

Utlledning av Heisenbergs Usikkerhetsprinsipp

Hannah Angela Ekblad

17. mars 2025



Innhold

1	Innledning	2
2	Utleddning av Heisenbers usikkerhetsprinsipp	2
2.0.1	Fouriertransformasjonen og dens invers	2
2.0.2	Plancherels teorem	2
2.0.3	Derivasjon av Fouriertransformasjonen	3
2.0.4	Viktig formel	3
2.0.5	Standardavvik for posisjon og bevegelsesmengde	3
2.0.6	Andre relasjoner	4
2.0.7	Selve utledningen	5
2.0.8	Forklaring av stegene i selve utledningen	6
3	Demonstrasjon av Heisenbergs usikkerhetsprinsipp ved et enkeltpalteforsøk	6
3.1	Hensikt	6
3.2	Teori	6
3.3	Utstyr	7
3.4	Metode, beregninger og observasjoner	7
3.5	Drøfting og feilkilder	10
3.5.1	Sammenheng med Heisenbergs usikkerhetsprinsipp	10
3.6	Konklusjon	11
4	Siste ord	11

1 Innledning

Heisenbergs usikkerhetsprinsipp postulerer at posisjon og bevegelsesmengde ikke kan måles nøyaktig samtidig. Matematisk kan dette uttrykkes som:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

der Δx er usikkerheten i posisjon, Δp er usikkerheten i bevegelsesmengde, og \hbar er den reduserte Planck-konstanten. Dette prinsippet er svært viktig innen kvantemekanikken, da det setter en grense for hvor presist man kan kjenne tilstanden til et system.

Rapporten er todelt. Første del fokuserer på utledningen av Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, mens andre del demonstrerer hvordan prinsippet fungerer ved hjelp av et enkelspalteforsøk. Gjennom dette eksperimentet kan man se hvordan bølgefunksjonens utstrekning i posisjonsrommet påvirker fordelingen i bevegelsesmengderommet, og dermed gi en forståelse av usikkerhetsrelasjonen.

2 Utledning av Heisenbers usikkerhetsprinsipp

I denne delen av rapporten skal jeg vise hvordan Heisenbergs usikkerhetsprinsipp oppstår matematisk ved hjelp av Fouriertransformasjon og Plancherels teorem. Denne utledningen bygger på Cauchy-Schwarz' ulikhet og viser at dersom en bølgefunksjon er sterkt lokalisert i posisjonsrommet, vil den være bredt spredt i bevegelsesmengderommet, og vice versa. Dvs. jo mer presist vi måler en partikkels posisjon, desto mer usikker blir dens bevegelsesmengde.

2.0.1 Fouriertransformasjonen og dens invers

For å analysere sammenhengen mellom posisjon og bevegelsesmengde, uttrykker vi en bølgefunksjon $\Psi(x)$ i posisjonsrommet som en Fouriertransformasjon

$$\widehat{\Psi}(p_x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-ip_x x / \hbar} dx \quad (1)$$

Her representerer $\widehat{\Psi}(p_x)$ bølgefunksjonen i bevegelsesmengderommet. Invers Fouriertransformasjonen gir oss tilbake funksjonen i posisjonsrommet

$$\Psi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Psi}(p_x) e^{ip_x x / \hbar} dp_x \quad (2)$$

2.0.2 Plancherels teorem

Videre trenger vi Plancherels teorem. Denne sier at integralet av kvadratet av en funksjon er det samme i både posisjons- og bevegelsesmengderommet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\Psi}(p_x)|^2 dp_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx \quad (3)$$

Dette kan vises ved utregning:

Vi starter med å skrive ut normen og benytter Fourier-inversen

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(p_x)|^2 dp_x &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)| e^{-ip_x x/\hbar} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(s) e^{ip_x s/\hbar} ds dp_x \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \bar{\Psi}(s) \int e^{ip_x(s-x)/\hbar} dp_x dx ds \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \bar{\Psi}(s) (2\pi\hbar \delta(s-x)) dp_x dx ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \bar{\Psi}(s) \delta(s-x) dx ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \bar{\Psi}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Dirac-deltafunksjonen gjør at integralet kollapser i linje 2 av utledningen. Plancherels teorem viser dermed at normbevaringen opprettholdes mellom de to representasjonene av bølgefunksjonen.

2.0.3 Derivasjon av Fouriertransformasjonen

For å gå videre trenger vi derivasjonsregelen av Fouriertransformasjonen:

$$\widehat{\Psi'}(p_x) = \frac{ip_x}{\hbar} \widehat{\Psi}(p_x) \quad (4)$$

Denne regelen utledes slik:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi'}(p_x) &= \mathfrak{F}\{\Psi'(x)\} \\
&= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(x) e^{-ip_x x/\hbar} dx \\
&= (2\pi\hbar)^{-1/2} \left[\Psi(x) e^{-ip_x x/\hbar} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{ip_x}{\hbar} (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-ip_x x/\hbar} dx \\
&= \frac{ip_x}{\hbar} \widehat{\Psi}(p_x).
\end{aligned}$$

I linje 2 - 3, gjør vi en delvis integrasjon, og pga antakelsen vi gjør om at $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\Psi(x)| = 0$, vil første ledd i linje 3 forsvinne. Da står vi kun igjen med siste ledd, som vi ser er Fouriertransformasjonen $\widehat{\Psi}(p_x)$ fra likning 1.

2.0.4 Viktig formel

Vi trenger også denne med oss videre

$$|\Psi(x)|^2 = \Psi(x) \bar{\Psi}(x) \quad (5)$$

2.0.5 Standardavvik for posisjon og bevegelsesmengde

Standardavviket til posisjon er definert som

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

For enkelhets skyld antar vi at bølgefunksjonen er sentrert rundt null, altså $\langle x \rangle = 0$, slik at

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle} \\
&= \sqrt{\langle \Psi | x^2 | \Psi \rangle} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} x^2 \Psi \, dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Psi \bar{\Psi} \, dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 \, dx}
\end{aligned}$$

Dermed blir standardavviket (usikkerheten) til posisjonen uttrykt som:

$$\Delta x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 \, dx} \quad (6)$$

Tilsvarende kan vi regne ut standardavviket til bevegelsesmengden fra

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$$

hvor vi, på samme måte som for $\langle x \rangle$, antar at $\langle p_x \rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta p_x &= \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} p_x^2 \Psi \, dp_x} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 \Psi \bar{\Psi} \, dp_x} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 |\Psi|^2 \, dp_x} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 |\Psi(x)|^2 \, dp_x}
\end{aligned}$$

Dermed blir standardavviket (usikkerheten) til bevegelsesmengden uttrykt som:

$$\Delta p_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 |\hat{\Psi}(p_x)|^2 \, dp_x} \quad (7)$$

I begge utledningene over, brukte jeg den viktige formelen (5) for å kunne skrive at $\Psi \bar{\Psi} = |\Psi|^2$.

2.0.6 Andre relasjoner

Vi trenger også følgende relasjoner for å kunne anvende Cauchy-Schwarz' ulikhet

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g), \quad |a + b| \leq |a| + |b|, \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \quad (8)$$

2.0.7 Selve utledningene

$$1 = |1| \quad (9)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx \right| \quad (10)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \frac{d}{dx} x dx \right| \quad (11)$$

$$= \left| \underbrace{\left[x |\Psi(x)|^2 \right]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\Psi(x)|^2 dx \right| \quad (12)$$

$$= \left| - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\Psi(x)|^2 dx \right| \quad (13)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\Psi(x)|^2 dx \right| \quad (14)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} \left(\Psi(x) \bar{\Psi}(x) \right) dx \right| \quad (15)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\Psi'(x) \bar{\Psi}(x) + \Psi(x) \bar{\Psi}'(x) \right) dx \right| \quad (16)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi'(x) \bar{\Psi}(x) + x \Psi(x) \bar{\Psi}'(x) dx \right| \quad (17)$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi'(x) \bar{\Psi}(x) dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi(x) \bar{\Psi}'(x) dx \right| \quad (18)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x \Psi'(x) \bar{\Psi}(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |x \Psi(x) \bar{\Psi}'(x)| dx \quad (19)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi'(x)| |\bar{\Psi}(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi(x)| |\bar{\Psi}'(x)| dx \quad (20)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi'(x)| |\Psi(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi(x)| |\Psi'(x)| dx \quad (21)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi(x)| |\Psi'(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi(x)| |\Psi'(x)| dx \quad (22)$$

$$\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi(x)| |\Psi'(x)| dx \quad (23)$$

$$\leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi'(x)|^2 dx} \quad (24)$$

$$= 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\Psi}'(p_x)|^2 dp_x} \quad (25)$$

$$= 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ip_x}{\hbar} \widehat{\Psi}(p_x) \right|^2 dp_x} \quad (26)$$

$$= 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x^2}{\hbar^2} |\widehat{\Psi}(p_x)|^2 dp_x} \quad (27)$$

$$= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 |\widehat{\Psi}(p_x)|^2 dp_x} \cdot \frac{\hbar}{2} \quad (28)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 |\widehat{\Psi}(p_x)|^2 dp_x} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (29)$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (30)$$

2.0.8 Forklaring av stegene i selve utledningen

En kortfattet forklaring av stegene over: I likning (10) benytter jeg normaliseringsbetingelsen for bølgefunksjonen. I likning (11) satt jeg inn den deriverte av x fordi det går an, og fordi jeg er en fri mann i et fritt land :). I likning (12) bruker jeg delvis integrasjon, med x som u' og $\Psi(x)$ som v i henhold til formelen $\int u'v = uv - \int uv'$. Det første leddet blir null fordi vi krever at $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Psi(x) = 0$. Likning (13) og (14) rydder opp i uttrykket, og minustegnet forsvinner på grunn av absoluttverdien. I likning (15) brukte jeg formelen fra likning (5). I likning (16) benytter jeg produktregelen, og i likning (17), ganget jeg inn x . I likning (18) og (19) brukte jeg trekantulikheten for integraler for å sette absoluttverdier på plass. I likning (20), (21) og (22) brukte jeg formelen $|ab| = |a||b|$, og fjernet komplekskonjugasjonen, som ikke påvirker absoluttverdien. I likning (23) kombineres de to integralene siden de er like. I likning (24) anvender jeg Cauchy-Schwarz' ulikhet på integralet. I likningene (25) og (26) bruker jeg derivasjonsregelen for Fouriertransformasjonen. I likning (27) identifiserer vi uttrykkene for usikkerheten i posisjon Δx og usikkerheten i bevegelsesmengde Δp . I likningene (28), (29) og (30), gjenkjenner vi Heisenbergs usikkerhetsprinsipp.

3 Demonstrasjon av Heisenbergs usikkerhetsprinsipp ved et enkeltpalteforsøk

3.1 Henisikt

Hensikten ble godt oppsummert i underoverskriften over. Ved hjelp av et enkeltpalteforsøk skal jeg demonstrere Heisenbergs usikkerhetsprinsipp. Jeg undersøker hvordan endringer i spalteåpningen påvirker eksperimentet, og viser hvordan usikkerheten i posisjon og bevegelsesmengde henger sammen.

3.2 Teori

For å forstå Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, er det greit å vite litt om mannen bak. Werner Heisenberg (1901-1976) var en tysk fysiker, som i 1927, formulerte usikkerhetsprinsippet som beskriver en begrensning i hvor presist vi kan måle posisjon og bevegelsesmengde.

Som beskrevet tidligere, sier Heisenbergs usikkerhetsprinsipp at det er umulig å måle en partikkels posisjon og bevegelsesmengde samtidig med uendelig presisjon. Matematisk kan dette uttrykkes ved relasjonen:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Dette betyr at dersom vi prøver å redusere usikkerheten i posisjonen Δx , vil usikkerheten i bevegelsesmengden Δp_x øke, og omvendt. Med andre ord er disse størrelsene omvendt proporsjonale.

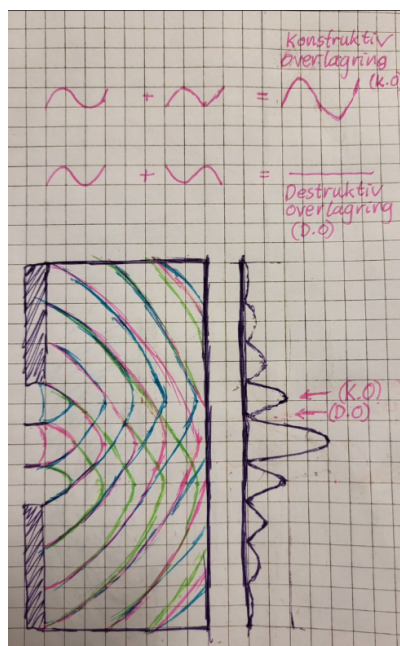
For å se dette tydeligere, kan vi dele ligningen på Δp_x :

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x}.$$

Her ser vi klart at dersom Δp_x øker, må Δx minke, og vice versa. Dette er kjernen i usikkerhetsprinsippet og er det jeg skal demonstrere eksperimentelt.

Ved å bruke et enkeltpalteforsøk kan vi vise at en reduksjon i spaltebredden (som tilsvarer en redusert usikkerhet i posisjon) fører til en større spredning av interferensmønsteret (som tilsvarer en økt usikkerhet i bevegelsesmengde).

Et interferensmønster er resultatet av når bølger fra to eller flere kilder kombineres, hvor bølger i samme fase forsterker hverandre og danner en konstruktiv overlaging, og bølger i motsatt fase kansellerer hverandre gjennom en destruktiv overlaging.



En forsøkt illustrasjon på et interferensmønster med konstruktiv og destruktiv overlægning.

Toppunktene på intensitetsgrafen til høyre i bildet over tilsvarer lyse prikker eller striper på veggen, mens bunnpunktene tilsvarer mørke prikker eller striper.

3.3 Utstyr

Siden jeg dessverre ikke har direkte tilgang (eller klassifisering) til å kjøpe en klasse II-laser, måtte jeg bruke fantasien og dykke ned i spesifikasjonene fra [FYBIKON – din realfagsleverandør](#) – for å finne realistiske verdier for en laser og optiske gitre.

Utstyr inkluderer dermed:

- To optiske gitre, en med **300 linjer/mm** og en med **600 linjer/mm**
- En **laser** med bølgelengde på 650 nm

3.4 Metode, beregninger og observasjoner

I et ideelt eksperimentelt oppsett ville man plassert et optisk gitter i en kjent avstand fra en vegg, strålet en laser gjennom gitteret og observert interferensmønsteret som ble dannet. Deretter kunne man målt avstanden mellom prikkene på veggen og bruke dette til videre beregninger, for eksempel til å finne spredningsvinklene. Det er i hvert fall slik jeg husker det fra da jeg gjorde dette forsøket i fysikken på videregående.

Siden jeg ikke får gjort forsøket, regner jeg med teoretiske verdier.

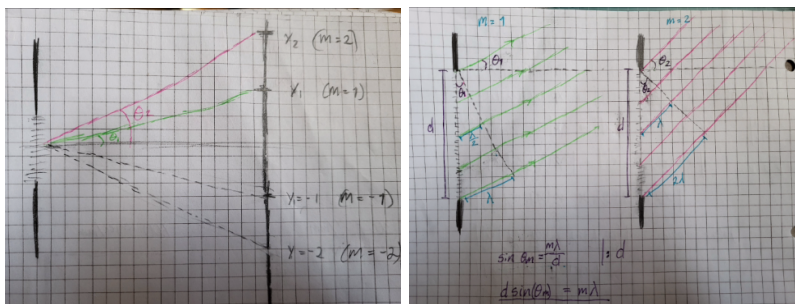
For å finne maksimumene på interferensmønsteret bruker vi formelen:

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad (31)$$

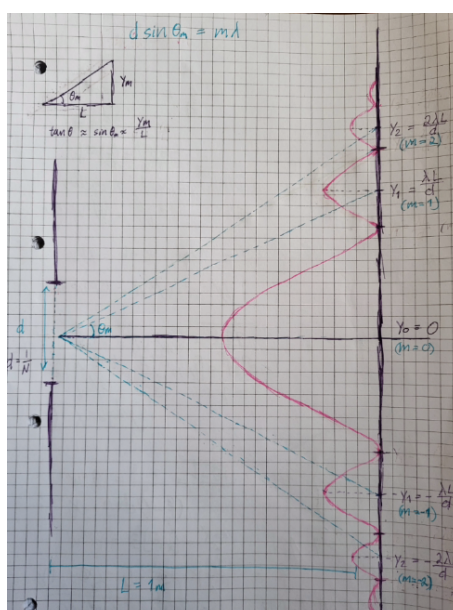
hvor:

- m er ordensnummeret fra maksimalpunktet. Jeg regner ut verdiene for $m = 1, 2, 3, 4, 5$.
- d er spalteavstanden, gitt ved $d = \frac{1}{N}$
- N er linjetettheten til gitteret (i linjer per meter).
 - $N_1 = 300 \times 10^3$ linjer/m

- $N_2 = 600 \times 10^3$ linjer/m
- $\lambda = 650$ nm som er bølglengden til laseren.
- θ_m er spredningsvinkelen for hver orden av m .
- L er avstanden mellom spalten og veggen, som jeg setter til 1 meter.



Her viser jeg litt vagt hvordan man kommer frem til formelen over når man har flere ordener av m .



En litt mer generell og oversiktlig representasjon av noen ordner av m .

Når $L \gg d$ kan vi approksimere:

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \approx \frac{y_m}{L}$$

Her er y_m avstanden fra sentrum til hvert interferensmaksimum på veggen, altså posisjonen til lysflekken for hver orden m .

Fra tidligere vet vi at $d \sin \theta = m \lambda$. Da får vi:

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \frac{y_m}{L} = \frac{m \lambda}{d} \\ y_m &= \frac{m \lambda L}{d} \\ y_m &= \frac{m \lambda L}{\frac{1}{N}} \\ y_m &= m \lambda L N \end{aligned}$$

Med denne formelen kan vi regne ut verdier for $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Beregner y_m for $N_1 = 300 \cdot 10^3$ linjer/m

$$\begin{aligned}y_1 &= 1 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.195 \text{ m}} \\y_2 &= 2 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.390 \text{ m}} \\y_3 &= 3 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.585 \text{ m}} \\y_4 &= 4 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.780 \text{ m}} \\y_5 &= 5 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.975 \text{ m}}\end{aligned}$$

Regner nå videre y_m for $N_2 = 600 \cdot 10^3$ linjer/m

$$\begin{aligned}y_1 &= 1 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.390 \text{ m}} \\y_2 &= 2 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{0.780 \text{ m}} \\y_3 &= 3 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{1.170 \text{ m}} \\y_4 &= 4 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{1.560 \text{ m}} \\y_5 &= 5 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \underline{1.960 \text{ m}}\end{aligned}$$

Nå som vi har verdier for y_m , kan vi bruke disse til å regne ut spredningsvinkelen θ_m for hver verdi og se om det blir noen signifikant endring.

Fra formelen $d \sin \theta = m\lambda$, når vi vet at $d = \frac{1}{N}$, kan vi løse for θ_m og få:

$$\theta_m = \arcsin(m\lambda N) \quad (32)$$

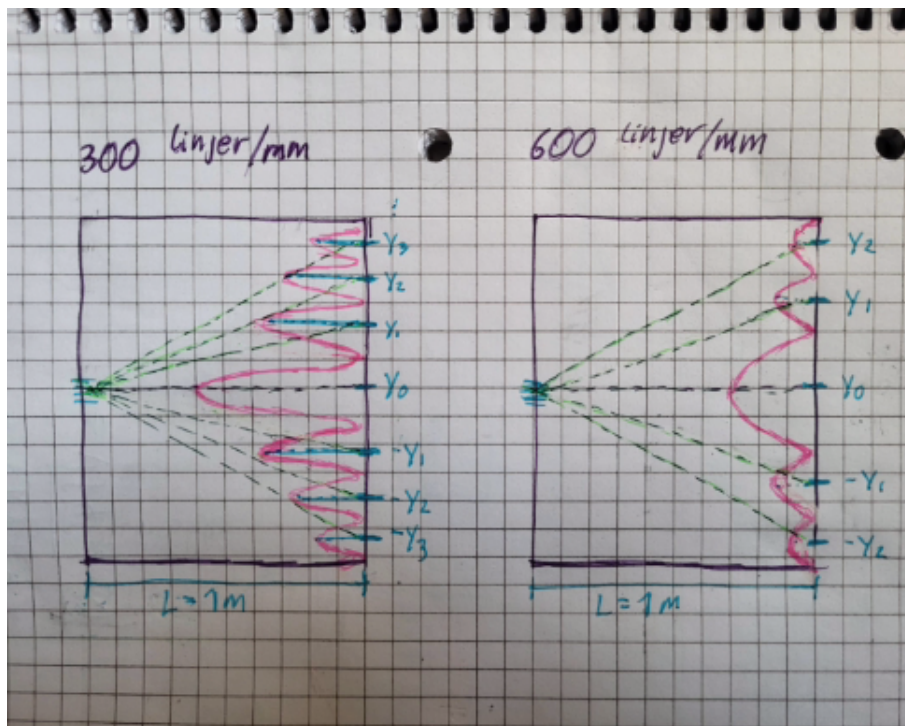
Beregner θ_m for $N_1 = 300 \cdot 10^3$ linjer/m

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arcsin(1 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{11.25^\circ} \\ \theta_2 &= \arcsin(2 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{22.95^\circ} \\ \theta_3 &= \arcsin(3 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{35.80^\circ} \\ \theta_4 &= \arcsin(4 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{51.26^\circ} \\ \theta_5 &= \arcsin(5 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{77.16^\circ}\end{aligned}$$

Regner videre ut verdiene for θ_m for $N_2 = 600 \cdot 10^3$ linjer/m

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arcsin(1 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{22.95^\circ} \\ \theta_2 &= \arcsin(2 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) = \underline{51.26^\circ} \\ \theta_3 &= \arcsin(3 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) \quad \text{ikke definert for over } 90^\circ \\ \theta_4 &= \arcsin(4 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) \quad \text{ikke definert for over } 90^\circ \\ \theta_5 &= \arcsin(5 \cdot 650 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}) \quad \text{ikke definert for over } 90^\circ\end{aligned}$$

Her er et forsøk på en illustrasjon av det vi har sett over. NB, vinklene er ikke riktige her.



Til venstre er N_1 og til høyre er N_2 . Vi ser at N_2 har større spredning i y_m .

3.5 Drøfting og feilkilder

Hadde vi utført forsøket fysisk, ville vi sett at interferensmønsteret for N_2 (600 linjer/mm) hadde større avstand mellom prikkene enn for N_1 (300 linjer/mm). Dette kan vi også bekrefte ut fra de teoretiske y_m -verdiene vi regnet ut, hvor y_m -verdiene til N_2 er mer spredt. Følgelig ser vi også at spredningsvinklene θ_m for N_2 er større enn for N_1 , og ved høyere ordensnummer ($m > 2$) blir vinkelverdiene utilgjengelige fordi de overstiger 90° . Dette betyr at spredningsvinkelen θ_m øker når spalteavstanden d blir mindre, noe som kommer tydelig frem i beregningene.

Siden jeg kun har utført teoretiske beregninger, har jeg valgt å ignorere praktiske feilkilder som skjelvende hender, en forsøkspartner med en uheldig tendens til å skumpe borti utstyret, eller feilmarginer fra linjaler. Jeg har også antatt at gittrene og laseren er ideelle og at de har nøyaktig de verdiene som de påstår å ha.

3.5.1 Sammenheng med Heisenbergs usikkerhetsprinsipp

Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, som jeg utledet tidligere (30), er gitt ved

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

I eksperimentet tilsvarende spalteavstanden d usikkerheten i posisjon Δx , mens spredningen i interferensmønsteret tilsvarende usikkerheten i bevegelsesmengde Δp . Når vi reduserer d (eller øker linjetettheten N), observerer vi at spredningsvinkelen θ_m øker, noe som igjen fører til en større avstand mellom y_m -verdiene. Dette innebærer at fotonene får større usikkerhet i bevegelsesmengde, Δp . Dette er i samsvar med Heisenbergs usikkerhetsprinsipp: Jo mer presist vi bestemmer fotonets posisjon (ved å bruke en smalere spalte), desto større blir usikkerheten i dets bevegelsesmengde.

Sammenlikning av de beregnede spredningsvinklene viser tydelig at for et gitter med høyere linjetetthet (N_2), blir interferensordenen med høyere m raskt utilgjengelig fordi de overstiger 90° . Dette illustrerer hvordan økt linjetetthet fører til større vinkelspredning, og dermed større usikkerhet i bevegelsesmengden Δp . På bildet 3.4 kan man også se at intensitetsgrafen 'flater ut' når linjetettheten øker.

3.6 Konklusjon

Eksperimentet har nå vist at når man øker gitterkonstanten N , reduseres spalteavstanden d , noe som gjør at Δx (usikkerheten i posisjon) blir mindre fordi vi kan måle posisjonen til fotonene mer presist. Som en konsekvens ser vi at interferensmønsteret sprer seg mer, noe som betyr at usikkerheten i bevegelsesmengden Δp øker. Dette demonstrer Heisenbergs usikkerhetsprinsipp på en enkel måte, sett at du tilfeldigvis har en klasse II laser og et par opiske gittere liggende rundt :)

4 Siste ord

I denne rapporten har jeg grundig utforsket Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, både gjennom matematisk utledning og teoretisk demonstrasjon ved hjelp av et enkelspalteforsøk. Gjennom dette har jeg fått en dypere forståelse av hvordan usikkerheten i posisjon og bevegelsesmengde er knyttet sammen. De teoretiske beregningene har vist hvordan endringer i spalteåpningen påvirker usikkerheten, noe som gir en konkret illustrasjon av prinsippet i praksis.

Og som en liten bonus: mer erfaring med LaTeX! For hva er vel mer kvantemekanisk enn et system hvor små endringer i koden kan ha uforutsigbare makroskopiske konsekvenser?