Базовая математика

Урок 9. Формула Ньютона–Лейбница. Примеры вычисления интегралов

Разбор домашнего задания

Задание 1. Вычислить интеграл $\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)\, dx$.

Решение. По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) - 0 = \frac{16}{4} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right)\, dx$.

Решение.

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right)\, dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\, dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{12}$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \left(4x^3 + 5x^4\right)\, dx$.

Решение.

$$\int_{-1}^1 \left(4x^3 + 5x^4\right)\, dx = \left(4\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1 = \left(x^4 + x^5\right)\Big|_{-1}^1 = \left(1^4 + 1^5\right) - \left((-1)^4 + (-1)^5\right) = 2 - 0 = 2$$

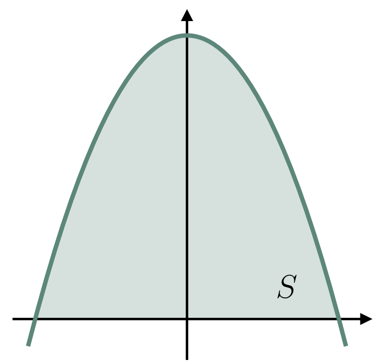
Ответ: 2.

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $3x^2 + 2y - 4 = 0$ и осью Ox.

Решение. Выразим y из формулы выше:

$$y = 2 - \frac{3}{2}x^2$$

Данная кривая является параболой. Поскольку коэффициент при старшей степени отрицателен, ветви параболы направлены вниз. Найдём точки пересечения этой параболы с осью Ox. Для этого нужно решить уравнение:



$$\frac{3}{2}x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Итак, искомую площадь можно найти с помощью интеграла:

$$S = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2\right)\, dx = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \left(\frac{x^3}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 2\cdot\left(\frac{8}{2\cdot 3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.