ДЗ #3

1) Найти собств-е вектора и собств. значения для лин. оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\cdot\lambda + 6 = (\lambda-2)\cdot(\lambda-3) =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda-1 & -6 \\ 2 & -\lambda+6 \end{vmatrix} = (-\lambda-1)\cdot(-\lambda+6) - (-6)\cdot 2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\cdot\lambda + 6 \qquad \lambda_2 = 3$$

собств-е числа

Для кажд. λ найдем собств. век.

$\lambda_1 = 2$

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^*$$

по Гаусу:

$$* -\frac{1}{3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \times -2 =$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = x_1 + 2x_2 = 0$$

$x_1 = -2x_2$ при $x_2 = 10 \Rightarrow$

$x_2 = x_2$ $\quad V_1 = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$

$$A - \lambda_2 = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^*$$

$$* -\frac{1}{4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \times -2$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0$$

$x_1 = -\frac{3}{2}x_2$ $\quad x_2 = x_2$

при $x_2 = 2$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

② Дан оператор поворота на $180°$, задаваемый матрицей
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Показать, что любой вектор является для него собственным

Собств-е числа:
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\cdot\lambda + 1 = (\lambda+1)\cdot(\lambda+1)$$
$$\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (-\lambda-1)\cdot(-\lambda-1) - 0\cdot 0 = (\lambda+1)\cdot(\lambda+1)$$
$$\lambda = -1$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x_1 = \lambda x_1 \\ -x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases}$$
Можно сделать вывод, что любой вектор явл-ся собств. для этой матр.

③ Пусть линейный оператор задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Установить, явл-ся вектор $X = (1, 1)$ собств. вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -x_1 + 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+1=\lambda \\ -1+3=\lambda \end{cases} \quad \lambda = 2$$

конкретное число

получилось одна лямда

Т.о. вектор $x=(1,1)$ является собствен. вектором.

(4) Пусть линейн. оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

установить, явл-ся ли вектор $x=(3,-3,-4)$ собств. вектора этого линейного оператора

$$\begin{cases} 3x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 = \lambda x_2 \\ 3x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{matrix} \quad \begin{cases} -3 = \lambda \\ -3 = \lambda \\ 3 = \lambda \end{cases}$$

получилось 2 лямды,

Т.о. вектор $x=(3,-3,-4)$ не явл. собств. вектором этого линейного оператора