Newtons avkjølingslov

Helene Haga Pedersen og Hannah Angela Ekblad

22. oktober 2024

Et forsøk med Newtons avkjørlingslov og den lange veien mot romtemperatur.

Differensiallikningen for Newtons avkjølingslov kan uttrykkes som:

$$T'(t) = k(T_{omg} - T)$$

Likningen forteller at varmeendringen til et objekt er proporsjonal med differansen i temperatur mellom objektet og omgivelsene, samt en proposjonalitetskontstant, k. Newtons avkjølingslov vil dermed gi en kvanitativ beskrivelse av hvor hurtig et objekt avkjøles.

Med innsatte verdier, gir loven en matematisk modell for å forutsi hvordan temperaturen til et objekt endres over tid i forhold til omgivelsene.

Fra dette forsøket forventer vi å observere at avkjølingen bremser etter hvert som objektet nærmer seg romtemperaturen, dvs at varmeavgivningen vil avta saktere med tiden.

I dette forsøket har vi valgt å koke en svineknoke, for så å måle dens temperatur hvert femte minutt etter avskuttet koking. Vi har døpt svineknoken til HAM-let, og vil referere til den slik heretter. Utstyret vi brukte var et termometer fra Chlas Ohlson og HAM-let. HAM-let ble langtidskokt i 3 timer, og ble snudd hver halvtime.

Vi har valgt å kalle proporsjonalitetskonstanten for k. Den omhandler hvor effektivt varmeoverføringen skjer mellom HAM-let og omgivelsene, og avhenger av faktorer som materiale, varmekapasitet og temperatur. Verdien bestemmes ofte empirisk.

Under viser vi hvordan vi kom fram til en formel for k. Hvor T_{omg} er temperaturn til omgivelsene og T er temperaturn til HAM-let.

Matematisk utledning av k

$$T'(t) = T_{omg} + (T - T_{omg})e^{-kt} \tag{1}$$

$$T'(t) - T_{omg} = (T - T_{omg})e^{-kt} \tag{2}$$

$$\frac{T(t) - T_{omg}}{T - T_{omg}} = e^{-kt} \tag{3}$$

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_{omg}}{T - T_{omg}}\right) = -kt \tag{4}$$

$$k = -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{T(t) - T_{omg}}{T - T_{omg}}\right) \tag{5}$$

Matematisk beregning av $T(t)$

$$T' = -k(T - T_{omg})$$

$$T' + kT = kT_{omg} \quad | \quad e^{kt}$$

$$T'e^{kt} + kTe^{kt} = kT_{omg}e^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}(Te^{kt}) = kT_{omg}e^{kt}$$

$$\int \frac{d}{dt}(Te^{kt})\, dt = \int kT_{omg}e^{kt}\, dt$$

$$Te^{kt} = kT_{omg} \cdot \frac{1}{k}e^{kt} + C$$

$$Te^{kt} = T_{omg}e^{kt} + C$$

$$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$$

I dette forsøket har vi har målt intialbetingelsen til å være $T(0) = 92.1$ grader. T_{omg} ble målt til 23.3 grader.

Etter insatte verdier og som følge av likningen $C = T - T_{omg}$, har vi funnet C til å være differansen i temperatur mellom HAM-let og romtemperaturen. Konstanten C viser oss også at desto større temperaturforskjellen mellom et objekt og omgivelsene er, desto raskere vil temperaturforandringen skje.

Videre har vi en Python-kode for å beregne k etter 155 minutter, hvor vi bruker formelen for k som ble utledet tidligere.

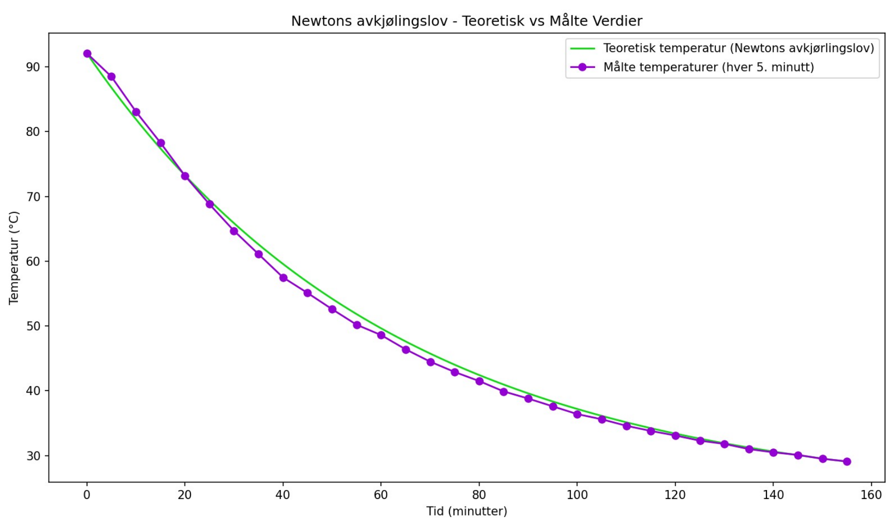
```
import numpy as np

def beregn_k(T_0, T_omgivelse, T_t, t):
    return - (1 / t) * np.log((T_t - T_omgivelse) / (T_0 - T_omgivelse))


T_0 = 92.1  # Starttemperaturen til HAM-let
T_omgivelse = 23.3  # Romtemperaturen
T_t = 29.1  # Temperaturen etter t minutter
t = 155  # Tid i minutter


k = beregn_k(T_0, T_omgivelse, T_t, t)

print(f"Verdien av k er: {k:.4f}")
```

Vi beregnet k til å bli 0.0160. Deretter har vi en kode som plotter den teoretiske kurven av Newtons avkjølingslov opp mot en kurve av målte verdier.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definer variabler
T_0 = 92.1
T_omgivelse = 23.3
k = 0.0160
tid_total = 155
tidsintervall = np.linspace(0, tid_total, 100)

# Newtons avkjølingslov (teoretisk kurve)
def newtons_law(T_0, T_omgivelse, k, t):
    return T_omgivelse + (T_0 - T_omgivelse) * np.exp(-k * t)
```

```
# Beregn teoretiske temperaturer
temperatur_teoretisk = newtons_law(T_0, T_omgivelse, k, tidsintervall)


t_målt = np.arange(0, tid_total+1, 5)  # Mål hver 5. minutt
temperatur_målt = np.array([92.1, 88.5, 83.1, 78.3, 73.2, 68.8, 64.7, 61.1, 57.5, 55.1, 52.6,
                            50.2, 48.6, 46.4, 44.5, 42.9, 41.5, 39.9, 38.8, 37.6, 36.4, 35.6,
                            34.6, 33.8, 33.1, 32.3, 31.8, 31.0, 30.5, 30.1, 29.5, 29.1])

#teoretiske verdier
plt.plot(tidsintervall, temperatur_teoretisk, label='Teoretisk temperatur (Newtons avkjørlingslov)',
          color="#12db16")

#målte verdier
plt.plot(t_målt, temperatur_målt, "o-", color="#9400d3", label='Målte temperaturer (hver 5. minutt)',
          zorder=5)


plt.xlabel('Tid (minutter)')
plt.ylabel('Temperatur (°C)')
plt.title('Newtons avkjølingslov - Teoretisk vs Målte Verdier')
plt.legend()


plt.show()
```

Under (i figur 1) ser vi resultatet av koden.



Figur 1: Resultatet av plottet kurve opp mot teoretisk kurve av Newtons avkjølingslov, som ga en grafisk fremstilling av varmeendringen til HAM-let som funksjon av tiden.

Selv om kurvene ligger noenlunde jevt, ser vi fortsatt enelte avvik. I de første 4 målingene (altså de første 20 minuttene), er den plottede kurven litt over den teoretiske. Dette kan potensielt skyldes at den målte startteperaturen $T(0)$ var høyere enn den faktiske temperaturen, noe som ville medført at de tidligere målingene får høyere verdi enn de teoretiske. En annen grunn kan være ujevn oppvarming av HAM-let. Under kokingen ble den regelmessig snudd, men det kan fortsatt ha oppstått avvik. Siden

den også er en biologisk masse, kan skinnet ha holdt på varmen lenger, noe som ville forsinket det initielle varmetapet. En siste grunn, kan være treghet i termometeret, slik at temperaturen ikke ble oppdatert før vi leste den av.

Grafene møtes igjen ved måling 5 (altså etter 25 minutter). Fra måling 6 (30 minutter) til måling 26 (130 minutter), ligger den plottede kurven under den teoretiske. Avviket skyldes gjerne fordamping, noe som Newtons avkjølingslov ikke tar hensyn til. Dette er gjerne en feilkilde man forventer å få av et slikt forsøk. En annen, mindre sannsynlig, feilkilde kan være varmeutveksling mellom HAM-let og underlaget. I teorien kan tallerkenen vi la den på fungere som en varmeleder, noe som da kan være en påvirkende faktor i avviket.

Andre feilkilder kan inkludere feil ved avlesning eller endringer i romtemperatur mm.

En annen ting som er verdt å merke seg er at Newtons avkjølingslov er en eksponensiell kurve. Dvs at temperaturen til HAM-let vil konvergere mot romtemperatur, men teoretisk sett aldri nå den. Dette stemmer ikke i virkeligheten, men grafen gir en god tilnærming.

Oppsummert kan avvikene over og under kurven skyldes en rekke utenforstående faktorer som loven ikke tar hensyn til. Til tross for dette vurderer vi Newtons avkjølingslov som en god og hensiktsmessig modell og tilnærming for å forutsi varmeavgivning over en bestemt tidsperiode.

Et par ting vi sitter igjen med etter dette forsøket er:

1. Ny kunnskap om LaTeX
2. Mer kunnskap om matematisk modellering
3. En ukes verdt av gryte
4. Oppgitte romkammerater som ikke fikk laget seg mat fordi vi kapret kjøkkenet i 9 timer
5. Lite lagringsplass på mobil grunnet dokumentering av forsøket
6. Forsterket vennskap gjennom den lange ventetiden til forsøket