

Análisis de la Respuesta Transitoria y Estacionaria

Kevin Castiblanco¹, Rafael Díaz², Jorge Lambrano³ y Julian Rojas⁴

¹kcastiblanco, ²drdiaz, ³jelambrano, ⁴drojasj @uninorte.edu.co

Resumen—En el presente documento se describe detalladamente el procedimiento utilizado para modelar matemáticamente el comportamiento de diferentes sistemas de control. Asimismo, también se expone el análisis de los resultados obtenidos al realizar el modelamiento de esos sistemas. Finalmente, se describe un avance del diseño y del funcionamiento del proyecto integrador.

Palabras clave—Error estacionario, Función de transferencia, Ganancia, Sistema de control

I. PROCEDIMIENTO

I-A. Diseño y análisis de un sistema de primer orden: Oscilador de relajación, Schmitt Trigger

Se diseño un oscilador de relajación cuya respuesta al entrar un impulso unitario es:

$$v_o(t) = 20e^{-10t} \quad (1)$$

Función de transferencia del oscilador: Se asumió la idealidad del amplificador se proceden con los cálculos. Es decir, la ganancia del amplificador es muy grande, y como existe una retroalimentación negativa, la tensión en la entrada no inversora es aproximadamente el valor de la entrada inversora. El circuito del cual se obtuvo la función de transferencia se observa en la Figura ??.

Se tiene que el voltaje de la entrada no inversora del amplificador V_1 , es:

$$V_1 = \frac{\frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} V_{in}$$

Por otro lado, aplicando la ley de corrientes en la entrada no inversora del amplificador, se tiene que:



Figura 1. Amplificador operacional Schmitt Trigger.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{R_3} &= \frac{V_o - V_1}{R_4} \Rightarrow \\ \frac{V_o}{V_i} &= \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) V_1 \\ \frac{V_o}{V_i} &= \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{sR_1C + 1} \\ \boxed{\frac{V_o}{V_i} &= \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{\frac{1}{R_1C}}{s + \frac{1}{R_1C}}} \end{aligned}$$

Si se lleva la expresión al dominio del tiempo, se obtiene la salida del sistema a un impulso unitario.

$$v_o(t) = \frac{1}{R_1C} \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) e^{-\frac{1}{R_1C}t}$$

Si se compara esta expresión con la respuesta que se espera que el sistema tenga, es decir, la ecuación ??, se tiene que:

$$\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{R_1 C} = 20 \quad (2)$$

$$\frac{1}{R_1 C} = 10 \quad (3)$$

Éstas son las condiciones que el sistema tiene que cumplir para que la respuesta al impulso sea igual a la expresión ???. No se calcularon posibles valores de los componentes porque se tiene toda información que se necesita a través de la respuesta del sistema. Por ejemplo, si se quiere llevar el sistema al dominio de Laplace, se tiene que la Transformada de Laplace de este sistema es:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s + 10}} \quad (4)$$

Simulación en Matlab: Se utilizó Matlab para generar la respuesta del sistema a un impulso, escalón, rampa y parábola. Para generar la respuesta al impulso se utilizó la función *impulse*(var) donde var es la función de transferencia. El resultado de ejecutar este comando se observa en la Figura ???. La respuesta al impulso por su parte su tiempo de asentamiento es menor que el anterior, este no logra seguir la entrada.

impulse_response.png

Figura 2. Respuesta del Amplificador operacional Schmitt Trigger a un impulso.

Para obtener la respuesta a un escalón se utilizó la función *step*(var). Como se observa en este caso la respuesta al escalón sobre pasa el setpoint, su tiempo de asentamiento es relativamente corto, y su tiempo de subida es rápido, la salida logra seguir la entrada. El valor final de la salida es diferente al de la entrada, puesto que el sistema agrega a la respuesta un valor de DC.

step_response.png

Figura 3. Respuesta del Amplificador operacional Schmitt Trigger a un escalón.

Para las respuestas a una rampa y a una parábola se observa que no hay estabilidad en ningún momento, ya que la señal de salida siempre continúa alejándose del setpoint de manera gradual.



Figura 4. Respuesta del Amplificador Schmitt Trigger a una rampa.

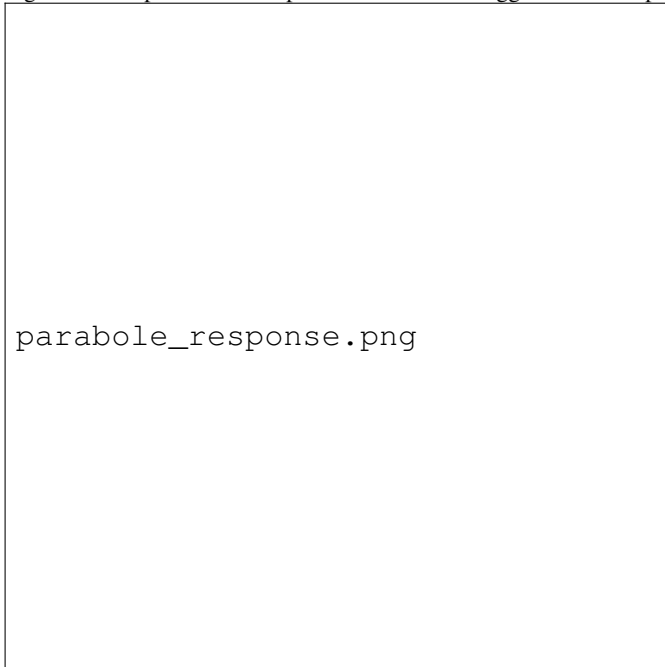


Figura 5. Respuesta del Amplificador Schmitt Trigger a una rampa.

I-B. Diseño y análisis de un sistema de segundo orden: Control de azúcar en la sangre

Las condiciones en el espacio son muy diferentes que las que se encuentran en la Tierra. La ausencia de gravedad trae consigo muchas consecuencias para los astronautas, como la pérdida de peso y de masa muscular, se atrofia el sentido del equilibrio y también el control de azúcar en la sangre. Esto último obliga a los astronautas a depender de inyecciones de insulina para el control de su nivel de glucosa.

Para controlar el nivel de azúcar en la sangre se implementó un sistema de control automático conformado por una bomba y un sensor que mide la cantidad de azúcar en la sangre. La Figura ?? muestra que ese sistema de control está compuesto de una bomba, inyecciones y un sensor. Cabe mencionar que $R(s)$ corresponde a la entrada del sistema, es decir, el nivel que se desea obtener, mientras que $C(s)$ corresponde al nivel real. Por obvias razones, se busca que el nivel real sea lo más cercano posible al nivel deseado y que el comportamiento de la salida sea bastante estable.



Figura 6. Control de nivel de azúcar en la sangre.

Obtención de la función de transferencia: Para comprender mejor la relación que existe entre

la salida con respecto a la entrada se obtuvo la función de transferencia $Y(s)/R(s)$. Esto se hace multiplicando los bloques que se encuentran en la transferencia directa entre la entrada y la salida, y luego se dividen entre 1 más el lazo de retroalimentación, se suma en lugar de restar debido a que la retroalimentación que existe es negativa.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_b \frac{cs+2}{s(s+1)}}{1 + K_s K_b \frac{cs+2}{s(s+1)}}$$

Reescribiendo la expresión se tiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_b(cs+2)}{s(s+1)}}{\frac{s(s+1)+K_b K_s(cs+2)}{s(s+1)}}$$

Finalmente, expandiendo, la función de transferencia es:

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{cK_b s + 2K_b}{s^2 + (K_b K_s c + 1)s + 2K_b K_s}} \quad (5)$$

Se puede observar que el sistema control es de segundo orden debido al grado del denominador. Un sistema de segundo orden es mucho más complejo que un sistema de primer orden. Por esta razón para describirlo se utilizan mucho más parámetros.

Cálculo de algunos parámetros de la respuesta transitoria: Para facilitar los cálculos se asumió que el valor de la constante c es igual a cero. De esta manera, para $c = 0$, la ecuación queda reescrita de la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_b}{s^2 + s + 2K_b K_s} \quad (6)$$

Debido a que esta expresión es más simple, se pudo calcular con bastante facilidad la *frecuencia natural del sistema*, ω_n , y la *relación de amortiguamiento*, ζ .

Asimismo, se asumió una sobreelongación máxima, M_p , de 7 %. Con este valor de sobreelongación se pudo encontrar la relación de amortiguamiento a través de la fórmula.

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Despejando ζ :

$$\zeta = \frac{\ln M_p}{\sqrt{\ln^2 M_p + \pi^2}}$$

Reemplazando $M_p = 0,07$:

$$\zeta = \frac{\ln(0,07)}{\sqrt{\ln^2(0,07) + \pi^2}}$$

$$\boxed{\zeta = 0,646}$$

La ecuación ?? se comparó con la ecuación característica de los sistemas de segundo orden.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2} \quad (7)$$

Por tanto se pudo deducir que:

$$\omega_n^2 = 2K_b \quad (8)$$

$$\omega_n^2 = 2K_b K_s \quad (9)$$

$$2\omega_n\zeta = 1 \quad (10)$$

Para que se cumplan ?? y ?? el valor de K_s debe ser igual a 1.

$$\boxed{K_s = 1}$$

Para calcular el resto de los parámetros se necesita el valor de la frecuencia natural del sistema. Ésta puede ser calculada por medio de la expresión ??.

$$2\omega_n\zeta = 1$$

$$\omega_n = \frac{1}{2\zeta}$$

$$\omega_n = \frac{1}{2(0,646)}$$

$$\boxed{\omega_n = 0,774 \text{ rad/s}}$$

Con los valores de ω_n se encontró el valor de K_b :

$$\omega_n^2 = 2K_b$$

$$K_b = \frac{\omega_n^2}{2}$$

$$K_b = \frac{(0,774)^2}{2}$$

$$\boxed{K_b = 0,3}$$

El tiempo de crecimiento t_r , se obtiene con la fórmula:

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left(\pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$t_r = \frac{1}{(0,774) \sqrt{1-(0,646)^2}} \left(\pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-(0,646)^2}}{0,646} \right)$$

$$\boxed{t_r = 3,85 \text{ s}}$$

El tiempo donde ocurre la máxima elongación, t_p , se puede calcular por medio de la fórmula.

$$t_p = \frac{\pi}{\zeta \omega_n}$$

$$t_p = \frac{\pi}{(0,646)(0,774)}$$

$t_p = 5,318s$

Para hallar el tiempo de establecimiento, t_s , basándose en el criterio del 2 %, se aplica la siguiente fórmula:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$t_s = \frac{4}{(0,646)(0,774)}$$

$t_s = 8s$

Obtención de los errores en estado estacionario:
El error en estado estacionario es la diferencia entre la entrada y la salida del sistema para un tiempo muy largo. El sistema de control de azúcar, es un sistema Tipo 1, puesto que contiene un único polo en $s = 0$.

- *Entrada Escalón:* El error en estado estacionario, e_{ss} , se puede encontrar con la expresión:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s}}{1 + K_s K_b \frac{cs+2}{s(s+1)}}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)}{s(s+1) + K_s K_v (sc+2)}$$

$e_{ss} = 0$

Como el error estacionario es igual a cero, entonces el sistema de control es capaz de seguir una entrada de tipo escalón.

- *Entrada Rampa:* En este caso, el valor del error estacionario se puede encontrar usando la siguiente fórmula:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^2}}{1 + K_s K_b \frac{cs+2}{s(s+1)}}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s(s+1) + K_s K_v (sc+2)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s^2 + (1 + K_s K_b c)s + 2K_b K_s}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{2K_b K_s}$$

Para los valores de que se obtuvieron anteriormente:

$$e_{ss} = \frac{1}{2(0,3)(1)}$$

$e_{ss} = 1,667$

Este error significa que la salida del sistema sigue a la señal de entrada, pero entre ellas siempre va existir una diferencia.

- *Entrada Parábola:* Para una entrada de tipo parábola el error en estado estacionario se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^3}}{1 + K_s K_b \frac{cs+2}{s(s+1)}}$$

...

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)}{s^2(s^2 + (1 + K_s K_b c)s + 2K_b K_s)}$$

$e_{ss} = \infty$

El sistema no es capaz de seguir una entrada con aceleración, para este tipo de señales el error se hace muy grande.

Simulación en Matlab: Se simuló el sistema de control de nivel de azúcar en la sangre utilizando Matlab. Se tomaron las mismas condiciones que se utilizaron para encontrar los parámetros, para poder comparar los resultados de la simulación con los que se obtuvieron anteriormente. Los resultados que se obtuvieron se muestran en la Figura ??.



Figura 7. Respuesta al escalón del sistema de control.

Se puede observar que los valores que se obtuvieron mediante la simulación son bastante similares a los resultados. Además de calcular los parámetros más importantes también se graficó la respuesta al escalón del sistema. La forma de esta respuesta se puede observar en la Figura ?? . Nótese que, tal como lo demuestra el cálculo del error en estado estacionario, el sistema es capaz de seguir una entrada de tipo escalón sin errores.

En la Figura ?? también se pueden observar el valor de algunos parámetros, los cuales caracterizan al sistema. Para una mejor observación de los estos valores, las cajas de texto de la Figura ?? se encuentran ampliadas en la Figura ??.

La primera caja de texto corresponde al tiempo de crecimiento, es decir, a la primera vez que la salida del sistema alcanza el valor de 1. Se puede observar que el tiempo de crecimiento t_r que se obtuvo a través de la fórmula es el mismo que el arrojado por Matlab .

En la siguiente caja se observa los valores del tiempo pico t_p y de la sobrelongación máxima, las cuales son 5.34 s y 7 % (amplitud de 1.07) respectivamente. El tiempo pico es muy similar al que se obtuvo con la fórmula (5.32 s) y de la

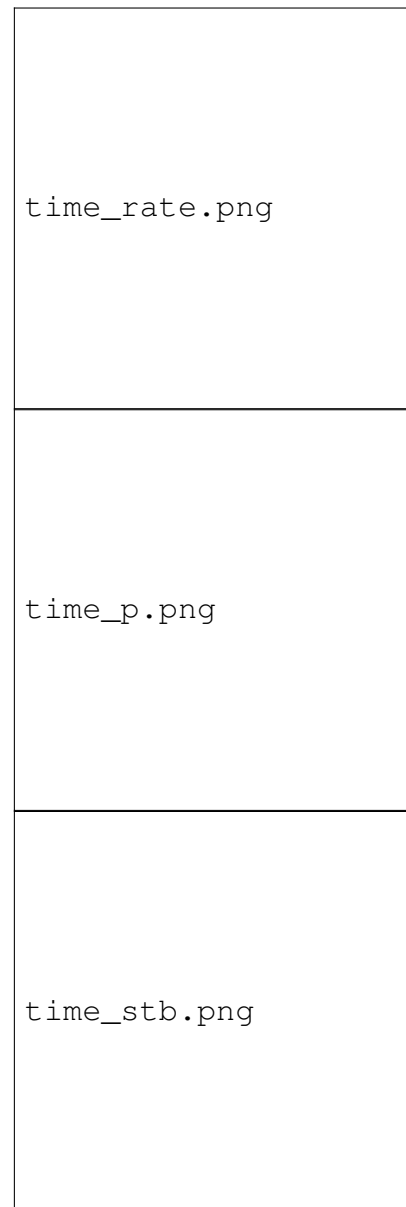


Figura 8. Parámetros del sistema.

sobrelongación se puede decir que tiene el mismo valor.

Finalmente, en la última caja, aparece el valor del tiempo de establecimiento t_s el cual es de 7.76 s. Comparando este valor con el que se obtuvo utilizando el criterio del 2 %, se puede observar que son bastante similares.

Agregando un cero a la función: Se decidió agregar a la función de transferencia un cero de la forma $(As + B)$ donde A y B son constantes. Des esta manera, la nueva función de transferencia que caracteriza el sistema está determinada es de la forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_b(As + B)(Cs + 2)}{s^2 + (K_bK_sc + 1)s + 2K_bK_s} \quad (11)$$

Debido a la presencia del cero en el numerador la salida será diferente a la entrada. En las Figuras ?? y ?? se puede observar el efecto que estos parámetros en la función de transferencia. Para la Figura ?? donde se varía el parámetro A , a medida que aumenta el valor A aumenta la sobreelongación del sistema y el tiempo de establecimiento t_s . Además disminuye el tiempo pico t_p y el tiempo de crecimiento t_r . Asimismo, como todas las gráficas se intersectan en los mismos puntos se pudo deducir que no hubo variación de la frecuencia amortiguada ω_d .

diferentsValuesA.png

Figura 9. Respuesta al escalón agregando un cero y variando a .

Por otra parte, al modificar el parámetro B se modifica el valor final de la salida del sistema, a medida que B se amplifica el valor final de la respuesta al escalón, es decir, el valor B actúa agregando un nivel DC. al sistema. Por lo tanto, el error en estado estacionario no es cero, en lugar de ello, depende de B , sin embargo, para un valor de $B = 1$ el error en estado estacionario se hace cero. Además de lo anterior, hay un incremento en el tiempo pico t_p de la función. Todo esto se puede apreciar en la Figura ??.

diferentsValuesB.png

Figura 10. Respuesta al escalón agregando un cero y variando b

Aplicación en Matlab usando la respuesta transitoria

Para esta parte de la actividad se construyó una interfaz de usuario en la que se puede cargar un archivo .mat. Y calcular el sistema que es capaz de producir ese tipo de respuesta. Los métodos que se utilizan son numéricos, por tanto, la respuesta obtenida no es la función original, sin embargo la función resultante se aproxima bastante bien al modelo. Además encontrar la función de transferencia del sistema, la interfaz de usuario permite identificar algunos parámetros que describen al sistema.

Pasos para ejecutar el Algoritmo:

1. Abrir el código.
2. En la ventana de comandos escribir GUIDE y presionar enter.
3. Buscar el archivo .fig en la carpeta.
4. Ejecutar el GUIDE.
5. Presionar buscar y escoger entre sub o sobre amortiguada que es el .mat.
6. Seleccionar método.
7. Esperar a que la interfaz.

De la Figura ?? hasta la Figura ?? se puede observar algunos ejemplos del funcionamiento del sistema.



Figura 11. Método Ho para una respuesta sobreamortiguada.



Figura 13. Método Stark para una respuesta sobreamortiguada.

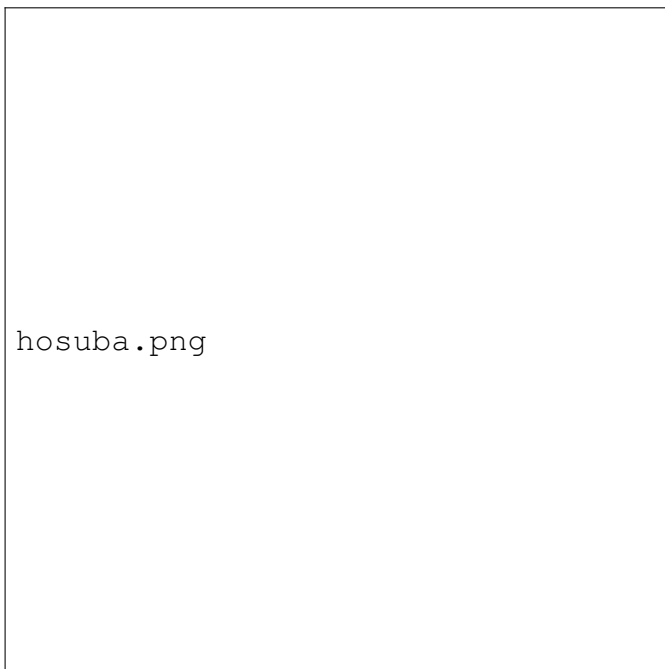


Figura 12. Método Ho para una respuesta subamortiguada.

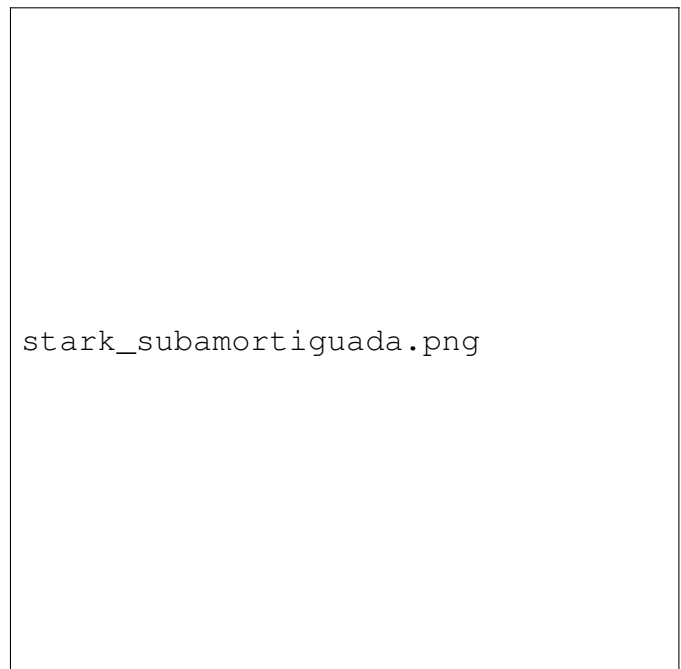
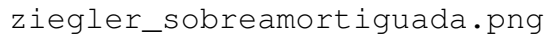
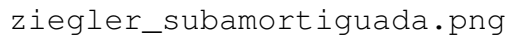


Figura 14. Método Stark para una respuesta subamortiguada.



ziegler_sobreamortiguada.png

Figura 15. Método Ziegler para una respuesta sobreamortiguada.



ziegler_subamortiguada.png


Figura 16. Método Ziegler para una respuesta subamortiguada.

Proyecto integrador

El objetivo fue hacer una GUI amigable con el usuario, fácil de utilizar y que consumiera pocos recursos. La Figura ?? se puede observar la interfaz de usuario. En la parte de arriba se puede ver el diagrama de bloques donde se ingresan los datos de la planta, actuador y sensor. La función de transferencia se muestra debajo del botón para calcularlo. Del otro lado se encuentran los botones que calculan cada parámetro de la matriz de variable de estado.

Para esta etapa del proyecto integrador se implementó un controlador proporcional al sistema que controla la profundidad del submarino.

La constante K que caracteriza al controlador proporcional se ingresa manualmente en el panel principal. EL panel principal se puede observar en la Figura ?. Esto le permite al usuario modificar el valor de K y observar el efecto que esta modificación causa en el sistema.



panel_PI.png

Figura 17. Panel principal de la Intefaz de Usuario.

También la interfaz de usuario le permite al usuario decidir la entrada del sistema. Las diferentes entradas que se pueden ingresar son impulso, escalón y rampa. El botón **Graficar varias respuestas** permite la visualización de

más de una respuesta al mismo tiempo. Se puede observar las respuestas para diferentes valores de K . Y con el botón **guardar** es posible guardar las gráficas en el equipo.

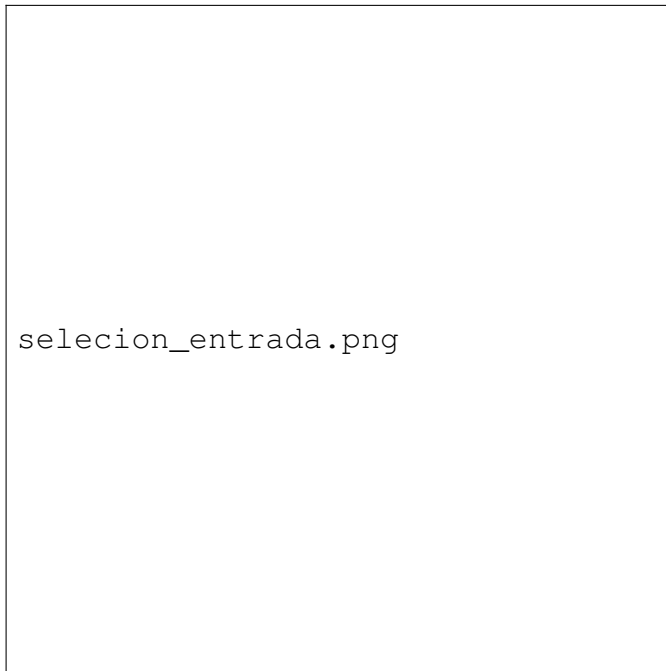


Figura 18. Menú de selección de entrada.

La interfaz gráfica del proyecto integrador, vista completamente se puede observar en la Figura ??.

Funcionamiento: Para iniciar el programa primero se debe abrir el archivo de MATLAB untitled2.m. Una vez se corra el código se abrirá el GUI y Simulink. Se procede corriendo el archivo guisub.slx que se encuentra en la ventana de Simulink. La interfaz gráfica se encontrará disponible para su ejecución.

La interfaz gráfica es capaz de imprimir los valores de las matrices de estado: A, B, C, D. Para que estos datos puedan ser imprimidos en pantalla, deben ser convertidos primero a string, esto se hace a través del comando *num2str*.

Otro comando que se utiliza en la interfaz gráfica es el comando *linmod*, el cual es capaz de obtener la función de transferencia del sistema a partir de los parámetros que se ingresen, uno de ellos es una variable de tipo sys.



Figura 19. Intefaz Usuario Proyecto Integrador.