Contents

1 Ubuntu

1.1 Terminal Title

方法：

```
PS1='\e];\a'
```

舉例：

```
PS1='\e];\W\a\w$ '
// 可改 \W 為想要的 Title
```

- [\a] - ASCII Bell
- [\d] - 日期
- [\e] - 跳脫字元
- [\h] - 主機
- [\H] - 主機名
- [\t] - 時間
- [\u] - 使用者
- [\w] - 當前路徑
- [\W] - 當前資料夾名稱

1.2 GDB 參數

```
g++ main.cpp -g -o main
gdb -tui -q ./main
```

- [-tui] 在終端機顯示文字檔案
- [-q] 在初始設定不顯示版本資訊

1.3 GDB 指令

Breakpoints

command	功能
[break] [b]	在當前這行放中斷點
[b fn]	在函式 fn 的開頭放中斷點
[b N]	在第 N 行放中斷點
[clear N] [cl N]	刪除第 N 行的中斷點
[command N] [comm N]	設定編號 N 的中斷點的指令
[cond N i==3]	編號 N 的中斷點 i=3 再停
[delete] [d]	刪除所有中斷點
[d N]	刪除編號為 N 的中斷點
[disable] [dis]	使所有中斷點無效
[dis N]	使編號為 N 的中斷點無效
[dp a, "%d\n", c]	碰到第 a 行時印出 c
[enable] [en]	使所有中斷點有效
[en N]	使編號為 N 的中斷點有效
[tbreak N] [tb N]	只停一次的 [b N]
[watch x==3] [wa x==3]	執行到符合條件時停止

Data

command	功能
[call fn]	呼叫函式 fn
[display x] [disp x]	每執行一步都印出 x
[print var] [p var]	印出 var
[set print] [set p]	設定 print
[set p array]	array 印出漂亮格式
[set p array off]	取消 array 印出漂亮格式
[set p array-i]	array 印出索引
[set p array-i off]	取消 array 印出索引
[set p el N]	array 最多印 N 個元素
[set p pre]	struct 印出漂亮格式
[set p pre off]	取消 struct 印出漂亮格式
[set var N=3]	將 N 設為 3
[undisp x]	取消編號為 x 的 disp

Files

command	功能
[list] [l]	印出 10 行程式碼
[l N]	印出包含第 N 行的程式碼
[l fn]	印出包含函式 fn 的程式碼
[l var]	印出包含變數 var 的程式碼

Obscure

command	功能
[record] [rec]	開始記錄
[rec s]	停止記錄

Running

command	功能
[continue] [c]	執行到下個中斷點或錯誤
[finish] [fin]	執行到跳出堆疊框
[kill] [k]	終止程式
[next] [n]	執行下一行（不進入函式）
[n N]	執行 [n] 一共 N 次
[reverse-continue] [rc]	反向的 [c]
[rn]	反向的 [n]
[rs]	反向的 [s]
[run] [r]	執行程式
[r < FILE]	像 [r]，輸入為 FILE
[start]	開始執行，停在第一步
[start < FILE]	像 [start]，輸入為 FILE
[step] [s]	執行下一步（進入函式）
[s N]	執行 [s] 一共 N 次
[until N] [u N]	執行到第 N 行停下來

Stack

command	功能
[backtrace] [bt]	印出所有堆疊
[down] [do]	印出下一層堆疊
[frame] [f]	印出當前堆疊
[f N]	印出往上第 N 層堆疊
[return] [ret]	從當前函式 return
[up]	印出上一層堆疊

Status

command	功能
[info] [i]	顯示資訊
[i b]	列出所有中斷點資訊
[i disp]	列出所有監看變數資訊
[i local] [i lo]	列出所有區域變數資訊
[i var]	列出所有變數

Support

command	功能
[help] [h]	協助
[b N if i==2]	當 i=2 時停在第 N 行
[quit] [q]	結束 gdb

Text User Interface

command	功能
[refresh] [ref]	刷新終端機布置
[tui d]	取消使用 TUI
[tui e]	使用 TUI
[update] [upd]	更新視窗以顯示當前程式碼

Others

- 按 <enter> 鍵可以執行上一動
- 執行 reverse（像是 rc, rn, rs）前，要先執行 record（rec），但存不了幾步就沒空間了
- 輸入命令 command（comm）後，接下來每一行輸入一個命令，以 end 作結，之後執行到這裡都會執行所有命令。同一個中斷點有變動其 command 時會完全按照新的輸入。

2 字串

2.1 最長迴文子字串

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define T(x) ((x)%2 ? s[(x)/2] : '.')
using namespace std;

string s;
int n;

int ex(int l,int r){
  int i=0;
  while(l-i>=0&&r+i<n&&T(l-i)==T(r+i)) i++;
  return i;
}

int main(){
  cin>>s;
  n=2*s.size()+1;
  int mx=0;
  int center=0;
  vector<int> r(n);
  int ans=1;
  r[0]=1;
  for(int i=1;i<n;i++){
    int ii=center-(i-center);
    int len=mx-i+1;
    if(i>mx){
      r[i]=ex(i,i);
      center=i;
      mx=i+r[i]-1;
    }
    else if(r[ii]==len){
      r[i]=len+ex(i-len,i+len);
      center=i;
      mx=i+r[i]-1;
    }
    else r[i]=min(r[ii],len);
    ans=max(ans,r[i]);
  }
  cout<<ans-1<<"\n";
  return 0;
}
```

2.2 Manacher

s: 增長為兩倍的字串，以'@'為首，以'$'為間隔，以'\0'節尾

p: 以 s[i] 為中心，半徑為 p[i] 是迴文

return: 最長的迴文長度

```cpp
const int maxn = 1e5 + 10;

char s[maxn<<1] = "@$";
int p[maxn<<1];

int manacher(char* str, int n) {
  for(int i=1; i<=n; i++) {
    s[i<<1] = str[i-1];
    s[i<<1|1] = '$';
  }

  int cur = 0, r = 0, res = 0;
  s[n = (n+1) << 1] = 0;
  for(int i=1; i<n; i++) {
    p[i] = (i>r) ? 1 : min(p[cur*2-i], r-i);
    for(; s[i-p[i]]==s[i+p[i]]; p[i]++);
    if(i+p[i] > r) {
      r = i + p[i];
      cur = i;
    }
    res = max(res, p[i]);
  }
  return res - 1;
}
```

2.3 KMP

```cpp
const int maxn = 1e6 + 10;

int n, m;            // len(a), len(b)
int f[maxn];         // failure function
char a[maxn], b[maxn];

void failureFuntion() { // f[0] = 0
    for(int i=1, j=0; i<m; ) {
        if(b[i] == b[j]) f[i++] = ++j;
        else if(j) j = f[j-1];
        else f[i++] = 0;
    }
}

int kmp() {
    int i = 0, j = 0, res = 0;
    while(i < n) {
        if(a[i] == b[j]) i++, j++;
        else if(j) j = f[j-1];
        else i++;
        if(j == m) {
            res++; // 找到答案
            j = 0; // non-overlapping
        }
    }
    return res;
}

// Problem: 所有在b裡，前後綴相同的長度
// b = ababcabababcabab
// f = 0012012341234567 89
// 前9 = 後9
// 前4 = 前9的後4 = 後4
// 前2 = 前4的後2 = 前9的後2 = 後2
for(int j=m; j; j=f[j-1]) {
    // j 是答案
}
```

2.4 Z Algorithm

```cpp
const int maxn = 1e6 + 10;

int z[maxn];   // s[0:z[i]) = s[i:i+z[i])
string s;

void makeZ() { // z[0] = 0
  for(int i=1, l=0, r=0; i<s.length(); i++) {
    if(i<=r && z[i-l]<r-i+1) z[i] = z[i-l];
    else {
      z[i] = max(0, r-i+1);
      while(i+z[i]<s.length() &&
            s[z[i]]==s[i+z[i]]) z[i]++;
    }
    if(i+z[i]-1 > r) l = i, r = i+z[i]-1;
  }
}
```

2.5 Suffix Array

- $O(n\log(n))$
- SA：後綴數組
- HA：相鄰後綴的共同前綴長度 (Longest Common Prefix)
- maxc：可用字元的最大 ASCII 值
- maxn >= maxc
- 記得先取 n 的值 (strlen(s))

```cpp
const int maxn = 2e5 + 10;
const int maxc = 256 + 10;

int n;
int SA[maxn], HA[maxn];
int rk[maxn], cnt[maxn], tmp[maxn];
char s[maxn];

void getSA() {
  int mx = maxc;
  for(int i=0; i<mx; cnt[i++]=0);

  // 第一次 stable counting sort，編 rank 和 sa
  for(int i=0; i<n; i++) cnt[rk[i]=s[i]]++;
  for(int i=1; i<mx; i++) cnt[i] += cnt[i-1];
  for(int i=n-1;i>=0;i--) SA[--cnt[s[i]]]=i;

  // 倍增法運算
  for(int k=1, r=0; k<n; k<<=1, r=0) {
    for(int i=0; i<mx; cnt[i++]=0);
    for(int i=0; i<n; i++) cnt[rk[i]]++;
    for(int i=1; i<mx; i++) cnt[i]+=cnt[i-1];
    for(int i=n-k; i<n; i++) tmp[r++] = i;
    for(int i=0; i<n; i++) {
      if(SA[i] >= k) tmp[r++] = SA[i] - k;
    }

    // 計算本回 SA
    for(int i=n-1; i>=0; i--) {
      SA[--cnt[rk[tmp[i]]]] = tmp[i];
    }

    // 計算本回 rank
    tmp[SA[0]] = r = 0;
    for(int i=1; i<n; i++) {
      if((SA[i-1]+k >= n) ||
         (rk[SA[i-1]] != rk[SA[i]]) ||
         (rk[SA[i-1]+k] != rk[SA[i]+k])) r++;
      tmp[SA[i]] = r;
    }
    for(int i=0; i<n; i++) rk[i] = tmp[i];
    if((mx=r+1) == n) break;
  }
}

void getHA() {   // HA[0] = 0
  for(int i=0; i<n; i++) rk[SA[i]] = i;
  for(int i=0, k=0; i<n; i++) {
    if(!rk[i]) continue;
    if(k) k--;
    while(s[i+k] == s[SA[rk[i]-1]+k]) k++;
    HA[rk[i]] = k;
  }
}
```

3 math

3.1 公式

1. Most Divisor Number

Range	最多因數數	因數個數
10^9	735134400	1344
2^{31}	2095133040	1600
10^{18}	897612484786617600	103680
2^{64}	9200527969062830400	161280

2. Catlan Number

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n}, C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n$$

$$C = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

3. Lagrange Polynomial

拉格朗日插值法：找出 n 次多項函數 $f(x)$ 的點 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

4. Fibonacci

$$\begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} f_{n+p} & f_{n+p+1} \end{bmatrix}, p \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

5. Pick's Theorem

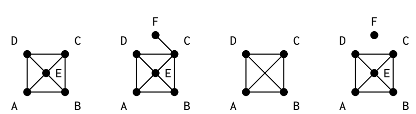
給定頂點座標均是整點（或正方形格子點）的簡單多邊形，其面積 A 和內部格點數目 i、邊上格點數目 b 的關係為

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

6. Euler's Formula

對於有 V 個點、E 條邊、F 個面（含外部）的連通平面圖

$$F + V - E = 2$$



(1)、(2)◯；(3)×，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交；(4)×，非連通圖

7. Simpson Integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

3.2 Rational

```cpp
const char sep = '/';   // 分數的分隔符
bool div0;              // 要記得適時歸零
using ll = long long;

struct Rational {
  ll p, q;

  Rational(ll a=0, ll b=1) {
    p = a, q = b;
    reduce();
  }

  Rational(string s) {
    if(s.find(sep) == string::npos) {
      p = stoll(s);
      q = 1;
    } else {
      p = stoll(s.substr(0, s.find(sep)));
      q = stoll(s.substr(s.find(sep)+1));
    }
    reduce();
  }

  void reduce() {
    ll t = abs(__gcd(p, q));
    if(t == 0) {
      div0 = true;
      return;
    }
    p /= t, q /= t;
    if(q < 0) p = -p, q = -q;
    return;
  }

  string toString() {
    if(q == 0) {
      div0 = true;
      return "INVALID";
    }
    if(p%q == 0) return to_string(p/q);
    return to_string(p) + sep + to_string(q);
  }

  friend istream& operator>>(
    istream& i, Rational& r) {
    string s;
    i >> s;
    r = Rational(s);
    return i;
  }

  friend ostream& operator<<(
    ostream& o, Rational r) {
    o << r.toString();
    return o;
  }
};

Rational operator+(Rational x, Rational y) {
  ll t = abs(__gcd(x.q, y.q));
  if(t == 0) return Rational(0, 0);
  return Rational(
    y.q/t*x.p + x.q/t*y.p, x.q/t*y.q);
}

Rational operator-(Rational x, Rational y) {
  return x + Rational(-y.p, y.q);
}

Rational operator*(Rational x, Rational y) {
  return Rational(x.p*y.p, x.q*y.q);
}

Rational operator/(Rational x, Rational y) {
  return x * Rational(y.q, y.p);
}
```

3.3 乘法逆元、組合數

$$x^{-1} mod\ m$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1 \\ -\left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor (m\ mod\ x)^{-1}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (mod\ m)$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1 \\ (m - \left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor)(m\ mod\ x)^{-1}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (mod\ m)$$

若 $p \in prime$, 根據費馬小定理, 則

$$\begin{aligned} \because \quad ax &\equiv 1\ (mod\ p) \\ \therefore \quad ax &\equiv a^{p-1}\ (mod\ p) \\ \therefore \quad x &\equiv a^{p-2}\ (mod\ p) \end{aligned}$$

```cpp
using ll = long long;
const int maxn = 2e5 + 10;
const int mod = 1e9 + 7;

int fact[maxn] = {1, 1};// x! % mod
int inv[maxn] = {1, 1}; // x^(-1) % mod
int invFact[maxn] = {1, 1};// (x!)^(-1) % mod

void build() {
  for(int x=2; x<maxn; x++) {
    fact[x] = (ll)x * fact[x-1] % mod;
    inv[x] = (ll)(mod-mod/x)*inv[mod%x]%mod;
    invFact[x] = (ll)invFact[x-1]*inv[x]%mod;
  }
}

// 前提：mod 為質數
void build() {
  auto qpow = [&](ll a, int b) {
    ll res = 1;
    for(; b; b>>=1) {
      if(b & 1) res = res * a % mod;
      a = a * a % mod;
    }
    return res;
  };

  for(int x=2; x<maxn; x++) {
    fact[x] = (ll)x * fact[x-1] % mod;
    invFact[x] = qpow(fact[x], mod-2);
  }
}

// C(a, b) % mod
int comb(int a, int b) {
  if(a < b) return 0;
  ll x = fact[a];
  ll y = (ll)invFact[b] * invFact[a-b] % mod;
  return x * y % mod;
}
```

3.4 歐拉函數

```cpp
//計算閉區間 [1,n] 中有幾個正整數與 n 互質

int phi(){
    int ans=n;
    for(int i=2;i*i<=n;i++)
        if(n%i==0){
            ans=ans-ans/i;
            while(n%i==0) n/=i;
        }
    if(n>1) ans=ans-ans/n;
    return ans;
}
```

3.5 質數與因數

```
歐拉篩O(n)
#define MAXN 47000 //sqrt(2^31)=46,340...
bool isPrime[MAXN];
int p[MAXN];
int pSize=0;
void getPrimes(){
  memset(isPrime,true,sizeof(isPrime));
  isPrime[0]=isPrime[1]=false;
  for(int i=2;i<MAXN;i++){
    if(isPrime[i]) p[pSize++]=i;
    for(int j=0;j<pSize&&i*p[j]<=MAXN;++j){
      isPrime[i*p[j]]=false;
      if(i%p[j]==0) break;
    }
  }
}
problem :
給定整數 N，求N最少可以拆成多少個質數的和。
如果N是質數，則答案為 1。
如果N是偶數(N!=2)，則答案為2(強歌德巴赫猜想)。
如果N是奇數且N-2是質數，則答案為2(2+質數)。
其他狀況答案為 3 (弱歌德巴赫猜想)。
bool isPrime(int n){
  for(int i=2;i<n;++i){
    if(i*i>n) return true;
    if(n%i==0) return false;
  }
  return true;
}
int main(){
  int n;
  cin>>n;
  if(isPrime(n)) cout<<"1\n";
  else if(n%2==0||isPrime(n-2)) cout<<"2\n";
  else cout<<"3\n";
}
```

3.6 高斯消去

計算 $AX = B$

傳入：

$M =$ 增廣矩陣 $[A|B]$

$equ =$ 有幾個 equation

$var =$ 有幾個 variable

回傳：$X = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ 的解集

>>無法判斷無解或無限多組解<<

```
using DBL = double;
using mat = vector<vector<DBL>>;

vector<DBL> Gauss(mat& M, int equ, int var) {
  auto dcmp = [](DBL a, DBL b=0.0) {
    return (a > b) - (a < b);
  };

  for(int r=0, c=0; r<equ && c<var; ) {
    int mx = r; // 找絕對值最大的 M[i][c]
    for(int i=r+1; i<equ; i++) {
      if(dcmp(abs(M[i][c]),abs(M[mx][c]))==1)
        mx = i;
    }
    if(mx != r) swap(M[mx], M[r]);

    if(dcmp(M[r][c]) == 0) {
      c++;
      continue;
    }

    for(int i=r+1; i<equ; i++) {
      if(dcmp(M[i][c]) == 0) continue;
      DBL t = M[i][c] / M[r][c];
      for(int j=c; j<M[c].size(); j++) {
        M[i][j] -= t * M[r][j];
      }
    }
    r++, c++;
  }

  vector<DBL> X(var);
  for(int i=var-1; i>=0; i--) {
    X[i] = M[i][var];
    for(int j=var-1; j>i; j--) {
      X[i] -= M[i][j] * X[j];
    }
    X[i] /= M[i][i];
  }
  return X;
}
```

3.7 Extended GCD

```
ll exgcd(ll a, ll b, ll& x, ll& y) {
    if (b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    ll gcd = exgcd(b, a % b, x, y);
    ll y1 = y;
    y = x - (a / b) * y;
    x = y1;
    return gcd;
}
int main() {
    ll n;
    ll x, y;
    ll c1, c2, a, b;
    while (~scanf("%lld", &n) && n) {
        scanf("%lld %lld", &c1, &a);
        scanf("%lld %lld", &c2, &b);
        ll gcd = exgcd(a, b, x, y);
        if (n % gcd != 0) {
            printf("failed\n");
            continue;
        }
        ll l = ceil((double)(-n) * x / b);
        ll r = floor((double)(n) * y / a);
        if (l > r) {
            printf("failed\n");
            continue;
        }
        if (c1 * b < c2 * a) { //斜率正or負
            //斜率負，帶入k的上界
            x = n * x / gcd + b / gcd * r;
            y = n * y / gcd - a / gcd * r;
        }
        else {
            //斜率正，帶入k的下界
            x = n * x / gcd + b / gcd * l;
            y = n * y / gcd - a / gcd * l;
        }
        printf("%lld %lld\n", x, y);
    }
    return 0;
}
```

3.8 大步小步

```
  題意
給定 B,N,P，求出 L 滿足 B^L N(mod P)。
 題解
餘數的循環節長度必定為 P 的因數，因此 B^0 B^P,B^1 B^(P+1),…，
也就是說如果有解則 L<N，枚舉0,1,2,L-1 能得到結果，但會超時。
將 L 拆成 mx+y，只要分別枚舉 x,y 就能得到答案，
設 m=√P 能保證最多枚舉 2√P 次 。
B^(mx+y) N(mod P)
B^(mx)B^y N(mod P)
B^y N(B^(-m))^x (mod P)
先求出 B^0,B^1,B^2,...,B^(m-1)，
再枚舉 N(B^(-m)),N(B^(-m))^2,… 查看是否有對應的 B^y。
這種算法稱為大步小步演算法，
大步指的是枚舉 x (一次跨 m 步)，
小步指的是枚舉 y (一次跨 1 步)。
  複雜度分析
利用 map/unorder_map 存放 B^0,B^1,B^2,…,B^(m-1)，
枚舉 x 查詢 map/unorder_map 是否有對應的 B^y，
存放和查詢最多 2√P 次，時間複雜度為 O(√Plog√P)/O(√P)。

using LL = long long;
LL B, N, P;
LL fpow(LL a, LL b, LL c){
    LL res=1;
    for(;b;b >>=1){
        if(b&1) res=(res*a)%c;
        a=(a*a)%c;
    }
    return res;
}
LL BSGS(LL a,LL b,LL p){
    a%=p,b%=p;
    if(a==0) return b==0?1:-1;
    if(b==1) return 0;
    map<LL, LL> tb;
    LL sq=ceil(sqrt(p-1));
    LL inv=fpow(a,p-sq-1,p);
    tb[1]=sq;
    for(LL i=1,tmp=1;i<sq;++i){
        tmp=(tmp*a)%p;
        if(!tb.count(tmp)) tb[tmp]=i;
    }
    for(LL i=0;i<sq;++i){
        if(tb.count(b)){
            LL res=tb[b];
            return i*sq+(res==sq?0:res);
        }
        b=(b*inv)%p;
    }
    return -1;
}
int main(){
    IOS;  //輸入優化
    while(cin>>P>>B>>N){
        LL ans=BSGS(B,N,P);
        if(ans==-1) cout<<"no solution\n";
        else cout<<ans<<'\n';
    }
}
```

3.9 Pisano Period

```
/*Pisano Period:
  費氏數列在mod n的情況下會有循環週期，
  且週期的結束判斷會在
  fib[i - 1] == 0 && fib[i] == 1時，
  此時循環週期長度是i - 1
  Pisano period可證一個週期的長度會在[n, n ^
      n]之間
  mod 1都等於0，沒有週期*/
```

3.10 矩陣快速冪

```
using ll = long long;
using mat = vector<vector<ll>>;
const int mod = 1e9 + 7;
mat operator*(mat A, mat B) {
  mat res(A.size(), vector<ll>(B[0].size()));
  for(int i=0; i<A.size(); i++) {
    for(int j=0; j<B[0].size(); j++) {
      for(int k=0; k<B.size(); k++) {
        res[i][j] += A[i][k] * B[k][j] % mod;
        res[i][j] %= mod;
      }
    }
  }
  return res;
}
// 迴圈版本
mat mpow(mat M, int n) {
  mat res(M.size(), vector<ll>(M[0].size()));
  for(int i=0; i<res.size(); i++)
    res[i][i] = 1;
  for(; n; n>>=1) {
    if(n & 1) res = res * M;
    M = M * M;
  }
  return res;
}
```

4 algorithm

4.1 greedy

```
刪數字問題
//problem
給定一個數字 N(≤10^100)，需要刪除 K 個數字，
請問刪除 K 個數字後最小的數字為何?
//solution
刪除滿足第 i 位數大於第 i+1 位數的最左邊第 i 位數，
扣除高位數的影響較扣除低位數的大。
//code
int main(){
    string s;
    int k;
    cin>>s>>k;
    for(int i=0;i<k;++i){
        if((int)s.size()==0) break;
        int pos =(int)s.size()-1;
        for(int j=0;j<(int)s.size()-1;++j){
            if(s[j]>s[j+1]){
                pos=j;
                break;
            }
        }
        s.erase(pos,1);
    }
    while((int)s.size()>0&&s[0]=='0')
        s.erase(0,1);
    if((int)s.size()) cout<<s<<'\n';
    else cout<<0<<'\n';
}
最小區間覆蓋長度
//problem
給定 n 條線段區間為 [Li,Ri]，
請問最少要選幾個區間才能完全覆蓋 [0,S]?
//solution
先將所有區間依照左界由小到大排序，
對於當前區間 [Li,Ri]，要從左界 >Ri 的所有區間中，
找到有著最大的右界的區間，連接當前區間。

//problem
長度 n 的直線中有數個加熱器，
在 x 的加熱器可以讓 [x-r,x+r] 內的物品加熱，
問最少要幾個加熱器可以把 [0,n] 的範圍加熱。
//solution
對於最左邊沒加熱的點a，選擇最遠可以加熱a的加熱器，
更新已加熱範圍，重複上述動作繼續尋找加熱器。
//code
int main(){
    int n, r;
    int a[1005];
    cin>>n>>r;
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
    int i=1,ans=0;
    while(i<=n){
        int R=min(i+r-1,n),L=max(i-r+1,0)
        int nextR=-1;
        for(int j=R;j>=L;--j){
            if(a[j]){
                nextR=j;
                break;
            }
        }
        if(nextR==-1){
            ans=-1;
            break;
        }
        ++ans;
        i=nextR+r;
    }
    cout<<ans<<'\n';
}
最多不重疊區間
//problem
給你 n 條線段區間為 [Li,Ri]，
請問最多可以選擇幾條不重疊的線段(頭尾可相連)?
//solution
依照右界由小到大排序，
每次取到一個不重疊的線段，答案 +1。
//code
struct Line{
    int L,R;
    bool operator<(const Line &rhs)const{
        return R<rhs.R;
    }
};
int main(){
    int t;
    cin>>t;
    Line a[30];
    while(t--){
        int n=0;
        while(cin>>a[n].L>>a[n].R,a[n].L||a[n].R)
            ++n;
        sort(a,a+n);
        int ans=1,R=a[0].R;
        for(int i=1;i<n;i++){
            if(a[i].L>=R){
                ++ans;
                R=a[i].R;
            }
        }
        cout<<ans<<'\n';
    }
}
最小化最大延遲問題
//problem
給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 Ti，
期限是 Di，第 i 項工作延遲的時間為 Li=max(0,Fi-Di)，
原本Fi 為第 i 項工作的完成時間，
求一種工作排序使 maxLi 最小。
//solution
按照到期時間從早到晚處理。
//code
struct Work{
    int t, d;
    bool operator<(const Work &rhs)const{
        return d<rhs.d;
    }
};
int main(){
    int n;
    Work a[10000];
    cin>>n;
    for(int i=0;i<n;++i)
        cin>>a[i].t>>a[i].d;
    sort(a,a+n);
    int maxL=0,sumT=0;
    for(int i=0;i<n;++i){
        sumT+=a[i].t;
        maxL=max(maxL,sumT-a[i].d);
    }
    cout<<maxL<<'\n';
}
最少延遲數量問題
//problem
給定 N 個工作，每個工作的需要處理時長為 Ti，
期限是 Di，求一種工作排序使得逾期工作數量最小。
//solution
期限越早到期的工作越先做。
將工作依照到期時間從早到晚排序，
依序放入工作列表中，如果發現有工作預期，
就從目前選擇的工作中，移除耗時最長的工作。
上述方法為 Moore-Hodgson s Algorithm。

//problem
給定烏龜的重量和可承受重量，問最多可以疊幾隻烏龜?
//solution
和最少延遲數量問題是相同的問題，只要將題敘做轉換。
工作處裡時長 → 烏龜重量
工作期限 → 烏龜可承受重量
多少工作不延期 → 可以疊幾隻烏龜
//code
struct Work{
    int t, d;
    bool operator<(const Work &rhs)const{
        return d<rhs.d;
        }
};
int main(){
    int n=0;
    Work a[10000];
    priority_queue<int> pq;
    while(cin>>a[n].t>>a[n].d)
        ++n;
    sort(a,a+n);
    int sumT=0,ans=n;
    for(int i=0;i<n;++i){
        pq.push(a[i].t);
        sumT+=a[i].t;
        if(a[i].d<sumT){
            int x=pq.top();
            pq.pop();
            sumT-=x;
            --ans;
        }
    }
    cout<<ans<<'\n';
}

任務調度問題
//problem
給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 Ti，
期限是 Di，如果第 i 項工作延遲需要受到 pi 單位懲罰，
請問最少會受到多少單位懲罰。
//solution
依照懲罰由大到小排序，
每項工作依序嘗試可不可以放在 Di-Ti+1,Di-Ti,...,1,0，
如果有空閒就放進去，否則延後執行。

//problem
給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 Ti，
期限是 Di，如果第 i 項工作在期限內完成會獲得 ai 單位獎勵，
請問最多會獲得多少單位獎勵。
//solution
和上題相似，這題變成依照獎勵由大到小排序。
//code
struct Work{
    int d,p;
    bool operator<(const Work &rhs)const{
        return p>rhs.p;
        }
};
int main(){
    int n;
    Work a[100005];
    bitset<100005> ok;
    while(cin>>n){
        ok.reset();
        for(int i=0;i<n;++i)
            cin>>a[i].d>>a[i].p;
        sort(a,a+n);
        int ans=0;
        for(int i=0;i<n;++i){
            int j=a[i].d;
            while(j--)
                if(!ok[j]){
                    ans+=a[i].p;
                    ok[j]=true;
                    break;
                }
        }
        cout<<ans<<'\n';
    }
}
```

4.2 JosephusProblem

```cpp
//JosephusProblem，只是規定要先砍1號
//所以當作有n - 1個人，目標的13順移成12
//再者從0開始比較好算，所以目標12順移成11

// O(n)
int getWinner(int n, int k) {
    int winner = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        winner = (winner + k) % i;
    return winner;
}

int main() {
    int n;
    while (scanf("%d", &n) != EOF && n){
        --n;
        for (int k = 1; k <= n; ++k){
            if (getWinner(n, k) == 11){
                printf("%d\n", k);
                break;
            }
        }
    }
    return 0;
}

// O(k log(n))
int josephus(int n, int k) {
  if (n == 1) return 0;
  if (k == 1) return n - 1;
  if (k > n) return (josephus(n-1,k)+k)%n;
  int res = josephus(n - n / k, k);
  res -= n % k;
  if (res < 0) res += n; // mod n
  else res += res / (k - 1); // 还原位置
  return res;
}
```

4.3 二分搜

```cpp
// 以下經過check()後 . 為false，o 為true
//皆為[l, r]區間
//.....voooooo 即答案左邊界，符合條件最小的
int bsearch(int l, int r) {
    while (l < r) {
        int mid = (l + r) >> 1;
        if (check(mid)) r = mid;
        else l = mid + 1;
    }
    return l;
}

//ooooov..... 即答案右邊界，符合條件最大的
int bsearch(int l, int r) {
    while (l < r) {
        int mid = (l + r + 1) >> 1;
        if (check(mid)) l = mid;
        else r = mid - 1;
    }
    return l;
}
```

4.4 三分搜

```cpp
  題意：給定兩射線方向和速度，問兩射線最近距離。
  題解
    假設 F(t) 為兩射線在時間 t 的距離，
    F(t) 為二次函數，可用三分搜找二次函數最小值。
struct Point{
    double x, y, z;
    Point() {}
    Point(double _x, double _y, double _z):
        x(_x),y(_y),z(_z){}
    friend istream& operator>>(istream& is,
        Point& p) {
        is >> p.x >> p.y >> p.z;
        return is;
    }
    Point operator+(const Point &rhs) const
    {return Point(x+rhs.x,y+rhs.y,z+rhs.z);}
    Point operator-(const Point &rhs) const
    {return Point(x-rhs.x,y-rhs.y,z-rhs.z);}
    Point operator*(const double &d) const
    { return Point(x*d, y*d, z*d); }
    Point operator/(const double &d) const
    { return Point(x/d, y/d, z/d); }
    double dist(const Point &rhs) const {
        double res = 0;
        res+=(x-rhs.x)*(x-rhs.x);
        res+=(y-rhs.y)*(y-rhs.y);
        res+=(z-rhs.z)*(z-rhs.z);
        return res;
    }
};
int main(){
    IOS;    //輸入優化
    int T;
    cin>>T;
    for(int ti=1;ti<=T;++ti){
        double time;
        Point x1,y1,d1,x2,y2,d2;
        cin>>time>>x1>>y1>>x2>>y2;
        d1=(y1-x1)/time;
        d2=(y2-x2)/time;
        double L=0,R=1e8,m1,m2,f1,f2;
        double ans = x1.dist(x2);
        while(abs(L-R)>1e-10){
            m1=(L+R)/2;
            m2=(m1+R)/2;
            f1=((d1*m1)+x1).dist((d2*m1)+x2);
            f2=((d1*m2)+x1).dist((d2*m2)+x2);
            ans = min(ans,min(f1,f2));
            if(f1<f2) R=m2;
            else L=m1;
        }
        cout<<"Case "<<ti<<": ";
        cout << fixed << setprecision(4) <<
            sqrt(ans) << '\n';
    }
}

//oi wiki模板，[l, r]
//只要是單峰函數，三分可找最大或最小，以下為最小化
//計算lmid以及rmid時要避免數字溢出
while (r - l > eps) {
  mid = (l + r) / 2;
  lmid = mid - eps;
  rmid = mid + eps;
  if (f(lmid) < f(rmid)) r = mid;
  else l = mid;
}
```

4.5 dinic

```cpp
const int maxn = 1e5 + 10;
const int inf = 0x3f3f3f3f;
struct Edge { int s, t, cap, flow; };
int n, m, S, T;
int level[maxn], dfs_idx[maxn];
vector<Edge> E;
vector<vector<int>> G;
void init() {
    S = 0;
    T = n + m;
    E.clear();
    G.assign(maxn, vector<int>());
}
void addEdge(int s, int t, int cap) {
    E.push_back({s, t, cap, 0});
    E.push_back({t, s, 0, 0});
    G[s].push_back(E.size()-2);
    G[t].push_back(E.size()-1);
}
bool bfs() {
    queue<int> q({S});
    memset(level, -1, sizeof(level));
    level[S] = 0;
    while(!q.empty()) {
        int cur = q.front();
        q.pop();
        for(int i : G[cur]) {
            Edge e = E[i];
            if(level[e.t]==-1 &&
                e.cap>e.flow) {
                level[e.t] = level[e.s] + 1;
                q.push(e.t);
            }
        }
    }
    return ~level[T];
}
int dfs(int cur, int lim) {
  if(cur==T || lim<=0) return lim;
  int result = 0;
  for(int& i=dfs_idx[cur]; i<G[cur].size()
      && lim>0; i++) {
    Edge& e = E[G[cur][i]];
    if(level[e.s]+1 != level[e.t]) continue;
    int flow = dfs(e.t, min(lim,
        e.cap-e.flow));
    if(flow <= 0) continue;
    e.flow += flow;
    result += flow;
    E[G[cur][i]^1].flow -= flow;
    lim -= flow;
  }
  return result;
}
int dinic() {  // O((V^2)E)
    int result = 0;
    while(bfs()) {
        memset(dfs_idx, 0, sizeof(dfs_idx));
        result += dfs(S, inf);
    }
    return result;
}
```

4.6 dijkstra

```cpp
struct edge{
    int v,w;
};

struct Item{
    int u,dis;
    bool operator<(const Item &rhs)const{
        return dis>rhs.dis;
    }
};

vector<edge> G[maxn];
int dist[maxn];

void dijkstra(int s){ // O((V + E)log(E))
    memset(dist,INF,sizeof(dist));
    dist[s]=0;
    priority_queue<Item> pq;
    pq.push({s,0});
    while(!pq.empty()){
        Item now=pq.top();
        pq.pop();
        if(now.dis>dist[now.u]) continue;
        for(edge e:G[now.u]){
            if(dist[e.v]>dist[now.u]+e.w){
                dist[e.v]=dist[now.u]+e.w;
                pq.push({e.v,dist[e.v]});
            }
        }
    }
}

int main(){
    int t,cas=1;
    cin>>t;
    while(t--){
        int n,m,s,t;
        cin>>n>>m>>s>>t;
        for(int i=0;i<=n;i++) G[i].clear();
        int u,v,w;
        for(int i=0;i<m;i++){
            cin>>u>>v>>w;
            G[u].push_back({v,w});
            G[v].push_back({u,w});
        }
        dijkstra(s);
        cout<<"Case #"<<cas++<<": ";
        if(dist[t]==INF)
              cout<<"unreachable\n";
        else cout<<dist[t]<<endl;
    }
}
```

4.7 SPFA

```cpp
struct Edge{
    int t;
    long long w;
    Edge(){};
    Edge(int _t, long long _w) : t(_t),
         w(_w) {}
};

bool SPFA(int st) // 平均O(V + E) 最糟O(VE)
{
    vector<int> cnt(n, 0);
    bitset<MXV> inq(0);
    queue<int> q;
    q.push(st);
    dis[st] = 0;
    inq[st] = true;
    while (!q.empty()){
        int cur = q.front();
        q.pop();
        inq[cur] = false;
        for (auto &e : G[cur]){
            if (dis[e.t] <= dis[cur] + e.w)
                continue;
            dis[e.t] = dis[cur] + e.w;
            if (inq[e.t]) continue;
            ++cnt[e.t];
            if (cnt[e.t] > n)
                return false; // negtive cycle
            inq[e.t] = true;
            q.push(e.t);
        }
    }
    return true;
}
```

4.8 SCC Kosaraju

```cpp
//做兩次dfs, O(V + E)
//g 是原圖，g2 是反圖
//s是dfs離開的節點
void dfs1(int u) {
    vis[u] = true;
    for (int v : g[u])
        if (!vis[v]) dfs1(v);
    s.push_back(u);
}

void dfs2(int u) {
    group[u] = sccCnt;
    for (int v : g2[u])
        if (!group[v]) dfs2(v);
}

void kosaraju() {
    sccCnt = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        if (!vis[i]) dfs1(i);
    for (int i = n; i >= 1; --i)
        if (!group[s[i]]) {
            ++sccCnt;
            dfs2(s[i]);
        }
}
```

4.9 SCC Tarjan

```cpp
//單純考SCC，每個SCC中找成本最小的蓋，如果有多個一樣小
//的要數出來，因為題目要方法數
//注意以下程式有縮點，但沒存起來，
//存法就是開一個array -> ID[u] = SCCID
#define maxn 100005
#define MOD 1000000007
long long cost[maxn];
vector<vector<int>> G;
int SCC = 0;
stack<int> sk;
int dfn[maxn];
int low[maxn];
bool inStack[maxn];
int dfsTime = 1;
long long totalCost = 0;
long long ways = 1;
void dfs(int u) {
  dfn[u] = low[u] = dfsTime;
  ++dfsTime;
  sk.push(u);
  inStack[u] = true;
  for (int v: G[u]) {
    if (dfn[v] == 0) {
        dfs(v);
        low[u] = min(low[u], low[v]);
    }
    else if (inStack[v]) {
        //屬於同個SCC且是我的back edge
        low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
  }
  //如果是SCC
  if (dfn[u] == low[u]) {
    long long minCost = 0x3f3f3f3f;
    int currWays = 0;
    ++SCC;
    while (1) {
        int v = sk.top();
        inStack[v] = 0;
        sk.pop();
        if (minCost > cost[v]) {
            minCost = cost[v];
            currWays = 1;
        }
        else if (minCost == cost[v]) {
            ++currWays;
        }
        if (v == u) break;
    }
    totalCost += minCost;
    ways = (ways * currWays) % MOD;
  }
}
```

4.10 BCC 邊

```cpp
//oi-wiki，找無向圖的邊雙連通分量個數，
//並輸出每個邊雙連通分量
//對於任意u、v，刪去哪個邊都不會不連通
//-> 邊雙連通(V + E)
constexpr int N = 5e5 + 5, M = 2e6 + 5;
int n, m, ans;
int tot = 1, hd[N];
struct edge {int to, nt;} e[M << 1];
void add(int u, int v) {e[++tot].to = v,
     e[tot].nt = hd[u], hd[u] = tot;}
void uadd(int u, int v) {add(u,v),add(v,u);}
bool bz[M << 1];
int bcc_cnt, dfn[N], low[N], vis_bcc[N];
vector<vector<int>> bcc;
void tarjan(int x, int in) {
  dfn[x] = low[x] = ++bcc_cnt;
  for (int i = hd[x]; i; i = e[i].nt) {
    int v = e[i].to;
    if (dfn[v] == 0) {
      tarjan(v, i);
      if (dfn[x] < low[v])
        bz[i] = bz[i ^ 1] = true;
      low[x] = min(low[x], low[v]);
    } else if (i != (in ^ 1))
      low[x] = min(low[x], dfn[v]);
  }
}
void dfs(int x, int id) {
  vis_bcc[x] = id, bcc[id - 1].push_back(x);
  for (int i = hd[x]; i; i = e[i].nt) {
    int v = e[i].to;
    if (vis_bcc[v] || bz[i]) continue;
    dfs(v, id);
  }
}
```

4.11 BCC 點

```cpp
//oi-wiki，找無向圖的點雙連通分量個數，
//並輸出每個點雙連通分量
//對於任意u、v，刪去哪個點(只能刪一個)都不會不連通
//-> 點雙連通(V + E)
constexpr int N = 5e5 + 5, M = 2e6 + 5;
int n, m;

struct edge { int to, nt; } e[M << 1];

int hd[N], tot = 1;

void add(int u, int v) { e[++tot] = edge{v,
     hd[u]}, hd[u] = tot; }

void uadd(int u, int v) {add(u,v),add(v,u);}

int ans;
int dfn[N], low[N], bcc_cnt;
int sta[N], top, cnt;
bool cut[N];
vector<int> dcc[N];
int root;

void tarjan(int u) {
  dfn[u]=low[u] = ++bcc_cnt, sta[++top] = u;
  if (u == root && hd[u] == 0) {
    dcc[++cnt].push_back(u);
    return;
  }
  int f = 0;
  for (int i = hd[u]; i; i = e[i].nt) {
    int v = e[i].to;
    if (!dfn[v]) {
      tarjan(v);
      low[u] = min(low[u], low[v]);
      if (low[v] >= dfn[u]) {
        if (++f > 1 || u != root)
          cut[u] = true;
        cnt++;
        do dcc[cnt].push_back(sta[top--]);
        while (sta[top + 1] != v);
        dcc[cnt].push_back(u);
      }
    } else
      low[u] = min(low[u], dfn[v]);
  }
}
```

4.12 ArticulationPoints Tarjan

```cpp
vector<vector<int>> G;
int N, timer;
bool visited[105];
int dfn[105]; // 第一次visit的時間
int low[105];
//最小能回到的父節點
//(不能是自己的parent)的visTime
int res;
//求割點數量
void tarjan(int u, int parent) {
  int child = 0;
  bool isCut = false;
  visited[u] = true;
  dfn[u] = low[u] = ++timer;
  for (int v: G[u]) {
    if (!visited[v]) {
      ++child;
      tarjan(v, u);
      low[u] = min(low[u], low[v]);
      if (parent != -1 && low[v] >= dfn[u])
        isCut = true;
    }
    else if (v != parent)
      low[u] = min(low[u], dfn[v]);
  }
//If u is root of DFS tree->有兩個以上的children
  if (parent == -1 && child >= 2)
    isCut = true;
  if (isCut) ++res;
}
```

4.13 最小樹狀圖

```cpp
const int maxn = 60 + 10;
const int inf = 0x3f3f3f3f;
struct Edge {
  int s, t, cap, cost;
}; // cap 為頻寬 (optional)
int n, m, c;
int inEdge[maxn], idx[maxn], pre[maxn], vis[maxn];
// 對於每個點，選擇對它入度最小的那條邊
// 找環，如果沒有則 return;
// 進行縮環並更新其他點到環的距離。
int dirMST(vector<Edge> edges, int low) {
  int result = 0, root = 0, N = n;
  while(true) {
    memset(inEdge, 0x3f, sizeof(inEdge));
    // 找所有點的 in edge 放進 inEdge
    // optional: low 為最小 cap 限制
    for(const Edge& e : edges) {
      if(e.cap < low) continue;
      if(e.s!=e.t && e.cost<inEdge[e.t]) {
        inEdge[e.t] = e.cost;
        pre[e.t] = e.s;
      }
    }
    for(int i=0; i<N; i++) {
      if(i!=root && inEdge[i]==inf)
        return -1;//除了root 還有點沒有in edge
    }
    int seq = inEdge[root] = 0;
    memset(idx, -1, sizeof(idx));
    memset(vis, -1, sizeof(vis));
    // 找所有的 cycle，一起編號為 seq
    for(int i=0; i<N; i++) {
      result += inEdge[i];
      int cur = i;
      while(vis[cur]!=i && idx[cur]==-1) {
        if(cur == root) break;
        vis[cur] = i;
        cur = pre[cur];
      }
      if(cur!=root && idx[cur]==-1) {
        for(int j=pre[cur]; j!=cur; j=pre[j])
          idx[j] = seq;
        idx[cur] = seq++;
      }
    }
    if(seq == 0) return result; // 沒有 cycle
    for(int i=0; i<N; i++)
      // 沒有被縮點的點
      if(idx[i] == -1) idx[i] = seq++;
    // 縮點並重新編號
    for(Edge& e : edges) {
      if(idx[e.s] != idx[e.t])
        e.cost -= inEdge[e.t];
      e.s = idx[e.s];
      e.t = idx[e.t];
    }
    N = seq;
    root = idx[root];
  }
}
```

4.14 KM

```cpp
#define maxn 505
int W[maxn][maxn];
int Lx[maxn], Ly[maxn];
bool S[maxn], T[maxn];
//L[i] = j -> S_i配給T_j, -1 for 還沒匹配
int L[maxn];
int n;
bool match(int i) {
  S[i] = true;
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    // KM重點
    // Lx + Ly >= selected_edge(x, y)
    // 要想辦法降低Lx + Ly
    // 所以選Lx + Ly == selected_edge(x, y)
    if (Lx[i] + Ly[j] == W[i][j] && !T[j]) {
      T[j] = true;
      if ((L[j] == -1) || match(L[j])) {
        L[j] = i;
        return true;
      }
    }
  }
  return false;
}
//修改二分圖上的交錯路徑上點的權重
//此舉是在通過調整vertex labeling看看
//能不能產生出新的增廣路
//(KM的增廣路要求Lx[i] + Ly[j] == W[i][j])
//在這裡優先從最小的diff調調看，才能保證最大權重匹配
void update() {
  int diff = 0x3f3f3f3f;
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    if (S[i]) {
      for (int j = 0; j < n; ++j) {
        if (!T[j]) diff = min(diff, Lx[i] + Ly[j] - W[i][j]);
      }
    }
  }
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    if (S[i]) Lx[i] -= diff;
    if (T[i]) Ly[i] += diff;
  }
}
void KM() {
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    L[i] = -1;
    Lx[i] = Ly[i] = 0;
    for (int j = 0; j < n; ++j)
      Lx[i] = max(Lx[i], W[i][j]);
  }
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    while(1) {
      memset(S, false, sizeof(S));
      memset(T, false, sizeof(T));
      if (match(i)) break;
      else update(); //去調整vertex labeling以增加增廣路徑
    }
  }
}
int main() {
  while (scanf("%d", &n) != EOF) {
    for (int i = 0; i < n; ++i)
      for (int j = 0; j < n; ++j)
        scanf("%d", &W[i][j]);
    KM();
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
      if (i != 0) printf(" %d", Lx[i]);
      else printf("%d", Lx[i]);
      res += Lx[i];
    }
    puts("");
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
      if (i != 0) printf(" %d", Ly[i]);
      else printf("%d", Ly[i]);
      res += Ly[i];
    }
    puts("");
    printf("%d\n", res);
  }
  return 0;
}
```

4.15 二分圖最大匹配

```cpp
/* 核心: 最大點獨立集 = |V| - |最大匹配數|，用匈牙利演算法找出最大匹配數 */
vector<Student> boys;
vector<Student> girls;
vector<vector<int>> G;
bool used[505];
int p[505];
bool match(int i) {
    for (int j: G[i]) {
        if (!used[j]) {
            used[j] = true;
            if (p[j] == -1 || match(p[j])) {
                p[j] = i;
                return true;
            }
        }
    }
    return false;
}
void maxMatch(int n) {
    memset(p, -1, sizeof(p));
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < boys.size(); ++i) {
        memset(used, false, sizeof(used));
        if (match(i)) ++res;
    }
    cout << n - res << '\n';
}
```

4.16 差分

```cpp
用途：在區間 [l, r] 加上一個數字v。
b[l] += v; (b[0~l] 加上v)
b[r+1] -= v; (b[r+1~n] 減去v (b[r] 仍保留v) )
給的 a[] 是前綴和數列，建構 b[]，
因為 a[i] = b[0] + b[1] + b[2] + … + b[i]，
所以 b[i] = a[i] - a[i-1]。
在 b[l] 加上 v，b[r+1] 減去 v，
最後再從 0 跑到 n 使 b[i] += b[i-1]。
這樣一來，b[] 是一個在某區間加上v的前綴和。
int a[1000], b[1000];
// a: 前綴和數列, b: 差分數列
int main(){
    int n, l, r, v;
    cin >> n;
    for(int i=1; i<=n; i++){
        cin >> a[i];
        b[i] = a[i] - a[i-1]; //建構差分數列
    }
    cin >> l >> r >> v;
    b[l] += v;
    b[r+1] -= v;
    for(int i=1; i<=n; i++){
        b[i] += b[i-1];
        cout << b[i] << ' ';
    }
}
```

4.17 莫隊

```cpp
/*利用prefix前綴XOR和
  如果要求[x, y]的XOR和只要回答prefix[y] ^ prefix[x - 1]即可在O(1)回答
  同時維護cnt[i]代表[x, y]XOR和 == i的個數
  如此我們知道[l, r]可以快速知道[l - 1, r], [l + 1, r], [l, r - 1], [l, r + 1]的答案
  就符合Mo's algorithm的思維O(N * sqrt(n))
  每次轉移為O(1)，具體轉移方法在下面*/
#define maxn 100005
//在此prefix[i]是[1, i]的XOR和
int prefix[maxn];
//log_2(1000000) = 19.931568569324174087221916576937...
//所以開到1 << 20
//cnt[i]代表的是有符合nums[x, y] such that nums[x] ^ nums[x + 1] ^ .. ^ nums[y] == i
//的個數
long long cnt[1 << 20];
//塊大小 -> sqrt(n)
int sqrtQ;
struct Query {
    int l, r, id;
    bool operator < (const Query& other) const {
        if (this->l / sqrtQ != other.l / sqrtQ)
            return this->l < other.l;
        //奇偶排序(優化)
        if (this->l / sqrtQ & 1)
            return this->r < other.r;
        return this->r > other.r;
    }
};
Query querys[maxn];
long long ans[maxn];
long long res = 0;
int k;
void add(int x) {
    res += cnt[k ^ prefix[x]];
    ++cnt[prefix[x]];
}
void sub(int x) {
    --cnt[prefix[x]];
    res -= cnt[k ^ prefix[x]];
}
int main() {
    int n, m;
    scanf("%d %d %d", &n, &m, &k);
    sqrtQ = sqrt(n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        scanf("%d", &prefix[i]);
        prefix[i] ^= prefix[i - 1];
    }
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
        scanf("%d %d", &querys[i].l, &querys[i].r);
        //減1是因為prefix[i]是[1, i]的前綴XOR和，所以題目問[l, r]我們要回答[l - 1, r]的答案
        --querys[i].l;
        querys[i].id = i;
    }
    sort(querys + 1, querys + m + 1);
    int l = 1, r = 0;
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
        while (l < querys[i].l) {
            sub(l);
            ++l;
        }
        while (l > querys[i].l) {
            --l;
            add(l);
        }
        while (r < querys[i].r) {
            ++r;
            add(r);
        }
        while (r > querys[i].r) {
            sub(r);
            --r;
        }
        ans[querys[i].id] = res;
    }
    for (int i = 1; i <= m; ++i){
        printf("%lld\n", ans[i]);
    }
    return 0;
}
```

4.18 MCMF

```cpp
#define maxn 225
#define INF 0x3f3f3f3f
struct Edge {
  int u, v, cap, flow, cost;
};
//node size, edge size, source, target
int n, m, s, t;
vector<vector<int>> G;
vector<Edge> edges;
bool inqueue[maxn];
long long dis[maxn];
int parent[maxn];
long long outFlow[maxn];
void addEdge(int u,int v,int cap,int cost) {
  edges.emplace_back(Edge{u,v,cap,0,cost});
  edges.emplace_back(Edge{v,u,0,0,-cost});
  m = edges.size();
  G[u].emplace_back(m - 2);
  G[v].emplace_back(m - 1);
}
//一邊求最短路的同時一邊MaxFLow
bool SPFA(long long& maxFlow, long long& minCost) {
  // memset(outFlow, 0x3f, sizeof(outFlow));
  memset(dis, 0x3f, sizeof(dis));
  memset(inqueue, false, sizeof(inqueue));
  queue<int> q;
  q.push(s);
  dis[s] = 0;
  inqueue[s] = true;
  outFlow[s] = INF;
  while (!q.empty()) {
    int u = q.front();
    q.pop();
    inqueue[u] = false;
    for (const int edgeIndex: G[u]) {
      const Edge& edge = edges[edgeIndex];
      if ((edge.cap > edge.flow) &&
        (dis[edge.v] > dis[u] + edge.cost)) {
        dis[edge.v] = dis[u] + edge.cost;
        parent[edge.v] = edgeIndex;
        outFlow[edge.v] = min(outFlow[u],
          (long long)(edge.cap - edge.flow));
        if (!inqueue[edge.v]) {
          q.push(edge.v);
          inqueue[edge.v] = true;
        }
      }
    }
  }
  //如果dis[t] > 0代表根本不賺還倒賠
  if (dis[t] > 0) return false;
  maxFlow += outFlow[t];
  minCost += dis[t] * outFlow[t];
  //一路更新回去這次最短路流完後要維護的
  //MaxFlow演算法相關(如反向邊等)
  int curr = t;
  while (curr != s) {
    edges[parent[curr]].flow += outFlow[t];
    edges[parent[curr]^1].flow -= outFlow[t];
    curr = edges[parent[curr]].u;
  }
  return true;
}
long long MCMF() {
  long long maxFlow = 0, minCost = 0;
  while (SPFA(maxFlow, minCost));
  return minCost;
}
int main() {
  int T;
  scanf("%d", &T);
  for (int Case = 1; Case <= T; ++Case){
    //總共幾個月，囤貨成本
    int M, I;
    scanf("%d %d", &M, &I);
    //node size
    n = M + M + 2;
    G.assign(n + 5, vector<int>());
    edges.clear();
    s = 0;
    t = M + M + 1;
    for (int i = 1; i <= M; ++i) {
      int produceCost, produceMax,
        sellPrice, sellMax, inventoryMonth;
      scanf("%d %d %d %d %d", &produceCost,
          &produceMax, &sellPrice,
          &sellMax, &inventoryMonth);
      addEdge(s, i, produceMax, produceCost);
      addEdge(M + i, t, sellMax, -sellPrice);
      for (int j=0; j<=inventoryMonth; ++j) {
        if (i + j <= M)
          addEdge(i, M + i + j, INF, I * j);
      }
    }
    printf("Case %d: %lld\n", Case, -MCMF());
  }
  return 0;
}
```

4.19 Blossom Algorithm

```cpp
const int maxn = 500 + 10;

struct Edge { int s, t; };

int n;
int base[maxn],match[maxn],p[maxn],inq[maxn];
bool vis[maxn], flower[maxn];
vector<Edge> G[maxn];
queue<int> q;

int lca(int a, int b) {
  memset(vis, 0, sizeof(vis));
  while(1) {
    a = base[a];
    vis[a] = true;
    if(match[a] == -1) break;
    a = p[match[a]];
  }
  while(1) {
    b = base[b];
    if(vis[b]) return b;
    b = p[match[b]];
  }
  return -1;
}

void set_path(int x, int father) {
  int tmp;
  while(x != father) {
    tmp = match[x];
    flower[base[x]]=flower[base[tmp]]=1;
    tmp = p[tmp];
    if(base[tmp]!=father) p[tmp] = match[x];
    x = tmp;
  }
}

void blossom(int x, int y) {
  memset(flower, 0, sizeof(flower));
  int father = lca(x, y);
  set_path(x, father);
  set_path(y, father);
  if(base[x] != father) p[x] = y;
  if(base[y] != father) p[y] = x;
  for(int i=1; i<=n; i++) {
    if(!flower[base[i]]) continue;
    base[i] = father;
    if(!inq[i]) {
      q.push(i);
      inq[i] = true;
    }
  }
}

bool bfs(int root) {
  int cur, y, nxt;
  q = queue<int>();
  q.push(root);
  memset(inq, 0, sizeof(inq));
  memset(p, -1, sizeof(p));
  for(int i=1; i<=n; i++) base[i] = i;

  while(!q.empty()) {
    cur = q.front();
    q.pop();
    inq[cur] = false;

    for(auto e : G[cur]) {
      if(base[e.s] == base[e.t]) continue;
      if(match[e.s] == e.t) continue;
      if(e.t == root ||
        (~match[e.t] && ~p[match[e.t]])) {
        blossom(cur, e.t);
      } else if(p[e.t] == -1) {
        p[e.t] = cur;
        if(match[e.t] == -1) {
          cur = e.t;
          while(cur != -1) {
            y = p[cur];
            nxt = match[y];
            match[cur] = y;
            match[y] = cur;
            cur = nxt;
          }
          return true;
        } else {
          q.push(match[e.t]);
          inq[match[e.t]] = true;
        }
      }
    }
  }
  return false;
}

int maxMatch() {
  int res = 0;
  memset(match, -1, sizeof(match));
  for(int i=1; i<=n; i++) {
    if(match[i]==-1 && bfs(i)) res++;
  }
  return res;
}
```

4.20 Dancing Links

```cpp
struct DLX {
    int seq, resSize;
    int col[maxn], row[maxn];
    int U[maxn], D[maxn], R[maxn], L[maxn];
    int rowHead[maxn], colSize[maxn];
    int result[maxn];
    DLX(int r, int c) {
        for(int i=0; i<=c; i++) {
            L[i] = i-1, R[i] = i+1;
            U[i] = D[i] = i;
        }
        L[R[seq=c]=0]=c;
        resSize = -1;
        memset(rowHead, 0, sizeof(rowHead));
        memset(colSize, 0, sizeof(colSize));
    }
    void insert(int r, int c) {
        row[++seq]=r, col[seq]=c, ++colSize[c];
        U[seq]=c, D[seq]=D[c], U[D[c]]=seq, D[c]=seq;
        if(rowHead[r]) {
            L[seq]=rowHead[r], R[seq]=R[rowHead[r]];
            L[R[rowHead[r]]]=seq, R[rowHead[r]]=seq;
        } else {
            rowHead[r] = L[seq] = R[seq] = seq;
        }
    }
    void remove(int c) {
        L[R[c]] = L[c], R[L[c]] = R[c];
        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j]) {
                U[D[j]] = U[j];
                D[U[j]] = D[j];
                --colSize[col[j]];
            }
        }
    }
    void recover(int c) {
        for(int i=U[c]; i!=c; i=U[i]) {
            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j]) {
                U[D[j]] = D[U[j]] = j;
                ++colSize[col[j]];
            }
        }
        L[R[c]] = R[L[c]] = c;
    }
    bool dfs(int idx=0) { // 判斷其中一解版
        if(R[0] == 0) {
            resSize = idx;
            return true;
        }
        int c = R[0];
        for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
            if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
        }
        remove(c);
        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
            result[idx] = row[i];
            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
                remove(col[j]);
            if(dfs(idx+1)) return true;
            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
                recover(col[j]);
        }
        recover(c);
        return false;
    }
    void dfs(int idx=0) { // 判斷最小 dfs depth 版
        if(R[0] == 0) {
            resSize = min(resSize, idx); // 注意init值
            return;
        }
        int c = R[0];
        for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
            if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
        }
        remove(c);
        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
                remove(col[j]);
            dfs(idx+1);
            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
                recover(col[j]);
        }
        recover(c);
    }
};
```

4.21 Astar

```cpp
/*A*求k短路
  f(x) = g(x) + h(x)
  g(x) 是實際cost，h(x) 是估計cost
  在此h(x)用所有點到終點的最短距離，則當用Astar找點
  當該點cnt[u] == k時即得到該點的第k短路
*/
#define maxn 105
struct Edge { int u, v, w; };
struct Item_pqH {
    int u, w;
    bool operator <(const Item_pqH& other) const {
        return this->w > other.w;
    }
};
struct Item_astar {
    int u, g, f;
    bool operator <(const Item_astar& other) const {
        return this->f > other.f;
    }
};
vector<vector<Edge>> G;
//反向圖，用於建h(u)
vector<vector<Edge>> invertG;
int h[maxn];
bool visited[maxn];
int cnt[maxn];
```

```
//用反向圖去求出每一點到終點的最短距離，並以此當作h(u)
void dijkstra(int s, int t) {
    memset(visited, 0, sizeof(visited));
    priority_queue<Item_pqH> pq;
    pq.push({s, 0});
    h[s] = 0;
    while (!pq.empty()) {
        Item_pqH curr = pq.top();
        pq.pop();
        visited[curr.u] = true;
        for (Edge& edge: invertG[curr.u]) {
            if (!visited[edge.v]) {
                if (h[edge.v] > h[curr.u] + edge.w) {
                    h[edge.v] = h[curr.u] + edge.w;
                    pq.push({edge.v, h[edge.v]});
                }
            }
        }
    }
}
int Astar(int s, int t, int k) {
    memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
    priority_queue<Item_astar> pq;
    pq.push({s, 0, h[s]});
    while (!pq.empty()) {
        Item_astar curr = pq.top();
        pq.pop();
        ++cnt[curr.u];
        //終點出現k次，此時即可得k短路
        if (cnt[t] == k)
            return curr.g;
        for (Edge& edge: G[curr.u]) {
            if (cnt[edge.v] < k) {
                pq.push({edge.v, curr.g + edge.w, curr.g + edge.w + h[edge.v]});
            }
        }
    }
    return -1;
}
int main() {
    int n, m;
    while (scanf("%d %d", &n, &m) && (n != 0 && m != 0)) {
        G.assign(n + 5, vector<Edge>());
        invertG.assign(n + 5, vector<Edge>());
        int s, t, k;
        scanf("%d %d %d", &s, &t, &k);
        int u, v, w;
        for (int i = 0; i < m; ++i) {
            scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);
            G[u].emplace_back(Edge{u, v, w});
            invertG[v].emplace_back(Edge{v, u, w});
        }
        memset(h, 0x3f, sizeof(h));
        dijkstra(t, s);
        printf("%d\n", Astar(s, t, k));
    }
    return 0;
}
```

4.22 LCA 倍增法

```
//倍增法預處理O(nlogn)，查詢O(logn)，
//利用lca找樹上任兩點距離
#define maxn 100005
struct Edge { int u, v, w; };
vector<vector<Edge>> G; // tree
int fa[maxn][31]; //fa[u][i] -> u的第2^i個祖先
long long dis[maxn][31];
int dep[maxn];//深度
void dfs(int u, int p) {//預處理fa
  fa[u][0] = p; //因為u的第2^0 = 1的祖先就是p
  dep[u] = dep[p] + 1;
  //第2^i的祖先是(第2^(i - 1)個祖先)的
  //第2^(i - 1)的祖先
  //ex: 第8個祖先是 (第4個祖先)的第4個祖先
  for (int i = 1; i < 31; ++i) {
    fa[u][i] = fa[fa[u][i - 1]][i - 1];
    dis[u][i] = dis[fa[u][i - 1]][i - 1] + dis[u][i - 1];
  }
  //遍歷子節點
  for (Edge& edge: G[u]) {
    if (edge.v == p) continue;
    dis[edge.v][0] = edge.w;
    dfs(edge.v, u);
  }
}
long long lca(int x, int y) {
  //此函數是找lca同時計算x、y的距離 -> dis(x, lca) + dis(lca, y)
  //讓y比x深
  if (dep[x] > dep[y]) swap(x, y);
  int deltaDep = dep[y] - dep[x];
  long long res = 0;
  //讓y與x在同一個深度
  for (int i = 0; deltaDep != 0; ++i, deltaDep >>= 1)
    if (deltaDep & 1)
      res += dis[y][i], y = fa[y][i];
  if (y == x) //x = y -> x、y彼此是彼此的祖先
    return res;
  //往上找，一起跳，但x、y不能重疊
  for (int i = 30; i >= 0 && y != x; --i) {
    if (fa[x][i] != fa[y][i]) {
      res += dis[x][i] + dis[y][i];
      x = fa[x][i];
      y = fa[y][i];
    }
  }
  //最後發現不能跳了，此時x的第2^0 = 1個祖先
  // (或說y的第2^0 = 1的祖先)即為x、y的lca
  res += dis[x][0] + dis[y][0];
  return res;
}
int main() {
  int n, q;
  while (~scanf("%d", &n) && n) {
    int v, w;
    G.assign(n + 5, vector<Edge>());
    for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
      scanf("%d %d", &v, &w);
      G[i + 1].push_back({i + 1, v + 1, w});
      G[v + 1].push_back({v + 1, i + 1, w});
    }
    dfs(1, 0);
    scanf("%d", &q);
    int u;
    while (q--) {
      scanf("%d %d", &u, &v);
      printf("%lld%c", lca(u + 1, v + 1), (q) ? ' ' : '\n');
    }
  }
}
```

4.23 LCA 樹壓平 RMQ

```
//樹壓平求LCA RMQ(sparse table O(nlogn)建立，O(1)查詢)，求任意兩點距離，
//如果用笛卡兒樹可以壓到O(n)建立，O(1)查詢
//理論上可以過，但遇到直鏈的case dfs深度會stack overflow
#define maxn 100005
struct Edge {
  int u, v, w;
};
int dep[maxn], pos[maxn];
long long dis[maxn];
int st[maxn * 2][32]; //sparse table
int realLCA[maxn * 2][32]; //最小深度對應的節點，及真正的LCA
int Log[maxn]; //取代std::log2
int tp; // timestamp
vector<vector<Edge>> G; // tree
void calLog() {
  Log[1] = 0;
  Log[2] = 1;
  for (int i = 3; i < maxn; ++i)
    Log[i] = Log[i / 2] + 1;
}
void buildST() {
  for (int j = 0; Log[tp]; ++j) {
    for (int i = 0; i + (1 << j) - 1 < tp; ++i) {
      if (st[i - 1][j] < st[i - 1][j + (1 << i - 1)]) {
        st[i][j] = st[i - 1][j];
        realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j];
      }
      else {
        st[i][j] = st[i - 1][j + (1 << i - 1)];
        realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j + (1 << i - 1)];
      }
    }
  }
} // O(nlogn)
int query(int l, int r) {// [l, r] min depth即為lca的深度
  int k = Log[r - l + 1];
  if (st[l][k] < st[r - (1 << k) + 1][k])
    return realLCA[l][k];
  else
    return realLCA[r - (1 << k) + 1][k];
}
void dfs(int u, int p) {//euler tour
  pos[u] = tp;
  st[tp][0] = dep[u];
  realLCA[tp][0] = dep[u];
  ++tp;
  for (int i = 0; i < G[u].size(); ++i) {
    Edge& edge = G[u][i];
    if (edge.v == p) continue;
    dep[edge.v] = dep[u] + 1;
    dis[edge.v] = dis[edge.u] + edge.w;
    dfs(edge.v, u);
    st[tp++][0] = dep[u];
  }
}
long long getDis(int u, int v) {
  if (pos[u] > pos[v])
    swap(u, v);
  int lca = query(pos[u], pos[v]);
  return dis[u] + dis[v] - 2 * dis[query(pos[u], pos[v])];
}
int main() {
  int n, q;
    calLog();
  while (~scanf("%d", &n) && n) {
    int v, w;
    G.assign(n + 5, vector<Edge>());
```

```cpp
  tp = 0;
    for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
    scanf("%d %d", &v, &w);
    G[i].push_back({i, v, w});
    G[v].push_back({v, i, w});
  }
    dfs(0, -1);
    buildST();
    scanf("%d", &q);
    int u;
    while (q--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%lld%c", getDis(u, v),
             (q) ? ' ' : '\n');
    }
  }
  return 0;
}
```

4.24 LCA 樹鍊剖分

```cpp
#define maxn 5005
//LCA，用來練習樹鍊剖分
//題意： 給定樹，找任兩點的中點，
//若中點不存在(路徑為even)，就是中間的兩個點
int dfn[maxn];
int parent[maxn];
int depth[maxn];
int subtreeSize[maxn];
int top[maxn]; //樹鍊的頂點
int dfnToNode[maxn]; //將dfn轉成node編碼
int hson[maxn]; //重兒子
int dfsTime = 1;
vector<vector<int>> G; //tree
//處理parent、depth、subtreeSize、dfnToNode
void dfs1(int u, int p) {
  parent[u] = p;
  hson[u] = -1;
  subtreeSize[u] = 1;
  for (int v: G[u]) {
    if (v != p) {
      depth[v] = depth[u] + 1;
      dfs1(v, u);
      subtreeSize[u] += subtreeSize[v];
      if (hson[u] == -1 ||
        subtreeSize[hson[u]]<subtreeSize[v]){
        hson[u] = v;
      }
    }
  }
}
//實際剖分 <- 參數t是top的意思
//t初始應為root本身
void dfs2(int u, int t) {
  top[u] = t;
  dfn[u] = dfsTime;
  dfnToNode[dfsTime] = u;
  ++dfsTime;
  //葉子點 -> 沒有重兒子
  if (hson[u] == -1) return;
  //優先對重兒子dfs，才能保證同一重鍊dfn連續
  dfs2(hson[u], t);
  for (int v: G[u]) {
    if (v != parent[u] && v != hson[u])
      dfs2(v, v);
  }
}
//不斷跳鍊，當跳到同一條鍊時，深度小的即為LCA
//跳鍊時優先鍊頂深度大的跳
int LCA(int u, int v) {
  while (top[u] != top[v]) {
    if (depth[top[u]] > depth[top[v]])
      u = parent[top[u]];
    else
      v = parent[top[v]];
  }
  return (depth[u] > depth[v]) ? v : u;
}
int getK_parent(int u, int k) {
  while (k-- && (u != -1)) u = parent[u];
  return u;
}
int main() {
  int n;
  while (scanf("%d", &n) && n) {
    dfsTime = 1;
    G.assign(n + 5, vector<int>());
    int u, v;
    for (int i = 1; i < n; ++i) {
      scanf("%d %d", &u, &v);
      G[u].emplace_back(v);
      G[v].emplace_back(u);
    }
    dfs1(1, -1);
    dfs2(1, 1);
    int q;
    scanf("%d", &q);
    for (int i = 0; i < q; ++i) {
      scanf("%d %d", &u, &v);
      //先得到LCA
      int lca = LCA(u, v);
      //計算路徑長(經過的邊)
      int dis = depth[u] + depth[v] - 2 *
           depth[lca];
      //讓v比u深或等於
      if (depth[u] > depth[v]) swap(u, v);
      if (u == v) {
        printf("The fleas meet at %d.\n", u);
      }
      else if (dis % 2 == 0) {
        //路徑長是even -> 有中點
        printf("The fleas meet at %d.\n",
             getK_parent(v, dis / 2));
      }
      else {
        //路徑長是odd -> 沒有中點
        if (depth[u] == depth[v]) {
          int x = getK_parent(u, dis / 2);
          int y = getK_parent(v, dis / 2);
          if (x > y) swap(x, y);
          printf("The fleas jump forever
               between %d and %d.\n", x, y);
        }
        else {
          //技巧： 讓深的點v往上dis / 2步 = y，
          //這個點的parent設為x
          //此時的x、y就是答案要的中點兩點
          //主要是往下不好找，所以改用深的點用parent往上
          int y = getK_parent(v, dis / 2);
          int x = getK_parent(y, 1);
          if (x > y) swap(x, y);
          printf("The fleas jump forever
               between %d and %d.\n", x, y);
        }
      }
    }
  }
}
```

5 DataStructure

5.1 BIT

```cpp
template <class T> class BIT {
private:
  int size;
  vector<T> bit;
  vector<T> arr;

public:
  BIT(int sz=0):
    size(sz), bit(sz+1), arr(sz) {}

  /** Sets the value at index idx to val. */
  void set(int idx, T val) {
    add(idx, val - arr[idx]);
  }

  /** Adds val to the element at index idx.
       */
  void add(int idx, T val) {
    arr[idx] += val;
    for (++idx; idx<=size; idx+=(idx & -idx))
      bit[idx] += val;
  }

  /** The sum of all values in [0, idx]. */
  T pre_sum(int idx) {
    T total = 0;
    for (++idx; idx>0; idx-=(idx & -idx))
      total += bit[idx];
    return total;
  }
};
```

5.2 帶權併查集

val[x] 為 x 到 p[x] 的距離 (隨題目變化更改)

merge(u, v, w)

$u \xrightarrow{w} v$

$pu = pv$ 時，$val[v] - val[u] \neq w$ 代表有誤

若 $[l, r]$ 的總和為 w，則應呼叫 merge(l-1, r, w)

```cpp
const int maxn = 2e5 + 10;

int p[maxn], val[maxn];

int findP(int x) {
    if(p[x] == -1) return x;
    int par = findP(p[x]);
    val[x] += val[p[x]]; //依題目更新val[x]
    return p[x] = par;
}

void merge(int u, int v, int w) {
    int pu = findP(u);
    int pv = findP(v);
    if(pu == pv) {
        // 理論上 val[v]-val[u] == w
        // 依題目判斷 error 的條件
        return;
    }
    val[pv] = val[u] - val[v] + w;
    p[pv] = pu;
}
```

5.3 Trie

```cpp
const int maxc = 26;      // 單字字符數
const char minc = 'a';    // 首個 ASCII
struct TrieNode {
  int cnt;
  TrieNode* child[maxc];
  TrieNode() {
    cnt = 0;
    for(auto& node : child)
      node = nullptr;
  }
};
struct Trie {
  TrieNode* root;
  Trie() { root = new TrieNode(); }
  void insert(string word) {
    TrieNode* cur = root;
    for(auto& ch : word) {
      int c = ch - minc;
      if(!cur->child[c])
        cur->child[c] = new TrieNode();
      cur = cur->child[c];
    }
    cur->cnt++;
  }
  void remove(string word) {
    TrieNode* cur = root;
    for(auto& ch : word) {
      int c = ch - minc;
      if(!cur->child[c]) return;
      cur = cur->child[c];
    }
    cur->cnt--;
  }
  // 字典裡有出現 word
  bool search(string word, bool prefix=0) {
    TrieNode* cur = root;
    for(auto& ch : word) {
      int c = ch - minc;
      if(!(cur=cur->child[c])) return false;
    }
    return cur->cnt || prefix;
  }
  // 字典裡有 word 的前綴為 prefix
  bool startsWith(string prefix) {
    return search(prefix, true);
  }
};
```

5.4 AC Trie

```cpp
const int maxn = 1e4 + 10; // 單字字數
const int maxl = 50 + 10; // 單字字長
const int maxc = 128;     // 單字字符數
const char minc = ' ';    // 首個 ASCII

int trie[maxn*maxl][maxc]; // 原字典樹
int val[maxn*maxl];       // 結尾(單字編號)
int cnt[maxn*maxl];       // 結尾(重複個數)
int fail[maxn*maxl];      // failure link
bool vis[maxn*maxl];      // 同單字不重複

struct ACTrie {
  int seq, root;
  ACTrie() {
    seq = 0;
    root = newNode();
  }
  int newNode() {
    for(int i=0; i<maxc; trie[seq][i++]=0);
    val[seq] = cnt[seq] = fail[seq] = 0;
    return seq++;
  }
  void insert(char* s, int wordId=0) {
    int p = root;
    for(; *s; s++) {
      int c = *s - minc;
      if(!trie[p][c]) trie[p][c] = newNode();
      p = trie[p][c];
    }
    val[p] = wordId;
    cnt[p]++;
  }
  void build() {
    queue<int> q({root});
    while(!q.empty()) {
      int p = q.front();
      q.pop();
      for(int i=0; i<maxc; i++) {
        int& t = trie[p][i];
        if(t) {
          fail[t] = p?trie[fail[p]][i]:root;
          q.push(t);
        } else {
          t = trie[fail[p]][i];
        }
      }
    }
  }
  // 要存 wordId 才要 vec
  // 同單字重複match要把所有vis取消掉
  int match(char* s, vector<int>& vec) {
    int res = 0;
    memset(vis, 0, sizeof(vis));
    for(int p=root; *s; s++) {
      p = trie[p][*s-minc];
      for(int k=p; k && !vis[k]; k=fail[k]) {
        vis[k] = true;
        res += cnt[k];
        if(cnt[k]) vec.push_back(val[k]);
      }
    }
    return res;    // 匹配到的單字量
  }
};

ACTrie ac;      // 建構，初始化
ac.insert(s);  // 加字典單字
// 加完字典後
ac.build();    // !!! 建 failure link !!!
ac.match(s);   // 多模式匹配(傳入vec可以存編號)
```

5.5 線段樹 1D

```cpp
#define MAXN 1000
int data[MAXN]; //原數據
int st[4 * MAXN]; //線段樹
int tag[4 * MAXN]; //懶標

inline int pull(int l, int r) {
// 隨題目改變sum、max、min
// l、r是左右樹的index
    return st[l] + st[r];
}
void build(int l, int r, int i) {
// 在[l, r]區間建樹，目前根的index為i
    if (l == r) {
        st[i] = data[l];
        return;
    }
    int mid = l + ((r - l) >> 1);
    build(l, mid, i * 2);
    build(mid + 1, r, i * 2 + 1);
    st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
}
int qry(int ql, int qr, int l, int r, int i){
// [ql,qr]是查詢區間, [l,r]是當前節點包含的區間
    if (ql <= l && r <= qr)
        return st[i];
    int mid = l + ((r - l) >> 1);
    if (tag[i]) {
        //如果當前懶標有值則更新左右節點
        st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
        st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
        tag[i * 2] += tag[i];
        tag[i*2+1] += tag[i];
        tag[i] = 0;
    }
    int sum = 0;
    if (ql <= mid)
        sum+=query(ql, qr, l, mid, i * 2);
    if (qr > mid)
        sum+=query(ql, qr, mid+1, r, i*2+1);
    return sum;
}
void update(
    int ql,int qr,int l,int r,int i,int c) {
// [ql,qr]是查詢區間, [l,r]是當前節點包含的區間
// c是變化量
    if (ql <= l && r <= qr) {
        st[i] += (r - l + 1) * c;
            //求和,此需乘上區間長度
        tag[i] += c;
        return;
    }
    int mid = l + ((r - l) >> 1);
    if (tag[i] && l != r) {
        //如果當前懶標有值則更新左右節點
        st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
        st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
        tag[i * 2] += tag[i];//下傳懶標至左節點
        tag[i*2+1] += tag[i];//下傳懶標至右節點
        tag[i] = 0;
    }
    if (ql <= mid)
        update(ql, qr, l, mid, i * 2, c);
    if (qr > mid)
        update(ql, qr, mid+1, r, i*2+1, c);
    st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
}
//如果是直接改值而不是加值，query與update中的tag與st的
//改值從+=改成=
```

5.6 線段樹 2D

```cpp
#define maxn 2005 //500 * 4 + 5 //純2D
     segment tree 區間查詢單點修改最大最小值
int maxST[maxn][maxn], minST[maxn][maxn];
int N;
void modifyY(int index, int l, int r,int val,
  int yPos, int xIndex, bool xIsLeaf) {
  if (l == r) {
    if (xIsLeaf) {
      maxST[xIndex][index] =
           minST[xIndex][index] = val;
      return;
    }
    maxST[xIndex][index] =
         max(maxST[xIndex*2][index],
         maxST[xIndex*2 + 1][index]);
    minST[xIndex][index] =
         min(minST[xIndex*2][index],
         minST[xIndex*2 + 1][index]);
  }
  else {
    int mid = (l + r) / 2;
    if (yPos <= mid)
      modifyY(index*2, l, mid, val, yPos,
           xIndex, xIsLeaf);
    else
      modifyY(index*2 + 1, mid + 1, r, val,
           yPos, xIndex, xIsLeaf);
    maxST[xIndex][index] =
         max(maxST[xIndex][index*2],
         maxST[xIndex][index*2 + 1]);
    minST[xIndex][index] =
         min(minST[xIndex][index*2],
         minST[xIndex][index*2 + 1]);
  }
}
void modifyX(int index, int l, int r, int
     val, int xPos, int yPos) {
  if (l == r) {
    modifyY(1, 1, N, val, yPos, index, true);
  }
  else {
    int mid = (l + r) / 2;
    if (xPos <= mid)
      modifyX(index*2,l,mid,val,xPos,yPos);
    else
      modifyX(index*2 + 1, mid + 1, r, val,
           xPos, yPos);
    modifyY(1, 1, N, val, yPos, index,false);
  }
}
void queryY(int index, int l, int r,int yql,
  int yqr, int xIndex, int& vmax, int &vmin){
  if (yql <= l && r <= yqr) {
    vmax = max(vmax, maxST[xIndex][index]);
    vmin = min(vmin, minST[xIndex][index]);
  }
  else {
    int mid = (l + r) / 2;
    if (yql <= mid)
      queryY(index*2, l, mid, yql, yqr,
           xIndex, vmax, vmin);
    if (mid < yqr)
      queryY(index*2 + 1, mid + 1, r, yql,
           yqr, xIndex, vmax, vmin);
  }
}
void queryX(int index, int l, int r, int
     xql, int xqr, int yql, int yqr, int&
     vmax, int& vmin) {
  if (xql <= l && r <= xqr) {
    queryY(1,1,N,yql,yqr,index,vmax,vmin);
  }
  else {
    int mid = (l + r) / 2;
    if (xql <= mid)
      queryX(index*2, l, mid, xql, xqr, yql,
           yqr, vmax, vmin);
    if (mid < xqr)
      queryX(index*2 + 1, mid + 1, r, xql,
           xqr, yql, yqr, vmax, vmin);
  }
}
int main() {
  while (scanf("%d", &N) != EOF) {
    int val;
    for (int i = 1; i <= N; ++i) {
      for (int j = 1; j <= N; ++j) {
        scanf("%d", &val);
        modifyX(1, 1, N, val, i, j);
      }
    }
    int q;
    int vmax, vmin;
    int xql, xqr, yql, yqr;
    char op;
    scanf("%d", &q);
    while (q--) {
      getchar(); //for \n
      scanf("%c", &op);
      if (op == 'q') {
        scanf("%d %d %d %d", &xql, &yql,
             &xqr, &yqr);
        vmax = -0x3f3f3f3f;
        vmin = 0x3f3f3f3f;
        queryX(1, 1, N, xql, xqr, yql, yqr,
             vmax, vmin);
        printf("%d %d\n", vmax, vmin);
      }
      else {
        scanf("%d %d %d", &xql, &yql, &val);
        modifyX(1, 1, N, val, xql, yql);
      }
    }
  }
  return 0;
}
```

5.7 權值線段樹

```cpp
//權值線段樹 + 離散化 解決區間第k小問題
#define maxn 30005
int nums[maxn];
int getArr[maxn];
int id[maxn];
int st[maxn << 2];
void update(int index, int l, int r, int qx){
  if (l == r) {
    ++st[index];
    return;
  }
  int mid = (l + r) / 2;
  if (qx <= mid)
    update(index*2, l, mid, qx);
  else
    update(index*2 + 1, mid + 1, r, qx);
  st[index] = st[index*2] + st[index*2 + 1];
}
//找區間第k個小的
int query(int index, int l, int r, int k) {
  if (l == r) return id[l];
  int mid = (l + r) / 2;
  //k比左子樹小
  if (k <= st[index*2])
    return query(index*2, l, mid, k);
  else
    return query(index*2 + 1, mid + 1, r, k
        - st[index*2]);
}
int main() {
  int t;
  cin >> t;
  bool first = true;
  while (t--) {
    if (first) first = false;
    else puts("");
    memset(st, 0, sizeof(st));
    int m, n;
    cin >> m >> n;
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
      cin >> nums[i];
      id[i] = nums[i];
    }
    for (int i = 0; i < n; ++i)
      cin >> getArr[i];
    //離散化
    //防止 m == 0
    if (m) sort(id + 1, id + m + 1);
    int stSize = unique(id + 1, id + m + 1)
        - (id + 1);
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
      nums[i] = lower_bound(id + 1, id +
          stSize + 1, nums[i]) - id;
    }
    int addCount = 0, getCount = 0;
    int k = 1;
    while (getCount < n) {
      if (getArr[getCount] == addCount) {
        printf("%d\n", query(1,1,stSize,k));
        ++k;
        ++getCount;
      }
      else {
        update(1,1,stSize,nums[addCount+1]);
        ++addCount;
      }
    }
  }
}
```

5.8 ChthollyTree

```cpp
//重點：要求輸入資料隨機，否則可能被卡時間
struct Node {
    long long l, r;
    mutable long long val;
    Node(long long l, long long r, long long
        val)
        : l(l), r(r), val(val){}
    bool operator<(const Node& other) const {
        return this->l < other.l;
    }
};
set<Node> chthollyTree;
//將[l, r] 拆成 [l, pos - 1], [pos, r]
set<Node>::iterator split(long long pos) {
    //找第一個左端點大於等於pos的區間
    set<Node>::iterator it =
        chthollyTree.lower_bound(Node(pos,
        0, 0));
    //運氣很好直接找到左端點是pos的區間
    if (it != chthollyTree.end() && it->l ==
        pos)
        return it;
    //到這邊代表找到的是第一個左端點大於pos的區間
    //it - 1即可找到左端點等於pos的區間
    //(不會是別的，因為沒有重疊的區間)
    --it;
    long long l = it->l, r = it->r;
    long long val = it->val;
    chthollyTree.erase(it);
    chthollyTree.insert(Node(l, pos-1, val));
    //回傳左端點是pos的區間iterator
    return chthollyTree.insert(Node(pos, r,
        val)).first;
}
//區間賦值
void assign(long long l, long long r, long
    long val) {
    //<注意>
    //end與begin的順序不能調換，因為end的split可能會改
    //因為end可以在原本begin的區間中
    set<Node>::iterator end = split(r + 1),
        begin = split(l);
    //begin到end全部刪掉
    chthollyTree.erase(begin, end);
    //填回去[l, r]的區間
    chthollyTree.insert(Node(l, r, val));
}
//區間加值(直接一個個區間去加)
void add(long long l, long long r, long long
    val) {
    set<Node>::iterator end = split(r + 1);
    set<Node>::iterator begin = split(l);
    for (set<Node>::iterator it = begin; it
        != end; ++it)
        it->val += val;
}
//查詢區間第k小 -> 直接把每個區間丟去vector排序
long long getKthSmallest(long long l, long
    long r, long long k) {
    set<Node>::iterator end = split(r + 1);
    set<Node>::iterator begin = split(l);
    //pair -> first: val, second: 區間長度
    vector<pair<long long, long long>> vec;
    for (set<Node>::iterator it = begin; it
        != end; ++it) {
        vec.push_back({it->val, it->r - it->l
            + 1});
    }
    sort(vec.begin(), vec.end());
    for (const pair<long long, long long>&
        p: vec) {
        k -= p.second;
        if (k <= 0) return p.first;
    }
    //不應該跑到這
    return -1;
}
//快速冪
long long qpow(long long x, long long n,
    long long mod) {
    long long res = 1;
    x %= mod;
    while (n) {
        if (n & 1) res = res * x % mod;
        n >>= 1;
        x = x * x % mod;
    }
    return res;
}
//區間n次方和
long long sumOfPow(long long l, long long r,
    long long n, long long mod) {
    long long total = 0;
    set<Node>::iterator end = split(r + 1);
    set<Node>::iterator begin = split(l);
    for (set<Node>::iterator it = begin; it
        != end; ++it) {
        total = (total+qpow(it->val,n,mod) *
            (it->r-it->l+1))%mod;
    }
    return total;
}
```

5.9 單調隊列

```cpp
//單調隊列
"如果一個選手比你小還比你強，你就可以退役了。"
example:
給出一個長度為 n 的數組，
輸出每 k 個連續的數中的最大值和最小值。
#define maxn 1000100
int q[maxn], a[maxn];
int n, k;
//得到這個隊列裡的最小值，直接找到最後的就行了
void getmin() {
  int head=0, tail=0;
  for(int i=1;i<k;i++) {
    while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i])tail--;
    q[++tail]=i;
  }
  for(int i=k; i<=n;i++) {
    while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i])tail--;
    q[++tail]=i;
    while(q[head]<=i-k) head++;
    cout<<a[q[head]]<<" ";
  }
  cout<<endl;
}
// 和上面同理
void getmax() {
  int head=0,tail=0;
  for(int i=1;i<k;i++) {
    while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
    q[++tail]=i;
  }
  for(int i=k;i<=n;i++) {
    while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
    q[++tail]=i;
    while(q[head]<=i-k) head++;
    cout<<a[q[head]]<<" ";
  }
  cout<<endl;
}
```

6 Geometry

6.1 公式

1. Circle and Line

點 $P(x_0, y_0)$

到直線 $L : ax + by + c = 0$ 的距離

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

兩平行直線 $L_1 : ax + by + c_1 = 0$

與 $L_2 : ax + by + c_2 = 0$ 的距離

$$d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Triangle

設三角形頂點為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

點 A, B, C 的對邊長分別為 a, b, c

三角形面積為 Δ

重心為 (G_x, G_y)，內心為 (I_x, I_y)，

外心為 (O_x, O_y) 和垂心為 (H_x, H_y)

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G_x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$G_y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$I_x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}$$

$$I_y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}$$

$$O_x = \frac{1}{4\Delta}\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$O_y = \frac{1}{4\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$H_x = -\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} x_2x_3 + y_2y_3 & y_1 & 1 \\ x_1x_3 + y_1y_3 & y_2 & 1 \\ x_1x_2 + y_1y_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$H_y = -\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3 + y_2y_3 & 1 \\ x_2 & x_1x_3 + y_1y_3 & 1 \\ x_3 & x_1x_2 + y_1y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

任意三角形，重心、外心、垂心共線

$$G_x = \frac{2}{3}O_x + \frac{1}{3}H_x$$

$$G_y = \frac{2}{3}O_y + \frac{1}{3}H_y$$

3. Quadrilateral

任意凸四邊形 $ABCD$ 的四邊長分別為 a, b, c, d

且已知 $\angle A + \angle C$，則四邊形 $ABCD$ 的面積為

$$\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - \Delta}$$

where

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}$$

$$\Delta = abcd \cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)$$

特例：若 $ABCD$ 為圓內接四邊形，則 $\Delta = 0$

若只知道其中一角，則可用餘弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$$

求出對角線長，再用海龍計算兩個三角形面積即可。

6.2 Template

Predefined Variables

```cpp
using DBL = double;
using Tp = DBL; // 存點的型態

const DBL pi = acos(-1);
const DBL eps = 1e-9;
const Tp inf = 1e30;
const int maxn = 5e4 + 10;
```

Vector、Point

```cpp
struct Vector {
  Tp x, y;
  Vector(Tp x=0, Tp y=0): x(x), y(y) {}
  DBL length();
};

using Point = Vector;
using Polygon = vector<Point>;

Vector operator+(Vector a, Vector b)
{return Vector(a.x+b.x, a.y+b.y);}
Vector operator-(Vector a, Vector b)
{return Vector(a.x-b.x, a.y-b.y);}
Vector operator*(Vector a, DBL b)
{return Vector(a.x*b, a.y*b);}
Vector operator/(Vector a, DBL b)
{return Vector(a.x/b, a.y/b);}
Tp dot(Vector a, Vector b)
{return a.x*b.x + a.y*b.y;}
Tp cross(Vector a, Vector b)
{return a.x*b.y - a.y*b.x;}
DBL Vector::length()
{return sqrt(dot(*this, *this));}
Vector unit_normal_vector(Vector v) {
  DBL len = v.length();
  return Vector(-v.y/len, v.x/len);
}
```

Line

```cpp
struct Line {
  Point p;
  Vector v;
  DBL ang;
  Line(Point _p={}, Vector _v={}) {
    p = _p;
    v = _v;
    ang = atan2(v.y, v.x);
  }
  bool operator<(const Line& l) const
  {return ang < l.ang;}
};
```

Segment

```cpp
struct Segment {
  Point s, e;
  Vector v;
  Segment(): s(0, 0), e(0, 0), v(0, 0) {}
  Segment(Point s, Point e): s(s), e(e) {
    v = e - s;
  }
  DBL length() { return v.length(); }
};
```

Circle

```cpp
struct Circle {
  Point o;
  DBL r;
  Circle(): o({0, 0}), r(0) {}
  Circle(Point o, DBL r=0): o(o), r(r) {}
  Circle(Point a, Point b) { // ab 直徑
    o = (a + b) / 2;
    r = dis(o, a);
  }
  Circle(Point a, Point b, Point c) {
    Vector u = b-a, v = c-a;
    DBL c1=dot(u, a+b)/2, c2=dot(v, a+c)/2;
    DBL dx=c1*v.y-c2*u.y, dy=u.x*c2-v.x*c1;
    o = Point(dx, dy) / cross(u, v);
    r = dis(o, a);
  }
  bool cover(Point p) {return dis(o,p) <= r;}
};
```

6.3 旋轉卡尺

```cpp
// 回傳凸包內最遠兩點的距離^2
int longest_distance(Polygon& p) {
  auto test = [&](Line l, Point a, Point b) {
   return cross(l.v,a-l.p)<=cross(l.v,b-l.p);
  };
  if(p.size() <= 2) {
    return cross(p[0]-p[1], p[0]-p[1]);
  }
  int mx = 0, n = p.size();
  for(int i=0, j=1; i<n; i++) {
    Line l(p[i], p[(i+1)%n] - p[i]);
    for(;test(l,p[j],p[(j+1)%n]);j=(j+1)%n);
    mx = max({
      mx,
      dot(p[(i+1)%n]-p[j], p[(i+1)%n]-p[j]),
      dot(p[i]-p[j], p[i]-p[j])
    });
  }
  return mx;
}
```

6.4 半平面相交

Template

```cpp
using DBL = double;
using Tp = DBL;              // 存點的型態
const int maxn = 5e4 + 10;
const DBL eps = 1e-9;
struct Vector;
using Point = Vector;
using Polygon = vector<Point>;
Vector operator+(Vector, Vector);
Vector operator-(Vector, Vector);
Vector operator*(Vector, DBL);
Tp cross(Vector, Vector);
struct Line;
Point intersection(Line, Line);
int dcmp(DBL, DBL);          // 不見得會用到
```

Halfplane Intersection

```
// Return: 能形成半平面交的凸包邊界點
Polygon halfplaneIntersect(vector<Line>&nar){
  sort(nar.begin(), nar.end());
  // p 是否在 l 的左半平面
  auto lft = [&](Point p, Line l) {
    return dcmp(cross(l.v, p-l.p)) > 0;
  };

  int ql = 0, qr = 0;
  Line L[maxn] = {nar[0]};
  Point P[maxn];

  for(int i=1; i<nar.size(); i++) {
    for(; ql<qr&&!lft(P[qr-1],nar[i]); qr--);
    for(; ql<qr&&!lft(P[ql],nar[i]); ql++);
    L[++qr] = nar[i];
    if(dcmp(cross(L[qr].v,L[qr-1].v))==0) {
      if(lft(nar[i].p,L[--qr])) L[qr]=nar[i];
    }
    if(ql < qr)
      P[qr-1] = intersection(L[qr-1], L[qr]);
  }
  for(; ql<qr && !lft(P[qr-1], L[ql]); qr--);
  if(qr-ql <= 1) return {};
  P[qr] = intersection(L[qr], L[ql]);
  return Polygon(P+ql, P+qr+1);
}
```

6.5 Polygon

```
// 判斷點 (point) 是否在凸包 (p) 內
bool pointInConvex(Polygon& p, Point point) {
  // 根據 Tp 型態來寫，沒浮點數不用 dblcmp
  auto dblcmp=[](DBL v){return (v>0)-(v<0);};
  // 不包含線上，改 '>=' 為 '>'
  auto test = [&](Point& p0, Point& p1) {
    return dblcmp(cross(p1-p0, point-p0))>=0;
  };
  p.push_back(p[0]);
  for(int i=1; i<p.size(); i++) {
    if(!test(p[i-1], p[i])) {
      p.pop_back();
      return false;
    }
  }
  p.pop_back();
  return true;
}

// 計算簡單多邊形的面積
// ! p 為排序過的點 !
DBL polygonArea(Polygon& p) {
  DBL sum = 0;
  for(int i=0, n=p.size(); i<n; i++)
    sum += cross(p[i], p[(i+1)%n]);
  return abs(sum) / 2.0;
}
```

6.6 凸包

- Tp 為 Point 裡 x 和 y 的型態
- struct Point 需要加入並另外計算的 variables:
  1. ang, 該點與基準點的 atan2 值
  2. d2, 該點與基準點的 (距離)^2
- 注意計算 d2 的型態範圍限制

<u>Template</u>

```
using DBL = double;
using Tp = long long;             // 存點的型態
const DBL eps = 1e-9;
const Tp inf = 1e9;               // 座標極大值
struct Vector;
using Point = Vector;
using Polygon = vector<Point>;
Vector operator-(Vector, Vector);
Tp cross(Vector, Vector);
int dcmp(DBL, DBL);
```

<u>Convex Hull</u>

```
Polygon convex_hull(Point* p, int n) {
  auto rmv = [](Point a, Point b, Point c) {
    return cross(b-a, c-b) <= 0; // 非浮點數
    return dcmp(cross(b-a, c-b)) <= 0;
  };

  // 選最下裡最左的當基準點，可在輸入時計算
  Tp lx = inf, ly = inf;
  for(int i=0; i<n; i++) {
    if(p[i].y<ly || (p[i].y==ly&&p[i].x<lx)){
      lx = p[i].x, ly = p[i].y;
    }
  }

  for(int i=0; i<n; i++) {
    p[i].ang=atan2(p[i].y-ly,p[i].x-lx);
    p[i].d2 = (p[i].x-lx)*(p[i].x-lx) +
              (p[i].y-ly)*(p[i].y-ly);
  }
  sort(p, p+n, [&](Point& a, Point& b) {
    if(dcmp(a.ang, b.ang))
      return a.ang < b.ang;
    return a.d2 < b.d2;
  });

  int m = 1;    // stack size
  Point st[n] = {p[n] = p[0]};
  for(int i=1; i<=n; i++) {
    for(;m>1&&rmv(st[m-2],st[m-1],p[i]);m--);
    st[m++] = p[i];
  }
  return Polygon(st, st+m-1);
}
```

6.7 最小圓覆蓋

```
vector<Point> p(3);   // 在圓上的點
Circle MEC(vector<Point>& v, int n, int d=0){
  Circle mec;
  if(d == 1) mec = Circle(p[0]);
  if(d == 2) mec = Circle(p[0], p[1]);
  if(d == 3) return Circle(p[0], p[1], p[2]);
  for(int i=0; i<n; i++) {
    if(mec.cover(v[i])) continue;
    p[d] = v[i];
    mec = MEC(v, i, d+1);
  }
  return mec;
}
```

6.8 交點、距離

```
int dcmp(DBL a, DBL b=0.0) {
  if(abs(a-b) < eps) return 0;
  return a<b ? -1 : 1;
}
bool hasIntersection(Point p, Segment s) {
  if(dcmp(cross(s.s-p, s.e-p))) return false;
  return dcmp(dot(s.s-p, s.e-p)) <= 0;
}
bool hasIntersection(Point p, Line l)
{return dcmp(cross(p-l.p, l.v)) == 0;}
bool hasIntersection(Segment a, Segment b) {
  // 判斷在 X 軸 Y 軸的投影是否相交
  auto intr1D=[](DBL w, DBL x, DBL y, DBL z){
    if(w > x) swap(w, x);
    if(y > z) swap(y, z);
    return dcmp(max(w, y), min(x, z)) <= 0;
  };

  DBL a1 = cross(a.v, b.s-a.s);
  DBL a2 = cross(a.v, b.e-a.s);
  DBL b1 = cross(b.v, a.s-b.s);
  DBL b2 = cross(b.v, a.e-b.s);

  return intr1D(a.s.x, a.e.x, b.s.x, b.e.x)
      && intr1D(a.s.y, a.e.y, b.s.y, b.e.y)
      && dcmp(a1) * dcmp(a2) <= 0
      && dcmp(b1) * dcmp(b2) <= 0;
}
Point intersection(Segment a, Segment b) {
  Vector v = b.s - a.s;
  DBL c1 = cross(a.v, b.v);
  DBL c2 = cross(v, b.v);
  DBL c3 = cross(v, a.v);

  if(dcmp(c1) < 0) c1=-c1, c2=-c2, c3=-c3;
  if(dcmp(c1) && dcmp(c2)>=0 && dcmp(c3)>=0
    && dcmp(c1, c2)>=0 && dcmp(c1, c3)>=0)
    return a.s + (a.v * (c2 / c1));
  return Point(inf, inf); // a 和 b 共線
}
Point intersection(Line a, Line b) {
  // cross(a.v, b.v) == 0 時平行
  Vector u = a.p - b.p;
  DBL t = 1.0*cross(b.v, u)/cross(a.v, b.v);
  return a.p + a.v*t;
}
DBL dis(Point a, Point b)
{return sqrt(dot(a-b, a-b));}
DBL dis(Point p, Line l)
{return abs(cross(p-l.p, l.v))/l.v.length();}
DBL dis(Point p, Segment s) {
  Vector u = p - s.s, v = p - s.e;
  if(dcmp(dot(s.v, u))<=0) return u.length();
  if(dcmp(dot(s.v, v))>=0) return v.length();
  return abs(cross(s.v, u)) / s.length();
}
DBL dis(Segment a, Segment b) {
  if(hasIntersection(a, b)) return 0;
  return min({
    dis(a.s, b), dis(a.e, b),
    dis(b.s, a), dis(b.e, a)
  });
}
DBL dis(Line a, Line b) {
  if(dcmp(cross(a.v, b.v)) == 0) return 0;
  return dis(a.p, b);
}
Point getPedal(Line l, Point p) {
// 返回 p 在 l 上的垂足(投影點)
  DBL len = dot(p-l.p, l.v) / dot(l.v, l.v);
  return l.p + l.v * len;
}
```

7 DP

7.1 背包

0-1 背包

複雜度： $O(NW)$

已知： 第 i 個物品重量為 w_i，價值 v_i；背包總容量 W

意義： dp[前 i 個物品][重量] = 最高價值

maxn: 物品數量

maxw: 背包最大容量

```
int W;
int w[maxn], v[maxn];
int dp[maxw];

memset(dp, 0, sizeof(dp));
for(int i=1; i<=n; i++) {
  for(int j=W; j>=w[i]; j--) {
    dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]]+v[i]);
  }
}
```

價值為主的 0-1 背包

複雜度： $O(NV)$

已知： 第 i 個物品重量為 w_i，價值 v_i；物品最大總價值 V

意義： dp[前 i 個物品][價值] = 最小重量

maxn: 物品數量

maxv: 物品最大總價值

$V = \Sigma v_i$

```
int w[maxn], v[maxn];
int dp[maxv];

memset(dp, 0x3f, sizeof(dp));
dp[0] = 0;
for(int i=0; i<n; i++) {
  for(int j=V; j>=v[i]; j--) {
    dp[j] = min(dp[j], dp[j-v[i]]+w[i]);
  }
}

int res = 0;
for(int val=V; val>=0; val--) {
  if(dp[val] <= w) {
    res = val;
    break;
  }
}
```

完全背包（無限背包）

複雜度： $O(NW)$

已知： 第 i 個物品重量為 w_i，價值 v_i；背包總容量 W

意義： dp[前 i 個物品][重量] = 最高價值

maxn: 物品數量

maxw: 背包最大容量

```
int W;
int w[maxn], v[maxn];
int dp[maxw];

memset(dp, 0, sizeof(dp));
for(int i=1; i<=n; i++)
  for(int j=w[i]; j<=W; j++)
    dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]]+v[i]);
```

多重背包

複雜度： $O(W\Sigma cnt_i)$

已知： 第 i 個物品重量為 w_i，價值 v_i，有 cnt_i 個；背包總容量 W

意義： dp[前 i 個物品][重量] = 最高價值

maxn: 物品數量

maxw: 背包最大容量

```
int W;
int w[maxn], v[maxn], cnt[maxn];
int dp[maxw];

memset(dp, 0, sizeof(dp));
for(int i=1; i<=n; i++)
  for(int j=W; j>=w[i]; j--)
    for(int k=1; k*w[i]<=j&&k<=cnt[i]; k++)
      dp[j] = max(dp[j],dp[j-k*w[i]]+k*v[i]);
```

混合背包（0-1/完全/多重）

複雜度： $O(W\Sigma cnt_i)$

已知： 第 i 個物品重量為 w_i，價值 v_i，有 cnt_i 個；背包總容量 W

意義： dp[前 i 個物品][重量] = 最高價值

maxn: 物品數量

maxw: 背包最大容量

$cnt_i = 0$ 代表無限

```
int W;
int w[maxn], v[maxn], cnt[maxn];
int dp[maxw];

memset(dp, 0, sizeof(dp));
for(int i=1; i<=n; i++) {
  if(cnt[i]) {
    for(int j=W; j>=w[i]; j--) {
      for(int k=1;k*w[i]<=j&&k<=cnt[i];k++) {
        dp[j]=max(dp[j],dp[j-k*w[i]]+k*v[i]);
      }
    }
  } else {
    for(int j=w[i]; j<=W; j++) {
      dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + v[i]);
    }
  }
}
```

二維費用背包

複雜度： $O(NCT)$

已知： 第 k 個任務需要花費 c_k 元，耗時 t_k 分鐘；總經費 C，總耗時 T

意義： dp[前 k 個任務][花費][耗時] = 最多任務數

maxc: 最大花費

maxt: 最大耗時

```
int C, T;
int c[maxn], t[maxn];
int dp[maxc][maxt];

memset(dp, 0, sizeof(dp));
for(int k=1; k<=n; k++)
  for(int i=C; i>=c[k]; i--)
    for(int j=T; j>=t[k]; j--)
      dp[i][j] = max(
        dp[i][j], dp[i-c[k]][j-t[k]] + 1);
```

分組背包

複雜度： $O(W\Sigma M)$

已知： 第 i 組第 j 個物品重量為 w_{ij}，價值 v_{ij}；背包總容量 W；每組只能取一個

意義： dp[前 i 組物品][重量] = 最高價值

maxn: 物品組數

maxm: 每組物品數

maxw: 背包最大容量

```
int W;
int dp[maxw];
vector<vector<int>> w, v;

memset(dp, 0, sizeof(dp));
for(int i=0; i<n; i++)
  for(int j=W; j>=0; j--)
    for(int k=0; k<w[i].size(); k++)
      if(j >= w[i][k])
        dp[j] = max(
          dp[j], dp[j-w[i][k]] + v[i][k]);
```

依賴背包

已知： 第 j 個物品在第 i 個物品沒選的情況下不能選

做法： 樹 DP，有爸爸才有小孩。轉化為分組背包。

意義： dp[選物品 i 為根][重量] = 最高價值

過程： 對所有 $u \to v$，dfs 計算完 v 後更新 u

背包變化

1. 求最大價值的方法總數 c

```
for(int i=1; i<=n; i++) {
  for(int j=W; j>=w[i]; j--) {
    if(dp[j] < dp[j-w[i]]+v[i]) {
      dp[j] = dp[j-w[i]] + v[i];
      c[j] = c[j-w[i]];
    } else if(dp[j] == dp[j-w[i]]+v[i]) {
      c[j] += c[j-w[i]];
    }
  }
}
```

2. 求最大價值的一組方案 p

```
memset(p, 0, sizeof(p));
for(int i=1; i<=n; i++) {
  for(int j=W; j>=w[i]; j--) {
    if(dp[i][j] < dp[i-1][j-w[i]]+v[i]) {
      dp[i][j] = dp[i-1][j-w[i]] + v[i];
      p[i] = 1;
    } else {
      p[i] = 0;
    }
  }
}
```

3. 求最大價值的字典序最小的一組方案 p

```
// reverse(item), 要把物品順序倒過來
memset(p, 0, sizeof(p));
for(int i=1; i<=n; i++) {
  for(int j=W; j>=w[i]; j--) {
    if(dp[i][j] <= dp[i-1][j-w[i]]+v[i]) {
      dp[i][j] = dp[i-1][j-w[i]] + v[i];
      p[i] = 1;
    } else {
      p[i] = 0;
    }
  }
}
```

7.2 Range DP

```cpp
//區間dp
int dp[55][55];
// dp[i][j] -> [i,j] 切割區間中最小的cost
int cuts[55];
int solve(int i, int j) {
    if (dp[i][j] != -1)
        return dp[i][j];
    //代表沒有其他切法，只能是cuts[j] - cuts[i]
    if (i == j - 1)
        return dp[i][j] = 0;
    int cost = 0x3f3f3f3f;
    for (int m = i + 1; m < j; ++m) {
        //枚舉區間中間切點
        cost = min(cost, solve(i, m) +
          solve(m, j) + cuts[j] - cuts[i]);
    }
    return dp[i][j] = cost;
}
int main() {
    int l,n;
    while (scanf("%d", &l) != EOF && l){
        scanf("%d", &n);
        for (int i = 1; i <= n; ++i)
            scanf("%d", &cuts[i]);
        cuts[0] = 0;
        cuts[n + 1] = l;
        memset(dp, -1, sizeof(dp));
        printf("ans = %d.\n", solve(0,n+1));
    }
    return 0;
}
```

7.3 Deque 最大差距

```cpp
/*定義dp[l][r]是l ~ r時與先手最大差異值
  轉移式：dp[l][r] = max{a[l] - solve(l + 1, r), a[r] - solve(l, r - 1)}
  裡面用減的主要是因為求的是相減且會一直換手，
  所以正負正負...*/
#define maxn 3005
bool vis[maxn][maxn];
long long dp[maxn][maxn];
long long a[maxn];
long long solve(int l, int r) {
    if (l > r) return 0;
    if (vis[l][r]) return dp[l][r];
    vis[l][r] = true;
    long long res = a[l] - solve(l + 1, r);
    res = max(res, a[r] - solve(l, r - 1));
    return dp[l][r] = res;
}
int main() {
    ...
    printf("%lld\n", solve(1, n));
}
```

7.4 string DP

Edit distance S_1 最少需要經過幾次增、刪或換字變成 S_2

$$dp[i,j] = \begin{cases} i+1, & \text{if } j = -1 \\ j+1, & \text{if } i = -1 \\ dp[i-1,j-1], & \text{if } S_1[i] = S_2[j] \\ \min\begin{Bmatrix} dp[i,j-1] \\ dp[i-1,j] \\ dp[i-1,j-1] \end{Bmatrix} + 1, & \text{if } S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases}$$

Longest Palindromic Subsequence

$$dp[l,r] = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad l = r \\ dp[l+1,r-1] & \text{if} \quad S[l] = S[r] \\ \max\{dp[l+1,r], dp[l,r-1]\} & \text{if} \quad S[l] \neq S[r] \end{cases}$$

7.5 Barcode

```cpp
int N, K, M;
long long dp[55][55];
// n -> 目前剩多少units
// k -> 目前剩多少bars
// m -> 1 bar最多多少units
long long dfs(int n, int k) {
    if (k == 1) {
        return (n <= M);
    }
    if (dp[n][k] != -1)
        return dp[n][k];
    long long result = 0;
    for (int i = 1; i < min(M + 1, n); ++i)
         { // < min(M + 1, n)是因為n不能==0
        result += dfs(n - i, k - 1);
    }
    return dp[n][k] = result;
}
int main() {
    while (scanf("%d %d %d", &N, &K, &M) !=
          EOF) {
        memset(dp, -1, sizeof(dp));
        printf("%lld\n", dfs(N, K));
    }
}
```

7.6 LCS 和 LIS

```
//LCS 和 LIS 題目轉換
LIS 轉成 LCS
    1. A 為原序列， B=sort(A)
    2. 對 A,B 做 LCS
LCS 轉成 LIS
    1. A, B 為原本的兩序列
    2. 最 A 序列作編號轉換，將轉換規則套用在 B
    3. 對 B 做 LIS
    4. 重複的數字在編號轉換時後要變成不同的數字，
       越早出現的數字要越小
    5. 如果有數字在 B 裡面而不在 A 裡面，
       直接忽略這個數字不做轉換即可
```

7.7 樹 DP 有幾個 path 長度為 k

```cpp
#define maxn 50005
#define maxk 505
//dp[u][u的child且距離u長度k的數量]
long long dp[maxn][maxk];
vector<vector<int>> G;
int n, k;
long long res = 0;
void dfs(int u, int p) {
  //u自己
  dp[u][0] = 1;
  for (int v: G[u]) {
    if (v == p) continue;
    dfs(v, u);
    for (int i = 1; i <= k; ++i) {
      //子樹v距離i - 1的等於對於u來說距離i的
      dp[u][i] += dp[v][i - 1];
    }
  }
  //統計在u子樹中距離u為k的數量
  res += dp[u][k];
  long long cnt = 0;
  for (int v: G[u]) {
    if (v == p) continue; //重點算法
    for (int x = 0; x <= k - 2; ++x) {
      cnt +=
        dp[v][x]*(dp[u][k-x-1]-dp[v][k-x-2]);
    }
  }
  res += cnt / 2;
}
int main() {
  ...
  dfs(1, -1);
}
```

7.8 抽屜

```cpp
long long dp[70][70][2];
// 初始條件
dp[1][0][0] = dp[1][1][1] = 1;
for (int i = 2; i <= 66; ++i){
    // i個抽屜0個安全且上方0 =
    // (底下i - 1個抽屜且1個安全且最上面L) +
    // (底下n - 1個抽屜0個安全且最上方為0)
    dp[i][0][0]=dp[i-1][1][1]+dp[i-1][0][0];
    for (int j = 1; j <= i; ++j) {
        dp[i][j][0] =
          dp[i-1][j+1][1]+dp[i-1][j][0];
        dp[i][j][1] =
          dp[i-1][j-1][1]+dp[i-1][j-1][0];
    }
} //答案在 dp[n][s][0] + dp[n][s][1]);
```

7.9 TreeDP reroot

```cpp
/*re-root dp on tree O(n + n + n) -> O(n)*/
class Solution {
public:
    vector<int> sumOfDistancesInTree(int n,
         vector<vector<int>>& edges) {
        this->res.assign(n, 0);
        G.assign(n + 5, vector<int>());
        for (vector<int>& edge: edges) {
            G[edge[0]].emplace_back(edge[1]);
            G[edge[1]].emplace_back(edge[0]);
        }
        memset(this->visited, 0,
             sizeof(this->visited));
        this->dfs(0);
        memset(this->visited, 0,
             sizeof(this->visited));
        this->res[0] = this->dfs2(0, 0);
        memset(this->visited, 0,
             sizeof(this->visited));
        this->dfs3(0, n);
        return this->res;
    }
private:
    vector<vector<int>> G;
    bool visited[30005];
    int subtreeSize[30005];
    vector<int> res;
    //求subtreeSize
    int dfs(int u) {
        this->visited[u] = true;
        for (int v: this->G[u])
            if (!this->visited[v])
                this->subtreeSize[u] +=
                     this->dfs(v);
        //自己
        this->subtreeSize[u] += 1;
        return this->subtreeSize[u];
    }
    //求res[0], 0到所有點的距離
    int dfs2(int u, int dis) {
        this->visited[u] = true;
        int sum = 0;
        for (int v: this->G[u])
            if (!visited[v])
                sum += this->dfs2(v, dis + 1);
        //要加上自己的距離
        return sum + dis;
    }
    //算出所有的res
    void dfs3(int u, int n) {
        this->visited[u] = true;
        for (int v: this->G[u]) {
            if (!visited[v]) {
                this->res[v] = this->res[u] +
                     n - 2 *
                     this->subtreeSize[v];
                this->dfs3(v, n);
            }
        }
    }
};
```

7.10 WeightedLIS

```cpp
#define maxn 200005
long long dp[maxn];
long long height[maxn];
long long B[maxn];
long long st[maxn << 2];
void update(int p, int index, int l, int r,
     long long v) {
  if (l == r) {
    st[index] = v;
    return;
  }
  int mid = (l + r) >> 1;
  if (p <= mid)
    update(p, (index << 1), l, mid, v);
  else update(p, (index << 1)+1,mid+1,r,v);
  st[index] =
    max(st[index<<1],st[(index<<1)+1]);
}
long long query(int index, int l, int r, int
     ql, int qr) {
  if (ql <= l && r <= qr) return st[index];
  int mid = (l + r) >> 1;
  long long res = -1;
  if (ql <= mid)
    res=max(res,query(index<<1,l,mid,ql,qr));
  if (mid < qr) res =
       max(res,query((index<<1)+1,mid+1,r,ql,qr));
  return res;
}
int main() {
  int n;
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 1; i <= n; ++i)
    scanf("%lld", &height[i]);
  for (int i = 1; i <= n; ++i)
    scanf("%lld", &B[i]);
  long long res = B[1];
  update(height[1], 1, 1, n, B[1]);
  for (int i = 2; i <= n; ++i) {
    long long temp;
    if (height[i] - 1 >= 1)
      temp =
        B[i]+query(1,1,n,1,height[i]-1);
    else
      temp = B[i];
    update(height[i], 1, 1, n, temp);
    res = max(res, temp);
  }
  printf("%lld\n", res);
  return 0;
}
```