

Contents

1 字串

- 1.1 最長迴文子字串
- 1.2 KMP

2 math

- 2.1 SG
- 2.2 質數與因數
- 2.3 歐拉函數
- 2.4 atan
- 2.5 大步小步

3 algorithm

- 3.1 basic
- 3.2 二分搜
- 3.3 三分搜
- 3.4 差分
- 3.5 greedy
- 3.6 dinic
- 3.7 Nim Game
- 3.8 SCC Tarjan
- 3.9 ArticulationPoints Tarjan
- 3.10 最小樹狀圖
- 3.11 二分圖最大匹配
- 3.12 JosephusProblem
- 3.13 KM
- 3.14 LCA 倍增法
- 3.15 LCA 樹壓平 RMQ
- 3.16 MCMF
- 3.17 莫隊
- 3.18 Dancing Links

4 DataStructure

- 4.1 線段樹 1D
- 4.2 線段樹 2D
- 4.3 權值線段樹
- 4.4 Trie
- 4.5 單調隊列

5 geometry

- 5.1 intersection
- 5.2 半平面相交
- 5.3 凸包

6 DP

- 6.1 抽屜
- 6.2 Deque 最大差距
- 6.3 LCS 和 LIS
- 6.4 RangeDP
- 6.5 stringDP
- 6.6 TreeDP 有幾個 path 長度為 k
- 6.7 TreeDP reroot
- 6.8 WeightedLIS

1 字串

1.1 最長迴文子字串

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define T(x) ((x)%2 ? s[(x)/2] : '. ')
3 using namespace std;
4
5 string s;
6 int n;
7
8 int ex(int l,int r){
9     int i=0;
10    while(l-i>=0&&r+i<n&&T(l-i)==T(r+i)) i++;
11    return i;
12 }
13
14 int main(){
15     cin>>s;
16     n=2*s.size()+1;
17     int mx=0;
18     int center=0;
19     vector<int> r(n);
20     int ans=1;
21     r[0]=1;
22     for(int i=1;i<n;i++){
23         int ii=center-(i-center);

```

```

24     int len=mx-i+1;
25     if(i>mx){
26         r[i]=ex(i,i);
27         center=i;
28         mx=i+r[i]-1;
29     }
30     else if(r[ii]==len){
31         r[i]=len+ex(i-len,i+len);
32         center=i;
33         mx=i+r[i]-1;
34     }
35     else r[i]=min(r[ii],len);
36     ans=max(ans,r[i]);
37 }
38 cout<<ans-1<<"\n";
39 return 0;
40 }

```

1.2 KMP

```

1 #define maxn 1000005
2 int nextArr[maxn];
3 void getNextArr(const string& str) {
4     nextArr[0] = 0;
5     int prefixLen = 0;
6     for (int i = 1; i < str.size(); ++i) {
7         prefixLen = nextArr[i - 1];
8         //如果不一樣就在之前算過的prefix中搜有沒有更短的前後綴
9         while (prefixLen > 0 && str[prefixLen] != str[i])
10             prefixLen = nextArr[prefixLen - 1];
11         //一樣就繼承之前的前後綴長度+1
12         if (str[prefixLen] == str[i])
13             ++prefixLen;
14         nextArr[i] = prefixLen;
15     }
16     for (int i = 0; i < str.size() - 1; ++i) {
17         vis[nextArr[i]] = true;
18     }
19 }

```

2 math

2.1 SG

- $SG(x) = mex\{SG(y) | x \rightarrow y\}$
- $mex(S) = \min\{n | n \in \mathbb{N}, n \notin S\}$

2.2 質數與因數

```

1 歐拉篩O(n)
2 #define MAXN 47000 //sqrt(2^31)=46,340...
3 bool isPrime[MAXN];
4 int prime[MAXN];
5 int primeSize=0;
6 void getPrimes(){
7     memset(isPrime, true, sizeof(isPrime));
8     isPrime[0]=isPrime[1]=false;
9     for(int i=2;i<MAXN;i++){
10         if(isPrime[i]) prime[primeSize++]=i;
11         for(int j=0;j<primeSize&&i*prime[j]<=MAXN;++j){
12             isPrime[i*prime[j]]=false;
13             if(i%prime[j]==0) break;
14         }
15     }
16 }
17
18 最大公因數 O(log(min(a,b)))
19 int GCD(int a,int b){

```

```

20     if(b==0) return a;
21     return GCD(b,a%b);
22 }
23
24 質因數分解
25 void primeFactorization(int n){
26     for(int i=0;i<(int)p.size();++i){
27         if(p[i]*p[i]>n) break;
28         if(n%p[i]) continue;
29         cout<<p[i]<<' ';
30         while(n%p[i]==0) n/=p[i];
31     }
32     if(n!=1) cout<<n<<' ';
33     cout<<'\\n';
34 }
35
36 擴展歐幾里得算法
37 //ax+by=GCD(a,b)
38
39 int ext_euc(int a,int b,int &x,int &y){
40     if(b==0){
41         x=1,y=0;
42         return a;
43     }
44     int d=ext_euc(b,a%b,y,x);
45     y-=a/b*x;
46     return d;
47 }
48
49 int main(){
50     int a,b,x,y;
51     cin>>a>>b;
52     ext_euc(a,b,x,y);
53     cout<<x<<' '<<y<<endl;
54     return 0;
55 }
56
57
58 歌德巴赫猜想
59 solution : 把偶數 N ( $6 \leq N \leq 10^6$ ) 寫成兩個質數的和。
60 #define N 20000000
61 int ox[N],p[N],pr;
62 void PrimeTable(){
63     ox[0]=ox[1]=1;
64     pr=0;
65     for(int i=2;i<N;i++){
66         if(!ox[i]) p[pr++]=i;
67         for(int j=0;i*p[j]<N&&j<pr;j++)
68             ox[i*p[j]]=1;
69     }
70 }
71 }
72
73 int main(){
74     PrimeTable();
75     int n;
76     while(cin>>n,n){
77         int x;
78         for(x=1;x+=2)
79             if(!ox[x]&&!ox[n-x]) break;
80         printf("%d = %d + %d\\n",n,x,n-x);
81     }
82 }
83
84 problem : 給定整數 N ,
85     求 N 最少可以拆成多少個質數的和。
86 如果 N 是質數, 則答案為 1。
87 如果 N 是偶數(不包含2), 則答案為 2 (強歌德巴赫猜想)。
88 如果 N 是奇數且 N-2 是質數, 則答案為 2 (2+質數)。
89 其他狀況答案為 3 (弱歌德巴赫猜想)。
90
91 bool isPrime(int n){
92     for(int i=2;i<n;++i){
93         if(i*i>n) return true;
94         if(n%i==0) return false;
95     }
96     return true;

```

```

96 }
97
98 int main(){
99     int n;
100     cin>>n;
101     if(isPrime(n)) cout<<"1\\n";
102     else if(n%2==0||isPrime(n-2)) cout<<"2\\n";
103     else cout<<"3\\n";
104 }

```

2.3 歐拉函數

```

1 //計算閉區間 [1,n] 中有幾個正整數與 n 互質
2
3 int phi(){
4     int ans=n;
5     for(int i=2;i*i<=n;i++){
6         if(n%i==0){
7             ans=ans-ans/i;
8             while(n%i==0) n/=i;
9         }
10        if(n>1) ans=ans-ans/n;
11        return ans;
12 }

```

2.4 atan

```

1 說明
2     atan() 和 atan2() 函數分別計算 x 和 y/x 的反正切。
3
4 回傳值
5     atan() 函數會傳回介於範圍 -pi/2 到 pi/2
6     弧度之間的值。
7     atan2() 函數會傳回介於 -pi 至 pi 弧度之間的值。
8     如果 atan2() 函數的兩個引數都是零,
9     則函數會將 errno 設為 EDOM, 並傳回值 0。
10
11 範例
12 int main(void){
13     double a,b,c,d;
14     c=0.45;
15     d=0.23;
16     a=atan(c);
17     b=atan2(c,d);
18     printf("atan(%lf)=%lf\\n",c,a);
19     printf("atan2(%lf,%lf)=%lf\\n",c,d,b);
20 }
21 // atan(0.450000)=0.422854
22 // atan2(0.450000,0.230000)=1.098299

```

2.5 大步小步

```

1 題意
2 給定 B,N,P, 求出 L 滿足  $B^L \equiv N \pmod{P}$ 。
3 題解
4 餘數的循環節長度必定為 P 的因數, 因此
5      $B^0, B^1, B^2, \dots, B^{P-1}$ , ...
6     也就是說如果有解則  $L < N$ , 枚舉 0, 1, 2, L-1
7     能得到結果, 但會超時。
8 將 L 拆成  $mx+y$ , 只要分別枚舉 x,y 就能得到答案,
9 設  $m=\sqrt{P}$  能保證最多枚舉  $2\sqrt{P}$  次。
10  $B^{mx+y} \equiv N \pmod{P}$ 
11  $B^{mx} B^y \equiv N \pmod{P}$ 
12 先求出  $B^0, B^1, B^2, \dots, B^{m-1}$ ,
13 再枚舉  $N(B^{(-m)}), N(B^{(-m)})^2, \dots$  查看是否有對應的  $B^y$ 。
14 這種算法稱為大步小步演算法,
15 大步指的是枚舉 x (一次跨 m 步),

```

15 小步指的是枚舉 y (一次跨 1 步)。
 16 複雜度分析
 17 利用 `map/unorder_map` 存放 $B^0, B^1, B^2, \dots, B^{(m-1)}$,
 18 枚舉 x 查詢 `map/unorder_map` 是否有對應的 B^y ,
 19 存放和查詢最多 $2\sqrt{P}$ 次, 時間複雜度為 $O(\sqrt{P}\log\sqrt{P})/O(\sqrt{P})$ 。

```

20
21 using LL = long long;
22 LL B, N, P;
23 LL fpow(LL a, LL b, LL c){
24     LL res=1;
25     for(;b;b>=1){
26         if(b&1)
27             res=(res*a)%c;
28         a=(a*a)%c;
29     }
30     return res;
31 }
32 LL BSGS(LL a, LL b, LL p){
33     a%=p, b%=p;
34     if(a==0)
35         return b==0?-1:-1;
36     if(b==1)
37         return 0;
38     map<LL, LL> tb;
39     LL sq=ceil(sqrt(p-1));
40     LL inv=fpow(a, p-sq-1, p);
41     tb[1]=sq;
42     for(LL i=1, tmp=1; i<sq; ++i){
43         tmp=(tmp*a)%p;
44         if(!tb.count(tmp))
45             tb[tmp]=i;
46     }
47     for(LL i=0; i<sq; ++i){
48         if(tb.count(b)){
49             LL res=tb[b];
50             return i*sq+(res==sq?0:res);
51         }
52         b=(b*inv)%p;
53     }
54     return -1;
55 }
56 int main(){
57     IOS; //輸入優化
58     while(cin>>P>>B>>N){
59         LL ans=BSGS(B, N, P);
60         if(ans!=-1)
61             cout<<"no solution\n";
62         else
63             cout<<ans<<"\n";
64     }
65 }

```

3 algorithm

3.1 basic

```

1 min_element: 找尋最小元素
2 min_element(first, last)
3 max_element: 找尋最大元素
4 max_element(first, last)
5 sort: 排序, 預設由小排到大。
6 sort(first, last)
7 sort(first, last, cmp): 可自行定義比較運算子 cmp。
8 find: 尋找元素。
9 find(first, last, val)
10 lower_bound: 尋找第一個小於 x 的元素位置,
11     如果不存在, 則回傳 last。
12 lower_bound(first, last, val)
13 upper_bound: 尋找第一個大於 x 的元素位置,
14     如果不存在, 則回傳 last。
15 upper_bound(first, last, val)
16 next_permutation: 將序列順序轉換成下一個字典序,
17     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。

```

```

18 next_permutation(first, last)
19 prev_permutation: 將序列順序轉換成上一個字典序,
20     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
21 prev_permutation(first, last)

```

3.2 二分搜

```

1 int binary_search(int target) {
2     // For range [ok, ng) or (ng, ok], "ok" is for the
3     // index that target value exists, with "ng" doesn't.
4     int ok = maxn, ng = -1;
5     // For first lower_bound, ok=maxn and ng=-1,
6     // for last lower_bound, ok = -1 and ng = maxn
7     // (the "check" funtion
8     // should be changed depending on it.)
9     while(abs(ok - ng) > 1) {
10         int mid = (ok + ng) >> 1;
11         if(check(mid)) ok = mid;
12         else ng = mid;
13     }
14     // Be careful, "arr[mid]>=target" for first
15     // lower_bound and "arr[mid]<=target" for
16     // last lower_bound. For range (ng, ok],
17     // convert it into (ng, mid] and (mid, ok] than
18     // choose the first one, or convert [ok, ng) into
19     // [ok, mid) and [mid, ng) and than choose
20     // the second one.
21     return ok;
22 }
23 lower_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 ≥ k 的位置
24 upper_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 > k 的位置
25 upper_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 ≤ k 的位置
26 lower_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 < k 的位置
27 (lower_bound, upper_bound) //等於 k 的範圍
28 equal_range(arr, arr+n, k);

```

3.3 三分搜

```

1 題意
2 給定兩射線方向和速度, 問兩射線最近距離。
3 題解
4 假設  $F(t)$  為兩射線在時間  $t$  的距離,  $F(t)$  為二次函數,
5 可用三分搜找二次函數最小值。
6 struct Point{
7     double x, y, z;
8     Point() {}
9     Point(double _x, double _y, double _z):
10         x(_x), y(_y), z(_z){}
11     friend istream& operator>>(istream& is, Point& p)
12     {
13         is >> p.x >> p.y >> p.z;
14         return is;
15     }
16     Point operator+(const Point &rhs) const{
17         return Point(x+rhs.x, y+rhs.y, z+rhs.z);
18     }
19     Point operator-(const Point &rhs) const{
20         return Point(x-rhs.x, y-rhs.y, z-rhs.z);
21     }
22     Point operator*(const double &d) const{
23         return Point(x*d, y*d, z*d);
24     }
25     Point operator/(const double &d) const{
26         return Point(x/d, y/d, z/d);
27     }
28     double dist(const Point &rhs) const{
29         double res = 0;
30         res+=(x-rhs.x)*(x-rhs.x);
31         res+=(y-rhs.y)*(y-rhs.y);
32         res+=(z-rhs.z)*(z-rhs.z);
33         return res;
34     }
35 }

```

```

34 };
35 int main(){
36     IOS;        //輸入優化
37     int T;
38     cin>>T;
39     for(int ti=1;ti<=T;++ti){
40         double time;
41         Point x1,y1,d1,x2,y2,d2;
42         cin>>time>>x1>>y1>>x2>>y2;
43         d1=(y1-x1)/time;
44         d2=(y2-x2)/time;
45         double L=0,R=1e8,m1,m2,f1,f2;
46         double ans = x1.dist(x2);
47         while(abs(L-R)>1e-10){
48             m1=(L+R)/2;
49             m2=(m1+R)/2;
50             f1=((d1*m1)+x1).dist((d2*m1)+x2);
51             f2=((d1*m2)+x1).dist((d2*m2)+x2);
52             ans = min(ans,min(f1,f2));
53             if(f1<f2) R=m2;
54             else L=m1;
55         }
56         cout<<"Case " <<ti<<" : ";
57         cout<<fixed<<setprecision(4)<<sqrt(ans)<<"\n";
58     }
59 }

```

3.4 差分

用途：在區間 $[l, r]$ 加上一個數字 v 。

$b[l] += v$; ($b[0 \sim l]$ 加上 v)

$b[r+1] -= v$; ($b[r+1 \sim n]$ 減去 v ($b[r]$ 仍保留 v))

給的 $a[]$ 是前綴和數列，建構 $b[]$ ，

因為 $a[i] = b[0] + b[1] + b[2] + \dots + b[i]$ ，

所以 $b[i] = a[i] - a[i-1]$ 。

在 $b[l]$ 加上 v ， $b[r+1]$ 減去 v ，

最後再從 0 跑到 n 使 $b[i] += b[i-1]$ 。

這樣一來， $b[]$ 是一個在某區間加上 v 的前綴和。

```

10 int a[1000], b[1000];
11 // a: 前綴和數列, b: 差分數列
12 int main(){
13     int n, l, r, v;
14     cin >> n;
15     for(int i=1; i<=n; i++){
16         cin >> a[i];
17         b[i] = a[i] - a[i-1]; //建構差分數列
18     }
19     cin >> l >> r >> v;
20     b[l] += v;
21     b[r+1] -= v;
22     for(int i=1; i<=n; i++){
23         b[i] += b[i-1];
24         cout << b[i] << " ";
25     }
26 }

```

3.5 greedy

貪心演算法的核心為，

採取在目前狀態下最好或最佳（即最有利）的選擇。

貪心演算法雖然能獲得當前最佳解，

但不保證能獲得最後（全域）最佳解，

提出想法後可以先試圖尋找有沒有能推翻原本的想法的反例，

確認無誤再實作。

刪數字問題

//problem

給定一個數字 $N (\leq 10^{100})$ ，需要刪除 K 個數字，

請問刪除 K 個數字後最小的數字為何？

//solution

刪除滿足第 i 位數大於第 $i+1$ 位數的最左邊第 i 位數，

扣除高位數的影響較扣除低位數的大。

```

15 //code
16 int main(){
17     string s;
18     int k;
19     cin>>s>>k;
20     for(int i=0;i<k;++i){
21         if((int)s.size()==0) break;
22         int pos = (int)s.size()-1;
23         for(int j=0;j<(int)s.size()-1;++j){
24             if(s[j]>s[j+1]){
25                 pos=j;
26                 break;
27             }
28         }
29         s.erase(pos,1);
30     }
31     while((int)s.size()>0&&s[0]=='0')
32         s.erase(0,1);
33     if((int)s.size()) cout<<s<<"\n";
34     else cout<<"0"<<"\n";
35 }

```

最小區間覆蓋長度

//problem

給定 n 條線段區間為 $[Li, Ri]$ ，

請問最少要選幾個區間才能完全覆蓋 $[0, S]$ ？

//solution

先將所有區間依照左界由小到大排序，

對於當前區間 $[Li, Ri]$ ，要從左界 $> Ri$ 的所有區間中，

找到有著最大的右界的區間，連接當前區間。

//problem

長度 n 的直線中有數個加熱器，

在 x 的加熱器可以讓 $[x-r, x+r]$ 內的物品加熱，

問最少要幾個加熱器可以把 $[0, n]$ 的範圍加熱。

//solution

對於最左邊沒加熱的點 a ，選擇最遠可以加熱 a 的加熱器，

更新已加熱範圍，重複上述動作繼續尋找加熱器。

//code

```

53 int main(){
54     int n, r;
55     int a[1005];
56     cin>>n>>r;
57     for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
58     int i=1,ans=0;
59     while(i<=n){
60         int R=min(i+r-1,n),L=max(i-r+1,0)
61         int nextR=-1;
62         for(int j=R;j>=L;--j){
63             if(a[j]){
64                 nextR=j;
65                 break;
66             }
67         }
68         if(nextR==-1){
69             ans=-1;
70             break;
71         }
72         ++ans;
73         i=nextR+r;
74     }
75     cout<<ans<<"\n";
76 }

```

最多不重疊區間

//problem

給你 n 條線段區間為 $[Li, Ri]$ ，

請問最多可以選擇幾條不重疊的線段（頭尾可相連）？

//solution

依照右界由小到大排序，

每次取到一個不重疊的線段，答案 $+1$ 。

//code

```

85 struct Line{
86     int L,R;
87     bool operator<(const Line &rhs)const{
88         return R<rhs.R;
89     }

```

```

90 };
91 int main(){
92     int t;
93     cin>>t;
94     Line a[30];
95     while(t--){
96         int n=0;
97         while(cin>>a[n].L>>a[n].R,a[n].L||a[n].R)
98             ++n;
99         sort(a,a+n);
100        int ans=1,R=a[0].R;
101        for(int i=1;i<n;i++){
102            if(a[i].L>=R){
103                ++ans;
104                R=a[i].R;
105            }
106        }
107        cout<<ans<<'\\n';
108    }
109 }

```

最小化最大延遲問題

//problem

給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，第 i 項工作延遲的時間為 $L_i = \max(0, F_i - D_i)$ ，
原本 F_i 為第 i 項工作的完成時間，
求一種工作排序使 $\max L_i$ 最小。

//solution

按照到期時間從早到晚處理。

//code

```

119 struct Work{
120     int t, d;
121     bool operator<(const Work &rhs)const{
122         return d<rhs.d;
123     }
124 };
125 int main(){
126     int n;
127     Work a[10000];
128     cin>>n;
129     for(int i=0;i<n;++i)
130         cin>>a[i].t>>a[i].d;
131     sort(a,a+n);
132     int maxL=0,sumT=0;
133     for(int i=0;i<n;++i){
134         sumT+=a[i].t;
135         maxL=max(maxL,sumT-a[i].d);
136     }
137     cout<<maxL<<'\\n';
138 }

```

最少延遲數量問題

//problem

給定 N 個工作，每個工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，求一種工作排序使得逾期工作數量最小。

//solution

期限越早到期的工作越先做。將工作依照到期時間從早到晚排序，
依序放入工作列表中，如果發現有工作預期，
就從目前選擇的工作中，移除耗時最長的工作。

上述方法為 Moore-Hodgson's Algorithm。

//problem

給定烏龜的重量和可承受重量，問最多可以疊幾隻烏龜？

//solution

和最少延遲數量問題是相同的問題，只要將題敘做轉換。

工作處理時長 \rightarrow 烏龜重量

工作期限 \rightarrow 烏龜可承受重量

多少工作不延期 \rightarrow 可以疊幾隻烏龜

//code

```

157 struct Work{
158     int t, d;
159     bool operator<(const Work &rhs)const{
160         return d<rhs.d;
161     }
162 };
163 int main(){
164     int n=0;

```

```

165     Work a[10000];
166     priority_queue<int> pq;
167     while(cin>>a[n].t>>a[n].d)
168         ++n;
169     sort(a,a+n);
170     int sumT=0,ans=n;
171     for(int i=0;i<n;++i){
172         pq.push(a[i].t);
173         sumT+=a[i].t;
174         if(a[i].d<sumT){
175             int x=pq.top();
176             pq.pop();
177             sumT-=x;
178             --ans;
179         }
180     }
181     cout<<ans<<'\\n';
182 }

```

任務調度問題

//problem

給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，如果第 i 項工作延遲需要受到 p_i 單位懲罰，
請問最少會受到多少單位懲罰。

//solution

依照懲罰由大到小排序，

每項工作依序嘗試可不可以放在 $D_i - T_i + 1, D_i - T_i, \dots, 1, 0$ ，
如果有空閒就放進去，否則延後執行。

//problem

給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，如果第 i 項工作在期限內完成會獲得 a_i
單位獎勵，

請問最多會獲得多少單位獎勵。

//solution

和上題相似，這題變成依照獎勵由大到小排序。

//code

```

201 struct Work{
202     int d,p;
203     bool operator<(const Work &rhs)const{
204         return p>rhs.p;
205     }
206 };
207 int main(){
208     int n;
209     Work a[100005];
210     bitset<100005> ok;
211     while(cin>>n){
212         ok.reset();
213         for(int i=0;i<n;++i)
214             cin>>a[i].d>>a[i].p;
215         sort(a,a+n);
216         int ans=0;
217         for(int i=0;i<n;++i){
218             int j=a[i].d;
219             while(j--){
220                 if(!ok[j]){
221                     ans+=a[i].p;
222                     ok[j]=true;
223                     break;
224                 }
225             }
226         }
227         cout<<ans<<'\\n';
228     }

```

3.6 dinic

```

1 const int maxn = 1e5 + 10;
2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
3 struct Edge {
4     int s, t, cap, flow;
5 };
6 int n, m, S, T;

```

```

7 | int level[maxn], dfs_idx[maxn];
8 | vector<Edge> E;
9 | vector<vector<int>> G;
10 | void init() {
11 |     S = 0;
12 |     T = n + m;
13 |     E.clear();
14 |     G.assign(maxn, vector<int>());
15 | }
16 | void addEdge(int s, int t, int cap) {
17 |     E.push_back({s, t, cap, 0});
18 |     E.push_back({t, s, 0, 0});
19 |     G[s].push_back(E.size()-2);
20 |     G[t].push_back(E.size()-1);
21 | }
22 | bool bfs() {
23 |     queue<int> q({S});
24 |     memset(level, -1, sizeof(level));
25 |     level[S] = 0;
26 |     while(!q.empty()) {
27 |         int cur = q.front();
28 |         q.pop();
29 |         for(int i : G[cur]) {
30 |             Edge e = E[i];
31 |             if(level[e.t]==-1 && e.cap>e.flow) {
32 |                 level[e.t] = level[e.s] + 1;
33 |                 q.push(e.t);
34 |             }
35 |         }
36 |     }
37 |     return level[T];
38 | }
39 | int dfs(int cur, int lim) {
40 |     if(cur==T || lim==0) return lim;
41 |     int result = 0;
42 |     for(int& i=dfs_idx[cur]; i<G[cur].size() && lim; i++) {
43 |         Edge& e = E[G[cur][i]];
44 |         if(level[e.s]+1 != level[e.t]) continue;
45 |         int flow = dfs(e.t, min(lim, e.cap-e.flow));
46 |         if(flow <= 0) continue;
47 |         e.flow += flow;
48 |         result += flow;
49 |         E[G[cur][i]^1].flow -= flow;
50 |         lim -= flow;
51 |     }
52 |     return result;
53 | }
54 | int dinic() { // O((V^2)E)
55 |     int result = 0;
56 |     while(bfs()) {
57 |         memset(dfs_idx, 0, sizeof(dfs_idx));
58 |         result += dfs(S, inf);
59 |     }
60 |     return result;
61 | }

```

3.7 Nim Game

```

1 | //兩人輪流取銅板，每人每次需在某堆取一枚以上的銅板，
2 | //但不能同時在兩堆取銅板，直到最後，
3 | //將銅板拿光的人贏得此遊戲。
4 | #define maxn 23+5
5 | int SG[maxn];
6 | int visited[1000+5];
7 | int pile[maxn], ans;
8 | void calculateSG(){
9 |     SG[0]=0;
10 |    for(int i=1; i<=maxn; i++){
11 |        int cur=0;
12 |        for(int j=0; j<i; j++)
13 |            for(int k=0; k<=j; k++)
14 |                visited[SG[j]^SG[k]]=i;
15 |        while(visited[cur]==i) cur++;
16 |        SG[i]=cur;

```

```

17 |    }
18 | }
19 | int main(){
20 |     calculateSG();
21 |     int Case=0, n;
22 |     while(cin>>n, n){
23 |         ans=0;
24 |         for(int i=1; i<=n; i++) cin>>pile[i];
25 |         for(int i=1; i<=n; i++)
26 |             if(pile[i]&1) ans^=SG[n-i];
27 |         cout<<"Game "<<Case<<" : ";
28 |         if(!ans) cout<<"-1 -1 -1\n";
29 |         else{
30 |             bool flag=0;
31 |             for(int i=1; i<=n; i++){
32 |                 if(pile[i]){
33 |                     for(int j=i+1; j<=n; j++){
34 |                         for(int k=j; k<=n; k++){
35 |                             if((SG[n-i]^SG[n-j]^SG[n-k])==ans){
36 |                                 cout<<i-1<<" "<<j-1<<" "<<k-1<<endl;
37 |                                 flag=1;
38 |                                 break;
39 |                             }
40 |                         }
41 |                     }
42 |                 }
43 |                 if(flag) break;
44 |             }
45 |         }
46 |     }
47 |     return 0;
48 | }
49 |
50 | /*
51 |  input
52 |  4  1  0  1  100
53 |  3  1  0  5
54 |  2  2  1
55 |  0
56 |  output
57 |  Game 1: 0 2 3
58 |  Game 2: 0 1 1
59 |  Game 3: -1 -1 -1
60 |  */

```

3.8 SCC Tarjan

```

1 | //單純求SCC，每個SCC中找成本最小的蓋，如果有多個一樣小的要數出來
2 | //注意以下程式有縮點，但沒存起來，存法就是開一個array
   | -> ID[u] = SCCID
3 | #define maxn 100005
4 | #define MOD 1000000007
5 | long long cost[maxn];
6 | vector<vector<int>> G;
7 | int SCC = 0;
8 | stack<int> sk;
9 | int dfn[maxn];
10 | int low[maxn];
11 | bool inStack[maxn];
12 | int dfsTime = 1;
13 | long long totalCost = 0;
14 | long long ways = 1;
15 | void dfs(int u) {
16 |     dfn[u] = low[u] = dfsTime;
17 |     ++dfsTime;
18 |     sk.push(u);
19 |     inStack[u] = true;
20 |     for (int v: G[u]) {
21 |         if (dfn[v] == 0) {
22 |             dfs(v);
23 |             low[u] = min(low[u], low[v]);
24 |         }
25 |         else if (inStack[v]) {
26 |             //屬於同個SCC且是我的back edge
27 |             low[u] = min(low[u], dfn[v]);

```



```

28     }
29 }
30 //如果是scc
31 if (dfn[u] == low[u]) {
32     long long minCost = 0x3f3f3f3f;
33     int currWays = 0;
34     ++SCC;
35     while (1) {
36         int v = sk.top();
37         inStack[v] = 0;
38         sk.pop();
39         if (minCost > cost[v]) {
40             minCost = cost[v];
41             currWays = 1;
42         }
43         else if (minCost == cost[v]) {
44             ++currWays;
45         }
46         if (v == u)
47             break;
48     }
49     totalCost += minCost;
50     ways = (ways * currWays) % MOD;
51 }
52 }
53 int main() {
54     int n;
55     scanf("%d", &n);
56     for (int i = 1; i <= n; ++i)
57         scanf("%lld", &cost[i]);
58     G.assign(n + 5, vector<int>());
59     int m;
60     scanf("%d", &m);
61     int u, v;
62     for (int i = 0; i < m; ++i) {
63         scanf("%d %d", &u, &v);
64         G[u].emplace_back(v);
65     }
66     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
67         if (dfn[i] == 0)
68             dfs(i);
69     }
70     printf("%lld %lld\n", totalCost, ways % MOD);
71     return 0;
72 }

```

3.9 ArticulationPoints Tarjan

```

1 vector<vector<int>> G;
2 int N, timer;
3 bool visited[105];
4 int dfn[105]; // 第一次visit的時間
5 int low[105];
6 // 最小能回到的父節點(不能是自己的parent)的visTime
7 int res;
8 //求割點數量
9 void tarjan(int u, int parent) {
10     int child = 0;
11     bool isCut = false;
12     visited[u] = true;
13     dfn[u] = low[u] = ++timer;
14     for (int v: G[u]) {
15         if (!visited[v]) {
16             ++child;
17             tarjan(v, u);
18             low[u] = min(low[u], low[v]);
19             if (parent != -1 && low[v] >= dfn[u])
20                 isCut = true;
21         }
22         else if (v != parent)
23             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
24     }
25     //If u is root of DFS tree->有兩個以上的children
26     if (parent == -1 && child >= 2)
27         isCut = true;

```

```

28     if (isCut) ++res;
29 }
30 int main() {
31     char input[105];
32     char* token;
33     while (scanf("%d", &N) != EOF && N) {
34         G.assign(105, vector<int>());
35         memset(visited, false, sizeof(visited));
36         memset(low, 0, sizeof(low));
37         memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
38         timer = 0;
39         res = 0;
40         getchar(); // for \n
41         while (fgets(input, 105, stdin)) {
42             if (input[0] == '\0')
43                 break;
44             int size = strlen(input);
45             input[size - 1] = '\0';
46             --size;
47             token = strtok(input, " ");
48             int u = atoi(token);
49             int v;
50             while (token = strtok(NULL, " ")) {
51                 v = atoi(token);
52                 G[u].emplace_back(v);
53                 G[v].emplace_back(u);
54             }
55         }
56         tarjan(1, -1);
57         printf("%d\n", res);
58     }
59     return 0;
60 }

```

3.10 最小樹狀圖

```

1 const int maxn = 60 + 10;
2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
3 struct Edge {
4     int s, t, cap, cost;
5 }; // cap 為頻寬 (optional)
6 int n, m, c;
7 int inEdge[maxn], idx[maxn], pre[maxn], vis[maxn];
8 // 對於每個點，選擇對它入度最小的那條邊
9 // 找環，如果沒有則 return;
10 // 進行縮環並更新其他點到環的距離。
11 int dirMST(vector<Edge> edges, int low) {
12     int result = 0, root = 0, N = n;
13     while(true) {
14         memset(inEdge, 0x3f, sizeof(inEdge));
15         // 找所有點的 in edge 放進 inEdge
16         // optional: low 為最小 cap 限制
17         for(const Edge& e : edges) {
18             if(e.cap < low) continue;
19             if(e.s != e.t && e.cost < inEdge[e.t]) {
20                 inEdge[e.t] = e.cost;
21                 pre[e.t] = e.s;
22             }
23         }
24         for(int i=0; i<N; i++) {
25             if(i != root && inEdge[i] == inf)
26                 return -1; //除了root 還有點沒有in edge
27         }
28         int seq = inEdge[root] = 0;
29         memset(idx, -1, sizeof(idx));
30         memset(vis, -1, sizeof(vis));
31         // 找所有的 cycle，一起編號為 seq
32         for(int i=0; i<N; i++) {
33             result += inEdge[i];
34             int cur = i;
35             while(vis[cur] != i && idx[cur] == -1) {
36                 if(cur == root) break;
37                 vis[cur] = i;
38                 cur = pre[cur];
39             }

```

```

40         if(cur!=root && idx[cur]==-1) {
41             for(int j=pre[cur]; j!=cur; j=pre[j])
42                 idx[j] = seq;
43             idx[cur] = seq++;
44         }
45     }
46     if(seq == 0) return result; // 沒有 cycle
47     for(int i=0; i<N; i++)
48         // 沒有被縮點的點
49         if(idx[i] == -1) idx[i] = seq++;
50     // 縮點並重新編號
51     for(Edge& e : edges) {
52         if(idx[e.s] != idx[e.t])
53             e.cost -= inEdge[e.t];
54         e.s = idx[e.s];
55         e.t = idx[e.t];
56     }
57     N = seq;
58     root = idx[root];
59 }
60 }
61 =====
62 O(m+nlog n)時間內解決最小樹形圖問題的演算法。
63 typedef long long ll;
64 #define maxn 102
65 #define INF 0x3f3f3f3f
66 struct UnionFind {
67     int fa[maxn << 1];
68     UnionFind() { memset(fa, 0, sizeof(fa)); }
69     void clear(int n) {
70         memset(fa + 1, 0, sizeof(int) * n);
71     }
72     int find(int x) {
73         return fa[x] ? fa[x] = find(fa[x]) : x;
74     }
75     int operator[](int x) { return find(x); }
76 };
77 struct Edge {
78     int u, v, w, w0;
79 };
80 struct Heap {
81     Edge *e;
82     int rk, constant;
83     Heap *lch, *rch;
84     Heap(Edge *_e):
85         e(_e),rk(1),constant(0),lch(NULL),rch(NULL){}
86     void push() {
87         if (lch) lch->constant += constant;
88         if (rch) rch->constant += constant;
89         e->w += constant;
90         constant = 0;
91     }
92 };
93 Heap *merge(Heap *x, Heap *y) {
94     if (!x) return y;
95     if (!y) return x;
96     if(x->e->w + x->constant > y->e->w + y->constant)
97         swap(x, y);
98     x->push();
99     x->rch = merge(x->rch, y);
100     if (!x->lch || x->lch->rk < x->rch->rk)
101         swap(x->lch, x->rch);
102     if (x->rch)
103         x->rk = x->rch->rk + 1;
104     else
105         x->rk = 1;
106     return x;
107 }
108 Edge *extract(Heap *&x) {
109     Edge *r = x->e;
110     x->push();
111     x = merge(x->lch, x->rch);
112     return r;
113 }
114 vector<Edge> in[maxn];
115 int n, m, fa[maxn << 1], nxt[maxn << 1];
116 Edge *ed[maxn << 1];
117 Heap *Q[maxn << 1];
118 UnionFind id;
119 void contract() {
120     bool mark[maxn << 1];
121     //將圖上的每一個節點與其相連的那些節點進行記錄
122     for (int i = 1; i <= n; i++) {
123         queue<Heap *> q;
124         for (int j = 0; j < in[i].size(); j++)
125             q.push(new Heap(&in[i][j]));
126         while (q.size() > 1) {
127             Heap *u = q.front();
128             q.pop();
129             Heap *v = q.front();
130             q.pop();
131             q.push(merge(u, v));
132         }
133         Q[i] = q.front();
134     }
135     mark[1] = true;
136     for(int a=1,b=1,p;Q[a];b=a,mark[b]=true){
137         //尋找最小入邊以及其端點，保證無環
138         do {
139             ed[a] = extract(Q[a]);
140             a = id[ed[a]->u];
141         } while (a == b && Q[a]);
142         if (a == b) break;
143         if (!mark[a]) continue;
144         //對發現的環進行收縮，以及環內的節點重新編號，
145         //總權值更新
146         for (a = b, n++; a != n; a = p) {
147             id.fa[a] = fa[a] = n;
148             if (Q[a]) Q[a]->constant -= ed[a]->w;
149             Q[n] = merge(Q[n], Q[a]);
150             p = id[ed[a]->u];
151             nxt[p == n ? b : p] = a;
152         }
153     }
154 }
155 ll expand(int x, int r);
156 ll expand_iter(int x) {
157     ll r = 0;
158     for(int u=nxt[x];u!=x;u=nxt[u]){
159         if (ed[u]->w0 >= INF)
160             return INF;
161         else
162             r+=expand(ed[u]->v,u)+ed[u]->w0;
163     }
164     return r;
165 }
166 ll expand(int x, int t) {
167     ll r = 0;
168     for (; x != t; x = fa[x]) {
169         r += expand_iter(x);
170         if (r >= INF) return INF;
171     }
172     return r;
173 }
174 void link(int u, int v, int w) {
175     in[v].push_back({u, v, w, w});
176 }
177 int main() {
178     int rt;
179     scanf("%d %d %d", &n, &m, &rt);
180     for (int i = 0; i < m; i++) {
181         int u, v, w;
182         scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);
183         link(u, v, w);
184     }
185     //保證強連通
186     for (int i = 1; i <= n; i++)
187         link(i > 1 ? i - 1 : n, i, INF);
188     contract();
189     ll ans = expand(rt, n);
190     if (ans >= INF)
191         puts("-1");
192     else
193         printf("%lld\n", ans);

```



```

194     return 0;
195 }

```

3.11 二分圖最大匹配

```

1  /* 核心：最大點獨立集 = |V| -
   /最大匹配數|，用匈牙利演算法找出最大匹配數 */
2  struct Student {
3      int height;
4      char sex;
5      string musicStyle;
6      string sport;
7      bool canMatch(const Student& other) {
8          return ((abs(this->height - other.height) <=
9                  40) && (this->musicStyle ==
10                     other.musicStyle)
11                  && (this->sport != other.sport));
12      }
13      friend istream& operator >> (istream& input,
14                                   Student& student);
15  };
16  vector<Student> boys;
17  vector<Student> girls;
18  vector<vector<int>> G;
19  bool used[505];
20  int p[505]; //pair of boys and girls -> p[j] = i
   代表i男生連到j女生
21  istream& operator >> (istream& input, Student&
22  student) {
23      input >> student.height >> student.sex >>
24      student.musicStyle >> student.sport;
25      return input;
26  }
27  bool match(int i) {
28      for (int j: G[i]) {
29          if (!used[j]) {
30              used[j] = true;
31              if (p[j] == -1 || match(p[j])) {
32                  p[j] = i;
33                  return true;
34              }
35          }
36      }
37      return false;
38  }
39  void maxMatch(int n) {
40      memset(p, -1, sizeof(p));
41      int res = 0;
42      for (int i = 0; i < boys.size(); ++i) {
43          memset(used, false, sizeof(used));
44          if (match(i))
45              ++res;
46      }
47      cout << n - res << '\n';
48  }
49  int main() {
50      int t, n;
51      scanf("%d", &t);
52      while (t--) {
53          scanf("%d", &n);
54          boys.clear();
55          girls.clear();
56          G.assign(n + 5, vector<int>());
57          Student student;
58          for (int i = 0; i < n; ++i) {
59              cin >> student;
60              if (student.sex == 'M')
61                  boys.emplace_back(student);
62              else
63                  girls.emplace_back(student);
64          }
65          for (int i = 0; i < boys.size(); ++i) {
66              for (int j = 0; j < girls.size(); ++j) {
67                  if (boys[i].canMatch(girls[j])) {
68                      G[i].emplace_back(j);
69                  }
70              }
71          }
72      }
73  }

```

```

64      }
65      }
66      }
67      maxMatch(n);
68      }
69      return 0;
70  }

```

3.12 JosephusProblem

```

1  //JosephusProblem，只是規定要先砍1號
2  //所以當作有n - 1個人，目標的13順移成12
3  //再者從0開始比較好算，所以目標12順移成11
4  int getWinner(int n, int k) {
5      int winner = 0;
6      for (int i = 1; i <= n; ++i)
7          winner = (winner + k) % i;
8      return winner;
9  }
10 int main() {
11     int n;
12     while (scanf("%d", &n) != EOF && n){
13         --n;
14         for (int k = 1; k <= n; ++k){
15             if (getWinner(n, k) == 11){
16                 printf("%d\n", k);
17                 break;
18             }
19         }
20     }
21     return 0;
22 }

```

3.13 KM

```

1  /*題意：給定一個W矩陣，現在分成row、column兩個1維陣列
2  W[i][j]=k即代表column[i] + row[j]要>=k
3  求row[] 與 column[]的所有值在滿足矩陣W的要求之下
4  row[] + column[]所有元素相加起來要最小
5  利用KM求二分圖最大權匹配
6  Lx -> vertex labeling of X
7  Ly -> vertex labeling of y
8  一開始Lx[i] = max(W[i][j]), Ly = 0
9  Lx[i] + Ly[j] >= W[i][j]
10 要最小化全部的(Lx[i] + Ly[j])加總
11 不斷的調整vertex
   labeling去找到一條交錯邊皆滿足Lx[i] + Ly[j]
   == W[i][j]的增廣路
12 最後會得到正確的二分圖完美匹配中的最大權分配(先滿足最多匹配
13 意義是將最大化所有匹配邊權重和的問題改成最小化所有點的權重和
14 #define maxn 505
15 int W[maxn][maxn];
16 int Lx[maxn], Ly[maxn];
17 bool S[maxn], T[maxn];
18 //L[i] = j -> S_i配給T_j, -1 for 還沒匹配
19 int L[maxn];
20 int n;
21 bool match(int i) {
22     S[i] = true;
23     for (int j = 0; j < n; ++j) {
24         // KM重點
25         // Lx + Ly >= selected_edge(x, y)
26         // 要想辦法降低Lx + Ly
27         // 所以選Lx + Ly == selected_edge(x, y)
28         if (Lx[i] + Ly[j] == W[i][j] && !T[j]) {
29             T[j] = true;
30             if ((L[j] == -1) || match(L[j])) {
31                 L[j] = i;
32                 return true;
33             }
34         }
35     }
36 }

```

```

36     return false;
37 }
38 // 修改二分圖上的交錯路徑上點的權重
39 // 此舉是在通過調整vertex
    labeling看看能不能產生出新的增廣路(KM的增廣路要求Lx[i]
    + Ly[j] == W[i][j])
40 // 在這裡優先從最小的diff調調看，才能保證最大權重匹配
41 void update()
42 {
43     int diff = 0x3f3f3f3f;
44     for (int i = 0; i < n; ++i) {
45         if (S[i]) {
46             for (int j = 0; j < n; ++j) {
47                 if (!T[j])
48                     diff = min(diff, Lx[i] + Ly[j] -
49                                 W[i][j]);
50             }
51         }
52     }
53     for (int i = 0; i < n; ++i) {
54         if (S[i]) Lx[i] -= diff;
55         if (T[i]) Ly[i] += diff;
56     }
57 }
58 void KM()
59 {
60     for (int i = 0; i < n; ++i) {
61         L[i] = -1;
62         Lx[i] = Ly[i] = 0;
63         for (int j = 0; j < n; ++j)
64             Lx[i] = max(Lx[i], W[i][j]);
65     }
66     for (int i = 0; i < n; ++i) {
67         while(1) {
68             memset(S, false, sizeof(S));
69             memset(T, false, sizeof(T));
70             if (match(i))
71                 break;
72             else
73                 update(); //去調整vertex
74                             labeling以增加增廣路徑
75         }
76     }
77 }
78 int main() {
79     while (scanf("%d", &n) != EOF) {
80         for (int i = 0; i < n; ++i)
81             for (int j = 0; j < n; ++j)
82                 scanf("%d", &W[i][j]);
83         KM();
84         int res = 0;
85         for (int i = 0; i < n; ++i) {
86             if (i != 0)
87                 printf(" %d", Lx[i]);
88             else
89                 printf("%d", Lx[i]);
90             res += Lx[i];
91         }
92         puts("");
93         for (int i = 0; i < n; ++i) {
94             if (i != 0)
95                 printf(" %d", Ly[i]);
96             else
97                 printf("%d", Ly[i]);
98             res += Ly[i];
99         }
100         puts("");
101         printf("%d\n", res);
102     }
103 }

```

3.14 LCA 倍增法

```

2 #define maxn 100005
3 struct Edge {
4     int u, v, w;
5 };
6 vector<vector<Edge>> G; // tree
7 int fa[maxn][31]; //fa[u][i] -> u的第2^i個祖先
8 long long dis[maxn][31];
9 int dep[maxn]; //深度
10 void dfs(int u, int p) { //預處理fa
11     fa[u][0] = p; //因為u的第2^0 = 1的祖先就是p
12     dep[u] = dep[p] + 1;
13     //第2^i的祖先是 (第2^(i-1)個祖先)的第2^(i-1)的祖先
14     //ex: 第8個祖先是 (第4個祖先)的第4個祖先
15     for (int i = 1; i < 31; ++i) {
16         fa[u][i] = fa[fa[u][i-1]][i-1];
17         dis[u][i] = dis[fa[u][i-1]][i-1] +
18                     dis[u][i-1];
19     }
20     //遍歷子節點
21     for (Edge& edge: G[u]) {
22         if (edge.v == p)
23             continue;
24         dis[edge.v][0] = edge.w;
25         dfs(edge.v, u);
26     }
27 }
28 long long lca(int x, int y)
29 { //此函數是找lca同時計算x、y的距離 -> dis(x, lca)
30     + dis(lca, y)
31     //讓y比x深
32     if (dep[x] > dep[y])
33         swap(x, y);
34     int deltaDep = dep[y] - dep[x];
35     long long res = 0;
36     //讓y與x在同一個深度
37     for (int i = 0; deltaDep != 0; ++i, deltaDep >>= 1)
38         if (deltaDep & 1)
39             res += dis[y][i], y = fa[y][i];
40     if (y == x) //x = y -> x、y彼此是彼此的祖先
41         return res;
42     //往上找，一起跳，但x、y不能重疊
43     for (int i = 30; i >= 0 && y != x; --i) {
44         if (fa[x][i] != fa[y][i]) {
45             res += dis[x][i] + dis[y][i];
46             x = fa[x][i];
47             y = fa[y][i];
48         }
49     }
50     //最後發現不能跳了，此時x的第2^0 = 1個祖先(或說y的第2^0 = 1的祖先)即為x、y的lca
51     res += dis[x][0] + dis[y][0];
52     return res;
53 }
54 int main() {
55     int n, q;
56     while (~scanf("%d", &n) && n) {
57         int v, w;
58         G.assign(n + 5, vector<Edge>());
59         for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
60             scanf("%d %d", &v, &w);
61             G[i + 1].push_back({i + 1, v + 1, w});
62             G[v + 1].push_back({v + 1, i + 1, w});
63         }
64         dfs(1, 0);
65         scanf("%d", &q);
66         int u;
67         while (q--) {
68             scanf("%d %d", &u, &v);
69             printf("%lld%c", lca(u + 1, v + 1), (q ? ' ' : '\n'));
70         }
71     }
72     return 0;
73 }

```

1 //倍增法預處理 $O(n\log n)$ ，查詢 $O(\log n)$ ，利用lca找樹上任兩點

3.15 LCA 樹壓平 RMQ

```

1 //樹壓平求LCA RMQ(sparse table
  0(nlogn)建立, 0(1)查詢), 求任意兩點距離,
2 //如果用笛卡兒樹可以壓到0(n)建立, 0(1)查詢
3 //理論上可以過, 但遇到直鏈的case dfs深度會stack
  overflow
4 #define maxn 100005
5 struct Edge {
6     int u, v, w;
7 };
8 int dep[maxn], pos[maxn];
9 long long dis[maxn];
10 int st[maxn * 2][32]; //sparse table
11 int realLCA[maxn * 2][32];
12 //最小深度對應的節點, 及真正的LCA
13 int Log[maxn]; //取代std::log2
14 int tp; // timestamp
15 vector<vector<Edge>> G; // tree
16 void calLog() {
17     Log[1] = 0;
18     Log[2] = 1;
19     for (int i = 3; i < maxn; ++i)
20         Log[i] = Log[i / 2] + 1;
21 }
22 void buildST() {
23     for (int j = 0; Log[tp]; ++j) {
24         for (int i = 0; i + (1 << j) - 1 < tp; ++i) {
25             if (st[i - 1][j] < st[i - 1][j + (1 << i - 1)])
26                 {
27                     st[i][j] = st[i - 1][j];
28                     realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j];
29                 }
30             else {
31                 st[i][j] = st[i - 1][j + (1 << i - 1)];
32                 realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j + (1 << i - 1)];
33             }
34         }
35     }
36 }
37 // 0(nlogn)
38 int query(int l, int r) { // [l, r] min
39     //depth即為lca的深度
40     int k = Log[r - l + 1];
41     if (st[l][k] < st[r - (1 << k) + 1][k])
42         return realLCA[l][k];
43     else
44         return realLCA[r - (1 << k) + 1][k];
45 }
46 void dfs(int u, int p) { //euler tour
47     pos[u] = tp;
48     st[tp][0] = dep[u];
49     realLCA[tp][0] = dep[u];
50     ++tp;
51     for (int i = 0; i < G[u].size(); ++i) {
52         Edge& edge = G[u][i];
53         if (edge.v == p) continue;
54         dep[edge.v] = dep[u] + 1;
55         dis[edge.v] = dis[edge.u] + edge.w;
56         dfs(edge.v, u);
57         st[tp++][0] = dep[u];
58     }
59 }
60 long long getDis(int u, int v) {
61     if (pos[u] > pos[v])
62         swap(u, v);
63     int lca = query(pos[u], pos[v]);
64     return dis[u] + dis[v] - 2 * dis[query(pos[u],
65     pos[v])];
66 }
67 int main() {
68     int n, q;
69     calLog();
70     while (~scanf("%d", &n) && n) {
71         int v, w;
72         G.assign(n + 5, vector<Edge>());

```

```

68     tp = 0;
69     for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
70         scanf("%d %d", &v, &w);
71         G[i].push_back({i, v, w});
72         G[v].push_back({v, i, w});
73     }
74     dfs(0, -1);
75     buildST();
76     scanf("%d", &q);
77     int u;
78     while (q--) {
79         scanf("%d %d", &u, &v);
80         printf("%lld%c", getDis(u, v), (q) ? ' '
81             : '\n');
82     }
83     return 0;
84 }

```

3.16 MCMF

```

1 #define maxn 225
2 #define INF 0x3f3f3f3f
3 struct Edge {
4     int u, v, cap, flow, cost;
5 };
6 //node size, edge size, source, target
7 int n, m, s, t;
8 vector<vector<int>> G;
9 vector<Edge> edges;
10 //SPFA用
11 bool inqueue[maxn];
12 //SPFA用的dis[]
13 long long dis[maxn];
14 //maxFlow一路扣回去時要知道parent
15 //<注> 在這題因為G[]中存的是edgeIndex in edges[]
16 //
17 //    所以parent存的也是對應edges[]中的edgeIndex(主要是方便)
18 int parent[maxn];
19 //maxFlow時需要紀錄到node u時的bottleneck
20 //同時也代表著u該次流出去的量
21 long long outFlow[maxn];
22 void addEdge(int u, int v, int cap, int cost) {
23     edges.emplace_back(Edge{u, v, cap, 0, cost});
24     edges.emplace_back(Edge{v, u, 0, 0, -cost});
25     m = edges.size();
26     G[u].emplace_back(m - 2);
27     G[v].emplace_back(m - 1);
28 }
29 //一邊求最短路的同時一邊MaxFlow
30 bool SPFA(long long& maxFlow, long long& minCost) {
31     //memset(outFlow, 0x3f, sizeof(outFlow));
32     memset(dis, 0x3f, sizeof(dis));
33     memset(inqueue, false, sizeof(inqueue));
34     queue<int> q;
35     q.push(s);
36     dis[s] = 0;
37     inqueue[s] = true;
38     outFlow[s] = INF;
39     while (!q.empty()) {
40         int u = q.front();
41         q.pop();
42         inqueue[u] = false;
43         for (const int edgeIndex: G[u]) {
44             const Edge& edge = edges[edgeIndex];
45             if ((edge.cap > edge.flow) &&
46                 (dis[edge.v] > dis[u] + edge.cost)) {
47                 dis[edge.v] = dis[u] + edge.cost;
48                 parent[edge.v] = edgeIndex;
49                 outFlow[edge.v] = min(outFlow[u],
50                     (long long)(edge.cap -
51                     edge.flow));
52                 if (!inqueue[edge.v]) {
53                     q.push(edge.v);
54                     inqueue[edge.v] = true;

```

```

51     }
52     }
53 }
54 }
55 //如果dis[t] > 0代表根本不賺還倒賠
56 if (dis[t] > 0)
57     return false;
58 maxFlow += outFlow[t];
59 minCost += dis[t] * outFlow[t];
60 //一路更新回去這次最短路流完後要維護的MaxFlow演算法相同
61 int curr = t;
62 while (curr != s) {
63     edges[parent[curr]].flow += outFlow[t];
64     edges[parent[curr] ^ 1].flow -= outFlow[t];
65     curr = edges[parent[curr]].u;
66 }
67 return true;
68 }
69 long long MCMF() {
70     long long maxFlow = 0;
71     long long minCost = 0;
72     while (SPFA(maxFlow, minCost))
73         ;
74     return minCost;
75 }
76 int main() {
77     int T;
78     scanf("%d", &T);
79     for (int Case = 1; Case <= T; ++Case){
80         //總共幾個月，囤貨成本
81         int M, I;
82         scanf("%d %d", &M, &I);
83         //node size
84         n = M + M + 2;
85         G.assign(n + 5, vector<int>());
86         edges.clear();
87         s = 0;
88         t = M + M + 1;
89         for (int i = 1; i <= M; ++i) {
90             int produceCost, produceMax, sellPrice,
91                 sellMax, inventoryMonth;
92             scanf("%d %d %d %d %d", &produceCost,
93                 &produceMax, &sellPrice, &sellMax,
94                 &inventoryMonth);
95             addEdge(s, i, produceMax, produceCost);
96             addEdge(M + i, t, sellMax, -sellPrice);
97             for (int j = 0; j <= inventoryMonth; ++j)
98                 if (i + j <= M)
99                     addEdge(i, M + i + j, INF, I * j);
100         }
101         printf("Case %d: %lld\n", Case, -MCMF());
102     }
103     return 0;
104 }

```

3.17 莫隊

```

1  /*利用prefix前綴XOR和
2  如果要求[x, y]的XOR和只要回答prefix[y] ^ prefix[x -
3  1]即可在O(1)回答
4  同時維護cnt[i]代表[x, y]XOR和 == i的個數
5  如此我們知道[l, r]可以快速知道[l - 1, r], [l + 1,
6  r], [l, r - 1], [l, r + 1]的答案
7  就符合Mo's algorithm的思維O(N * sqrt(n))
8  每次轉移為O(1)，具體轉移方法在下面*/
9  #define maxn 100005
10 //在此prefix[i]是[1, i]的XOR和
11 int prefix[maxn];
12 //log_2(1000000) =
13 19.931568569324174087221916576937...
14 //所以開到1 << 20

```

```

12 //cnt[i]代表的是有符合nums[x, y] such that nums[x] ^
13     nums[x + 1] ^ .. ^ nums[y] == i
14 //的個數
15 long long cnt[1 << 20];
16 //塊大小 -> sqrt(n)
17 int sqrtQ;
18 struct Query {
19     int l, r, id;
20     bool operator < (const Query& other) const {
21         if (this->l / sqrtQ != other.l / sqrtQ)
22             return this->l < other.l;
23         //奇偶排序(優化)
24         if (this->l / sqrtQ & 1)
25             return this->r < other.r;
26         return this->r > other.r;
27     }
28 };
29 Query queries[maxn];
30 long long ans[maxn];
31 long long res = 0;
32 int k;
33 void add(int x) {
34     res += cnt[k ^ prefix[x]];
35     ++cnt[prefix[x]];
36 }
37 void sub(int x) {
38     --cnt[prefix[x]];
39     res -= cnt[k ^ prefix[x]];
40 }
41 int main() {
42     int n, m;
43     scanf("%d %d %d", &n, &m, &k);
44     sqrtQ = sqrt(n);
45     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
46         scanf("%d", &prefix[i]);
47         prefix[i] ^= prefix[i - 1];
48     }
49     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
50         scanf("%d %d", &queries[i].l, &queries[i].r);
51         //減1是因為prefix[i]是[1,
52         i]的前綴XOR和，所以題目問[l,
53         r]我們要回答[l - 1, r]的答案
54         --queries[i].l;
55         queries[i].id = i;
56     }
57     sort(queries + 1, queries + m + 1);
58     int l = 1, r = 0;
59     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
60         while (l < queries[i].l) {
61             sub(l);
62             ++l;
63         }
64         while (l > queries[i].l) {
65             --l;
66             add(l);
67         }
68         while (r < queries[i].r) {
69             ++r;
70             add(r);
71         }
72         while (r > queries[i].r) {
73             sub(r);
74             --r;
75         }
76         ans[queries[i].id] = res;
77     }
78     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
79         printf("%lld\n", ans[i]);
80     }
81     return 0;
82 }

```

3.18 Dancing Links

```

1 struct DLX {

```

```

2   int seq, resSize;
3   int col[maxn], row[maxn];
4   int U[maxn], D[maxn], R[maxn], L[maxn];
5   int rowHead[maxn], colSize[maxn];
6   int result[maxn];
7   DLX(int r, int c) {
8       for(int i=0; i<=c; i++) {
9           L[i] = i-1, R[i] = i+1;
10          U[i] = D[i] = i;
11      }
12      L[R[seq=c]]=c;
13      resSize = -1;
14      memset(rowHead, 0, sizeof(rowHead));
15      memset(colSize, 0, sizeof(colSize));
16  }
17  void insert(int r, int c) {
18      row[++seq]=r, col[seq]=c, ++colSize[c];
19      U[seq]=c, D[seq]=D[c], U[D[c]]=seq, D[c]=seq;
20      if(rowHead[r]) {
21          L[seq]=rowHead[r], R[seq]=R[rowHead[r]];
22          L[R[rowHead[r]]]=seq, R[rowHead[r]]=seq;
23      } else {
24          rowHead[r] = L[seq] = R[seq] = seq;
25      }
26  }
27  void remove(int c) {
28      L[R[c]] = L[c], R[L[c]] = R[c];
29      for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
30          for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j]) {
31              U[D[j]] = U[j];
32              D[U[j]] = D[j];
33              --colSize[col[j]];
34          }
35      }
36  }
37  void recover(int c) {
38      for(int i=U[c]; i!=c; i=U[i]) {
39          for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j]) {
40              U[D[j]] = D[U[j]] = j;
41              ++colSize[col[j]];
42          }
43      }
44      L[R[c]] = R[L[c]] = c;
45  }
46  bool dfs(int idx=0) {    // 判斷其中一解版
47      if(R[0] == 0) {
48          resSize = idx;
49          return true;
50      }
51      int c = R[0];
52      for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
53          if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
54      }
55      remove(c);
56      for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
57          result[idx] = row[i];
58          for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
59              remove(col[j]);
60          if(dfs(idx+1)) return true;
61          for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
62              recover(col[j]);
63      }
64      recover(c);
65      return false;
66  }
67  void dfs(int idx=0) {    // 判斷最小 dfs depth 版
68      if(R[0] == 0) {
69          resSize = min(resSize, idx); // 注意init值
70          return;
71      }
72      int c = R[0];
73      for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
74          if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
75      }
76      remove(c);
77      for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
78          for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])

```

```

79              remove(col[j]);
80              dfs(idx+1);
81              for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
82                  recover(col[j]);
83          }
84          recover(c);
85      }
86  };

```

4 DataStructure

4.1 線段樹 1D

```

1   #define MAXN 1000
2   int data[MAXN]; //原數據
3   int st[4 * MAXN]; //線段樹
4   int tag[4 * MAXN]; //懶標
5   inline int pull(int l, int r) {
6       // 隨題目改變sum、max、min
7       // l、r是左右樹的index
8       return st[l] + st[r];
9   }
10  void build(int l, int r, int i) {
11      // 在[l, r]區間建樹，目前根的index為i
12      if (l == r) {
13          st[i] = data[l];
14          return;
15      }
16      int mid = l + ((r - l) >> 1);
17      build(l, mid, i * 2);
18      build(mid + 1, r, i * 2 + 1);
19      st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
20  }
21  int query(int ql, int qr, int l, int r, int i) {
22      // [ql, qr]是查詢區間,[l, r]是當前節點包含的區間
23      if (ql <= l && r <= qr)
24          return st[i];
25      int mid = l + ((r - l) >> 1);
26      if (tag[i]) {
27          //如果當前懶標有值則更新左右節點
28          st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
29          st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
30          tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
31          tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
32          tag[i] = 0;
33      }
34      int sum = 0;
35      if (ql <= mid)
36          sum += query(ql, qr, l, mid, i * 2);
37      if (qr > mid)
38          sum += query(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1);
39      return sum;
40  }
41  void update(int ql, int qr, int l, int r, int i, int c) {
42      // [ql, qr]是查詢區間,[l, r]是當前節點包含的區間
43      // c是變化量
44      if (ql <= l && r <= qr) {
45          st[i] += (r - l + 1) * c;
46          //求和,此需乘上區間長度
47          tag[i] += c;
48          return;
49      }
50      int mid = l + ((r - l) >> 1);
51      if (tag[i] && l != r) {
52          //如果當前懶標有值則更新左右節點
53          st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
54          st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
55          tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
56          tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
57          tag[i] = 0;
58      }
59      if (ql <= mid) update(ql, qr, l, mid, i * 2, c);

```

```

59     if (qr > mid) update(ql, qr, mid+1, r, i*2+1, c);
60     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
61 }
62 //如果是直接改值而不是加值，query與update中的tag與st的
63 //改值從+=改成=

```

4.2 線段樹 2D

```

1 //純2D segment tree 區間查詢單點修改最大最小值
2 #define maxn 2005 //500 * 4 + 5
3 int maxST[maxn][maxn], minST[maxn][maxn];
4 int N;
5 void modifyY(int index, int l, int r, int val, int
  yPos, int xIndex, bool xIsLeaf) {
6     if (l == r) {
7         if (xIsLeaf) {
8             maxST[xIndex][index] =
              minST[xIndex][index] = val;
9             return;
10        }
11        maxST[xIndex][index] = max(maxST[xIndex *
          2][index], maxST[xIndex * 2 + 1][index]);
12        minST[xIndex][index] = min(minST[xIndex *
          2][index], minST[xIndex * 2 + 1][index]);
13    }
14    else {
15        int mid = (l + r) / 2;
16        if (yPos <= mid)
17            modifyY(index * 2, l, mid, val, yPos,
              xIndex, xIsLeaf);
18        else
19            modifyY(index * 2 + 1, mid + 1, r, val,
              yPos, xIndex, xIsLeaf);
20
21        maxST[xIndex][index] =
          max(maxST[xIndex][index * 2],
            maxST[xIndex][index * 2 + 1]);
22        minST[xIndex][index] =
          min(minST[xIndex][index * 2],
            minST[xIndex][index * 2 + 1]);
23    }
24 }
25 void modifyX(int index, int l, int r, int val, int
  xPos, int yPos) {
26     if (l == r) {
27         modifyY(1, 1, N, val, yPos, index, true);
28     }
29     else {
30         int mid = (l + r) / 2;
31         if (xPos <= mid)
32             modifyX(index * 2, l, mid, val, xPos,
              yPos);
33         else
34             modifyX(index * 2 + 1, mid + 1, r, val,
              xPos, yPos);
35         modifyY(1, 1, N, val, yPos, index, false);
36     }
37 }
38 void queryY(int index, int l, int r, int yql, int
  yqr, int xIndex, int& vmax, int& vmin) {
39     if (yql <= l && r <= yqr) {
40         vmax = max(vmax, maxST[xIndex][index]);
41         vmin = min(vmin, minST[xIndex][index]);
42     }
43     else
44     {
45         int mid = (l + r) / 2;
46         if (yql <= mid)
47             queryY(index * 2, l, mid, yql, yqr,
              xIndex, vmax, vmin);
48         if (mid < yqr)
49             queryY(index * 2 + 1, mid + 1, r, yql,
              yqr, xIndex, vmax, vmin);
50     }
51 }

```

```

52 void queryX(int index, int l, int r, int xql, int
  xqr, int yql, int yqr, int& vmax, int& vmin) {
53     if (xql <= l && r <= xqr) {
54         queryY(1, 1, N, yql, yqr, index, vmax, vmin);
55     }
56     else {
57         int mid = (l + r) / 2;
58         if (xql <= mid)
59             queryX(index * 2, l, mid, xql, xqr, yql,
              yqr, vmax, vmin);
60         if (mid < xqr)
61             queryX(index * 2 + 1, mid + 1, r, xql,
              xqr, yql, yqr, vmax, vmin);
62     }
63 }
64 int main() {
65     while (scanf("%d", &N) != EOF) {
66         int val;
67         for (int i = 1; i <= N; ++i) {
68             for (int j = 1; j <= N; ++j) {
69                 scanf("%d", &val);
70                 modifyX(1, 1, N, val, i, j);
71             }
72         }
73         int q;
74         int vmax, vmin;
75         int xql, xqr, yql, yqr;
76         char op;
77         scanf("%d", &q);
78         while (q--) {
79             getchar(); //for \n
80             scanf("%c", &op);
81             if (op == 'q') {
82                 scanf("%d %d %d %d", &xql, &yql,
                  &xqr, &yqr);
83                 vmax = -0x3f3f3f3f;
84                 vmin = 0x3f3f3f3f;
85                 queryX(1, 1, N, xql, xqr, yql, yqr,
                  vmax, vmin);
86                 printf("%d %d\n", vmax, vmin);
87             }
88             else {
89                 scanf("%d %d %d", &xql, &yql, &val);
90                 modifyX(1, 1, N, val, xql, yql);
91             }
92         }
93     }
94     return 0;
95 }

```

4.3 權值線段樹

```

1 //權值線段樹 + 離散化 解決區間第k小問題
2 //其他網路上的解法：2個heap，Treap，AVL tree
3 #define maxn 30005
4 int nums[maxn];
5 int getArr[maxn];
6 int id[maxn];
7 int st[maxn << 2];
8 void update(int index, int l, int r, int qx) {
9     if (l == r)
10     {
11         ++st[index];
12         return;
13     }
14
15     int mid = (l + r) / 2;
16     if (qx <= mid)
17         update(index * 2, l, mid, qx);
18     else
19         update(index * 2 + 1, mid + 1, r, qx);
20     st[index] = st[index * 2] + st[index * 2 + 1];
21 }
22 //找區間第k個小的
23 int query(int index, int l, int r, int k) {

```



```

24     if (l == r)
25         return id[l];
26     int mid = (l + r) / 2;
27     //k比左子樹小
28     if (k <= st[index * 2])
29         return query(index * 2, l, mid, k);
30     else
31         return query(index * 2 + 1, mid + 1, r, k -
32             st[index * 2]);
33 }
34 int main() {
35     int t;
36     cin >> t;
37     bool first = true;
38     while (t--) {
39         if (first)
40             first = false;
41         else
42             puts("");
43         memset(st, 0, sizeof(st));
44         int m, n;
45         cin >> m >> n;
46         for (int i = 1; i <= m; ++i) {
47             cin >> nums[i];
48             id[i] = nums[i];
49         }
50         for (int i = 0; i < n; ++i)
51             cin >> getArr[i];
52         //離散化
53         //防止m == 0
54         if (m)
55             sort(id + 1, id + m + 1);
56         int stSize = unique(id + 1, id + m + 1) - (id
57             + 1);
58         for (int i = 1; i <= m; ++i) {
59             nums[i] = lower_bound(id + 1, id + stSize
60                 + 1, nums[i]) - id;
61         }
62         int addCount = 0;
63         int getCount = 0;
64         int k = 1;
65         while (getCount < n) {
66             if (getArr[getCount] == addCount) {
67                 printf("%d\n", query(1, 1, stSize,
68                     k));
69                 ++k;
70                 ++getCount;
71             }
72             else {
73                 update(1, 1, stSize, nums[addCount +
74                     1]);
75                 ++addCount;
76             }
77         }
78     }
79     return 0;
80 }

```

4.4 Trie

```

1  const int maxn = 300000 + 10;
2  const int mod = 20071027;
3  int dp[maxn];
4  int mp[4000*100 + 10][26];
5  char str[maxn];
6  struct Trie {
7      int seq;
8      int val[maxn];
9      Trie() {
10         seq = 0;
11         memset(val, 0, sizeof(val));
12         memset(mp, 0, sizeof(mp));
13     }
14     void insert(char* s, int len) {
15         int r = 0;

```

```

16         for(int i=0; i<len; i++) {
17             int c = s[i] - 'a';
18             if(!mp[r][c]) mp[r][c] = ++seq;
19             r = mp[r][c];
20         }
21         val[r] = len;
22         return;
23     }
24     int find(int idx, int len) {
25         int result = 0;
26         for(int r=0; idx<len; idx++) {
27             int c = str[idx] - 'a';
28             if(!r = mp[r][c]) return result;
29             if(val[r])
30                 result = (result + dp[idx + 1]) % mod;
31         }
32         return result;
33     }
34 };
35 int main() {
36     int n, tc = 1;
37     while(~scanf("%s", str, &n)) {
38         Trie tr;
39         int len = strlen(str);
40         char word[100+10];
41         memset(dp, 0, sizeof(dp));
42         dp[len] = 1;
43         while(n--) {
44             scanf("%s", word);
45             tr.insert(word, strlen(word));
46         }
47         for(int i=len-1; i>=0; i--)
48             dp[i] = tr.find(i, len);
49         printf("Case %d: %d\n", tc++, dp[0]);
50     }
51     return 0;
52 }
53 /****Input****
54 * abcd
55 * 4
56 * a b cd ab
57 *****
58 ****Output***
59 * Case 1: 2
60 *****/

```

4.5 單調隊列

```

1  //單調隊列
2  "如果一個選手比你小還比你強，你就可以退役了。"--單調隊列
3
4  example
5
6  給出一個長度為 n 的數組，
7  輸出每 k 個連續的數中的最大值和最小值。
8
9  #include <bits/stdc++.h>
10 #define maxn 1000100
11 using namespace std;
12 int q[maxn], a[maxn];
13 int n, k;
14
15 void getmin() {
16     // 得到這個隊列裡的最小值，直接找到最後的就行了
17     int head=0, tail=0;
18     for(int i=1; i<=k; i++) {
19         while(head<=tail && a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
20         q[++tail]=i;
21     }
22     for(int i=k; i<=n; i++) {
23         while(head<=tail && a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
24         q[++tail]=i;
25         while(q[head]<=i-k) head++;
26         cout<<a[q[head]]<<" ";
27     }

```

```

28     cout<<endl;
29 }
30
31 void getmax() { // 和上面同理
32     int head=0, tail=0;
33     for(int i=1; i<k; i++) {
34         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i]) tail--;
35         q[++tail]=i;
36     }
37     for(int i=k; i<=n; i++) {
38         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i]) tail--;
39         q[++tail]=i;
40         while(q[head]<=i-k) head++;
41         cout<<a[q[head]]<<" ";
42     }
43     cout<<endl;
44 }
45
46 int main(){
47     cin>>n>>k; // 每k個連續的數
48     for(int i=1; i<=n; i++) cin>>a[i];
49     getmin();
50     getmax();
51     return 0;
52 }

```

5 geometry

5.1 intersection

```

1 using LL = long long;
2
3 struct Point2D {
4     LL x, y;
5 };
6
7 struct Line2D {
8     Point2D s, e;
9     LL a, b, c; // L: ax + by = c
10    Line2D(Point2D s, Point2D e): s(s), e(e) {
11        a = e.y - s.y;
12        b = s.x - e.x;
13        c = a * s.x + b * s.y;
14    }
15 };
16
17 // 用克拉馬公式求二元一次解
18 Point2D intersection2D(Line2D l1, Line2D l2) {
19     LL D = l1.a * l2.b - l2.a * l1.b;
20     LL Dx = l1.c * l2.b - l2.c * l1.b;
21     LL Dy = l1.a * l2.c - l2.a * l1.c;
22
23     if(D) { // intersection
24         double x = 1.0 * Dx / D;
25         double y = 1.0 * Dy / D;
26     } else {
27         if(Dx || Dy) // Parallel lines
28             else // Same line
29     }
30 }

```

5.2 半平面相交

```

1 // Q: 給定一張凸包(已排序的點),
2 // 找出圖中離凸包外最遠的距離
3
4 const int maxn = 100 + 10;
5 const double eps = 1e-7;
6
7 struct Vector {
8     double x, y;
9     Vector(double x=0.0, double y=0.0): x(x), y(y) {}

```

```

10
11     Vector operator+(Vector v) {
12         return Vector(x+v.x, y+v.y);
13     }
14     Vector operator-(Vector v) {
15         return Vector(x-v.x, y-v.y);
16     }
17     Vector operator*(double val) {
18         return Vector(x*val, y*val);
19     }
20     double dot(Vector v) { return x*v.x + y*v.y; }
21     double cross(Vector v) { return x*v.y - y*v.x; }
22     double length() { return sqrt(dot(*this)); }
23     Vector unit_normal_vector() {
24         double len = length();
25         return Vector(-y/len, x/len);
26     }
27 };
28
29 using Point = Vector;
30
31 struct Line {
32     Point p;
33     Vector v;
34     double ang;
35     Line(Point p={}, Vector v={}): p(p), v(v) {
36         ang = atan2(v.y, v.x);
37     }
38     bool operator<(const Line& l) const {
39         return ang < l.ang;
40     }
41     Point intersection(Line l) {
42         Vector u = p - l.p;
43         double t = l.v.cross(u) / v.cross(l.v);
44         return p + v*t;
45     }
46 };
47
48 int n, m;
49 Line narrow[maxn]; // 要判斷的直線
50 Point poly[maxn]; // 能形成半平面交的凸包邊界點
51
52 // return true if point p is on the left of line l
53 bool onLeft(Point p, Line l) {
54     return l.v.cross(p-l.p) > 0;
55 }
56
57 int halfplaneIntersection() {
58     int l, r;
59     Line L[maxn]; // 排序後的向量隊列
60     Point P[maxn]; // s[i] 跟 s[i-1] 的交點
61
62     L[l=r=0] = narrow[0]; // notice: narrow is sorted
63     for(int i=1; i<n; i++) {
64         while(l<r && !onLeft(P[r-1], narrow[i])) r--;
65         while(l<r && !onLeft(P[l], narrow[i])) l++;
66
67         L[++r] = narrow[i];
68         if(l < r) P[r-1] = L[r-1].intersection(L[r]);
69     }
70
71     while(l<r && !onLeft(P[r-1], L[l])) r--;
72     if(r-l <= 1) return 0;
73
74     P[r] = L[r].intersection(L[l]);
75
76     int m=0;
77     for(int i=1; i<=r; i++) {
78         poly[m++] = P[i];
79     }
80
81     return m;
82 }
83
84 Point pt[maxn];
85 Vector vec[maxn];
86 Vector normal[maxn]; // normal[i] = vec[i] 的單位法向量

```

```

87 |
88 | double bsearch(double l=0.0, double r=1e4) {
89 |     if(abs(r-l) < eps) return l;
90 |
91 |     double mid = (l + r) / 2;
92 |
93 |     for(int i=0; i<n; i++) {
94 |         narrow[i] = Line(pt[i]+normal[i]*mid, vec[i]);
95 |     }
96 |
97 |     if(halfplaneIntersection())
98 |         return bsearch(mid, r);
99 |     else return bsearch(l, mid);
100 | }
101 |
102 | int main() {
103 |     while(~scanf("%d", &n) && n) {
104 |         for(int i=0; i<n; i++) {
105 |             double x, y;
106 |             scanf("%lf%lf", &x, &y);
107 |             pt[i] = {x, y};
108 |         }
109 |         for(int i=0; i<n; i++) {
110 |             vec[i] = pt[(i+1)%n] - pt[i];
111 |             normal[i] = vec[i].unit_normal_vector();
112 |         }
113 |
114 |         printf("%.6lf\n", bsearch());
115 |     }
116 |     return 0;
117 | }

```

5.3 凸包

```

1 | // Q: 平面上給定多個區域，由多個座標點所形成，再給定
2 | // 多點(x,y)，判斷有落點的區域(destroyed)的面積總和。
3 | #include <bits/stdc++.h>
4 | using namespace std;
5 |
6 | const int maxn = 500 + 10;
7 | const int maxCoordinate = 500 + 10;
8 |
9 | struct Point {
10 |     int x, y;
11 | };
12 |
13 | int n;
14 | bool destroyed[maxn];
15 | Point arr[maxn];
16 | vector<Point> polygons[maxn];
17 |
18 | void scanAndSortPoints() {
19 |     int minX = maxCoordinate, minY = maxCoordinate;
20 |     for(int i=0; i<n; i++) {
21 |         int x, y;
22 |         scanf("%d%d", &x, &y);
23 |         arr[i] = (Point){x, y};
24 |         if(y < minY || (y == minY && x < minX)) {
25 |             // If there are floating points, use:
26 |             // if(y<minY || (abs(y-minY)<eps && x<minX)) {
27 |                 minX = x, minY = y;
28 |             }
29 |         }
30 |     }
31 |     sort(arr, arr+n, [minX, minY](Point& a, Point& b){
32 |         double theta1 = atan2(a.y - minY, a.x - minX);
33 |         double theta2 = atan2(b.y - minY, b.x - minX);
34 |         return theta1 < theta2;
35 |     });
36 |     return;
37 | }
38 |
39 | // returns cross product of u(AB) x v(AC)
40 | int cross(Point& A, Point& B, Point& C) {
41 |     int u[2] = {B.x - A.x, B.y - A.y};
42 |     int v[2] = {C.x - A.x, C.y - A.y};

```

```

42 |     return (u[0] * v[1]) - (u[1] * v[0]);
43 | }
44 |
45 | // size of arr = n >= 3
46 | // st = the stack using vector, m = index of the top
47 | vector<Point> convex_hull() {
48 |     vector<Point> st(arr, arr+3);
49 |     for(int i=3, m=2; i<n; i++, m++) {
50 |         while(m >= 2) {
51 |             if(cross(st[m], st[m-1], arr[i]) < 0)
52 |                 break;
53 |             st.pop_back();
54 |             m--;
55 |         }
56 |         st.push_back(arr[i]);
57 |     }
58 |     return st;
59 | }
60 |
61 | bool inPolygon(vector<Point>& vec, Point p) {
62 |     vec.push_back(vec[0]);
63 |     for(int i=1; i<vec.size(); i++) {
64 |         if(cross(vec[i-1], vec[i], p) < 0) {
65 |             vec.pop_back();
66 |             return false;
67 |         }
68 |     }
69 |     vec.pop_back();
70 |     return true;
71 | }
72 |
73 | 1 | x1  x2  x3  x4  x5          xn |
74 | A = - | x   x   x   x   x   x ... x |
75 | 2 | y1  y2  y3  y4  y5          yn |
76 | double calculateArea(vector<Point>& v) {
77 |     v.push_back(v[0]); // make v[n] = v[0]
78 |     double result = 0.0;
79 |     for(int i=1; i<v.size(); i++)
80 |         result += v[i-1].x*v[i].y - v[i-1].y*v[i].x;
81 |     v.pop_back();
82 |     return result / 2.0;
83 | }
84 |
85 | int main() {
86 |     int p = 0;
87 |     while(~scanf("%d", &n) && (n != -1)) {
88 |         scanAndSortPoints();
89 |         polygons[p++] = convex_hull();
90 |     }
91 |
92 |     int x, y;
93 |     double result = 0.0;
94 |     while(~scanf("%d%d", &x, &y)) {
95 |         for(int i=0; i<p; i++) {
96 |             if(inPolygon(polygons[i], (Point){x, y}))
97 |                 destroyed[i] = true;
98 |         }
99 |     }
100 |     for(int i=0; i<p; i++) {
101 |         if(destroyed[i])
102 |             result += calculateArea(polygons[i]);
103 |     }
104 |     printf("%.2lf\n", result);
105 |     return 0;
106 | }

```

6 DP

6.1 抽屜

```

1 | long long dp[70][70][2];
2 | // 初始條件
3 | dp[1][0][0] = dp[1][1][1] = 1;
4 | for (int i = 2; i <= 66; ++i){

```

```

5 // i個抽屜0個安全且上方0 = (底下i -
  1個抽屜且1個安全且最上面L) + (底下n -
  1個抽屜0個安全且最上方為0)
6 dp[i][0][0] = dp[i - 1][1][1] + dp[i - 1][0][0];
7 for (int j = 1; j <= i; ++j) {
8     dp[i][j][0] = dp[i - 1][j + 1][1] + dp[i -
  1][j][0];
9     dp[i][j][1] = dp[i - 1][j - 1][1] + dp[i -
  1][j - 1][0];
10 }
11 } //答案在 dp[n][s][0] + dp[n][s][1];

```

6.2 Deque 最大差距

```

1 /*定義dp[l][r]是l ~ r時與先手最大差異值
2 Deque可以拿頭尾
3 所以轉移式中dp[l][r]與dp[l + 1][r]、dp[l][r - 1]有關
4 轉移式:
5 dp[l][r] = max{a[l] - solve(l + 1, r), a[r] -
  solve(l, r - 1)}
6 裡面用減的主要是因為求的是相減且會一直換手，所以正負正負
7 #define maxn 3005
8 bool vis[maxn][maxn];
9 long long dp[maxn][maxn];
10 long long a[maxn];
11 long long solve(int l, int r) {
12     if (l > r)
13         return 0;
14     if (vis[l][r])
15         return dp[l][r];
16     vis[l][r] = true;
17     long long res = a[l] - solve(l + 1, r);
18     res = max(res, a[r] - solve(l, r - 1));
19     return dp[l][r] = res;
20 }
21 int main() {
22     ...
23     printf("%lld\n", solve(1, n));
24 }

```

6.3 LCS 和 LIS

```

1 //最長共同子序列(LCS)
2 給定兩序列 A,B，求最長的序列 C，
3 C 同時為 A,B 的子序列。
4 //最長遞增子序列(LIS)
5 給你一個序列 A，求最長的序列 B，
6 B 是一個(非)嚴格遞增序列，且為 A 的子序列。
7 //LCS 和 LIS 題目轉換
8 LIS 轉成 LCS
9 1. A 為原序列，B=sort(A)
10 2. 對 A,B 做 LCS
11 LCS 轉成 LIS
12 1. A, B 為原本的兩序列
13 2. 最 A 序列作編號轉換，將轉換規則套用在 B
14 3. 對 B 做 LIS
15 4. 重複的數字在編號轉換時後要變成不同的數字，
16 越早出現的數字要越小
17 5. 如果有數字在 B 裡面而不在 A 裡面，
18 直接忽略這個數字不做轉換即可

```

6.4 RangeDP

```

1 //區間dp
2 int dp[55][55]; // dp[i][j] -> [i,
  j]切割區間中最小的cost
3 int cuts[55];
4 int solve(int i, int j) {

```

```

5     if (dp[i][j] != -1)
6         return dp[i][j];
7     //代表沒有其他切法，只能是cuts[j] - cuts[i]
8     if (i == j - 1)
9         return dp[i][j] = 0;
10    int cost = 0x3f3f3f3f;
11    for (int m = i + 1; m < j; ++m) {
12        //枚舉區間中間切點
13        cost = min(cost, solve(i, m) + solve(m, j) +
  cuts[j] - cuts[i]);
14    }
15    return dp[i][j] = cost;
16 }
17 int main() {
18     int l;
19     int n;
20     while (scanf("%d", &l) != EOF && l){
21         scanf("%d", &n);
22         for (int i = 1; i <= n; ++i)
23             scanf("%d", &cuts[i]);
24         cuts[0] = 0;
25         cuts[n + 1] = 1;
26         memset(dp, -1, sizeof(dp));
27         printf("The minimum cutting is %d.\n",
  solve(0, n + 1));
28     }
29     return 0;
30 }

```

6.5 stringDP

• Edit distance

S_1 最少需要經過幾次增、刪或換字變成 S_2

$$dp[i][j] = \begin{cases} i+1 & \text{if } j = -1 \\ j+1 & \text{if } i = -1 \\ \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] \\ dp[i][j-1] \\ dp[i-1][j] \end{cases} & \text{if } S_1[i] = S_2[j] \\ \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] \\ dp[i][j-1] \\ dp[i-1][j] \end{cases} + 1 & \text{if } S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases}$$

• Longest Palindromic Subsequence

$$dp[l][r] = \begin{cases} 1 & \text{if } l = r \\ dp[l+1][r-1] & \text{if } S[l] = S[r] \\ \max\{dp[l+1][r], dp[l][r-1]\} & \text{if } S[l] \neq S[r] \end{cases}$$

6.6 TreeDP 有幾個 path 長度為 k

```

1 #define maxn 50005
2 #define maxk 505
3 //dp[u][u]的child且距離u長度k的數量
4 long long dp[maxn][maxk];
5 vector<vector<int>> G;
6 int n, k;
7 long long res = 0;
8 void dfs(int u, int p) {
9     //u自己
10    dp[u][0] = 1;
11    for (int v: G[u]) {
12        if (v == p)
13            continue;
14        dfs(v, u);
15        for (int i = 1; i <= k; ++i) {
16            //子樹v距離i - 1的等於對於u來說距離i的
17            dp[u][i] += dp[v][i - 1];
18        }
19    }
20    //統計在u子樹中距離u為k的數量
21    res += dp[u][k];
22    //統計橫跨u但還是在u的子樹中合計長度為k的:
23    //考慮u有一子節點v，在v子樹中距離v長度為x的
24    //以及不在v子樹但在u子樹中(這樣才會是橫跨u)且距離u長度為k
  - x - 1的
25    //共有0.5 * (dp[v][x] * (dp[u][k - x - 1] -
  dp[v][k - x - 2]))

```

```

26 //以上算式是重點，可使複雜度下降，否則枚舉一定超時
27 //其中 dp[u][k - x - 1]是所有u子樹中距離u為k - x
    - 1的節點
28 // - dp[v][k - x -
    2]是因為我們不要v子樹的節點且距離u為k - x -
    1的(要v子樹以外的)，
29 //那些點有dp[v][k - x - 2]，最後0.5是由於計算中i
    -> j以及j -> i(i、j是不同節點)
30 //都會被算一遍，所以要 * 0.5
31 long long cnt = 0;
32 for (int v: G[u]) {
33     if (v == p)
34         continue;
35     for (int x = 0; x <= k - 2; ++x) {
36         cnt += dp[v][x] * (dp[u][k - x - 1] -
            dp[v][k - x - 2]);
37     }
38 }
39 res += cnt / 2;
40 }
41 int main() {
42     scanf("%d %d", &n, &k);
43     G.assign(n + 5, vector<int>());
44     int u, v;
45     for (int i = 1; i < n; ++i) {
46         scanf("%d %d", &u, &v);
47         G[u].emplace_back(v);
48         G[v].emplace_back(u);
49     }
50     dfs(1, -1);
51     printf("%lld\n", res);
52     return 0;
53 }

```

6.7 TreeDP reroot

```

1 /*f(0)與f(2)的關係
2 f(2) = f(0) + a - b
3 a = n - b, (subtree(2)以外的節點)
4 b = subtreeSize(2), (subtree(2))
5 所以f(n)是n為root到所有點的距離
6 f(2) = f(0) + n - 2 * subtreeSize(2)
7 這就是快速得到答案的轉移式
8 f(child) = f(parent) + n - 2 * subtreeSize(child)
9 流程
10 1. root = 0去求各項subtreeSize
11 2. 求f(root)
12 3. 以f(0)去求出re-root後的所有f(v), v != 0
13 整體來說
14 暴力解 O(n ^ 2)
15 re-root dp on tree O(n + n + n) -> O(n)*
16 class Solution {
17 public:
18     vector<int> sumOfDistancesInTree(int n,
        vector<vector<int>>& edges) {
19         this->res.assign(n, 0);
20         G.assign(n + 5, vector<int>());
21         for (vector<int>& edge: edges) {
22             G[edge[0]].emplace_back(edge[1]);
23             G[edge[1]].emplace_back(edge[0]);
24         }
25         memset(this->visited, 0,
            sizeof(this->visited));
26         this->dfs(0);
27         memset(this->visited, 0,
            sizeof(this->visited));
28         this->res[0] = this->dfs2(0, 0);
29         memset(this->visited, 0,
            sizeof(this->visited));
30         this->dfs3(0, n);
31         return this->res;
32     }
33 private:
34     vector<vector<int>> G;

```

```

35 bool visited[30005];
36 int subtreeSize[30005];
37 vector<int> res;
38 //求subtreeSize
39 int dfs(int u) {
40     this->visited[u] = true;
41     for (int v: this->G[u]) {
42         if (!this->visited[v]) {
43             this->subtreeSize[u] += this->dfs(v);
44         }
45     }
46     //自己
47     this->subtreeSize[u] += 1;
48     return this->subtreeSize[u];
49 }
50 //求res[0], 0到所有點的距離
51 int dfs2(int u, int dis) {
52     this->visited[u] = true;
53     int sum = 0;
54     for (int v: this->G[u]) {
55         if (!visited[v]) {
56             sum += this->dfs2(v, dis + 1);
57         }
58     }
59     //要加上自己的距離
60     return sum + dis;
61 }
62 //算出所有的res
63 void dfs3(int u, int n) {
64     this->visited[u] = true;
65     for (int v: this->G[u]) {
66         if (!visited[v]) {
67             this->res[v] = this->res[u] + n - 2 *
                this->subtreeSize[v];
68             this->dfs3(v, n);
69         }
70     }
71 }
72 };

```

6.8 Weighted LIS

```

1 #define maxn 200005
2 long long dp[maxn];
3 long long height[maxn];
4 long long B[maxn];
5 long long st[maxn << 2];
6 void update(int p, int index, int l, int r, long long
    v) {
7     if (l == r) {
8         st[index] = v;
9         return;
10    }
11    int mid = (l + r) >> 1;
12    if (p <= mid)
13        update(p, (index << 1), l, mid, v);
14    else
15        update(p, (index << 1) + 1, mid + 1, r, v);
16    st[index] = max(st[index << 1], st[(index << 1) +
        1]);
17 }
18 long long query(int index, int l, int r, int ql, int
    qr) {
19     if (ql <= l && r <= qr)
20         return st[index];
21     int mid = (l + r) >> 1;
22     long long res = -1;
23     if (ql <= mid)
24         res = max(res, query(index << 1, l, mid, ql,
            qr));
25     if (mid < qr)
26         res = max(res, query((index << 1) + 1, mid +
            1, r, ql, qr));
27     return res;
28 }

```

```
29 | int main() {
30 |     int n;
31 |     scanf("%d", &n);
32 |     for (int i = 1; i <= n; ++i)
33 |         scanf("%lld", &height[i]);
34 |     for (int i = 1; i <= n; ++i)
35 |         scanf("%lld", &B[i]);
36 |     long long res = B[1];
37 |     update(height[1], 1, 1, n, B[1]);
38 |     for (int i = 2; i <= n; ++i) {
39 |         long long temp;
40 |         if (height[i] - 1 >= 1)
41 |             temp = B[i] + query(1, 1, n, 1, height[i]
42 |                                   - 1);
43 |         else
44 |             temp = B[i];
45 |         update(height[i], 1, 1, n, temp);
46 |         res = max(res, temp);
47 |     }
48 |     printf("%lld\n", res);
49 |     return 0;
50 | }
```