

9) $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos x$.

2.3. 1) $y = \arctg 2x$;

2) $y = \frac{3\pi}{2} - 2\arcsin x$;

3) $y = 4\pi - \arccos 3x$;

4) $y = 4\arcsin \frac{x}{3} - 3\pi$;

5) $y = 2\pi - 6\arccos 3x$;

6) $y = \pi - 2\arctg x$.

2.4. 1) $y = \cos x$, где $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $y = \sin x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$;

3) $y = \cos x$, где $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

4) $y = \sin x$, где $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$;

5) $y = \cos 2x$, где $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right)$;

6) $y = \sin x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

2.5. 1) $y = \sin x - \sin^2 x$;

2) $y = 2\cos^2 x + \cos x$;

3) $y = 2\cos x - 3\sin^2 x$;

4) $y = \sin x + \cos x$;

$$5) y = \sin x - \sqrt{3} \cos x;$$

$$6) y = \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x;$$

$$7) y = 5 \sin x + 12 \cos x;$$

$$8) y = 3 \cos x - 4 \sin x;$$

$$9) y = \frac{1}{\sin x};$$

$$10) y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$2.6. 1) y = x + \frac{1}{x};$$

$$2) y = 4x + \frac{1}{x};$$

$$3) y = 4x + \frac{1}{36x};$$

$$4) y = x^2 + \frac{1}{x^2};$$

$$5) y = (x-2)^2 + \frac{1}{9(x-2)^2};$$

$$6) y = \sin x + \frac{1}{\sin x};$$

$$7) y = 5 - \frac{1}{x^2} - x^2;$$

$$8) y = 6 - \frac{1}{\sin^2 x} - 4 \sin^2 x.$$

$$2.7. 1) y = 2^x;$$

$$2) y = 2^{x^2};$$

$$3) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2};$$

$$4) y = 3^{x^2-2};$$

$$5) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1};$$

$$6) y = 2^{x^2-4x};$$

$$7) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x};$$

$$8) y = 4^{1-x^2};$$

$$9) y = \left(\frac{1}{81}\right)^{x-x^2};$$

$$10) y = 4^{1-|1-x|};$$

$$11) y = 2^{x+\frac{1}{x}};$$

$$12) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}+x^2};$$

$$13) y = 2^{\sin x};$$

$$14) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sin^2 x};$$

$$15) y = 4^{2-\cos 2x};$$

$$16) y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3 \sin^2 x};$$

$$17) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-[2x+3]}.$$

$$2.8. 1) y = \log_2(4 + x^2);$$

$$2) y = \log_3(9 - x^2);$$

3) $y = \log_{1/3}(3 + 2x^2);$

4) $y = \log_{1/4}\left(x + \frac{1}{x}\right);$

5) $y = 3 - \log_5(x^2 + 10x + 50);$

6) $y = \log_{1/8}(2 + 3^x);$

7) $y = \log_3^2(x^2 - 4x + 13).$

– В –

2.9. 1) $y = \frac{x+1}{x-3};$

2) $y = x^2 - 2x + 3;$

3) $y = \sqrt{3 - 4x - 7x^2};$

4) $y = 3\sin(2x + 3) + 4\cos(2x + 3 + \pi);$

5) $y = 5 - 3\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3\right);$

6) $y = 3 + 2\sqrt{4 - x^2};$

7) $y = \frac{\cos x - 2}{3 - \cos x};$

8) $y = \cos 2x + \cos x;$

9) $y = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{1 - x^2}\right);$

10) $y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}.$

2.10. Сколько целых значений принимает функция.

1) $y = \sqrt{12 - \log_2(5 - 6\sin x \cos x)};$ 2) $y = \frac{4}{\sqrt{16x^2 - 64x + 65}};$

3) $y = 12\sin\left(\frac{\sqrt{\pi^2 - 36x^2}}{6}\right);$

4) $y = \arccos^2(3 + 2x - x^2);$

5) $y = \sqrt[4]{18 - |x + 1| - |x - 3|}.$

2.11. Функция $y = f(x)$ имеет отрезок $[-2; 3]$ областью определения. Найти область значений функций.

1) $y = f(2x - 3);$

2) $y = 2f(x) - 3;$

3) $y = |2f(x) - 3|;$

4) $y = f^2(3x - 2);$

5) $y = \sqrt{f(\log_2 x)}.$

2.12. Заданы две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Найти область значений функций: а) $y = \sqrt{f(x)}$; б) $y = g^2(x)$; в) $y = f(g(x))$; г) $y = g(f(x))$.

$$1) f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+2};$$

$$2) f(x) = 1-x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x};$$

$$3) f(x) = \sin x, \quad g(x) = \arccos(2x-3);$$

$$4) f(x) = |x+2| - |x-3|, \quad g(x) = 4-x^2.$$

2.13. Пусть $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Найти область значений функции $y = f(g(x))$ для функций:

$$1) g(x) = \frac{4x}{1+x^2} + 1; \quad 2) g(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x - \frac{5}{2};$$

$$3) g(x) = |x+1| + 2; \quad 4) g(x) = f(x); \quad 5) g(x) = -\frac{1}{2\pi} \arccos(x-1)^2.$$

– С –

2.14. При каких значениях параметра a область определения функции $f(x) = \frac{(a+2)x + (a+6)}{(2a+3)x - 3a - 4}$ совпадает с множеством ее значений?

2.15. При каких значениях параметра a число $A = 0$ принадлежит области значений функции $f(x) = ax^2 - (a+1)x + a + 1$?

2.16. При каких значениях параметра a область значений функции $f(x) = \frac{ax+1}{(a+1)x+a}$ не содержит хотя бы одно из чисел $A = 2$ и $B = 3$?

2.17. При каких значениях параметра a область значений функции $f(x) = ax^2 + (2a - 3)x + 4a$ содержит полуось $(0; +\infty)$?

2.18. Для всех значений a найти область значений функции
$$f(x) = \frac{(a+1)x}{x^2 + (a+1)^2}.$$

3. Четность и нечетность функции

– А –

3.1. Среди предложенных функций выбрать нечетные.

1) $y = \sin \frac{x}{x^2 + 1};$

2) $y = \frac{x-1}{x+1};$

3) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+1};$

4) $y = x \sin 2x.$

3.2. Среди предложенных функций выбрать четные.

1) $y = \sin(|x|);$

2) $y = \sin|x + \pi|;$

3) $y = \arccos 2x;$

4) $y = x \operatorname{arctg} 2x.$

3.3. Какое из предложенных множеств E может быть областью значений нечетной функции?

1) $E = (0; +\infty);$

2) $E = [-1; 1];$

3) $E = [-3; 2] \cup [2; 3];$

4) $E = \left[\frac{1}{2}; 2 \right].$

3.4. При каких значениях параметра a множество D_a может быть областью определения четной функции?

1) $D_a = [2a - 3; 2 - a];$

2) $D_a = [\sin a; \cos a].$

3.5. При каких значениях параметра a функции нечетные.

1) $y = ax + a - 2;$

2) $y = \frac{(a^2 + a - 2)x + a + 1}{ax + a + 2};$

$$3) y = \frac{ax + \cos a}{x^2 + 1}.$$

3.6. При каких значениях параметра a функции четные?

$$1) y = ax^2 + (a - 3)x + a^2; \quad 2) y = |ax + a^2 - 1|;$$

$$3) y = \cos(x + 2a).$$

3.7. Пусть $f(x)$ – нечетная, а $g(x)$ – четная функции, определенные для всех x . Укажите, какие из следующих функций четные, нечетные или общего вида.

$$1) f^2(x);$$

$$2) f(x)g(x);$$

$$3) g(f(x));$$

$$4) f(x) + g(x);$$

$$5) f(g(x)).$$

3.8. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – нечетные функции, определенные на всей оси. Укажите, какие из функций четные, нечетные, общего вида?

$$1) f(x) + g(x);$$

$$2) f(x)g(x);$$

$$3) f(g(x));$$

$$4) g(x)|f(x)|;$$

$$5) g^2(x)f(x).$$

3.9. Доказать, что для любой функции $f(x)$, определенной для всех x , функция $g_1(x) = f(x) + f(-x)$ – четная, $g_2(x) = f(x) - f(-x)$ – нечетная.

– В –

3.10. Пусть $f(x)$ – нечетная функция, определенная на всей оси. При каких значениях параметра a приведенные функции являются нечетными? В ответе указать сумму таких a .

$$1) y = af(ax + a^2 + a - 7);$$

$$2) y = af(a^2x) + \sqrt{a+8} - |a|;$$

$$3) y = af(x) + a^2x + \left(\frac{3}{2}a + |a| + |a+1|\right)x^2.$$

3.11. Пусть $f(x)$ – четная функция, определенная на всей оси. При каких значениях параметра a приведенные функции являются четными? В ответе указать сумму таких a .

- 1) $y = f(x^2 + (a^2 + 2a - 6)x + 3)$;
- 2) $y = f(ax + (a + 2)(a - 3))$;
- 3) $y = f((1 - 3a + 5a^2)\sin x + a\cos x)$.

3.12. Доказать, что если $x = 0$ принадлежит области определения нечетной функции $f(x)$, то $f(0) = 0$.

3.13. Доказать, что любая функция $f(x)$, определенная для всех x , может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

– С –

3.14. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4 + \log_2(2^{a+2} - 12) = a - |x|$$
имеет единственное решение?

3.15. При каких значениях параметра a уравнение

$$\arcsin x = \frac{x + a|x|}{x}$$

имеет два решения?

4. Периодичность

– А –

4.1. Найти наименьший положительный период $T > 0$ функции.

- 1) $y = \sin 2x$;
- 2) $y = \cos(3x + 2)$;
- 3) $y = \operatorname{tg} \frac{3x - 4}{4}$;
- 4) $y = \sin^2 \frac{x}{3}$;
- 5) $y = 2^{\cos^4 2x}$.

– В –

4.2. Найти наименьший положительный период $T < 0$ функций.

- 1) $y = \sin 2x + \sin 3x$; 2) $y = \cos 121x - 2\operatorname{tg}\frac{x}{7}$;
 3) $y = \sin \frac{x}{2} + \sin 3x + \operatorname{tg}\frac{2x}{3}$; 4) $y = \sin^2 x + \cos^2 2x + \operatorname{tg}^2 3x$.

4.3. Функция $f(x)$ имеет период $T = 2$ и на промежутке $[7; 9)$ определяется формулой:

- 1) $f(x) = 8 - x$; 2) $f(x) = |x - 8| - x$;
 3) $f(x) = (x - 8)^2$; 4) $f(x) = (x - 7)^2$.

Найти: а) значение $f(3) \cdot f(2) - f(1)$; б) область значений E_f ; в) решение уравнения $f(x) = 0$.

– С –

4.4. Доказать, что функция $y = \sin x + \sin \sqrt{2} x$ не является периодической.

4.5. Пусть функция $f(x) = x - [x]$, где $[x]$ – целая часть числа x .

- 1) Доказать, что функция $f(x)$ периодическая, и найти ее период.
 2) Найти наименьший положительный период функции $f(2x + 3)$.

4.6. Периодическая ($T = 4$) функция $f(x)$ на отрезке $[-2; 2]$ задается формулой $f(x) = x^2 - 2$. При каких значениях параметра a уравнение $f(ax) = 0$ имеет на интервале $(-2; 2)$ ровно четыре решения.

IV. ПРОГРЕССИИ

1. Арифметическая прогрессия

– А –

1.1. Найти:

- 1) номер члена арифметической прогрессии, равного 26, если первый член равен 2, а разность равна 3;
- 2) разность арифметической прогрессии, если первый член равен -5 , а восьмой член равен 16;
- 3) пятый член арифметической прогрессии, если первый член равен -6 , а разность равна -3 ;
- 4) первый член арифметической прогрессии, если разность равна 3, а десятый член равен 48;
- 5) третий член арифметической прогрессии равен -11 , разность равна 7. Найти девятый член прогрессии;
- 6) четвертый член арифметической прогрессии равен 17, разность равна 2. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

1.2. Найти первые шесть членов арифметической прогрессии, если:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1) $a_1 = 2$ и $d = 1$; | 2) $a_2 = 4$ и $d = -2$; |
| 3) $a_3 = -1$ и $d = \frac{1}{2}$; | 4) $a_4 = -1$ и $d = -2$. |

1.3. Найти:

- 1) девятнадцатый член арифметической прогрессии, если известно, что ее девятый член равен -24 , а разность прогрессии равна -3 ;
- 2) номер члена арифметической прогрессии, равного 26, если десятый член арифметической прогрессии равен 20, а разность 3;
- 3) сумму пятого и девятого членов арифметической прогрессии, если седьмой член равен 12;
- 4) разность тринадцатого и девятого членов арифметической прогрессии, если разность равна 4.

1.4. Между числами -5 и 7 вставили три числа, которые с данными числами образуют арифметическую прогрессию. Определить разность этой прогрессии.

1.5. Определить, сколько чисел вставили между числами 5 и 35 , если вставленные числа образуют с данными числами арифметическую прогрессию с разностью 6 .

1.6. Если между двумя числами вставить четыре числа, то они образуют с данными числами арифметическую прогрессию с разностью 6 . Определить эти числа, если их сумма равна 42 .

1.7. Между числом 4 и неизвестным числом вставили 6 чисел, при этом все числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 10 . Найти неизвестное число.

1.8. В амфитеатре расположено 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 20 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает кинотеатр?

1.9. Велосипедист выехал из пункта A в пункт B . В первый час он проехал 8 км, а в каждый следующий час на 1 км больше, чем в предыдущий. Сколько часов он был в пути, если расстояние AB равно 38 км?

1.10. Определить глубину колодца, если за его рытье уплачено 238 тыс. руб., причем за каждый метр глубины платили на 2 тыс. руб. больше, чем за предыдущий, а за работу на последнем метре заплатили 30 тыс. руб.

1.11. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту на 25 м меньшую, чем предыдущая. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

1.12. Найти сумму:

- 1) 75 членов последовательности с общим членом $a_n = 3n - 19$;
- 2) 40 членов последовательности с общим членом $a_n = 5n + 7$;
- 3) 22 членов последовательности с общим членом $a_n = 2(n+2)$;
- 4) 21 членов последовательности с общим членом $a_n = -n/2 + 2$.

1.13. Найти формулу общего члена арифметической прогрессии вида $a_n = f(n)$, для которой:

1) $a_1 = 5, a_2 = -5$;

2) $a_3 = 4, a_5 = 8$;

3) $a_4 = 10$,

4) $a_{10} = 12, a_{20} = 22$.

1.14. Найти наибольшее число d , при котором следующие числа могут быть членами арифметической прогрессии с разностью d :

1) 2, 21 и 59;

2) 7, 15 и 31;

3) 4, 41 и 45;

4) 5, 17 и 45?

1.15. Сумма восемнадцатого и сорокового членов арифметической прогрессии равна 0. Найти двадцать девятый член этой прогрессии.

1.16. Сумма первого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 22. Найти шестой член этой прогрессии.

1.17. Сумма десятого и шестнадцатого членов арифметической прогрессии равна -8. Найти тринадцатый член этой прогрессии.

1.18. Сумма второго и десятого членов арифметической прогрессии равна $34/21$. Найти шестой член этой прогрессии.

– В –

1.19. Сумма третьего, седьмого, восемнадцатого и тридцать второго членов арифметической прогрессии равна 84. Найти семнадцатый член прогрессии.

1.20. Первый член арифметической прогрессии равен a , последний член b , а разность d . Найти номер последнего члена прогрессии.

1) $a = 7, b = 112, d = 3$;

2) $a = -5, b = 83, d = 4$;

3) $a = 113, b = 878, d = 5$;

1) $a = 325, b = -233, d = -6$.

1.21. Найти сумму:

1) всех двузначных четных чисел;

2) всех двузначных нечетных чисел;

3) всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3;

4) всех двузначных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

1.22. Найти сумму:

- 1) всех трехзначных нечетных чисел;
- 2) всех трехзначных чисел, которые при делении на 11 дают в остатке 9;
- 3) всех трехзначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 5;
- 4) всех трехзначных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 11.

1.23. Решить уравнения:

1) $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$;

2) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$;

3) $(x - 1)/x + (x - 2)/x + (x - 3)/x + \dots + \frac{(x - (x - 1))}{x} = 3$, где x – целое

положительное число;

4) $(1 + x) + (1 + 2x) + \dots + (1 + 10x) = 175$.

1.24. Найти первый член возрастающей арифметической прогрессии, если:

- 1) сумма ее первого и четвертого членов равна 16, а произведение второго и третьего членов равно 60;
- 2) сумма второго и четвертого членов равна 20, а произведение первого и пятого членов равна 36;
- 3) сумма второго и шестого членов равна 28, а произведение первого и седьмого членов равно 52;
- 4) сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 20, а произведение второго и четвертого равно 64.

1.25. Сумма шестого и девятого членов арифметической прогрессии равна 20, а их произведение равно 64. Найти десятый член этой прогрессии, если ее первый член отрицателен.

1.26. Сумма второго и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 16, а их произведение равно 55. Найти третий член этой прогрессии.

1.27. Разность четвертого и первого членов убывающей арифметической прогрессии равна -12 , а их произведение равно 160 . Найти шестой член этой прогрессии.

1.28. Найти возрастающую арифметическую прогрессию (т.е. найти a_1 и d), у которой:

1) сумма первых трех членов равна 27 , а сумма квадратов этих же трех членов равна 275 ;

2) сумма первых трех членов равна 18 , а сумма квадратов этих же трех членов равна 116 ;

3) сумма первых трех членов равна 0 , а сумма квадратов этих же трех членов равна 98 ;

4) сумма первых трех членов равна 6 , а сумма квадратов этих же трех членов равна $16,5$.

1.29. Найти арифметическую прогрессию (т.е. найти a_1 и d), у которой:

1) сумма второго, третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равна 15 , а их произведение равно 105 ;

2) сумма первого, второго и третьего членов арифметической прогрессии равна 3 , а их произведение равно -15 ;

3) сумма третьего, четвертого и пятого членов арифметической прогрессии равна -24 , а их произведение равно -480 ;

4) сумма второго, третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12 , а их произведение равно 48 .

1.30. Образуют ли арифметическую прогрессию положительные корни уравнения, расположенные в порядке возрастания:

$$1) \sin x = 0; \quad 2) \sin x = \frac{1}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}; \quad 4) \cos x = 0.$$

1.31. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) сумма седьмого и второго членов арифметической прогрессии равна 35 , а разность квадратов этих членов равна 525 ;

2) сумма девятого и третьего членов арифметической прогрессии равна 30 , а разность квадратов этих членов равна 360 ;

3) сумма седьмого и четвертого членов арифметической прогрессии равна (-38) , а разность квадратов этих членов равна 456;

4) сумма одиннадцатого и пятого членов арифметической прогрессии равна 15, а разность квадратов этих членов равна 135.

1.32. Найти разность арифметической прогрессии, у которой:

1) сумма первых одиннадцати членов прогрессии равна 242, а сумма первых пяти членов равна 65;

2) сумма первых десяти членов прогрессии равна 190, а сумма первых двух членов равна 6;

3) сумма первых семи прогрессии равна 21, а сумма первых трех членов равна -9 ;

4) сумма первых двенадцати членов прогрессии равна 270, а сумма первых четырех членов равна 10.

1.33. Найти сумму:

1) первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма второго, пятого, седьмого и двадцать восьмого членов этой прогрессии равна 79;

2) первых тридцати членов арифметической прогрессии, если сумма четвертого, пятого, восьмого и одиннадцатого членов этой прогрессии равна 120;

3) первых шести членов арифметической прогрессии, если сумма первого, второго, пятого и шестого членов этой прогрессии равна -4 .

1.34. Сумма второго и шестнадцатого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 52, а произведение этих членов равно 235. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.

1.35. Сумма второго и двенадцатого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 8, а произведение этих членов равно 9,75. Найти сумму первых восьми членов этой прогрессии.

1.36. От деления шестнадцатого члена арифметической прогрессии на пятый в частном получается 3, а от деления двадцать первого члена на шестой в частном получается 3 и 12 в остатке. Найти сумму первых трех членов прогрессии.

1.37. От деления пятого члена арифметической прогрессии на второй в частном получается 2 и 2 в остатке, а от деления одиннадцатого члена на седьмой в частном получается 1 и 12 в остатке. Найти сумму первых четырех членов прогрессии.

1.38. От деления восьмого члена арифметической прогрессии на третий в частном получается 3, а от деления семнадцатого члена на девятый в частном получается 1 и 16 в остатке. Найти сумму первых четырех членов прогрессии.

1.39. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, для которой:

1) произведение третьего и шестого членов равно 406, а при делении девятого члена прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6;

2) произведение 2-го и 5-го членов равно 27, а при делении 7-го члена прогрессии на ее третий член в частном получается 2, а в остатке 3;

3) произведение третьего и девятого членов равно 55, а при делении двенадцатого члена прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 2.

1.40. Найти:

1) 20-й член возрастающей арифметической прогрессии, если $a_2 a_5 = 52$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$;

2) 12-й член возрастающей арифметической прогрессии, если $a_1 a_6 = 24$, $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$;

3) 15-й член возрастающей арифметической прогрессии, если $a_1 a_5 = 12$, $a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 16$.

1.41. Внутренние углы многоугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 5 градусам. Наименьший угол 120 градусов. Сколько сторон имеет многоугольник?

1.42. Внутренние углы десятиугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 10 градусам. Определите наименьший угол многоугольника.

1.43. Внутренние углы девятиугольника составляют арифметическую прогрессию. Наименьший угол 100 градусов. Определите разность этой прогрессии.

1.44. Сколько сторон имеет многоугольник, внутренние углы которого составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 20 градусам, а наибольший угол равен 234 градуса?

1.45. Крайние члены арифметической прогрессии, имеющей 7 членов, равны 11 и 35. Сколько членов в другой арифметической прогрессии, крайние члены которой 38 и 13, если четвертые члены обеих прогрессий одинаковы?

1.46. Первый и пятый члены арифметической прогрессии равны соответственно 7 и -5 . У второй арифметической прогрессии первый член равен 0, а последний член равен $\frac{7}{2}$. Найти сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

1.47. Крайние члены арифметической прогрессии, имеющей 8 членов, равны -2 и 19. Сколько членов в другой арифметической прогрессии, крайние члены которой 6 и 16, если пятые члены обеих прогрессий одинаковы?

1.48. При каких x числа, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии:

- 1) $2, x - 2, 4x - 16$;
- 2) $\sqrt{x-11}, \sqrt{2x-5}, \sqrt{3x+19}$;
- 3) $|2x-3|, 3x-13, |12-x|$;
- 4) $2x-1, 3x-2, 3x$;
- 5) $2|x-2|, |x-5|, 6x+36$;
- 6) $4|0,5x-3|, -3|x|, -12x$;
- 7) $\sqrt{3x^2-2x}, x, 1$;
- 8) $\sqrt{x+10}, 3, \sqrt{x-2}$;
- 9) $\cos 2x, \sin^3 x, \sin x$;
- 10) $\sin 2x, 2\cos x, 4-4\sin x$;
- 11) $4^x, 2 \cdot 9^x, 3 \cdot 6^x$;
- 12) $\log_5(x-8)^2, \log_5(x-2), -2$.

1.49. Найти число a , если известно, что корни указанного уравнения составляют арифметическую прогрессию:

- 1) $x^4 - 10x^2 + a = 0$; 2) $16x^4 - 40x^2 + a = 0$;
3) $x^4 - 40x^2 + a = 0$; 4) $9x^4 - 10x^2 + a = 0$.

1.50. Найти десятый член некоторой последовательности и доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией, если известно, что при любом n сумма первых n членов этой последовательности выражается формулой:

- 1) $n^2 + 3n$; 2) $n^2 + 2n$; 3) $2n^2 + 2n$.

1.51. Для членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, \dots известно, что:

- 1) $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$, найти S_{10} ;
2) $a_4 + a_5 + a_{11} + a_{12} = 32$, найти S_{15} ;
3) $a_1 + a_5 + a_{13} + a_{17} = 144$, найти S_{17} ;
4) $a_2 + a_5 + a_9 + a_{12} = 168$, найти S_{13} .

1.52. В арифметической прогрессии для любых m и $n \neq 1$ $S_m/S_n = m^2/n^2$. Доказать, что $a_m/a_n = (2m - 1)/(2n - 1)$.

1.53. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

1.54. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43,... обладает тем свойством, что разности соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию 7, 14, 21,... . Найти номер члена последовательности, равного 35351.

1.55. При каких неотрицательных a все неотрицательные решения уравнения $\cos((6a - 3)x) = \cos((12a + 5)x)$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

1.56. При каких положительных a все неотрицательные решения уравнения $\cos((8a - 3)x) = \cos((14a + 5)x)$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

2. Геометрическая прогрессия

– А –

2.1. Написать формулу общего члена геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = 5, a_2 = 10;$

2) $a_1 = 2, a_3 = 18;$

3) $a_1 = 3, a_4 = \frac{3}{8};$

4) $a_1 = \frac{1}{4}, a_3 = 1;$

5) $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2};$

6) $a_1 = 3, a_4 = \frac{1}{3};$

7) $a_3 = a_5 = -1;$

8) $a_4 = -54, a_5 = 162.$

2.2. Написать формулу общего члена геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = \sin\varphi, a_2 = \sin 2\varphi;$

2) $a_1 = \operatorname{tg}\varphi, a_2 = 1/2\operatorname{tg}\varphi;$

3) $a_1 = \operatorname{tg}\varphi, a_2 = 1;$

4) $a_1 = 1, a_4 = 8.$

2.3. Найти:

1) шестой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 5, а знаменатель равен $-\frac{1}{2};$

2) четвертый член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 7, а знаменатель равен 2;

3) третий член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 6, а знаменатель равен 3;

4) пятый член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 3, а знаменатель равен 0,1.

2.4. Третий член геометрической прогрессии равен 1, шестой равен $\frac{1}{8}$. Найти девятый член прогрессии.

2.5. Пятый член геометрической прогрессии равен 8, седьмой равен 16. Найти третий член прогрессии.

2.6. Первый член геометрической прогрессии равен 5, шестой равен 25. Найти одиннадцатый член прогрессии.

2.7. Четвертый член геометрической прогрессии равен 1, седьмой равен $\frac{1}{47}$. Найти первый член прогрессии.

2.8. Четвертый член геометрической прогрессии равен 3. Найти произведение первых семи членов этой прогрессии.

2.9. Третий член геометрической прогрессии равен 5. Найти произведение первых пяти членов этой прогрессии.

2.10. Шестой член геометрической прогрессии равен 9. Найти произведение первых одиннадцати членов этой прогрессии.

2.11. Пятый член геометрической прогрессии равен 3. Найти произведение первых девяти членов этой прогрессии.

2.12. Найти суммы:

1) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$;

2) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \dots - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$;

3) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$;

4) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{12}$.

2.13. Найти сумму первых трех членов прогрессии, для которой:

1) второй член геометрической прогрессии с положительным знаменателем равен 10, а сумма третьего и четвертого членов прогрессии равна 60;

2) третий член геометрической прогрессии с положительным знаменателем равен 3, а сумма четвертого и пятого членов прогрессии равна 36;

3) второй член геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равен 20, а сумма третьего и четвертого членов прогрессии равна 40;

4) второй член геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равен 6, а сумма третьего и четвертого членов прогрессии равна 36.

2.14. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots;$

2) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \dots;$

3) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots;$

4) $4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots$

– В –

2.15. Найти геометрическую прогрессию (т.е. найти ее первый член и знаменатель), у которой:

1) сумма первых трех членов равна 26, а сумма квадратов тех же членов равна 364;

2) сумма первых трех членов равна 21, а сумма квадратов тех же членов равна 189;

3) сумма первых трех членов равна 14, а сумма квадратов тех же членов равна 84;

4) сумма первых трех членов равна 13, а сумма квадратов тех же членов равна 91.

2.16. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен отношению суммы квадратов ее членов к сумме членов, а сумма кубов ее членов, поделенная на первый член, так относится к сумме квадратов ее членов, как 6:7.

2.17. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна $\frac{64}{7}$. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

2.18. Найти сумму первых семи членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, про которую известно, что ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов ее членов к сумме членов равно $\frac{16}{3}$.

2.19. Определить сумму квадратов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой равен 1, а сумма ее членов равна 4.

2.20. Найти сумму первых пяти членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма членов этой прогрессии равна 3, а сумма кубов ее членов равна $\frac{108}{13}$.

2.21. Найти сумму первых шести членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма членов этой прогрессии равна 2, а сумма кубов ее членов равна $\frac{8}{7}$.

2.22. Найти сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, если:

1) разность между четвертым и первым членами равна 78, а сумма первых трех членов прогрессии равна 39;

2) разность между четвертым и первым членами равна 126, а сумма первых трех членов прогрессии равна 42;

3) разность между четвертым и первым членами равна 35, а сумма первых трех членов прогрессии равна 35.

2.23. Найти сумму четырех членов прогрессии возрастающей геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) произведение второго и четвертого членов равно 36, а их среднее арифметическое равно 10;

2) произведение второго и четвертого членов равно 81, а их среднее арифметическое равно 15;

3) произведение второго и четвертого членов равно 4, а их среднее арифметическое равно 2,5.

2.24 Найти шестой член возрастающей геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) четвертый член на 3 больше ее второго члена, а сумма первых четырех членов прогрессии равна 5;

2) четвертый член на 6 больше ее второго члена, а сумма первых четырех членов прогрессии равна 15;

3) четвертый член на 18 больше ее второго члена, а сумма первых четырех членов прогрессии равна 45.

2.25. При каких значениях x указанные числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

- 1) $x - 1, 2x - 1, 3x + 3$; 2) $x + 1, x + 3, 5x + 3$;
3) $x - 1, x + 3, 6x$; 4) $x + 3, 2x + 7, 7 - x$.

2.26. При каких значениях x указанные числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

- 1) $\sin(x), \frac{1}{2}, \cos(x)$; 2) $\sin(x), \cos(x), \frac{3}{2}$;
3) $\cos(x), \sin(x), -\frac{3}{2}$; 4) $\frac{5}{4} - \cos(x), 2\sin(x), 4$.

2.27. При каких значениях x указанные числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

- 1) $32^x, 6^{x^2+1}, 3^{5x}$;
2) $3^{12x-8}, 6^{x^2+4}, 16^{3x-2}$;
3) $(\sqrt[3]{5})^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)}, \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}, 5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$;
4) $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}$.

2.28. При каких значениях x указанные числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

- 1) $2 - x, \sqrt{3 - 2x}, |6 - 5x|$; 2) $4 - x, \sqrt{2x + 4}, |2x - 8|$;
3) $x, \sqrt{x + 3}, |1 - x|$; 4) $1 + x, \sqrt{7x + 1}, |1 - 3x|$.

2.29. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если:

1) их сумма равна 28. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 4 и 3, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию (в том же порядке);

2) их сумма равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 6 и 2, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию (в том же порядке);

3) их сумма равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 3, 7 и 2, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию (в том же порядке);

4) их сумма равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 3 и 2, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию (в том же порядке).

2.30. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 0, 3 и 15, то получим три числа, образующих геометрическую прогрессию (в том же порядке). Найти исходные числа.

2.31. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 33. Если к этим числам прибавить соответственно 1, -1 и 2, то получим три числа, образующих геометрическую прогрессию (в том же порядке). Найти исходные числа.

2.32. Первый член арифметической прогрессии и первый член геометрической прогрессии равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической на 6; третьи члены прогрессии одинаковы. Найти эти прогрессии.

2.33. Найти арифметическую и геометрическую прогрессии, если известно, что первый член каждой прогрессии равен 2, третьи члены обеих прогрессий равны между собой, а 11-й член арифметической прогрессии равен 5-му члену геометрической.

– С –

2.34. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы три числа x , y и z в указанном порядке составляли геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2$.

2.35. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

2.36. Три числа, из которых третье равно 16, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 16 взять 12, то три числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

2.37. Три числа, из которых третье равно 20, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 20 взять 15, то три числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

2.38. Найти трехзначное число по следующим условиям:

- его цифры образуют арифметическую прогрессию;
- если к нему прибавить 396, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке;
- если первую цифру искомого числа уменьшить на 1, вторую также уменьшить на 1, а третью увеличить на 3, то получится геометрическая прогрессия.

2.39. Найти две прогрессии – арифметическую и геометрическую, удовлетворяющие следующим условиям:

- первые члены этих прогрессий равны;
- сумма первых двух членов арифметической прогрессии больше суммы первых двух членов геометрической прогрессии на утроенный первый член;
- суммы первых трех членов обеих прогрессий равны.

2.40. Доказать равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

2.41. Найти сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \dots + n(2^n - 1)$.

ОТВЕТЫ

Тема I

- 1.1.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$;
 5) $-\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{5\pi}{3}$; 7) $-\frac{2\pi}{3}$; 8) -3π ;
 9) $\frac{3\pi}{4}$; 10) $8\frac{1}{3}\pi$; 11) $-\frac{3\pi}{2}$;
 12) $-\frac{\pi}{8}$; 13) $\frac{7\pi}{12}$; 14) $1\frac{1}{9}\pi$;
 15) $-\frac{7\pi}{4}$.
- 1.2.** 1) 30° ; 2) -120° ; 3) 180° ;
 4) 135° ; 5) 150° ; 6) -270° ;
 7) -540° ; 8) -765° ; 9) 510° ;
 10) -390° ; 11) 315° ; 12) -600° ;
 13) 105° ; 14) 110° ; 15) $907,5^\circ$.
- 1.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$;
 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) 0;
 9) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 11) 1.
- 1.4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -1;
 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) 0; 7) -1;
 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 11) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 12) $-\frac{1}{2}$.

- 1.5.** 1) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 3) $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- 1.6.** 1) 1,75; 2) -3; 3) 0,5; 4) 1;
 5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 1.8.** 1) Положительный; 2) положи-
 тельный; 3) отрицательный.
- 1.9.** 1) Отрицательный; 2) положи-
 тельный; 3) отрицательный.
- 1.10.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$;
 5) $\frac{2}{7}$.
- 1.11.** 1) $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{12}{37}$; 3) $-\frac{4}{5}$;
 4) $\frac{3}{7}$; 5) $-\frac{5}{8}$.
- 1.12.** 1) и 2) Положительный; 3) и 4)
 отрицательный.
- 1.13.** 1) $\frac{8}{17}$; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) $-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{2}{5}$.
- 1.14.** 1) $\frac{2(1+\sqrt{10})}{9}$; 2) $\frac{13\sqrt{10}}{50}$;
 3) $\frac{-1}{5\sqrt{2}}$; 4) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.
- 1.15.** 1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;
 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1.16. 1) $\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$;

2) $\sin 2 < \cos \frac{\pi}{12} < \sin \frac{7\pi}{13}$;

3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} < \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} < \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$;

5) $\cos(-1) < \cos 4 < \sin(-3)$.

1.17. 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$;

4) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

1.18. 1) -1; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 3,88;

4) 0,92; 5) -0,184.

1.19. 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) $\sqrt{3}$;

5) 0,5.

1.20. 1) 0,75; 2) 1; 3) $2 + \sqrt{2}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) 1.

1.21. 1) 1,5; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $-\frac{1}{4}$;

4) $\sqrt{6}$; 5) 0,5.

1.22. 1) $E = \{\pm 0,5\}$; 2) $E = \{\pm 1\}$;

3) $E = \{0\}$; 4) $E = \{1\}$;

5) $E = \{\sqrt{3}\}$.

1.23. 1) $E = \left\{ \frac{24}{25} \right\}$; 2) $E = \left\{ -\frac{23}{25} \right\}$;

3) $E = \{\pm 2\sqrt{6}\}$; 4) $E = \left\{ \pm \frac{4\sqrt{6}}{25} \right\}$;

5) $E = \left\{ \frac{(2\sqrt{6} \pm 1)^4}{23^2} \right\}$.

1.24. 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $-\frac{9}{20}$; 3) $-\frac{24}{7}$;

4) $-\frac{9}{25}$; 5) $\frac{44}{125}$.

1.25. 1) $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

2) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

3) $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

4) $x \neq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

5) $x \neq \frac{\pi}{2} k$, $k \in \mathbb{Z}$;

1.26. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0;

4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) -1.

1.27. 1) 0,375; 2) 0,1; 3) 0,2;

4) 0,36; 5) $1/3$.

1.28. 1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) \emptyset ;

4) $x = -\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{8} k$, $k \in \mathbb{Z}$;

5) $x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{9} k$, $k \in \mathbb{Z}$;

1.29. 1) $g(t) = 2t - 2t^3 + t^2 - 1$;

2) $g(t) = (-32t^6 + 48t^4 - 18t^2 + 2)t$;

3) $g(t) = \frac{2t + 1 - t^2}{1 + t^2}$;

4) $g(t) = \frac{t^2 + 1}{t^3}$; 5) $g(t) = \frac{t^2 - 1}{2}$.

$$1.30. -\frac{\sqrt{31}}{4}.$$

$$1.31. \frac{7\sqrt{3} + \sqrt{15}}{16}.$$

1.32.

$$1) \left[2\pi k, 2\pi k + \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi k + \pi \right],$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \left[\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \left[\pi m, \pi m + \frac{\pi}{4} \right], m \in \mathbb{Z};$$

$$5) \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$1.33. 1) \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \cup$$

$$\cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \frac{4\pi}{3} + 2\pi m \right], m \in \mathbb{Z};$$

$$3) \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \left[\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$5) \left[-\frac{\pi}{4} + \pi m, \frac{\pi}{4} + \pi m \right], m \in \mathbb{Z};$$

$$1.34. a) \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$б) \left[\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$в) \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k \right], k \in \mathbb{Z};$$

$$г) \left[2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi(2k+1) \right];$$

$$д) \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right] \cup \left[\pi(2k+1), \frac{\pi}{4} + \pi(2k+1) \right].$$

$$2.1. 1) 2; 2) 3; 3) \frac{1}{\cos \alpha}; 4) \cos^2 \alpha;$$

$$5) \sin^2 \alpha; 6) \cos \alpha; 7) 0.$$

$$2.2. 1) 1; 2) \sin \alpha - \cos \alpha; 3) -1;$$

$$4) 2\sin 2\alpha; 5) \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$2.3. 1) 1; 2) \cos 2\alpha; 3) 0; 4) -\cos \alpha;$$

$$5) \sin \alpha; 6) -1; 7) \operatorname{ctg} \alpha; 8) -1;$$

$$9) -1.$$

$$2.4. 1) \sin \alpha; 2) \cos \frac{3}{2} \alpha;$$

$$3) \sin 2\alpha + \cos 2\alpha; 4) \cos \alpha - \cos 7\alpha;$$

$$5) \sin 4\alpha - \cos \alpha; 6) \cos \alpha - \cos 6\alpha;$$

$$7) -2\sin \alpha.$$

$$2.5. 1) \frac{\sqrt{2}}{4}; 2) \frac{1}{4}; 3) \frac{\sqrt{3}}{2}; 4) -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2.6. 1) \frac{\sqrt{3}}{2}; 2) 0; 3) \frac{\sqrt{2}}{2}; 4) \frac{1}{2};$$

$$5) \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 6) -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 7) -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$8) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2.7. \quad 1) 2; \quad 2) 4; \quad 3) 1; \quad 4) 1.$$

$$2.8. \quad 1) (\sin x + 1)(\sin x - 3);$$

$$2) (\sin x - \cos x)(\sin x + 5\cos x);$$

$$3) 2\cos x(\sin x + 1)(2\sin x - 1);$$

$$4) -2\sin(2x + 1)\sin 3x;$$

$$5) (\cos x - \sin x)(1 + 0,5\sin 2x).$$

$$2.10. \quad \text{ctg} 3\beta.$$

$$2.11. \quad 1.$$

$$2.12. \quad 1.$$

$$2.13. \quad 1) \text{ctg} 2\alpha; \quad 2) 1; \quad 3) 0; \quad 4) 0.$$

$$2.14. \quad 1) 1; \quad 2) \sqrt{2}; \quad 3) \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad 4) \sqrt{2};$$

$$5) \sqrt{3}.$$

$$2.15. \quad 1) \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{1}{8}; \quad 3) \frac{3}{4}.$$

$$2.16. \quad 1) \sin x + \cos x + 1;$$

$$2) 2(1 + \sin 2x); \quad 3) 2\sin 2x;$$

$$4) 1 + 2\cos 2x; \quad 5) 2\sin 2x.$$

$$2.17. \quad 1) 2\cos 2x + 1, \quad x \neq \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \text{ при } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

$$3) 4\sin 3x, \quad x \neq \frac{\pi}{2}k;$$

$$4) 4\sin x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$5) 2\cos x, \quad x \neq \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3.1. \quad 1) -\pi; \quad 2) \frac{\pi}{2}; \quad 3) -\frac{\pi}{4}; \quad 4) \frac{3\pi}{4};$$

$$5) \frac{7\pi}{6}; \quad 6) \frac{5\pi}{4}; \quad 7) \frac{5\pi}{12}; \quad 8) 0;$$

$$9) \frac{4\pi}{3}; \quad 10) 0; \quad 11) \pi.$$

$$3.2. \quad 1) 0; \quad 2) 0; \quad 3) 0; \quad 4) 1;$$

$$5) -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3.3. \quad 1) \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad 2) \frac{4}{5}; \quad 3) 8;$$

$$4) -\frac{1}{\sqrt{15}}; \quad 5) -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad 6) \frac{3}{4};$$

$$7) 2\sqrt{6}; \quad 8) \frac{7}{9}; \quad 9) \frac{120}{169}; \quad 10) \frac{24}{7};$$

$$11) -\frac{4}{5}; \quad 12) \frac{23}{27}; \quad 13) -\frac{44}{125};$$

$$14) \frac{2}{3}; \quad 15) \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}; \quad 16) -\frac{119}{169};$$

$$17) \frac{23}{14}; \quad 18) \frac{2}{3\sqrt{5}}; \quad 19) \frac{3}{4}; \quad 20) 1;$$

$$21) \frac{24}{25}; \quad 22) -\frac{3}{5}; \quad 23) \frac{3}{4};$$

$$24) -\frac{7}{25}.$$

$$3.4. \quad 1) \frac{2\pi}{5}; \quad 2) -\frac{3\pi}{14}; \quad 3) \frac{\pi}{14}; \quad 4) \frac{7\pi}{10};$$

$$5) \frac{17\pi}{20}; \quad 6) -\frac{\pi}{7}; \quad 7) \frac{\pi}{2} - 2;$$

$$8) \frac{\pi + 1}{2}; \quad 9) 5 - 2\pi; \quad 10) 4\pi - 10;$$

$$11) \pi - 4.$$

$$3.5. \quad \text{a) } x = \arcsin \frac{1}{3} + \pi k;$$

$$\text{б) } x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k;$$

$$\text{в) } x = \pm \arcsin \frac{1}{3} + \pi k;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2}k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{д) } x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k.$$

$$\mathbf{3.6.} \quad 1) 0,2; \quad 2) 4 - \frac{3\pi}{2}.$$

$$\mathbf{3.7.} \quad 1) 0,25; \quad 2) \frac{1}{6}; \quad 3) -\frac{4}{3}; \quad 4) 4;$$

$$5) 1.$$

$$\mathbf{3.8.} \quad 1) 7; \quad 2) 10; \quad 3) 6; \quad 4) 3; \quad 5) 13.$$

$$\mathbf{3.9.} \quad 1) 4; \quad 2) 2; \quad 3) 1; \quad 4) 5; \quad 5) 4.$$

$$\mathbf{3.10.} \quad 1) >; \quad 2) <; \quad 3) <; \quad 4) >; \quad 5) <.$$

$$\mathbf{3.11.} \quad 1) \frac{2(\sqrt{10}-1)}{9}; \quad 2) \frac{2+\sqrt{15}}{4\sqrt{15}};$$

$$3) \frac{\sqrt{5}-4}{2(\sqrt{5}+1)}; \quad 4) 2;$$

$$5) \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + (-1)^{k+1} \sqrt{15}).$$

$$\mathbf{3.12.} \quad 1) x \in \left[-2; \frac{\sqrt{3}-6}{4}\right);$$

$$2) x \in \left[0; \frac{1}{3}\right); \quad 3) x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}; +\infty\right);$$

$$4) x \in (-\infty; 1);$$

$$5) x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right).$$

$$\mathbf{3.13.} \quad 1) x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \quad 2) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$3) x \in [0; +\infty); \quad 4) x \in [0; 1];$$

$$5) x \in [0; +\infty).$$

$$\mathbf{3.14.} \quad 3.$$

$$\mathbf{3.15.} \quad 1) \text{ При } |a| \leq 9 \quad x = -\frac{2a}{9};$$

$$\text{при } |a| > 9 \quad x = \emptyset;$$

$$2) \text{ при } a \leq 0 \quad x = -a; \quad \text{при } a > 0 \quad x = \emptyset;$$

$$3) \text{ при } |a| < \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{a}{2} + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{при } a = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\text{при } a = -\frac{\pi}{2} \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\text{при } |a| > \frac{\pi}{2} \quad x = \emptyset;$$

$$4) \text{ при } a < 0 \quad x = \emptyset;$$

$$\text{при } a = 0 \quad x = t, \quad t \in [-1; 0];$$

$$\text{при } a \in (0; 2] \quad x = \frac{a}{2};$$

$$\text{при } a > 2 \quad x = \emptyset;$$

$$5) \text{ при } a \geq 0 \quad x = -\frac{a}{4};$$

$$\text{при } a \leq 0 \quad x = -\frac{a}{2}.$$

$$\mathbf{4.1.} \quad 1) x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$2) x = \pi k; \quad 3) x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k;$$

$$4) x = \pi k;$$

$$5) x = -\frac{2}{3} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k;$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

$$6) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- 7) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
 8) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 9) $2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z};$
 10) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z};$
 11) $\emptyset;$
 12) $\pi k, k \in \mathbb{Z};$
 13) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, 4\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$
 14) $-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k,$
 $n, k \in \mathbb{Z};$
 15) $\frac{\pi k}{2}; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z};$
 16) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$
 17) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,$
 $\frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z};$
 18) $-\frac{4}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$
 19) $\frac{7}{24}\pi + \pi l, l \in \mathbb{Z};$
 20) $\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,$
 $n, k, m \in \mathbb{Z};$
 21) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$
 22) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$

- 4.2. 1) $x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} k;$
 2) $x = \frac{\pi}{6} \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi k;$
 3) $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} k;$
 4) $x = -\frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) + \pi k;$
 5) $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4} \right) + \pi k;$
 $k \in \mathbb{Z};$
 4.3. 1) 2; 2) 8; 3) 3; 4) 2; 5) 3.
 4.4. 1) $\frac{13\pi - 6}{12};$ 2) $\frac{11\pi + 6}{9};$
 3) $\frac{11\pi - 18}{6};$ 4) $\frac{26\pi + 9}{12};$ 5) $\frac{6 - 7\pi}{12}.$
 4.5. 1) $\pi + 3\pi n, -\pi + 3\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$
 2) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, -\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, n, k \in \mathbb{Z};$
 3) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$
 4) $\frac{\pi}{6} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z};$
 5) $\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
 4.6. 1) $\pi k; \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n,$
 $n, k \in \mathbb{Z};$
 2) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$
 3) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
 4) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$

$$5) \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$6) -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4.7. 1) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \pi + 2\pi n; \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$4) -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$5) \pi + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \quad k, m \in \mathbb{Z};$$

$$6) -\frac{\pi}{12} + \pi n; -\frac{5\pi}{12} + \pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z};$$

$$7) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}; \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi n}{2},$$

$$k, n \in \mathbb{Z};$$

$$8) -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\operatorname{arctg} 3 + \pi m,$$

$$n, m \in \mathbb{Z};$$

$$9) \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$10) \frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$11) (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$12) (-1)^n \arcsin \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{14} + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z};$$

$$13) x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2\pi k + \pi,$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$14) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$15) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$16) (-1)^n \arcsin \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$17) \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$18) \pm \frac{4}{3} \arccos \frac{1}{3} + \frac{8\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$19) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$20) \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$21) \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k,$$

$$k, n \in \mathbb{Z};$$

$$22) \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k,$$

$$k, n \in \mathbb{Z};$$

$$4.8. 1) \operatorname{arctg} 3 + \pi n; \operatorname{arctg} 7 + \pi m,$$

$$n, m \in \mathbb{Z};$$

$$2) -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\operatorname{arctg} 2 + \pi m,$$

$$n, m \in \mathbb{Z};$$

$$3) -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \frac{\pi}{4} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{7}{3} + \pi m;$$

$$6) \frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z};$$

$$7) -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\arctg \frac{3}{5} + \pi k,$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$8) \pi n + \frac{\pi}{2}; \arctg 3 + \pi k, \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$9) \pi n; -\arctg \frac{5}{4} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$10) -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\arctg \frac{2}{3} + \pi k;$$

$$11) \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$12) \arctg(\sqrt{3}-1) + \pi k;$$

$$-\arctg(\sqrt{3}+1) + \pi n, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$13) -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$14) \frac{\pi}{4} + \pi k; -\arctg \frac{7}{4} + \pi n,$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$15) \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.9. 1) \pi; 2) \frac{5\pi}{3}; 3) \frac{\pi}{2}; 4) \frac{11\pi}{12};$$

$$5) \frac{19\pi}{6}.$$

$$4.10. 1) \frac{5\pi}{12}; 2) 1 \pm \pi; 3) \frac{4\pi}{9}; 4) \frac{\pi}{4};$$

$$5) \frac{\pi}{3}.$$

$$4.11. 1) (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \pi + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$3) (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5) (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.12. 1) -\frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2\pi k, \quad 2\pi n + \frac{2\pi}{3}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.13. 1) (-1)^n \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}} - \\ - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 0,5 \cdot \left((-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} + \right. \\ \left. + \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \pm \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.14. 1) \pi k, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} k, \quad \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \frac{\pi k}{4}, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \frac{\pi k}{3}, \quad \frac{\pi n}{7}, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$6) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$7) -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, \quad -\frac{\pi}{24} - \frac{1}{6} + \frac{\pi k}{6}, \\ n, k \in \mathbb{Z}.$$

4.15. 1) $\frac{4\pi}{9}$; 2) $\frac{11\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{36}$;

4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi}{18}$.

4.16. 1) $\frac{2\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pi + 2\pi l$;

$n, k, l \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

4.17. 1) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $n, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi n}{7}$; $n, k \in \mathbb{Z}$;

3) πn , $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $n, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

4.18. 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$;

2) πn ; $-\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}$, $n, k \in \mathbb{Z}$;

3) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) $\pm \frac{1}{4} \arccos \frac{3}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

5) $\frac{\pi n}{4}$; $\frac{\pi m}{6}$, $n, m \in \mathbb{Z}$;

6) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $\pm \frac{\pi}{3} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$;

7) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$, $n, m \in \mathbb{Z}$;

8) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$;

9) $2\pi n$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$;

10) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

11) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$;

12) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

13) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.19. 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi l$,

$n, k, l \in \mathbb{Z}$;

2) $\pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) $2\pi k$; $2\pi n + \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi m$,

$m, n, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

5) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

6) $(-1)^n \arcsin \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi}{4} + \pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$;

7) $(-1)^n \arcsin \left(\frac{1}{7\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi}{4} + \pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$.

4.20. 1) $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{7\pi}{12} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$;

$$3) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.21. 1) \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4};$$

$$m, n, k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \quad \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5};$$

$$m, n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$6) \pi k; \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$7) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; \quad (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{6};$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$8) \pi k; \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$9) \arctg \frac{1}{4} + \pi n; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$10) \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n;$$

$$\arctg \left(-\frac{1}{5} \right) + \pi k; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$11) \frac{\pi l}{4}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \quad l, k \in \mathbb{Z};$$

$$12) \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$13) \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{3} + \pi k;$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$14) \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}; \quad \frac{\pi l}{10} + \frac{1}{10} \arccos \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$\frac{\pi n}{4} - \frac{1}{4} \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad n, l, k \in \mathbb{Z};$$

$$15) \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$-\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{4 - \sqrt{17}}{\sqrt{2}} + \pi k; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$16) \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n;$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$17) \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \frac{2\pi k}{3}; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$18) 0; \quad \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad \frac{\pi}{16} + \frac{\pi l}{2};$$

$$-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi m}{2}; \quad k, l \in N \cup \{0\}, \quad m \in N.$$

$$4.22. 1) -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.23. 1) -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \frac{\pi}{3} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.24. 1) \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4.25. \quad 1) \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{3\pi}{2} + 3\pi n; \quad 6\pi k; \quad \pm 2\pi + 6\pi l;$$

$$n, k, l \in \mathbb{Z};$$

$$3) \frac{3\pi n}{2}; \frac{3\pi}{4} + 3\pi m;$$

$$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}; \quad n, k, m \in \mathbb{Z}.$$

$$4.26. \quad 1) \pm \sqrt{3}; \quad 2) 0; \pm \sqrt{3};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad -\sqrt{3}; \quad \sqrt{3} \pm 2;$$

$$4) 2 \pm \sqrt{3}; \quad \sqrt{2} \pm 1;$$

$$5) 0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$4.27. \quad 1) 2; \quad 2) 1; \quad 3) 4; \quad 4) 6.$$

$$4.28. \quad 1) \left\{ 0; \frac{3\pi}{4}; 3 \right\}; \quad 2) \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$3) x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \geq 5, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 2\pi;$$

$$4) x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \geq -1, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2};$$

$$5) x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$6) x = \left\{ -\frac{7\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right\}.$$

$$4.29. \quad 1) \left\{ -1; 6; 0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\};$$

$$2) \left\{ 0; 4; \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\};$$

$$3) x = -\frac{1}{8} + \frac{k}{4}, \quad k \in [-4; -3; \dots; 5];$$

$$x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \quad k \in [-3; -2; \dots; 1]; \quad -\frac{5}{4}; \frac{6}{5};$$

$$4) x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty);$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; 3 \right\};$$

$$6) \frac{19}{6}; \quad \frac{3k \pm 1}{6}; \quad k \in \mathbb{Z}; \quad k > 6;$$

$$4.30. \quad 1) 2\pi k - \frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \frac{4\pi}{3} + 2\pi l, \quad x = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5) \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.31. \quad 1) \frac{2\pi}{3}; \quad 2) \frac{\pi}{4}; \quad 3) \frac{2\pi}{3}; \quad 4) \frac{\pi}{2};$$

$$5) \frac{3\pi}{4}.$$

$$4.32. \quad 1) 1; \quad 2) -3; \quad 3) 2; \quad 4) 3; \quad 5) 0.$$

$$4.33. \quad 1) -\frac{1}{3}; \quad 2) -\frac{1}{5}; \quad 3) -\frac{3}{7}; \quad 4) 1;$$

$$5) -\frac{3}{2}.$$

$$4.34. \quad 1) x = \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad \pi k; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$2) x \in \emptyset; \quad 3) x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k;$$

$$4) x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$5) x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.35. \quad 1) x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad 2) x \in \emptyset;$$

$$3) x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$4) x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k;$$

$$5) x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k;$$

$$6) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi m;$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$$

$$7) -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$8) \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$9) \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$10) -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$\pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi m; \quad n, m \in \mathbb{Z};$$

$$11) \frac{\pi k}{8}; \quad k \in \mathbb{Z}; \quad k \neq 8l + 4;$$

$$12) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \quad \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$n \neq 6l - 2, k \neq 10l - 3;$$

$$13) \arctg 3 + \pi k.$$

$$4.36. \quad 1) \arctg \frac{2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \pi n + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5) -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$6) 2\pi n, \quad 2\pi k - \frac{\pi}{3}, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$7) \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4.37. \quad 1) 2\pi; \quad 2) 2\pi; \quad 3) \pi; \quad 4) 2\pi; \quad 5) \pi.$$

$$4.38. \quad 1) x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$2) x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k;$$

$$3) x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$4) x = \frac{2\pi}{7} + \pi m; \quad x = \frac{3\pi}{7} + \pi k;$$

$$5) x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$4.39. \quad 1) \pm \arctg 2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \frac{\pi k}{2}; \quad \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5) -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$6) \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$7) -\frac{\pi}{8} + 2\pi k; \quad \frac{3\pi}{8} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

- 8) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{24} + 2\pi n$;
 $n, k \in \mathbb{Z}$;
- 9) $\pi + 2\pi n$; $\pi + \arctg\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k$;
 $n, k \in \mathbb{Z}$;
- 10) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\arctg(-2) + 2\pi k$;
 $n, k \in \mathbb{Z}$;
- 11) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\arctg\frac{5}{2} + (2k+1)\pi$;
 $n, k \in \mathbb{Z}$.
- 4.40.** 1) $x = \frac{7\pi}{4}$; 2) $x = \frac{5\pi}{3}$;
3) $x = \frac{11\pi}{6}$;
4) $x = 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2}$;
5) $x = \frac{7\pi}{4}$.
- 4.41.** 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $1 - \frac{2\pi}{3}$;
4) -1 ; 5) $-\frac{\pi}{2}$.
- 4.42.** 1) $2\pi n + \frac{17\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{3} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
5) $-\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

- 4.43.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) πl , $l \in \mathbb{Z}$;
3) πk , $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m, k \in \mathbb{Z}$;
4) πk , $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n, k \in \mathbb{Z}$.
- 4.44.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.
- 4.45.** $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{3}{13} + \pi k$;
 $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{6}{13} + \pi n$;
 $(-1)^m \arcsin \frac{12}{13} + \pi m$; $n, k, m \in \mathbb{Z}$.
- 4.46.** $\frac{\pi}{2}$; $2\pi k + \frac{2\pi}{3}$; $2\pi n - \frac{2\pi}{3}$;
 $2\pi m \pm \frac{\pi}{3}$, где $k = -1, -2, -3, \dots$;
 $n = 0, -1, -2, \dots$; $m \in \mathbb{N}$.
- 4.47.** $\{\pm 1\}$.
4.48. -2 .
4.49. 48.
4.50. 5.
4.51. 9.
- 4.52.** 1) $a \in (-\infty; -0,5]$; 2) $a \in \left[\frac{2}{3}; 4\right]$;
3) $a \in [0; 1]$; 4) $a = \pm 1$; 5) $a \in \mathbb{R}$.
- 4.53.** 1) $a \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
2) $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$;
3) $a \in (-2; 1)$; 4) $a \in (-1; +\infty)$;
5) $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; $a \neq -2$.
- 4.54.** -6 .
- 4.55.** 1) $a = \frac{3}{11}$; 2) $a = \frac{9}{7}$;

$$3) a = \frac{11\pi}{6}; \quad 4) a = \frac{3}{16}; \quad 5) a = \frac{1}{2}.$$

$$4.56. 1) \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n, \arctg(-2) + \pi n \right],$$

$$n \in \mathbb{Z};$$

$$2) a \in (-\infty; -2];$$

$$3) \left[-\frac{\pi}{3} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cup \{0\}.$$

$$4.57. 1) a \in \left\{ 3; -\frac{7}{3} \right\}; \quad 2) a \in \{-3; 1\};$$

$$3) a \in \{-2; -1\}; \quad 4) a \in \{-4; 2\};$$

$$5) a \in \{-3; 1\}.$$

$$4.58. 1) \text{ При } a \in (-\infty, -11) \cup (5, +\infty)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\text{при } a \in [-11; 5] \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{5-a} - 2) + \pi k;$$

$$n, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \text{ при } a \in [2; 3]$$

$$x = \pi k \pm 0,5 \arccos(2a-5); \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{при } a \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \quad x = \emptyset;$$

$$3) \text{ при } a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$$

$$x = \pi k;$$

$$\text{при } a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

$$x = \pi k, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

$$n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.59. 1) \text{ При } b \in \left(-\infty, -\frac{25}{4} \right) \cup [0, +\infty)$$

$$x = \emptyset;$$

$$\text{при } b \in \left[-\frac{25}{4}; 0 \right)$$

$$x = \pm \frac{1}{5} \arcsin \left[\frac{2}{5} \sqrt{-b} \right] + \frac{1}{5} \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \text{ при } a \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup$$

$$\cup (-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$$

$$x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{2}{a^2+1}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{при } a \in (-1; 1) \cup \{\pm 1 \pm \sqrt{3}\} \quad x = \emptyset.$$

$$4.60. a \in \left(\frac{3}{2}; 3 \right).$$

$$4.61. 1) a \in [1; 1,2]; \quad a \neq \frac{6}{4+\sqrt{2}};$$

$$4.62. \left(0; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1 \right).$$

$$4.63. a \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right] \cup \left\{ \frac{5}{9} \right\}.$$

$$4.64. (8 - 6\sqrt{3}; -1).$$

$$4.65. 3.$$

$$4.66. \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$4.67. 1) \text{ При}$$

$$a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right] \cup [1; +\infty)$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1+2a}{1+2a^2} + \pi n,$$

$$y = \pm \arccos \frac{2(a-1)}{1+2a^2} + 2\pi k;$$

$$n, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{при } a \in \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; 1 \right) \Rightarrow x = \emptyset.$$

$$4.68. 1) (3 - 2\sqrt{2}; +\infty);$$

$$4.69. (5 - 2\sqrt{7}; +\infty);$$

$$4.70. \left(-\infty; -\frac{18}{5} \right) \cup \left(0; \frac{2}{3} \right) \cup (2, +\infty).$$

$$4.71. \text{При } a \in (-\infty, 0) \Rightarrow a^2 - 1;$$

$$\text{при } a \in [0; \pi] \Rightarrow -1;$$

$$\text{при } a \in (\pi; +\infty) \Rightarrow$$

$$\pi^2 - 2\pi a - 1 + a^2.$$

$$4.72. \text{При } a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow 7a;$$

$$\text{при } a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right] \Rightarrow -4a^2 + 3a - 1;$$

$$\text{при } a \in \left(\frac{1}{4}; +\infty \right) \Rightarrow a - \frac{3}{4}.$$

$$4.73. 1) a \in \{-6; -5; 3; 4\};$$

$$2) a \in \{\pm 4; \pm 5\};$$

$$3) \{-10; -9; 10\};$$

$$4) a = 5; \quad 5) a = \pm 10.$$

$$4.74. a \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{11}{18} \right) \cup$$

$$\cup \left(-\frac{7}{12}; -\frac{7}{18} \right) \cup \left(-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3} \right).$$

$$4.75. |a| \leq \frac{2}{9}, \quad a \neq 0.$$

$$4.76. |a| \geq 2.$$

$$4.77. 1) a = 2; \quad 2) a = 1; \quad 3) a = 10;$$

$$4) a = 1.$$

$$4.78. a \in \left(\frac{15}{4}; \frac{27}{4} \right).$$

$$4.79. 1) 7; \quad 2) 0; \quad 3) 5\pi; \quad 4) -7\pi; \quad 5) 12.$$

$$4.80. 1) a \in [-1; +\infty);$$

$$2) a \in \left[\frac{7+\sqrt{13}}{2}; 6 \right].$$

$$4.81. 1) a = 2; \quad 2) a = 100.$$

$$4.82. a \in [-3; 1].$$

$$5.1. \left\{ \pi k \pm \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5.2. \emptyset.$$

$$5.3. \{(-\pi; \pi); (\pi; -\pi); (0; -2\pi); (0; 0); (-\pi; \pi)\}.$$

$$5.4. \left\{ \left(-\frac{\pi(12n-5)}{12}; \frac{\pi(3n+1)}{3} \right); \left(-\frac{\pi(12n-1)}{12}; \frac{\pi(3n+2)}{3} \right) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5.5. \left\{ \left(\pi k + \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} - \pi k \right) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5.6. \left\{ \left(\frac{\pi(6n+6k-1)}{6}; \frac{\pi(6n-6k-1)}{6} \right); \left(\frac{\pi(6n+6k+1)}{6}; \frac{\pi(6n-6k+1)}{3} \right) \right\},$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$5.7. \left(3; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5.8. \left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right); \right.$$

$$\left. \left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \right\},$$

$$n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$5.9. \left\{ \left(\frac{7\pi}{12} + \pi(k+n); -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}(k-n) \right); \right. \\ \left. \left(-\frac{\pi}{12} + \pi(n+k); \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}(k-n) \right) \right\},$$

$$n, k \in \mathbb{Z}.$$

5.10.

$$\left\{ \frac{1}{2} \left((-1)^n \arcsin \frac{2}{5} + (-1)^m \arcsin \frac{4}{5} + \pi(n+m) \right); \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left((-1)^n \arcsin \frac{2}{5} - (-1)^m \arcsin \frac{4}{5} + \pi(n-m) \right) \right\},$$

$$n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$5.11. \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$5.12. \left\{ \left(\pm \frac{\pi}{3} + \pi(n+k); \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n-k) \right) \right\},$$

$$k, m \in \mathbb{Z}.$$

$$5.13. \left\{ \left(\pi(n+k) + \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi(n-k) \right) \right\},$$

$$k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5.14. \left\{ \frac{\pi(8n+1)}{4}; \frac{\pi(8k+5)}{4} \right\},$$

$$n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$5.15. \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$5.16. \left\{ \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m \right\}, n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$5.17. \left\{ (2\pi n; 2\pi k + \pi); \right.$$

$$\left. \left(\left(2\pi m + \frac{\pi}{2} \right); 2\pi p \right) \right\}, k, n, m, p \in \mathbb{Z}.$$

5.18. При $k = 1$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} (1 - \sqrt{7}); \cos \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{7}) \right).$$

$$5.19. \text{ При } k = 2 \quad \left(\cos \frac{\pi^2}{4}; \pm 1 \right).$$

$$6.2. 1) \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi(k+1) \right), k \in \mathbb{Z}.$$

6.3. 1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 3; 5) 2.

$$6.5. 1) \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{13\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right) \cup \\ \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$3) \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \cup \\ \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$4) \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \cup \\ \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k; \pi(k+1) \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \cup \\ \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \right) \cup \\ \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$6.6. 1) x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right);$$

$$2) \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi \right];$$

$$3) \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi \right];$$

$$4) \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}; 0 \right) \cup$$

$$\cup \left(0; \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi \right).$$

$$5) \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

$$6.7. 1) a = 1; 2) a = 1; a = 2;$$

$$3) a = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$4) a = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 5) a = 0.$$

$$6.8. 1) x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$2) x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

$$3) x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z};$$

$$4) x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; x = \pi k;$$

$$5) x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

$$6.9. 1) p \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty);$$

$$2) p \in \left(-\infty; \frac{3}{2} \right]; 3) p \in [-1; 0];$$

$$4) p \in [-3; 2]; 5) p \in [-3; 3].$$

$$6.10. 1) x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} \right];$$

$$2) x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right] \cup \{0\};$$

$$3) x \in \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{25\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{3}; \frac{29\pi}{12} \right];$$

$$4) x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4} \right];$$

$$5) x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6} \right].$$

$$6.11. x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

$$6.12. x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right],$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

$$7.1. 1) 1 \text{ и } -\sqrt{2}; 2) \frac{1}{4} \text{ и } -\frac{1}{4};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } -\sqrt{3}; 4) 1; \text{ не существует};$$

$$5) 1 \text{ и } -1.$$

$$7.2. 1) x \in [2\pi k; \pi(2k+1)],$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$x \in [\pi 2(m-1); 2\pi m], m = 0, -1, -2, \dots$$

$$2) x \in \mathbb{R};$$

$$3) x \in [\pi; +\infty) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 1, 2, 3, \dots \right\},$$

$$x = \pi m, m = -1, -2, -3, \dots;$$

$$4) |x| \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right], k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$5) x \in \left(-\infty; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi m, m = 1, 2, \dots \right\}.$$

$$7.3. 1) x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) x \neq \frac{\pi}{3} m, m \in \mathbb{Z};$$

$$3) \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \\ x \neq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases} k, m \in \mathbb{Z};$$

$$4) x \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z};$$

$$5) x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$7.4. 1) \frac{2\pi}{3}; 2) \frac{3\pi}{2}; 3) \frac{\pi}{3}; 4) 2\pi;$$

$$5) \pi.$$

$$7.5. \frac{3}{2}.$$

$$7.6. \sqrt{3}.$$

$$7.7. 5.$$

$$7.8. \frac{64}{27}.$$

$$7.9. 11.$$

$$7.10. 1) E = \left[\frac{1}{2}; 1 \right]; 2) E = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{2} \right];$$

$$3) E = \left[0; \frac{1}{2} \right]; 4) E = \left[-\frac{1}{2}; 0 \right];$$

$$5) (-\infty; 1].$$

$$7.11. 1) \frac{4}{5}; 2) -\frac{17\sqrt{2}}{26}; 3) 8 + 5\sqrt{3};$$

$$4) -3; 5) \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

$$7.12. 1) a \in (-1, 5; +\infty);$$

$$2) a \in (-\infty; 1); 3) a \in (-\infty; 2);$$

$$4) \left(\frac{4}{3}; +\infty \right); g \in (-\infty; 2].$$

$$7.13. 1) x = 2; 2) x = 4; 3) x = 7;$$

$$4) x = 5; 5) x = 3.$$

$$7.14. 1) x = \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$3) x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$4) x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, x = \pi m; k, m \in \mathbb{Z};$$

$$5) x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

$$7.15. 3.$$

$$7.16. 1) -1; 2) -4; 3) -3; 4) -2;$$

$$5) -6.$$

$$7.17. 1) \frac{7}{6}; 2) \frac{2}{5}; 3) \frac{5}{8}; 4) \frac{1}{3};$$

$$5) \frac{1}{4}.$$

$$7.18. 1) E = [a^2 - |a| - 2; a^2 + |a| - 2],$$

$$|a| \geq 2;$$

$$2) \text{ при } a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

$$E = [-a^2; a^2]; \text{ при } a \in (-2; 0]$$

$$E = \left[\frac{a}{4} (a^2 + 4); a^2 \right];$$

$$\text{при } a \in (-2; 0]$$

$$E = \left[-a^2; \frac{a}{4} (a^2 + 4) \right];$$

$$3) E = \left[-1 - 2 \left| \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) \right|; -1 + 2 \left| \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right], \quad a \in \mathbb{R};$$

4) при $\sin a > 0$

$$E = \left[-\frac{1}{4} \frac{\cos^2 a}{\sin a} + \frac{3}{8}; +\infty \right);$$

при $\sin a < 0$

$$E = \left(-\infty; \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \frac{\cos^2 a}{\sin a} \right];$$

при $a = \pi k, E = \mathbb{R}$.

Тема II

1.1.1. 1) $2\sqrt{2}$; 2) a^2 ; 3) $n^2 m \sqrt{n}$;

4) $3b$; 5) $2a\sqrt{4a^2}$; 6) $5x^2$.

1.2. 1) $\sqrt[5]{3a^5}$; 2) $\sqrt[7]{9^7 q^3}$; 3) $\sqrt[5]{2b^5}$;

4) $\sqrt{12a^3}$; 5) $\sqrt[3]{27b^4}$; 6) $\sqrt{n^5}$;

7) $\sqrt[3]{m^8}$; 8) $\sqrt[3]{m^8}$; 9) $\sqrt[7]{128q^{10}}$.

1.3. 1) 8,9; 2) 6; 3) 30; 4) 1;

5) 0,6; 6) 1,5; 7) 1,5; 8) -1,2;

9) 0,8; 10) 225; 11) 72; 12) 45;

13) 6; 14) $\frac{5}{4}$; 15) $\frac{1}{2}$; 16) 4;

17) $\frac{1}{2}$; 18) 2; 19) 1; 20) 2;

21) 3; 22) 2; 23) 6; 24) 12;

25) 2; 26) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

1.4. 1) $3a^4$; 2) $2b^3$; 3) $2^4 b^3$; 4) $7^4 c^5$;

5) $11^3 d^2$; 6) $3^2 a$; 7) $-a^3 b$;

8) $-a^3 b^2$; 9) $3a$; 10) $2t^{-2}$; 11) $\frac{2b}{a}$;

12) $\frac{n}{2m}$; 13) c^9 ; 14) c^2 ;

15) $3\sqrt[8]{ab^3}$; 16) $-b^2 \sqrt{a}$.

1.5. 1) $11b^{-5,2}$; 2) $4k^{-5,1}$; 3) $13c^4$;

4) $14c^3$; 5) $24c^2$; 6) $b^{-\frac{1}{9}}$;

7) $10b^{-\frac{1}{7}}$; 8) $a^{\frac{11}{12}}$; 9) $a^{0,3}$; 10) a^{12} ;

11) $a^{\frac{5}{4}}$; 12) m^5 ; 13) $8c^{\frac{4}{9}}$;

14) $5c^{\frac{5}{6}}$.

1.6. 1) $2^{1/3}$; 2) $3^{1/3}$; 3) $4^{0,1}$;

4) $(\sqrt{5})^{0,8}$.

1.7. 1) $2^{\frac{2}{3}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}}$; 3) 2^5 ; 4) 2^{16} ;

5) $2^{\frac{1}{4}}$.

1.8. 1) $3^{\frac{7}{60}}$; 2) $3^{\frac{3}{20}}$; 3) 3^3 ; 4) $3^{3,5}$;

5) 3^4 .

1.9. 1) 3; 2) 4; 3) 8; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 2;

6) 64; 7) 27; 8) $\frac{1}{2}$; 9) 4;

10) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 11) $-\frac{1}{2}$; 12) 1;

13) -3; 14) 10.

1.10. 1) -17; 2) -4; 3) 8; 4) $3^{-\frac{11}{6}}$;

5) $11^{1,2}$; 6) $6^{0,7}$; 7) 2; 8) $\frac{27}{2}$;

- 9) 54; 10) $\frac{4}{5}$; 11) $7\frac{1}{12}$; 12) $\frac{729}{16}$;
 13) $5\frac{-1}{10}2\frac{-1}{5}$; 14) 36; 15) 2,5;
 16) 1; 17) $\frac{89}{45}$; 18) 128.
- 1.11.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) -2;
 5) $-\frac{1}{4}$; 6) -5; 7) $-\frac{4}{3}$; 8) 2;
 9) -2; 10) $\frac{5}{3}$.
- 1.12.** 1) -3; 2) -2; 3) 3; 4) -2;
 5) -1; 6) -2.
- 1.13.** 1) 3; 2) -2; 3) 3; 4) $\log_2 3 - 2$;
 5) -2; 6) 2; 7) 4; 8) 2; 9) 2; 10) 2.
- 1.14.** 1) -3,5; 2) $-\frac{5}{4}$; 3) -4; 4) $\frac{3}{2}$;
 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $\frac{1}{12}$.
- 1.15.** 1) 2; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) -7;
 6) 2; 7) 2; 8) 2.
- 1.16.** 1) $\frac{49}{5}$; 2) 4; 3) 2; 4) 16;
 5) 25; 6) $\sqrt{2}$; 7) -6; 8) 54;
 9) 12; 10) 9.
- 1.17.** 1) 3; 2) 5; 3) 97; 4) 5;
 5) 0,5; 6) 5; 7) 2; 8) 24; 9) 2;
 10) 6; 11) 6; 12) 10; 13) $\frac{1}{5}$;
 14) $\frac{1}{7}$; 15) -6.
- 1.18.** 1) -20,2; 2) $-27\frac{1}{8}$; 3) -16,5;
 4) $55\frac{1}{8}$.

- 1.19.** 1) 20; 2) $4\sqrt{3}$; 3) $\frac{9}{25}$;
 4) $2\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{3}$; 6) 8;
 7) -4; 8) 23.
- 1.20.** 1) -72; 2) 24; 3) 4; 4) 14;
 5) 6; 6) 6; 7) 2; 8) 6; 9) 18.
- 1.21.** 1) 10; 2) 3; 3) 5; 4) 49.
- 1.22.** 1) 324; 2) 30; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
- 1.23.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) 3;
 5) $\frac{1}{3}$.
- 1.24.** 1) 0,36; 2) 0,16; 3) 402; 4) 7;
 5) 5; 6) 3; 7) 5; 8) 27; 9) 11.
- 1.25.** 1) 10; 2) 2,01; 3) 3; 4) 5;
 5) 2; 6) 0,125; 7) 0,2.
- 1.26.** 1) 19; 2) 11; 3) 15; 4) 47;
 5) 57; 6) 24; 7) 2; 8) 4.
- 1.27.** 1) 2; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 55; 4) 67.
- 1.28.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) 1.
- 1.29.** 1) 3; 2) -1; 3) 10; 4) -2;
 5) -2; 6) -1; 7) 0; 8) 0; 9) -1;
 10) 1.
- 1.30.** 1) 0; 2) 0; 3) 0.
- 1.31.** 1) $y^{1/m}$; 2) $(a^2b)^{-1/12}$;
 3) $a^{1/3}+b^{1/3}$; 4) $\frac{1}{a(a^{1/m}-a^{1/n})}$;
 5) $\frac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}$; 6) 0;
 7) $z^{\frac{1}{p-3}}$; 8) $\frac{1}{a(3a+b)}$.
- 1.32.** 1) 0; 2) 5; 3) 4; 4) 6; 5) -8;
 6) 2; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 2.

1.33. 1) $4 + 2a$; 2) $1 - \frac{b}{6}$;

3) $\frac{2-2a}{2-a+b}$; 4) $\frac{1+b}{3(1-a)}$;

5) $a(b+3)$; 6) $\frac{1}{2}(2ab+3)$.

1.34. 1) $a < b$; 2) $a < b$;

3) $a > b$; 4) $a > b$;

5) $a > b$; 6) $a < b$.

2.1. 1) -3 ; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) -4 ;

5) $\frac{5}{3}$; 6) 3 ; 7) $\frac{19}{2}$; 8) -2 ; 9) 2 ;

10) $5 + \log_3 7$; 11) $-\frac{1}{2}(1 + \log_5 2)$;

12) $\log_2 9$; 13) $\{\pm 1\}$; 14) \emptyset .

2.2. 1) $\{0; -2\}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) 1 ; 4) 0 ;

5) $\frac{5}{2}$; 6) 5 ; 7) 4 ; 8) -3 ; 9) 1 ;

10) $\left\{0; \frac{3}{2}\right\}$; 11) $\left\{\frac{2}{19}; 1\right\}$.

2.3. 1) 3 ; 2) 1 ; 3) 1 ; 4) 2 ; 5) 0 ;

6) $1/2$.

2.4. 1) 0 ; 2) -2 ; 3) 3 ; 4) 0 ; 5) 0 ;

6) 0 ; 7) 0 ; 8) -1 ; 9) 1 .

2.5. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 2 ; 3) $\{\pm 2\}$; 4) $-\frac{1}{5}$;

5) $\{\pm 4\}$; 6) $\{\pm 5\}$; 7) $\frac{10}{9}$;

8) $\{-3; -1\}$; 9) $\{2; 4\}$; 10) $\{1; 4\}$.

2.6. 1) 3 ; 2) 3 ; 3) 5 ; 4) 2 .

2.7. 1) 16 ; 2) 81 ; 3) 125 ;

4) $\frac{1}{27}$; 5) $\sqrt[3]{3}$.

2.8. 1) 25 ; 2) $1000\sqrt{2}$; 3) 64 ; 4) 9 ;

5) $\{4, 5; 6\}$; 6) 3 ; 7) 3 .

2.9. 1) $\left\{-\frac{7}{2}; 2\right\}$; 2) $\{2; 3\}$; 3) 10 ;

4) $\{-3; -4\}$; 5) $\{-10; 0\}$;

6) $\{-2, 5; 3\}$.

2.10. 1) $\left\{-\frac{1}{5}; 3\right\}$; 2) 10 .

2.11. 1) $\frac{8}{7}$; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) 3 ;

4) $\left\{0; \frac{6}{5}\right\}$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $\frac{1}{8}$.

2.12. 1) -2 ; 2) 1 ; 3) 1 ; 4) 4 ; 5) 3 ;

6) 2 .

2.13. 9.

2.14. 4.

2.15. 1) 0 ; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $1, 5$;

4) $\{\pm\sqrt{2}\}$.

2.16. 1) $\{2; 3\log_7 4 + 3\}$;

2) $\{1; -(1 + \log_{15} 5)\}$;

3) $\{-3; 3 - \log_7 25\}$.

2.17. 1) $\{-1; \pm 4\}$; 2) $\{1/3; 2; 4\}$;

3) $\{-1; 3; 4\}$; 4) $\left\{-3; -1; -\frac{3}{2}\right\}$.

2.18. 1) $\{-2; 0\}$; 2) 3 ; 3) 1 ;

4) 0 ; 5) $\{0; \log_7 5\}$; 6) 3 ;

7) 0 ; 8) 2 ; 9) 3 ; 10) 5 ;

11) $\{\pm 2\}$; 12) 3 ; 13) 1 ;

14) $\{1; \log_{17} 3\}$; 15) 1 ;

16) $\{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}$; 17) $\frac{3}{2}$;

18) $\{1; \log_{3+\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})\}$;

19) $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$.

- 2.19.** 1) 2; 2) -1; 3) 1; 4) $-\frac{2}{3}$;
 5) $\{\pm 1\}$; 6) 2; 7) $\{\log_3 2 - 1; 2\}$;
 8) $\left\{\frac{4}{3}; 1 + \frac{1}{3} \log_2 3\right\}$; 9) 1; 10) 1.
2.20. 1) $\{\pm 2\}$; 2) $\{\pm 2\}$; 3) $\{\pm 3\}$;
 4) $\{0; \log_{\sqrt{5\sqrt{2}-7}} 6\}$.
2.21. 1) 0; 2) 0; 3) $\{0; 1\}$;
 4) $\{-2; -1\}$; 5) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$; 6) 1;
 7) $\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}$; 8) $\{0; 1\}$;
 9) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$; 10) -1; 11) 1; 12) 1.
2.22. 1) $\{1 \pm \sqrt{3}\}$; 2) $\{-2; 3\}$.
2.23. 1) $\{2; 4\}$; 2) $[3; +\infty) \cup \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$.
2.24. 1) $\log_3 2$; 2) 0;
 3) $\{\log_3(\sqrt{3}-1); \log_3(\sqrt{3}+\sqrt{7})\}$;
 4) 4; 5) -1; 6) 1.
2.25. 1) 4; 2) 2; 3) $\{3; 10\}$.
2.26. 1) \emptyset ; 2) 5; 3) 7; 4) -2.
2.27. 1) $-\frac{5}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{5}{2}$; 4) $8\frac{1}{3}$;
 5) $-\frac{2}{5}$; 6) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
2.28. 1) $\left\{\frac{7+\sqrt{7}}{3}\right\}$; 2) $\left\{2; \frac{5}{2}\right\}$; 3) -1;
 4) 9.
2.29. 1) -1; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) -1;
 6) 3.
2.30. 1) 2; 2) 3; 3) -17; 4) 1;
 5) 2; 6) -2; 7) $\{-1; 3\}$.

- 2.31.** 1) $\{-11; -1\}$; 2) $\{2^{-5/4} + 1; 3\}$;
 3) $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$; 4) $\{3; 3+\sqrt{2}\}$;
 5) $\left\{3; 6\frac{7}{8}; 7\frac{1}{8}; 11\right\}$.
2.32. 1) $\{0, 1; 100\}$; 2) $\left\{\frac{1}{8}; 4\right\}$;
 3) $\{1; 25\}$; 4) $\{1; 5, 5\}$; 5) $\left\{\frac{1}{2}; 8\right\}$;
 6) $\{3; 3^{-7}\}$; 7) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; 9\right\}$; 8) $\left\{\frac{1}{16}; 4\right\}$.
2.33. 1) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; 8\right\}$; 2) $\{\sqrt{2}; 4\}$;
 3) $\{3; 9\}$; 4) $\left\{-\frac{9}{5}; 23\right\}$.
2.34. 1) $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$; 2) 3; 3) -1;
 4) $\left\{\frac{1}{9}; 1; 3\right\}$; 5) $\{\pm 3\}$; 6) $\left\{\frac{1}{1024}; 1; 8\right\}$.
2.35. 1) $\{1; 25\}$; 2) $\{\sqrt[3]{3}; 3\}$.
2.36. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{49}$; 3) $\frac{10}{9}$.
2.37. 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$.
2.38. 1) 512; 2) $\{1; 27\}$; 3) 4.
2.39. 1) $\{2; 4\}$; 2) $\{-1; 2\}$; 3) 2.
2.40. 1) $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$; 2) $\{8; 9\}$;
 3) $\{64; 81\}$; 4) $\{1; 24\sqrt{3}\}$;
 5) $\left\{1; \frac{125}{27}\right\}$.

2.41. 1) $\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

2) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 3) \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$

4) $\pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n;$

5) $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n.$

2.42. 1) $\left\{-\frac{7\pi}{12}; -\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{24}\right\};$

2) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right\}; \quad 3) \left\{-\frac{7\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{13\pi}{6}\right\};$

4) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}; \quad 5) -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$

$n \in \mathbb{Z}; \quad 6) \frac{\pi}{4}.$

2.43. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) -1; 5) 0;

6) 1; 7) 3.

2.44. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \pi + 2\pi k, \quad k, n \in \mathbb{Z};$

2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

3) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

4) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2.45. $\left\{\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right\}.$

2.46. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

2) $\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

3) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n; 6\right\} \quad n \in \mathbb{Z};$

4) $\left\{\pi k; \frac{4}{3}; 2\right\} \quad k \in \mathbb{Z}.$

2.47. 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0;

6) $-\frac{1}{2}.$

3.1. 1) $(-\infty; 3]; \quad 2) (-1; +\infty);$

3) $(-2; +\infty); \quad 4) (-\infty; 3];$

5) $\left(-\frac{5}{2}; +\infty\right); \quad 6) \left[\frac{3}{4}; +\infty\right);$

7) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); \quad 8) \left(-\infty; \frac{8}{3}\right];$

9) $\left(-\frac{9}{5}; +\infty\right); \quad 10) (-\infty; 2 - \log_3 2];$

11) $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]; \quad 12) \left(-\frac{7}{2}; +\infty\right);$

13) $\left[\frac{4}{3}; 3\right); \quad 14) \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right);$

15) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right); \quad 16) \emptyset; \quad 17) \mathbb{R};$

18) $\emptyset; \quad 19) (-\infty; 7); \quad 20) [8; +\infty);$

21) $\left(\frac{5}{3}; 2\right); \quad 22) (\log_2 5; +\infty);$

23) $(-1; 7);$

24) $(1 - \sqrt{5}; -1) \cup (3; 1 + \sqrt{5});$

25) $(-\infty, 0) \cup (3; +\infty);$

26) $(-\infty, -8) \cup (4; +\infty);$

27) $(-\infty, -8] \cup [6; +\infty);$

28) $\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right); \quad 29) (1; 4).$

3.2. 1) $[16; +\infty); \quad 2) (8; +\infty);$

3) $(0; 3); \quad 4) [2; 3);$

- 5) $(2; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{10}{7}; +\infty\right)$;
 7) $[-2; -1) \cup (3; 4]$;
 8) $[-5; -3) \cup (3; 5]$;
 9) $(-\infty; -4,5) \cup (4; +\infty)$; 10) $[2; 5]$;
 11) $\left(-\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}\right]$; 12) $\left(\frac{3}{5}; \frac{52}{5}\right]$;
 13) $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$;
 14) $(-1; 1) \cup (2; 4)$;
 15) $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
 16) $(-\infty; -9] \cup (3; +\infty)$;
 17) $[-1; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; 3]$;
 18) $(2; 9)$; 19) $[-4; -3) \cup (0; 1]$;
 20) $\left[-2; -\frac{2}{3}\right)$;
 21) $[0; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; 6]$;
 22) $[-1; 1) \cup (3; 5]$;
 23) $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$;
 24) $[-7; -\sqrt{35}) \cup [5; \sqrt{35})$.
3.3. 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup$
 $\cup \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$;
 3) $[1; 5]$; 4) $\left[-\frac{1}{2}; 9\right]$; 5) $(-1; 3)$;
 6) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; 7) $\left[-\frac{1}{5}; 7\right]$;
 8) $\left(-\infty; -\frac{14}{3}\right)$.
3.4. 1) $(-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3)$;

- 2) $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$;
 3) $\left(\frac{5}{4}; \frac{65}{36}\right]$; 4) $\left(-\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right]$.
3.5. 1) $(0; 3]$; 2) $(0; 9]$; 3) $[4; +\infty)$.
3.6. 1) $(-\infty; 0,5]$; 2) $[-\log_2 5; -1]$;
 3) $[2; +\infty)$;
 4) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; 1]$;
 6) $(-\infty; -1)$; 7) $(0; 1)$; 8) $(0; +\infty)$;
 9) $(1; +\infty)$; 10) $(-\infty; \log_2 5]$;
 11) $(-\infty; \log_2 3) \cup (2; +\infty)$;
 12) $(-\infty; -2) \cup (\log_2 3; +\infty)$;
 13) $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
3.7. 1) $\left(\log_2 \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$;
 2) $(-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$;
 4) $(10; +\infty)$; 5) $(3; +\infty)$.
3.8. 1) $(-\infty; 1]$; 2) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; 3) $[-2; 1]$;
 4) $(0; 1)$; 5) $(1; +\infty)$.
3.9. 1) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$;
 3) $(-\infty; 0) \cup (\log_2 3; +\infty)$;
 4) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$;
 5) $[\log_3 2; 0) \cup \left(\frac{1}{2} \log_3 2; \log_3 2\right]$.
3.10. 1) $\left\{\frac{1}{5}\right\} \cup \left[\frac{3}{5}; +\infty\right)$;
 2) $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) $\{2\} \cup [5; +\infty)$;
 4) $(1; 2) \cup [3; +\infty)$; 5) $(0; 4)$;
 6) $(5; 9] \cup [10; +\infty)$;

- 7) $(0; 1) \cup \{10\}$;
 8) $[\log_7 5; 1) \cup (1; 9)$;
 9) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \{5\}$;
 10) $(-6; -4] \cup [-3; +\infty)$.
- 3.11.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$;
 3) $\left[\log_2 \frac{3}{2}; \log_2 \frac{26}{9}\right]$; 4) $(-\infty; 0)$;
 5) $[0; +\infty)$; 6) $[125; 15625)$;
 7) $[10^7; +\infty)$; 8) $\left[\frac{1}{2}; \log_4 11\right]$.
- 3.12.** 1) $(-1; 1) \cup (2; +\infty)$;
 2) $\left(-\frac{5}{3}; -1\right) \cup (4; +\infty)$; 3) \emptyset ;
 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; 4)$;
 5) $(-\sqrt{5}; -2) \cup (1; \sqrt{5})$;
 6) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; 7) $\left(-\frac{5}{3}; 1\right)$;
 8) $(-1; 1+2\sqrt{2})$.
- 3.13.** 1) $(0; 10^{-4}) \cup [10; +\infty)$;
 2) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$; 3) a) $\{10; \sqrt[9]{10}\}$,
 б) $(0, \sqrt[9]{10}) \cup (10, +\infty)$;
 4) a) $\left\{\frac{1}{81}; 3\right\}$; б) $\left[\frac{1}{81}; 3\right]$;
 5) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [5, 5; +\infty)$;
 6) $(2; 4)$; 7) $\left(1; \frac{11}{10}\right)$; 8) $(2; 3)$;
 9) $(3; 5]$; 10) $(2; 5)$; 11) $[2; 4)$;
 12) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

- 3.14.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$;
 2) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (10; +\infty)$;
 3) $\left(\frac{1}{64}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 4\right)$;
 4) $(-\infty; -\sqrt[3]{10}) \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup$
 $\cup (\sqrt[3]{10}; +\infty)$.
- 3.15.** 1) $(3; 27) \cup [243; +\infty)$;
 2) $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.
- 3.16.** 1) $(-\infty; -23] \cup \left[\frac{9}{5}; \frac{11}{5}\right] \cup$
 $\cup [27; +\infty)$;
 2) $(-\infty; -67) \cup (-7; -3) \cup (-3; 1) \cup$
 $\cup (61; +\infty)$.
- 3.17.** 1) $[3; 45]$; 2) $(0; 16] \cup [24; +\infty)$.
- 3.18.** 1) $(0; 1) \cup (3; +\infty)$; 2) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$;
 3) $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1)$; 4) $\left[\frac{9-\sqrt{17}}{4}; 2\right)$;
 5) $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$;
 6) $(-1; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right]$; 7) $(2; 3) \cup \left[\frac{10}{3}; 6\right)$;
 8) $(10-\sqrt{43}; 4) \cup (10+\sqrt{43}; +\infty)$;
 9) $\left(1; \frac{3}{2}\right] \cup (2; 3]$.
- 3.19.** 1) $\left[-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right]$;
 2) $\left[-\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{6}{5}\right]$.

$$3.20. \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup$$

$$\cup \left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 7\right).$$

$$3.21. 1) \left(0; \frac{1}{27}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty);$$

$$2) \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; \sqrt[3]{9});$$

$$3) \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [\sqrt[3]{2}; +\infty).$$

$$3.22. 1) \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (3; +\infty); \quad 2) [\sqrt{2}; 2].$$

$$3.23. 1) [3; +\infty); \quad 2) (-\infty; -3];$$

$$3) \left(\frac{3}{2}; 2\right).$$

$$3.24. 1) \left[0; \log_3^2 2\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \infty\right);$$

$$2) (-1; \sqrt{2}].$$

$$4.1. 1) \{(4; 2)\}; \quad 2) \{(4; 1)\};$$

$$3) \{(2; 1)\}; \quad 4) \{(0; -3)\};$$

$$5) \{(1; 1)\}; \quad 6) \{(2; 1); (10; 5)\};$$

$$7) \left\{(7; 49); \left(\frac{1}{49}; \frac{1}{7}\right)\right\};$$

$$8) \left\{\left(\frac{5}{6}; 6\right)\right\}; \quad 9) \{3; 3\};$$

$$10) \{(2; 3); (3; 2)\}.$$

$$4.2. 1) \{(1; 2); (\log_2 9; \log_3 2)\}.$$

$$2) \{(16; 4)\}; \quad 3) \left\{\left(2; \frac{3}{2}\right)\right\};$$

$$4) \left\{\left(-2; \frac{1}{784}\right)\right\};$$

$$5) \{(3; 9); (9; 3)\}; \quad 6) \{(20; 5)\};$$

$$7) \left\{\left(4; -\frac{1}{2}\right)\right\}; \quad 8) \{(-2; -2); (2; 2)\}.$$

$$4.3. 1) \{(2; 1)\}; \quad 2) \{(0; 1)\}.$$

$$4.4. 1) \{(-2; -2); (4; -2)\};$$

$$2) \{(-4; 4); (7; 4)\}.$$

$$4.5. 1) \left\{\left(\frac{\pi}{2}; 5 - \frac{3\pi}{2}\right)\right\};$$

$$2) \left\{\left(\frac{5\pi}{2}; 8 - \frac{5\pi}{2}\right)\right\}.$$

$$4.6. 1) 4.$$

$$5.1. 1) \text{ При } a \in (-\infty, -1] \Rightarrow \\ x = \log_2(1 - 2a);$$

$$\text{при } a \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x \in \{\log_2(1 - 2a); \log_2(a + 1)\};$$

$$\text{при } a \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow x = \log_2(a + 1);$$

$$2) \text{ при } a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \Rightarrow$$

$$x_1 = -\log_2(-3c - 4), x_2 = -\log_2(5 - c),$$

$$\text{при } c \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right) \Rightarrow$$

$$x = -\log_2(5 - c);$$

$$\text{при } c \in [5; +\infty) \Rightarrow x = \emptyset;$$

$$3) \text{ при } a \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$x \in \{\log_3(3 + 2a); \log_3(3a - 4)\};$$

$$\text{при } a \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right] \Rightarrow$$

$$x = \log_3(3+2a);$$

$$\text{при } a \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow x = \emptyset.$$

$$\mathbf{5.2. 1)} \text{ При } a \in \left(-\infty; -\frac{6}{7}\right] \Rightarrow x = \emptyset;$$

$$\text{при } a \in \left(-\frac{6}{7}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$x = -\log_4(2b + \sqrt{4b^2 + 7b + 6});$$

$$2) \text{ при } a \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup [0; +\infty) \Rightarrow x = \emptyset;$$

$$\text{при } a \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{2}{9}\right] \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{10^{y_{1,2}} - 10};$$

$$\text{при } a \in \left(-\frac{2}{9}; 0\right) \Rightarrow x = \pm \sqrt{10^{y_2} - 10},$$

$$\text{где } y_{1,2} = \frac{1}{2a} \left(-1 \pm \sqrt{1-4a-32a^2}\right);$$

$$3) \text{ при } a \in \left(-\infty; -\frac{5}{94}\right) \cup \left(\frac{1}{10}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$x = \emptyset;$$

$$\text{при } a \in \left[-\frac{5}{94}; 0\right) \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{1 + \log_5 t_1};$$

$$\text{при } a = 0 \Rightarrow x = \pm 1;$$

$$\text{при } a \in \left(0; \frac{1}{10}\right) \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{1 + \log_5 t_{1,2}};$$

$$\text{при } a = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2},$$

$$\text{где } t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a-60a^2}}{2a}.$$

$$4) \text{ при } a \in (-\infty, 0] \cup (3, +\infty) \Rightarrow x = \emptyset,$$

$$\text{при } a \in (0, 3] \Rightarrow$$

$$x \in \{2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4-a})\};$$

$$5) \text{ при } a \in \left[-\frac{5}{2}; -1\right] \Rightarrow$$

$$x = (-1)^n \arcsin(\log_2(a+3)) + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{при } a \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (-1; +\infty) \Rightarrow$$

$$x = \emptyset.$$

$$6) \text{ при } a \in \left[-\frac{10}{3}; 2\right] \Rightarrow$$

$$x = \pm \arccos\left(-\log_3 \frac{c+4}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{при } a \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty) \Rightarrow$$

$$x = \emptyset.$$

$$\mathbf{5.3. 1)} (-3; 5]; \quad 2) \{-2\} \cup [0; +\infty);$$

$$3) \left[-\frac{5}{4}; 1\right) \cup \{2\}.$$

$$\mathbf{5.4. 1)} \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup [1; +\infty);$$

$$2) [-1; +\infty) \cup \left\{-\frac{3}{2}\right\};$$

$$3) (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{16}{3}\right\} \cup [8; +\infty).$$

$$\mathbf{5.5. } (-\infty; 1].$$

5.6. 1) При $a \in (-\infty, -9) \Rightarrow x = \emptyset$;

при $a = -9 \Rightarrow x = 1$;

при $a \in (-9; -8) \cup (-8; 0) \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \log_3(3 \pm \sqrt{9+a});$$

при $a = -8 \Rightarrow x = \log_3 2$;

при $a \in [0, +\infty) \Rightarrow$

$$x = \log_3(3 + \sqrt{9+a}).$$

2) при $a \in (-\infty; -1] \Rightarrow x = \emptyset$;

при $a \in (-1; 0) \Rightarrow$

$$x \in \{\log_2(1 \pm \sqrt{1+a})\};$$

при $a \in [0; +\infty) \Rightarrow$

$$x = \log_2(1 + \sqrt{1+a});$$

3) при $b \in (-\infty; 12) \Rightarrow x = \emptyset$;

при $b \in [12; 13) \Rightarrow$

$$x = \log_3(1 \pm \sqrt{b-12});$$

при $b = 16 \Rightarrow x = \emptyset$;

при $b \in [13; +\infty) \setminus \{16\} \Rightarrow$

$$x = \log_3(1 + \sqrt{b-12});$$

4) при $a \in (-\infty; -2] \cup \{2; 6\} \Rightarrow$

$$x = \emptyset;$$

при $a \in (-2; 2) \cup \{10\} \Rightarrow$

$$x = \log_2(a+2);$$

при $a \in (2; 6) \cup (6; 10) \cup (10; +\infty) \Rightarrow$

$$x_1 = \log_2(a+2); \quad x_2 = \log_2(a-2).$$

5.7. 1) $y_1 = 2^{x/2}$, $y_2 = 2^{-2x}$;

2) $y = \{-3; 1\}$ при $x > 0$,

$$y = \{-1 \pm \sqrt{2}\} \text{ при } x < 0;$$

3) $y = x^3$ при $x > 0$, $x \neq 1$,

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ при } x > 0, x \neq 1;$$

$$4) y = \frac{1}{x} \text{ при } x > 0, x \neq 1,$$

$$5) y = x \text{ при } x > 0, x \neq 1.$$

5.8. 1) При $a \in \left(-\infty; -\frac{46}{27}\right] \Rightarrow$

$$x \in \left\{\frac{46}{9}; -3a\right\};$$

$$\text{при } a \in \left(-\frac{46}{27}; -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow x = -3a;$$

$$\text{при } a \in \left[-\frac{5}{3}; \frac{46}{9}\right] \Rightarrow x = \emptyset;$$

$$\text{при } a \in \left(\frac{46}{9}; +\infty\right) \Rightarrow x = \frac{46}{9};$$

$$2) \text{ при } b \in \left(-\infty; -\frac{134}{3}\right) \cup \left[\frac{67}{9}; \frac{15}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{134}{3}, \quad x_2 = -2b;$$

$$\text{при } b \in \left[-\frac{134}{3}; \frac{67}{9}\right) \Rightarrow x = -2b;$$

$$\text{при } b \in \left[\frac{15}{2}; +\infty\right) \Rightarrow x = -\frac{134}{3};$$

3) при $a \in (-\infty; -1] \Rightarrow x_1 = 9, x_2 = 99$;

при $a \in (-1; 9] \Rightarrow x_1 = 9, x_2 = 99$;

$x_3 = a$;

при $a \in (9; 99] \Rightarrow x_1 = 99, x_2 = a$;

при $a \in (99; +\infty) \Rightarrow x = a$;

4) при $c \in (-\infty; -9] \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 75$;

при $c \in (-9; 0] \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 75$,

$x_3 = c + 3$;

при $c \in (0; 72] \Rightarrow x_1 = 75, x_2 = c + 3$;

при $c \in (72; +\infty) \Rightarrow x = c + 3$.

5.9. 1) При $a \in (-\infty, 2) \cup (2; 8] \Rightarrow$

$$x = \emptyset;$$

при $a = 2 \Rightarrow x \in (5; +\infty);$

$$\text{при } a \in (8; +\infty) \Rightarrow x = \frac{a+2}{2}.$$

2) при $b \in (-\infty, 3) \cup [9; +\infty) \Rightarrow x = \emptyset;$

при $b \in (-\infty, 3) \cup [9; +\infty) \Rightarrow x \in [3; 9);$

$$\text{при } b \in (3; 9) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(b+3);$$

3) при $d \in (-\infty, 0] \cup \{1\} \Rightarrow x = \emptyset;$

при $d \in (0; 1) \cup (1; 8] \Rightarrow$

$$x = 2 + \sqrt{8+d};$$

при $d \in (8; +\infty) \Rightarrow$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8+d};$$

4) при $c \in (-\infty; 3) \Rightarrow$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{35+3^c};$$

при $c \in [3; \log_3 31] \Rightarrow$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{35-3^c};$$

$$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{3^c - 27};$$

при $c \in (\log_3 31; +\infty) \Rightarrow x = \emptyset.$

5) при $a \in (-\infty, 0) \Rightarrow x = \emptyset;$

при $a \in (0; 8] \Rightarrow$

$$x_1 = \log_7^2(2 + \sqrt{9+a});$$

$$x_2 = \log_7^2(2 + \sqrt{9-a});$$

при $a \in [8; 9] \Rightarrow$

$$x_1 = \log_7^2(2 + \sqrt{9+a});$$

$$x_2 = \log_7^2(2 \pm \sqrt{9-a});$$

при $a \in (9; +\infty] \Rightarrow$

$$x_1 = \log_7^2(2 + \sqrt{9+a}).$$

5.10. -1.

$$\mathbf{5.11.} \quad \left(0; \frac{3\sqrt{2}-4}{4}\right) \cup (2; +\infty).$$

5.12. 1) Дуга окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ в первой четверти с тремя выколотыми точками;

2) часть квадрата $|x-1| + |y| = 1$ в первой четверти с удаленной вершиной и часть прямой $y = x - 2$ в третьей четверти;

3) часть параболы $x + 2 = (y-3)^2$, лежащая выше прямой $y = x - 7$ с двумя удаленными точками;

4) часть гиперболы $xy = 6$ в первой четверти, лежащая ниже прямой $x + y = 5$ с выколотой точкой.

5.13. 1) При $a \in (-\infty; 6] \Rightarrow$

$x \in [3; +\infty);$ при $a \in (6; +\infty) \Rightarrow$

$$x \in \left[3; 3 + \log_2^2\left(\frac{a-2}{a-6}\right)\right];$$

2) при $a \in (-\infty; -2] \Rightarrow$

$$x \in \left[2 + \log_4^2\left(\frac{a-5}{2a-3}\right)\right];$$

при $a \in (-2; 5) \Rightarrow x \in [2; +\infty);$

при $a \in [5; +\infty) \Rightarrow$

$$x \in \left[2; 2 + \log_4^2\left(\frac{a-5}{2a-3}\right)\right].$$

5.14. 1) при $a \in (-\infty, -1) \Rightarrow$

$$x \in \{a+1\} \cup [0; 4);$$

при $a \in [-1, 0) \Rightarrow x \in [0; 4);$

при $a \in [0, 3] \Rightarrow x \in (a; 4);$

при $a \in (3; 4) \Rightarrow x \in (a; 4) \cup \{a+1\};$

при $a \in [4; +\infty) \Rightarrow x \in a + 1.$

2) при $a \in (-\infty; 2] \Rightarrow x \in (3; +\infty);$

при $a \in (2; 3) \Rightarrow$

$$x \in (2; a] \cup (3; +\infty);$$

при $a = 3 \Rightarrow$

$$x \in (2; 3) \cup (3; +\infty);$$

при $a \in (3; +\infty) \Rightarrow$

$$x \in (2; 3) \cup [a; +\infty);$$

3) при $a \in (-\infty; -2] \Rightarrow$

$$x \in (a; -1] \cup (2; +\infty);$$

при $a \in (-2, -1) \Rightarrow$

$$x \in (a; -1) \cup \{a + 1\} \cup (2; +\infty);$$

при $a \in [-1, -1) \Rightarrow$

$$x \in \{a + 1\} \cup (2; +\infty);$$

при $a \in [1; 2] \Rightarrow x \in (2; +\infty);$

при $a \in (2; +\infty) \Rightarrow x \in (a; +\infty).$

4) при $a \in (-\infty; -4] \Rightarrow$

$$x \in (1 - a; +\infty);$$

при $a \in (-4; -3] \Rightarrow$

$$x \in (-a; 4) \cup (1 - a; +\infty);$$

при $a \in (-3; 0] \Rightarrow$

$$x \in (-a; 1 - a) \cup (4; +\infty);$$

при $a \in (0; 1] \Rightarrow$

$$x \in (-a; 0) \cup (0; 1 - a) \cup (4; +\infty);$$

при $a \in [1; +\infty) \Rightarrow$

$$x \in (-a; 1 - a) \cup (4; +\infty).$$

5) при $b \in (-\infty; -6] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{1-b}{2} \right\};$

при $b \in (-6; -5] \Rightarrow$

$$x \in \left(\frac{b}{2}; 3 \right] \cup \left\{ \frac{b}{2}; 3 \right\};$$

при $b \in [-5; 4] \Rightarrow x \in \left(\frac{b}{2}; 3 \right];$

при $b \in (4; 5] \Rightarrow x \in [-2; 3];$

при $b \in (5; +\infty) \Rightarrow$

$$x \in \left\{ \frac{1-b}{2} \right\} \cup [-2; 3].$$

5.15. 1) $\left[0; \frac{4}{7} \right];$ 2) $\left[-\frac{3}{5}; 0 \right];$

3) $\left(\frac{5}{2}; \frac{8}{3} \right);$ 4) $\left[\frac{57}{28}; +\infty \right);$

5) $(-\infty; -2, 5);$ 6) $(-3; -1) \cup (2; 4).$

5.16. 1) $\frac{\pi+4}{2};$ 2) 6.

5.17. 6.

5.18. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty), p_{\min} = 3.$

5.19. $[0; 9), y_{\min} = 0.$

5.20. При $p \in (0, +\infty) \Rightarrow$

$$S(p) = \frac{p(p+12)}{6};$$

при $p \in (-\infty; 0] \Rightarrow S(p) = 0.$

5.21. $\frac{1}{2}.$

5.22. 4.

5.23. 1) $\left(\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4} \right];$ 2) $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3} \right].$

5.24. 1) При $d \in \left(\frac{25}{3}; \frac{59}{7} \right] \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -\log_5(6d - 50), \\ y = \log_7^2(60 - 7d); \end{cases}$$

при $d \in \left(-\infty; \frac{25}{3} \right] \cup \left(\frac{59}{7}; +\infty \right) \Rightarrow$

$$x = \emptyset;$$

2) при $c \in \left(\frac{11}{2}; 7 \right] \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -\log_2(6c-11), \\ y = \pm \arccos(6-c) + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{при } c \in \left(-\infty; \frac{11}{2}\right] \cup (7; +\infty) \Rightarrow x = \emptyset.$$

$$5.25. 1) \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]; \quad 2) (-\infty; 2).$$

$$5.26. 1) (-\infty; 1] \cup \left\{\frac{11}{8}\right\};$$

$$2) \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup (0; +\infty).$$

$$5.27. 1) \left(\frac{7}{5}; 2\right) \cup \left(2; \frac{7}{3}\right] \cup \left\{\frac{12}{5}\right\};$$

$$2) \left(\frac{7}{4}; \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; \frac{7}{2}\right] \cup \{4\};$$

$$3) \left(-\infty; -9\frac{1}{4}\right] \cup \left[12\frac{1}{3}; +\infty\right) \cup \{-9; 11\};$$

$$4) \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right] \cup [0; +\infty) \cup \left\{-1; -\frac{1}{4}\right\}.$$

$$5.28. 1) \left(-\infty; 3\frac{2}{3}\right) \cup \left(3\frac{2}{3}; 4\right);$$

$$2) \left(0; \frac{9}{16}\right); \quad 3) \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$5.29. (-\infty; -783].$$

$$5.30. \left\{\frac{3-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}.$$

$$5.31. \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{65}}{2}\right] \cup [7; +\infty).$$

$$5.32. \text{При } p \in (0; 1) \Rightarrow$$

$$x \in (0; p) \cup \left(1; \frac{1}{p}\right);$$

$$\text{при } p \in (1; +\infty) \Rightarrow$$

$$x \in \left(\frac{1}{p}; 1\right) \cup (p; +\infty).$$

$$5.33. \text{При } p = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = 1.$$

$$5.34. \text{При } p = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$f_{\max} = 1 - \frac{1}{16p^2}.$$

$$\text{При } p = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$f_{\max} = 1 - \frac{9}{16p^2}.$$

$$5.35. \text{При } 0 < p < 1$$

$$E_p = \left(-\infty; 2 + \frac{p-1}{\log_2 p}\right];$$

$$\text{при } p < 1$$

$$E_p = \left[2 + \frac{p-1}{\log_2 p}; +\infty\right).$$

$$5.36. 1.$$

$$6.6. 1) (-\infty; 4]; \quad 2) \left[\frac{3}{2}; +\infty\right);$$

$$3) [-2; 0]; \quad 4) (-\infty; 10);$$

$$5) (-\infty; -3] \cup (2\sqrt{2}; +\infty).$$

$$6.7. 1) \left[\frac{1}{2}; 2\right]; \quad 2) \left[\frac{1}{3}; +\infty\right);$$

$$3) \left[\frac{1}{2}; +\infty\right); \quad 4) \left[\frac{1}{2}; 1\right];$$

$$5) [2; +\infty); \quad 6) \left[\frac{1}{27}; +\infty\right).$$

- 6.8.** 1) $[4; +\infty)$; 2) $[-4; +\infty)$;
 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; 2]$; 5) $(-\infty; 2]$.
6.9. 1) $[-1; +\infty)$; 2) $[2; +\infty)$; 3) $[1; 3]$;
 4) $[18; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2]$; 6) $[-1; +\infty)$.
6.10. 5.

Тема III

- 1.1.** 1) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; 2) $(-1; 1]$;
 3) $[-0,4; 1]$; 4) $(-\infty; -1) \cup [2; 3]$;
 5) $(-\infty; -3] \cup (-2; 1) \cup (1; 4)$;
 6) $[1; +\infty)$;
 7) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$;
 8) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;
 9) $[-0,5; 3]$;
 10) $[-2; 1) \cup (1; 3]$.
1.2. 1) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \right\}, n \in \mathbb{Z}$;
 2) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi n + 3}{2} \right\}, n \in \mathbb{Z}$;
 4) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$;
 5) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi k + \pi/3}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$;
 6) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi n - \frac{\pi}{4} \right\}, n \in \mathbb{Z}$;
 7) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
 8) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
 9) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$.
1.3. 1) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$;

- 2) $[-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$;
 3) $[8; 12]$;
 4) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
 5) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;
 6) $(-\infty; -4] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;
 7) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.
1.4. 1) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;
 2) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;
 3) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.
1.5. 1) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$;
 3) $(-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$;
 4) $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 5) $(-2; 2)$;
 6) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 7) $(3; +\infty)$;
 8) $(3; 4) \cup (4; +\infty)$;
 9) $(-\sqrt{5}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \sqrt{5})$;
 10) $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$.
1.6. 1) 7; 2) 5; 3) 91; 4) 1; 5) 2.
1.7. 1) а) $[1; +\infty)$;
 б) $[1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$;
 в) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; г) $[1; +\infty)$;
 2) а) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; +\infty)$;
 б) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$;
 в) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
 г) $(-\infty; -2) \cup (-2; -0,5]$;
 3) а) $[-1; 0) \cup (0; 8]$;
 б) $[-1; 0) \cup (0; 8]$;

$$\text{в)} (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right);$$

$$\text{г)} [-1; 3,5) \cup (3,5; 8];$$

$$4) \text{ а)} [-2; 0);$$

$$\text{б)} \left[-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right);$$

$$\text{в)} \left[-2; -\frac{1}{2}\right); \text{ г)} \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right];$$

$$5) \text{ а)} (-\infty; 0) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty);$$

$$\text{б)} (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty);$$

$$\text{в)} (-1; 5) \cup (5; 7);$$

$$\text{г)} (-\infty; -0,1) \cup (-0,1; 0) \cup (4; 4,1) \cup (4,1; +\infty).$$

$$1.8. 1) \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right);$$

$$2) (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0,5; +\infty);$$

$$3) (-\infty; -1) \cup (-1; -0,25] \cup \{0\} \cup [0,5; +\infty);$$

$$4) (-\infty; -4] \cup [-0,4; +\infty);$$

$$5) (-1; 0) \cup \{0,5\}.$$

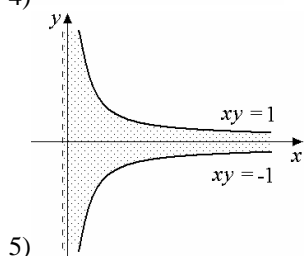
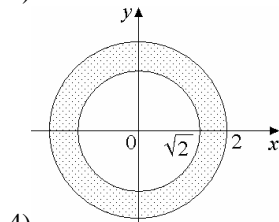
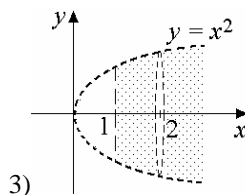
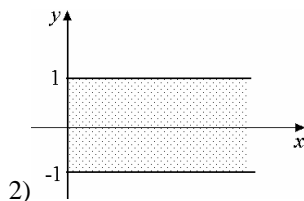
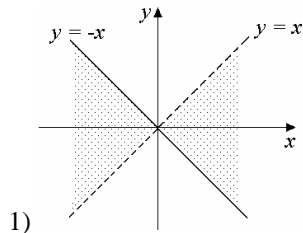
$$1.9. 1) (-2; -0,5]; \quad 2) \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right);$$

$$3) [-3; 1];$$

$$4) \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right); \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$5) (-1; 2].$$

1.10.



$$1.11. a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \{2\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\},$$

$$k \geq 0, k \in \mathbb{Z}.$$

$$1.12. a \in (3; +\infty).$$

$$1.13. a \in (-1; 0).$$

1.14. Таких значений a нет.

$$2.1. 1) (-\infty; 25]; \quad 2) [0; 5];$$

$$3) [-2; 3]; \quad 4) (-\infty; 4]; \quad 5) [0; 2];$$

$$6) [3; 5]; \quad 7) (-\infty; 9]; \quad 8) [0; 3];$$

$$9) [-1; 2].$$

2.2. 1) $[-1; 5]$; 2) $[-7; -3]$;

3) $[-2; 3]$; 4) $[-7; 1]$;

5) $[-5; -3]$; 6) $[-9; -2]$;

7) $[4; 5]$; 8) $[-5; -3]$;

9) $[1; 4]$.

2.3. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;

3) $[3\pi; 4\pi]$; 4) $[-5\pi; -\pi]$;

5) $[-4\pi; 2\pi]$; 6) $(0; 2\pi)$.

2.4. 1) $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$;

3) $[-1; 0]$; 4) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$;

5) $[-1; 1]$; 6) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

2.5. 1) $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$; 2) $\left[-\frac{1}{8}; 3\right]$;

3) $\left[-\frac{10}{3}; 2\right]$; 4) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;

5) $[-2; 2]$; 6) $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$;

7) $[-13; 13]$; 8) $[-5; 5]$;

9) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;

10) $[1; +\infty)$.

2.6. 1) $[-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$;

2) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$;

3) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

4) $[2; +\infty)$; 5) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

6) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$;

7) $(-\infty; 3]$; 8) $(-\infty; 2]$.

2.7. 1) $(0; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$;

3) $(0; 1]$; 4) $\left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$;

5) $\left(0; \frac{1}{3}\right]$; 6) $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$;

7) $(0; 3]$; 8) $(0; 4]$;

9) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 10) $(0; 4]$;

11) $\left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$;

12) $\left(0; \frac{1}{9}\right]$; 13) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

14) $[1; 3]$; 15) $[4; 64]$;

16) $\left[\frac{1}{64}; 1\right]$; 17) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

2.8. 1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2]$;

3) $(-\infty; -1]$; 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$;

5) $(-\infty; 1]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$;

7) $[4; +\infty)$.

2.9. 1) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

2) $[2; +\infty)$; 3) $\left[0; \frac{5}{\sqrt{7}}\right]$;

4) $[-5; 5]$; 5) $[2; 8]$; 6) $[3; 7]$;

7) $\left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right]$; 8) $\left[-\frac{9}{8}; 2\right]$;

9) $[0; 3]$; 10) $\left[1; \frac{5}{4}\right]$.

2.10. 1) 1; 2) 4; 3) 7; 4) 10; 5) 2.

2.11. 1) $[-2; 3]$; 2) $[-7; 3]$;

3) $[0; 7]$; 4) $[0; 9]$; 5) $[0; \sqrt{3}]$.

- 2.12.** 1) а) $[0; \sqrt{2}]$;
 б) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$;
 в) $[0; 2]$; г) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$;
 2) а) $[0; 1]$; б) $(0; +\infty)$;
 в) $(-\infty; 1)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;
 3) а) $[0; 1]$; б) $[0; \pi^2]$; в) $[0; 1]$;
 г) $\{\pi\}$;
 4) а) $[0; \sqrt{5}]$; б) $[0; +\infty)$; в) $[-5; 5]$;
 г) $[-21; 4]$.

- 2.13.** 1) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$;
 2) $\left[-\frac{85}{18}; -2\right]$; 3) $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$;
 4) $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$;
 5) $\left(-\infty; -\frac{17}{4}\right]$.

2.14. $a = -1$; $a = -\frac{3}{2}$.

2.15. $a \in \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

2.16. $a = -2$; $a = -\frac{3}{2}$.

2.17. $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2.18. При $a = -1$ $E_y = \{0\}$;
 при $a \neq 1$ $E_y = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

3.1. 1) и 3).

3.2. 1) и 4).

3.3. 2) и 3).

3.4. 1) $a = 1$; 2) $a = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

3.5. 1) $a = 2$; 2) $a = -2$;

3) $a = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

3.6. 1) $a = 3$; 2) $a = 0$, $a = \pm 1$;

3) $a = \frac{\pi}{2} m$.

3.7. 1), 3), 5) нечетные; 2) четная;

4) общего вида.

3.8. 1), 3), 4), 5) нечетные;

2) четная.

3.10. 1) -1 ; 2) 1 ; 3) $-2\frac{2}{3}$.

3.11. 1) -2 ; 2) 1 ; 3) 0 .

3.14. $a = 2$.

3.15. $a \in \left[1 - \frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2} - 1\right]$.

4.1. 1) π ; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{3}$;

4) 3π ; 5) $\frac{\pi}{2}$.

4.2. 1) 2π ; 2) 14π ; 3) 12π ; 4) π .

4.3. 1) а) -1 ; б) $E = (-1; 1]$;

в) $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) а) 54 ; б) $E = [-8; -6]$; в) \emptyset ;

3) а) -1 ; б) $E = [0; 1]$;

в) $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) а) 0 ; б) $E = [0; 4]$;

в) $x = 7 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.4. 1) $T = 1$; 2) $T = 1/2$.

4.6. $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} < |a| \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тема IV

- 1.1.** 1) 9; 2) 3; 3) -18; 4) 21;
5) 31; 6) 200.
- 1.2.** 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7;
2) 6, 4, 2, 0, -2, -4;
3) $-2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2};$
4) 5, 3, 1, -1, -3, -5.
- 1.3.** 1) -54; 2) 12; 3) 24; 4) 16.
- 1.4.** 3.
- 1.5.** 4.
- 1.6.** 6; 36.
- 1.7.** 74; -66.
- 1.8.** 1900
- 1.9.** 4
- 1.10.** 14.
- 1.11.** 8.
- 1.12.** 1) 7125; 2) 4380; 3) 594;
4) $-\frac{147}{2}.$
- 1.13.** 1) $15 - 10n;$ 2) $-2 + 2n;$
3) $-2 + 3n;$ 4) $2 + n.$
- 1.14.** 1) 19; 2) 4; 3) 1; 4) 4.
- 1.15.** 0.
- 1.16.** 11.
- 1.17.** -4.
- 1.18.** $\frac{17}{21}.$
- 1.19.** 21.
- 1.20.** 1) 36; 2) 154; 3) 23; 4) 94.
- 1.21.** 1) 2430; 2) 2475;
3) 1265; 4) 963.
- 1.22.** 1) 247500; 2) 45387;
3) 71079; 4) 38535.
- 1.23.** 1) 55; 2) 1; 3) 7; 4) 3.
- 1.24.** 1) 2; 2) 2; 3) 2; 4) -2.
- 1.25.** 20.
- 1.26.** 7.
- 158

- 1.27.** 0 или -28.
- 1.28.** 1) 5; 4; 2) 4; 2; 3) -7; 7;
4) 0,5; 1,5.
- 1.29.** 1) 1; 2 и 9, -2;
2) -3; 4 и 5, -4;
3) -2; -2 и -14, 2;
4) 8; -2 и 0, 2.
- 1.30.** 1) да; 2) нет; 3) да; 4) да.
- 1.31.** 1) 7; 3; 2) 5; 2; 3) -1; -4;
4) -3; 1,5.
- 1.32.** 1) 3; 2) 4; 3) 3; 4) 5.
- 1.33.** 1) 395; 2) 390; 3) -6.
- 1.34.** 155.
- 1.35.** 22.
- 1.36.** 45.
- 1.37.** 34.
- 1.38.** 16.
- 1.39.** 1) 4; 5 и $-\frac{79}{7}; -\frac{37}{14};$
2) 1; 2 и -4; $-\frac{1}{2};$
3) 3; 1 и $-\frac{437}{91}; -\frac{51}{91}.$
- 1.40.** 1) 58; 2) 24; 3) 16.
- 1.41.** 9 или 16.
- 1.42.** 95 градусов.
- 1.43.** 10 градусов.
- 1.44.** 10.
- 1.45.** 6.
- 1.46.** 14.
- 1.47.** 11.
- 1.48.** 1) 5; 2) 15; 27; 3) 7; 4) 3;
5) -5; 6) $3/2;$ 7) 1; 8) 6;
9) $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right\}, k, n \in \mathbb{Z};$
10) $\left\{2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}, k, n \in \mathbb{Z};$

- 11) 0; 12) 3.
1.49. 1) 9; 2) 9; 3) 144; 4) 1.
1.50. 1) 22; 2) 21; 3) 40.
1.51. 1) 1064; 2) 120; 3) 612;
 4) 546.
1.54. 101.
1.55. $a \in \left\{0; \frac{1}{24}; \frac{2}{15}; \frac{1}{2}; \frac{3}{7}\right\}$.
1.56. $a \in \left\{\frac{1}{30}; \frac{2}{19}; \frac{3}{8}; \frac{7}{5}; \frac{11}{2}\right\}$.
- 2.1.** 1) $5 \cdot 2^{n-1}$; 2) $2 \cdot 3^{n-1}$;
 3) $3 \cdot 2^{1-n}$; 4) 2^{n-3} ;
 5) 2^{3-2n} ; 6) $3^{\frac{5-2n}{3}}$;
 7) $(-1)^n$ или -1 ; 8) $2 \cdot (-3)^{n-1}$.
2.2. 1) $\sin \varphi (2 \cos \varphi)^{n-1}$;
 2) $2^{1-n} (\operatorname{tg} \varphi)^{3-2n}$; 3) $(\operatorname{tg} \varphi)^{-n}$; 4) 2^{n-1} .
2.3. 1) $-\frac{5}{32}$; 2) 56; 3) 54;
 4) 0,0003.
2.4. $\frac{1}{64}$.
2.5. 4.
2.6. 125.
2.7. 47.
2.8. 2187.
2.9. 5^5 .
2.10. 9^{11} .
2.11. 3^9 .
2.12. 1) 2047; 2) $\frac{341}{1024}$;
 3) $\frac{3^{10}-1}{2 \cdot 3^{10}}$; 4) 2731.
2.13. 1) 35; 2) $\frac{13}{3}$; 3) -30; 4) -14.

- 2.14.** 1) 2; 2) $\frac{9}{4}$; 3) 3; 4) $\frac{16}{5}$.
2.15. 1) 2; 3 и 18; $\frac{1}{3}$; 2) 3; 2 и 12; $\frac{1}{2}$;
 3) 8; 0,5 и 2; 2; 4) 9; $\frac{1}{3}$ и 1; 3.
2.16. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{9}$; $-\frac{1}{3}$.
2.17. 2; $\frac{1}{2}$.
2.18. $\frac{127}{8}$.
2.19. $\frac{16}{3}$.
2.20. $\frac{242}{81}$.
2.21. $\frac{63}{32}$.
2.22. 1) 120; 2) 170; 3) 75.
2.23. 1) $26\frac{2}{3}$; 2) 40; 3) $\frac{15}{2}$.
2.24. 1) $30\frac{3}{8}$; 2) 32; 3) 96.
2.25. 1) 2; 2) 1 и $-\frac{3}{2}$; 3) 3 и $-\frac{3}{5}$;
 4) -2 и $-\frac{14}{5}$.
2.26. 1) $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k$; $k \in \mathbb{Z}$;
 2) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$;
 3) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;
 4) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

2.27. 1) $2; \frac{1}{2}$; 2) $4; 2$;

3) $\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \pi n \right\}, k, n \in \mathbb{Z}$;

4) $\{0; 1\}$.

2.28. 1) $\left\{ 1; \frac{9-\sqrt{6}}{5} \right\}$; 2) 2 ;

3) 3 ; 4) $\{0; 2\}$.

2.29. 1) $4, 8, 16$ и $16, 8, 4$;

2) $2, 6, 18$ и $18, 6, 2$;

3) $1, 4, 16$ и $16, 4, 1$;

4) $3, 6, 12$ и $12, 6, 3$.

2.30. $25, 7, -11$ и $4, 7, 10$.

2.31. $4, 11, 18$ и $19, 11, 3$.

2.32. 1) $\{3, 15, 27, \dots\}; \{3, 9, 27, \dots\}$;

2) $\{3, 3, 3, \dots\}; \{3, -3, 3, \dots\}$.

2.33. 1) $\{2, 5, 8, 11, \dots\}$;

$\{2, 4, 8, 16, \dots\}$;

2) $\{2, 5, 8, 11, \dots\}; \{2, -4, 8, -16, \dots\}$;

3) $\{2, 2, 2, 2, \dots\}; \{2, 2, 2, 2, \dots\}$;

4) $\{2, 2, 2, 2, \dots\}; \{2, -2, 2, -2, \dots\}$.

2.35. $3; 6; 12$ и $27, 18, 12$.

2.36. $4, 8, 16$ и $36, 24, 16$.

2.37. $5, 10, 20$ и $45, 30, 20$.

2.38. 246 .

2.39. $\{a, 7a, 13a, \dots\}, \{a, 4a, 16a, \dots\}$;

2) $\{a, a, a, \dots\}, \{a, -2a, 4a, \dots\}$,

где $a > 0$.

2.41. $2^{n+1}(n-1) + 2 - n(n+1)/2$.