

Contents

1	ubuntu	1
1.1	run	1
1.2	cp.sh	1
2	Basic	1
2.1	ascii	1
2.2	limits	1
3	字串	2
3.1	最長迴文子字串	2
3.2	stringstream	2
4	STL	2
4.1	BIT	2
4.2	priority_queue	2
4.3	deque	2
4.4	map	2
4.5	unordered_map	3
4.6	set	3
4.7	multiset	3
4.8	unordered_set	3
4.9	單調隊列	3
5	sort	4
5.1	大數排序	4
6	math	4
6.1	質數與因數	4
6.2	快速冪	5
6.3	歐拉函數	5
6.4	atan	5
6.5	大步小步	5
7	algorithm	6
7.1	basic	6
7.2	二分搜	6
7.3	三分搜	6
7.4	prefix sum	7
7.5	差分	7
7.6	greedy	7
7.7	floyd warshall	9
7.8	dinic	9
7.9	SegmentTree	10
7.10	Nim Game	10
7.11	Trie	11
7.12	SPFA	11
7.13	dijkstra	11
7.14	SCC Tarjan	12
7.15	SCC Kosaraju	12
7.16	ArticulationPoints Tarjan	12
7.17	最小樹狀圖	13
8	geometry	15
8.1	intersection	15
8.2	半平面相交	15
8.3	凸包	16
9	動態規劃	16
9.1	LCS 和 LIS	16
10	Section2	16
10.1	thm	16
11	DP	17
11.1	DP 公式	17
11.2	DP 表格	17
12	slogan	27
12.1	slogan	27

1 ubuntu

1.1 run

1 | ~\$ bash cp.sh PA

1.2 cp.sh

```

1 #!/bin/bash
2 clear
3 g++ $1.cpp -DDBG -o $1
4 if [[ "$?" == "0" ]]; then
5     echo Running
6     ./$1 < $1.in > $1.out
7     echo END
8 fi

```

2 Basic

2.1 ascii

int	char	int	char	int	char
32		64	@	96	`
33	!	65	A	97	a
34	"	66	B	98	b
35	#	67	C	99	c
36	\$	68	D	100	d
37	%	69	E	101	e
38	&	70	F	102	f
39	'	71	G	103	g
40	(72	H	104	h
41)	73	I	105	i
42	*	74	J	106	j
43	+	75	K	107	k
44	,	76	L	108	l
45	-	77	M	109	m
46	.	78	N	110	n
47	/	79	O	111	o
48	0	80	P	112	p
49	1	81	Q	113	q
50	2	82	R	114	r
51	3	83	S	115	s
52	4	84	T	116	t
53	5	85	U	117	u
54	6	86	V	118	v
55	7	87	W	119	w
56	8	88	X	120	x
57	9	89	Y	121	y
58	:	90	Z	122	z
59	;	91	[123	{
60	<	92	\	124	
61	=	93]	125	}
62	>	94	^	126	~
63	?	95	_		

2.2 limits

[Type]	[size]	[range]
char	1	127 to -128
signed char	1	127 to -128
unsigned char	1	0 to 255
short	2	32767 to -32768
int	4	2147483647 to -2147483648
unsigned int	4	0 to 4294967295
long	4	2147483647 to -2147483648
unsigned long	4	0 to 18446744073709551615
long long	8	
	9223372036854775807	to -9223372036854775808
double	8	1.79769e+308 to 2.22507e-308
long double	16	1.18973e+4932 to 3.3621e-4932
float	4	3.40282e+38 to 1.17549e-38
unsigned long long	8	0 to 18446744073709551615
string	32	

3 字串

3.1 最長迴文子字串

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define T(x) ((x)%2 ? s[(x)/2] : '. ')
3 using namespace std;
4
5 string s;
6 int n;
7
8 int ex(int l,int r){
9     int i=0;
10    while(l-i>=0&&r+i<n&&T(l-i)==T(r+i)) i++;
11    return i;
12 }
13
14 int main(){
15     cin>>s;
16     n=2*s.size()+1;
17     int mx=0;
18     int center=0;
19     vector<int> r(n);
20     int ans=1;
21     r[0]=1;
22     for(int i=1;i<n;i++){
23         int ii=center-(i-center);
24         int len=mx-i+1;
25         if(i>mx){
26             r[i]=ex(i,i);
27             center=i;
28             mx=i+r[i]-1;
29         }
30         else if(r[ii]==len){
31             r[i]=len+ex(i-len,i+len);
32             center=i;
33             mx=i+r[i]-1;
34         }
35         else r[i]=min(r[ii],len);
36         ans=max(ans,r[i]);
37     }
38     cout<<ans-1<<"\n";
39     return 0;
40 }

```

3.2 stringstream

```

1 string s,word;
2 stringstream ss;
3 getline(cin,s);
4 ss<<s;
5 while(ss>>word) cout<<word<<endl;

```

4 STL

4.1 BIT

```

1 template <class T> class BIT {
2 private:
3     int size;
4     vector<T> bit;
5     vector<T> arr;
6
7 public:
8     BIT(int sz=0): size(sz), bit(sz+1), arr(sz) {}
9
10    /** Sets the value at index idx to val. */
11    void set(int idx, T val) {
12        add(idx, val - arr[idx]);
13    }

```

```

14
15    /** Adds val to the element at index idx. */
16    void add(int idx, T val) {
17        arr[idx] += val;
18        for (++idx; idx<=size; idx+=(idx & -idx))
19            bit[idx] += val;
20    }
21
22    /** @return The sum of all values in [0, idx]. */
23    T pre_sum(int idx) {
24        T total = 0;
25        for (++idx; idx>0; idx--=(idx & -idx))
26            total += bit[idx];
27        return total;
28    }
29 };

```

4.2 priority_queue

```

1 priority_queue: 優先隊列，資料預設由大到小排序。
2
3 讀取優先權最高的值：
4     x = pq.top();
5     pq.pop(); //讀取後刪除
6 判斷是否為空的priority_queue：
7     pq.empty() //回傳 true
8     pq.size() //回傳 0
9 如需改變priority_queue的優先權定義：
10    priority_queue<T> pq; //預設由大到小
11    priority_queue<T, vector<T>, greater<T>> pq; //改成由小到大
12
13    priority_queue<T, vector<T>, cmp> pq; //cmp

```

4.3 deque

```

1 deque 是 C++ 標準模板函式庫
2     (Standard Template Library, STL)
3     中的雙向佇列容器 (Double-ended Queue) ,
4     跟 vector 相似，不過在 vector
5     中若是要添加新元素至開端，
6     其時間複雜度為 O(N)，但在 deque 中則是 O(1)。
7     同樣也能在我們需要儲存更多元素的時候自動擴展空間，
8     讓我們不必煩惱佇列長度的問題。
9
10    dq.push_back() //在 deque 的最尾端新增元素
11    dq.push_front() //在 deque 的開頭新增元素
12    dq.pop_back() //移除 deque 最尾端的元素
13    dq.pop_front() //移除 deque 最開頭的元素
14    dq.back() //取出 deque 最尾端的元素
15    dq.front() //回傳 deque 最開頭的元素
16    dq.insert()
17    dq.insert(position, n, val)
18        position: 插入元素的 index 值
19        n: 元素插入次數
20        val: 插入的元素值
21    dq.erase()
22        //刪除元素，需要使用迭代器指定刪除的元素或位置，
23        //同時也會返回指向刪除元素下一元素的迭代器。
24
25    dq.clear() //清空整個 deque 佇列。
26    dq.size() //檢查 deque 的尺寸
27    dq.empty() //如果 deque 佇列為空返回 1；
28                //若是存在任何元素，則返回 0
29
30    dq.begin() //返回一個指向 deque 開頭的迭代器
31    dq.end() //指向 deque 結尾，
32                //不是最後一個元素，
33                //而是最後一個元素的下一個位置

```

4.4 map

```

1 map：存放 key-value pairs 的映射資料結構，
2   會按 key 由小到大排序。
3 元素存取
4 operator[]：存取指定的[i]元素的資料
5
6 迭代器
7 begin()：回傳指向map頭部元素的迭代器
8 end()：回傳指向map末尾的迭代器
9 rbegin()：回傳一個指向map尾部的反向迭代器
10 rend()：回傳一個指向map頭部的反向迭代器
11
12 遍歷整個map時，利用iterator操作：
13 取key：it->first 或 (*it).first
14 取value：it->second 或 (*it).second
15
16 容量
17 empty()：檢查容器是否為空，空則回傳true
18 size()：回傳元素數量
19 max_size()：回傳可以容納的最大元素個數
20
21 修改器
22 clear()：刪除所有元素
23 insert()：插入元素
24 erase()：刪除一個元素
25 swap()：交換兩個map
26
27 查找
28 count()：回傳指定元素出現的次數
29 find()：查找一個元素
30
31 //實作範例
32 #include <bits/stdc++.h>
33 using namespace std;
34 int main(){
35     //declaration container and iterator
36     map<string, string> mp;
37     map<string, string>::iterator iter;
38     map<string, string>::reverse_iterator iter_r;
39
40     //insert element
41     mp.insert(pair<string, string>
42               ("r000", "student_zero"));
43     mp["r123"] = "student_first";
44     mp["r456"] = "student_second";
45
46     //traversal
47     for(iter=mp.begin(); iter!=mp.end(); iter++)
48         cout<<iter->first<<" "
49              <<iter->second<<endl;
50     for(iter_r=mp.rbegin(); iter_r!=mp.rend(); iter_r++)
51         cout<<iter_r->first<<" "
52              <<iter_r->second<<endl;
53
54     //find and erase the element
55     iter=mp.find("r123");
56     mp.erase(iter);
57     iter=mp.find("r123");
58     if(iter!=mp.end())
59         cout<<"Find, the value is "
60              <<iter->second<<endl;
61     else cout<<"Do not Find"<<endl;
62     return 0;
63 }

```

4.5 unordered_map

```

1 unordered_map：存放 key-value pairs
2   的「無序」映射資料結構。
3 用法與map相同

```

4.6 set

```

1 set： 集合，去除重複的元素，資料由小到大排序。
2
3 取值： 使用iterator
4     x = *st.begin();
5         // set中的第一個元素(最小的元素)。
6     x = *st.rbegin();
7         // set中的最後一個元素(最大的元素)。
8
9 判斷是否為空的set：
10     st.empty() 回傳true
11     st.size() 回傳零
12
13 常用來搭配的member function：
14     st.count(x);
15     auto it = st.find(x);
16         // binary search, O(log(N))
17     auto it = st.lower_bound(x);
18         // binary search, O(log(N))
19     auto it = st.upper_bound(x);
20         // binary search, O(log(N))

```

4.7 multiset

```

1 與 set 用法雷同，但會保留重複的元素。
2 資料由小到大排序。
3 宣告：
4     multiset<int> st;
5 刪除資料：
6     st.erase(val);
7         //會刪除所有值為 val 的元素。
8     st.erase(st.find(val));
9         //只刪除第一個值為 val 的元素。

```

4.8 unordered_set

```

1 unordered_set 的實作方式通常是用雜湊表(hash table)，
2 資料插入和查詢的時間複雜度很低，為常數級別O(1)，
3 相對的代價是消耗較多的記憶體，空間複雜度較高，
4 無自動排序功能。
5
6 unordered_set 判斷元素是否存在
7 unordered_set<int> myunordered_set;
8 myunordered_set.insert(2);
9 myunordered_set.insert(4);
10 myunordered_set.insert(6);
11 cout << myunordered_set.count(4) << "\n"; // 1
12 cout << myunordered_set.count(8) << "\n"; // 0

```

4.9 單調隊列

```

1 //單調隊列
2 "如果一個選手比你小還比你強，你就可以退役了。"--單調隊列
3
4 example
5
6 給出一個長度為 n 的數組，
7 輸出每 k 個連續的數中的最大值和最小值。
8
9 #include <bits/stdc++.h>
10 #define maxn 1000100
11 using namespace std;
12 int q[maxn], a[maxn];
13 int n, k;
14
15 void getmin() {
16     // 得到這個隊列裡的最小值，直接找到最後的就行了

```

```

17 |     int head=0,tail=0;
18 |     for(int i=1;i<k;i++){
19 |         while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
20 |         q[++tail]=i;
21 |     }
22 |     for(int i=k;i<=n;i++){
23 |         while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
24 |         q[++tail]=i;
25 |         while(q[head]<=i-k) head++;
26 |         cout<<a[q[head]]<<" ";
27 |     }
28 |     cout<<endl;
29 | }
30 |
31 | void getmax() { // 和上面同理
32 |     int head=0,tail=0;
33 |     for(int i=1;i<k;i++){
34 |         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
35 |         q[++tail]=i;
36 |     }
37 |     for(int i=k;i<=n;i++){
38 |         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
39 |         q[++tail]=i;
40 |         while(q[head]<=i-k) head++;
41 |         cout<<a[q[head]]<<" ";
42 |     }
43 |     cout<<endl;
44 | }
45 |
46 | int main(){
47 |     cin>>n>>k; //每k個連續的數
48 |     for(int i=1;i<=n;i++) cin>>a[i];
49 |     getmin();
50 |     getmax();
51 |     return 0;
52 | }

```

5 sort

5.1 大數排序

```

1 | #python大數排序
2 |
3 | while True:
4 |     try:
5 |         n = int(input())           # 有幾筆數字需要排序
6 |         arr = []                   # 建立空串列
7 |         for i in range(n):
8 |             arr.append(int(input())) # 依序將數字存入串列
9 |             arr.sort()              # 串列排序
10 |        for i in arr:
11 |            print(i)                # 依序印出串列中每個項目
12 |    except:
13 |        break

```

6 math

6.1 質數與因數

```

1 | 埃氏篩法
2 | int n;
3 | vector<int> isprime(n+1,1);
4 | isprime[0]=isprime[1]=0;
5 | for(int i=2;i<=n;i++){
6 |     if(isprime[i])
7 |         for(int j=i*i;j<=n;j+=i) isprime[j]=0;
8 | }
9 |
10 | 歐拉篩O(n)
11 | #define MAXN 47000 //sqrt(2^31)=46,340...

```

```

12 | bool isPrime[MAXN];
13 | int prime[MAXN];
14 | int primeSize=0;
15 | void getPrimes(){
16 |     memset(isPrime, true, sizeof(isPrime));
17 |     isPrime[0]=isPrime[1]=false;
18 |     for(int i=2;i<MAXN;i++){
19 |         if(isPrime[i]) prime[primeSize++]=i;
20 |         for(int
21 |             j=0;j<primeSize&&i*prime[j]<=MAXN;++j){
22 |             isPrime[i*prime[j]]=false;
23 |             if(i%prime[j]==0) break;
24 |         }
25 |     }
26 | }
27 | 最大公因數 0(log(min(a,b)))
28 | int GCD(int a,int b){
29 |     if(b==0) return a;
30 |     return GCD(b,a%b);
31 | }
32 |
33 | 質因數分解
34 | void primeFactorization(int n){
35 |     for(int i=0;i<(int)p.size();++i){
36 |         if(p[i]*p[i]>n) break;
37 |         if(n%p[i]) continue;
38 |         cout<<p[i]<<' ';
39 |         while(n%p[i]==0) n/=p[i];
40 |     }
41 |     if(n!=1) cout<<n<<' ';
42 |     cout<<'\n';
43 | }
44 |
45 | 擴展歐幾里得算法
46 | //ax+by=GCD(a,b)
47 | #include <bits/stdc++.h>
48 | using namespace std;
49 |
50 | int ext_euc(int a,int b,int &x,int &y){
51 |     if(b==0){
52 |         x=1,y=0;
53 |         return a;
54 |     }
55 |     int d=ext_euc(b,a%b,y,x);
56 |     y-=a/b*x;
57 |     return d;
58 | }
59 |
60 | int main(){
61 |     int a,b,x,y;
62 |     cin>>a>>b;
63 |     ext_euc(a,b,x,y);
64 |     cout<<x<<' '<<y<<endl;
65 |     return 0;
66 | }
67 |
68 |
69 |
70 | 歌德巴赫猜想
71 | solution : 把偶數 N (6≤N≤10^6) 寫成兩個質數的和。
72 | #include <iostream>
73 | using namespace std;
74 | #define N 20000000
75 | int ox[N],p[N],pr;
76 | void PrimeTable(){
77 |     ox[0]=ox[1]=1;
78 |     pr=0;
79 |     for(int i=2;i<N;i++){
80 |         if(!ox[i]) p[pr++]=i;
81 |         for(int j=0;i*p[j]<N&&j<pr;j++){
82 |             ox[i*p[j]]=1;
83 |         }
84 |     }
85 | }
86 | int main(){
87 |     PrimeTable();

```

```

88     int n;
89     while(cin>>n,n){
90         int x;
91         for(x=1;;x+=2)
92             if(!ox[x]&&!ox[n-x]) break;
93         printf("%d = %d + %d\n",n,x,n-x);
94     }
95 }
96 problem : 給定整數 N ,
97           求 N 最少可以拆成多少個質數的和。
98 如果 N 是質數,則答案為 1。
99 如果 N 是偶數(不包含2),則答案為 2 (強歌德巴赫猜想)。
100 如果 N 是奇數且 N-2 是質數,則答案為 2 (2+質數)。
101 其他狀況答案為 3 (弱歌德巴赫猜想)。
102 #include<bits/stdc++.h>
103 using namespace std;
104
105 bool isPrime(int n){
106     for(int i=2;i<n;++i){
107         if(i*i>n) return true;
108         if(n%i==0) return false;
109     }
110     return true;
111 }
112
113 int main(){
114     int n;
115     cin>>n;
116     if(isPrime(n)) cout<<"1\n";
117     else if(n%2==0||isPrime(n-2)) cout<<"2\n";
118     else cout<<"3\n";
119 }

```

6.2 快速幂

```

1 計算 a^b
2 #include<iostream>
3 #define ll long long
4 using namespace std;
5
6 const ll MOD=1000000007;
7 ll fp(ll a, ll b) {
8     int ans=1;
9     while(b>0){
10         if(b&1) ans=ans*a%MOD;
11         a=a*a%MOD;
12         b>>=1;
13     }
14     return ans;
15 }
16
17 int main() {
18     int a,b;
19     cin>>a>>b;
20     cout<<fp(a,b);
21 }

```

6.3 歐拉函數

```

1 //計算閉區間 [1,n] 中的正整數與 n 互質的個數
2
3 int phi(){
4     int ans=n;
5     for(int i=2;i*i<=n;i++){
6         if(n%i==0){
7             ans=ans-ans/i;
8             while(n%i==0) n/=i;
9         }
10    }
11    if(n>1) ans=ans-ans/n;
12    return ans;
13 }

```

6.4 atan

```

1 說明
2     atan() 和 atan2() 函數分別計算 x 和 y/x 的反正切。
3
4 回覆值
5     atan() 函數會傳回介於範圍 - /2 到 /2 弧度之間的值。
6     atan2() 函數會傳回介於 - 至 弧度之間的值。
7     如果 atan2() 函數的兩個引數都是零,
8     則函數會將 errno 設為 EDOM, 並傳回值 0。
9
10 範例
11 #include <math.h>
12 #include <stdio.h>
13
14 int main(void){
15     double a,b,c,d;
16
17     c=0.45;
18     d=0.23;
19
20     a=atan(c);
21     b=atan2(c,d);
22
23     printf("atan(%lf)=%lf\n",c,a);
24     printf("atan2(%lf,%lf)=%lf\n",c,d,b);
25 }
26
27 /*
28 atan(0.450000)=0.422854
29 atan2(0.450000,0.230000)=1.098299
30 */

```

6.5 大步小步

```

1 題意
2 給定 B,N,P, 求出 L 滿足 B^L ≡ N(mod P)。
3
4 題解
5 餘數的循環節長度必定為 P 的因數, 因此
6   B^0, B^1, B^2, ..., B^(P-1), ...
7 也就是說如果有解則 L<N, 枚舉 0,1,2,...,L-1
8 能得到結果, 但會超時。
9
10 將 L 拆成 mx+y, 只要分別枚舉 x,y 就能得到答案,
11 設 m=√P 能保證最多枚舉 2√P 次。
12
13 B^(mx+y) ≡ N(mod P)
14 B^(mx) B^y ≡ N(mod P)
15 B^y ≡ N(B^(-m))^x (mod P)
16
17 先求出 B^0, B^1, B^2, ..., B^(m-1),
18 再枚舉 N(B^(-m)), N(B^(-m))^2, ... 查看是否有對應的 B^y。
19 這種算法稱為大步小步演算法,
20 大步指的是枚舉 x (一次跨 m 步),
21 小步指的是枚舉 y (一次跨 1 步)。
22
23 複雜度分析
24 利用 map/unorder_map 存放 B^0, B^1, B^2, ..., B^(m-1),
25 枚舉 x 查詢 map/unorder_map 是否有對應的 B^y,
26 存放和查詢最多 2√P 次, 時間複雜度為 O(√P log √P)/O(√P)。
27
28 #include <bits/stdc++.h>
29 using namespace std;
30 using LL = long long;
31 LL B, N, P;
32
33 LL fpow(LL a, LL b, LL c){
34     LL res=1;

```

```

35     for(;b; b >= 1){
36         if(b&1)
37             res=(res*a)%c;
38         a=(a*a)%c;
39     }
40     return res;
41 }
42
43 LL BSGS(LL a, LL b, LL p){
44     a%=p, b%=p;
45     if(a==0)
46         return b==0?1:-1;
47     if(b==1)
48         return 0;
49     map<LL, LL> tb;
50     LL sq=ceil(sqrt(p-1));
51     LL inv=fpow(a, p-sq-1, p);
52     tb[1]=sq;
53     for(LL i=1, tmp=1; i<sq; ++i){
54         tmp=(tmp*a)%p;
55         if(!tb.count(tmp))
56             tb[tmp]=i;
57     }
58     for(LL i=0; i<sq; ++i){
59         if(tb.count(b)){
60             LL res=tb[b];
61             return i*sq+(res==sq?0:res);
62         }
63         b=(b*inv)%p;
64     }
65     return -1;
66 }
67
68 int main(){
69     ios::sync_with_stdio(false);
70     cin.tie(0), cout.tie(0);
71     while(cin>>P>>B>>N){
72         LL ans=BSGS(B, N, P);
73         if(ans!=-1)
74             cout<<"no solution\n";
75         else
76             cout<<ans<<"\n";
77     }
78 }

```

7 algorithm

7.1 basic

```

1 min_element: 找尋最小元素
2 min_element(first, last)
3 max_element: 找尋最大元素
4 max_element(first, last)
5 sort: 排序, 預設由小排到大。
6 sort(first, last)
7 sort(first, last, cmp): 可自行定義比較運算子 cmp。
8 find: 尋找元素。
9 find(first, last, val)
10 lower_bound: 尋找第一個小於 x 的元素位置,
11     如果不存在, 則回傳 last。
12 lower_bound(first, last, val)
13 upper_bound: 尋找第一個大於 x 的元素位置,
14     如果不存在, 則回傳 last。
15 upper_bound(first, last, val)
16 next_permutation: 將序列順序轉換成下一個字典序,
17     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
18 next_permutation(first, last)
19 prev_permutation: 將序列順序轉換成上一個字典序,
20     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
21 prev_permutation(first, last)

```

7.2 二分搜

```

1 int binary_search(int target) {
2     // For range [ok, ng) or (ng, ok], "ok" is for the
3     // index that target value exists, with "ng" doesn't.
4     int ok = maxn, ng = -1;
5     // For first lower_bound, ok=maxn and ng=-1,
6     // for last lower_bound, ok = -1 and ng = maxn
7     // (the "check" funtion
8     // should be changed depending on it.)
9     while(abs(ok - ng) > 1) {
10         int mid = (ok + ng) >> 1;
11         if(check(mid)) ok = mid;
12         else ng = mid;
13     }
14     // Be careful, "arr[mid]>=target" for first
15     // lower_bound and "arr[mid]<=target" for
16     // last lower_bound. For range (ng, ok],
17     // convert it into (ng, mid] and (mid, ok] than
18     // choose the first one, or convert [ok, ng) into
19     // [ok, mid) and [mid, ng) and then choose
20     // the second one.
21     return ok;
22 }
23
24 lower_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 ≥ k 的位置
25 upper_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 > k 的位置
26 upper_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 ≤ k 的位置
27 lower_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 < k 的位置
28 (lower_bound, upper_bound) //等於 k 的範圍
29 equal_range(arr, arr+n, k);

```

7.3 三分搜

```

1 題意
2 給定兩射線方向和速度, 問兩射線最近距離。
3
4 題解
5 假設 F(t) 為兩射線在時間 t 的距離, F(t) 為二次函數,
6 可用三分搜找二次函數最小值。
7
8 #include <bits/stdc++.h>
9 using namespace std;
10
11 struct Point{
12     double x, y, z;
13     Point() {}
14     Point(double _x, double _y, double _z):
15         x(_x), y(_y), z(_z){}
16     friend istream& operator>>(istream& is, Point& p)
17     {
18         is >> p.x >> p.y >> p.z;
19         return is;
20     }
21     Point operator+(const Point &rhs) const{
22         return Point(x+rhs.x, y+rhs.y, z+rhs.z);
23     }
24     Point operator-(const Point &rhs) const{
25         return Point(x-rhs.x, y-rhs.y, z-rhs.z);
26     }
27     Point operator*(const double &d) const{
28         return Point(x*d, y*d, z*d);
29     }
30     Point operator/(const double &d) const{
31         return Point(x/d, y/d, z/d);
32     }
33     double dist(const Point &rhs) const{
34         double res = 0;
35         res+=(x-rhs.x)*(x-rhs.x);
36         res+=(y-rhs.y)*(y-rhs.y);
37         res+=(z-rhs.z)*(z-rhs.z);
38         return res;
39     }
40 };

```



```

40
41 int main(){
42     ios::sync_with_stdio(false);
43     cin.tie(0),cout.tie(0);
44     int T;
45     cin>>T;
46     for(int ti=1;ti<=T;++ti){
47         double time;
48         Point x1,y1,d1,x2,y2,d2;
49         cin>>time>>x1>>y1>>x2>>y2;
50         d1=(y1-x1)/time;
51         d2=(y2-x2)/time;
52         double L=0,R=1e8,m1,m2,f1,f2;
53         double ans = x1.dist(x2);
54         while(abs(L-R)>1e-10){
55             m1=(L+R)/2;
56             m2=(m1+R)/2;
57             f1=((d1*m1)+x1).dist((d2*m1)+x2);
58             f2=((d1*m2)+x1).dist((d2*m2)+x2);
59             ans = min(ans,min(f1,f2));
60             if(f1<f2) R=m2;
61             else L=m1;
62         }
63         cout<<"Case "<<ti<<" : ";
64         cout<<fixed<<setprecision(4)<<sqrt(ans)<<"\n";
65     }
66 }

```

7.4 prefix sum

```

1 // 前綴和
2 陣列前n項的和。
3 b[i]=a[0]+a[1]+a[2]+ ... +a[i]
4 區間和 [l, r]: b[r]-b[l-1] (要保留b[l]所以-1)
5
6 #include<bits/stdc++.h>
7 using namespace std;
8 int main(){
9     int n;
10    cin>>n;
11    int a[n],b[n];
12    for(int i=0;i<n;i++) cin>>a[i];
13    b[0]=a[0];
14    for(int i=1;i<n;i++) b[i]=b[i-1]+a[i];
15    for(int i=0;i<n;i++) cout<<b[i]<<" ";
16    cout<<"\n";
17    int l,r;
18    cin>>l>>r;
19    cout<<b[r]-b[l-1]; //區間和
20 }

```

7.5 差分

```

1 // 差分
2 用途：在區間 [l, r] 加上一個數字v。
3 b[l] += v; (b[0~l] 加上v)
4 b[r+1] -= v; (b[r+1~n] 減去v (b[r] 仍保留v) )
5 給的 a[] 是前綴和數列，建構 b[]，
6 因為 a[i] = b[0] + b[1] + b[2] + ... + b[i]，
7 所以 b[i] = a[i] - a[i-1]。
8 在 b[l] 加上 v，b[r+1] 減去 v，
9 最後再從 0 跑到 n 使 b[i] += b[i-1]。
10 這樣一來，b[] 是一個在某區間加上v的前綴和。
11
12 #include <bits/stdc++.h>
13 using namespace std;
14 int a[1000], b[1000];
15 // a: 前綴和數列, b: 差分數列
16 int main(){
17     int n, l, r, v;
18     cin >> n;
19     for(int i=1; i<=n; i++){

```

```

20         cin >> a[i];
21         b[i] = a[i] - a[i-1]; //建構差分數列
22     }
23     cin >> l >> r >> v;
24     b[l] += v;
25     b[r+1] -= v;
26
27     for(int i=1; i<=n; i++){
28         b[i] += b[i-1];
29         cout << b[i] << " ";
30     }
31 }

```

7.6 greedy

1 //貪心
2 貪心演算法的核心為，
3 採取在目前狀態下最好或最佳（即最有利）的選擇。
4 貪心演算法雖然能獲得當前最佳解，
5 但不保證能獲得最後（全域）最佳解，
6 提出想法後可以先試圖尋找有沒有能推翻原本的想法的反例，
7 確認無誤再實作。

8
9 刪除數字問題

10 //problem
11 給定一個數字 $N(\leq 10^{100})$ ，需要刪除 K 個數字，
12 請問刪除 K 個數字後最小的數字為何？

13 //solution
14 刪除滿足第 i 位數大於第 i+1 位數的最左邊第 i 位數，
15 扣除高位數的影響較扣除低位數的大。

```

16 //code
17 int main(){
18     string s;
19     int k;
20     cin>>s>>k;
21     for(int i=0;i<k;++i){
22         if((int)s.size()==0) break;
23         int pos =(int)s.size()-1;
24         for(int j=0;j<(int)s.size()-1;++j){
25             if(s[j]>s[j+1]){
26                 pos=j;
27                 break;
28             }
29         }
30         s.erase(pos,1);
31     }
32     while((int)s.size()>0&&s[0]=='0')
33         s.erase(0,1);
34     if((int)s.size()) cout<<s<<"\n";
35     else cout<<0<<"\n";
36 }

```

37 最小區間覆蓋長度

38 //problem
39 給定 n 條線段區間為 [Li,Ri]，
40 請問最少要選幾個區間才能完全覆蓋 [0,S]？

41 //solution
42 先將所有區間依照左界由小到大排序，
43 對於當前區間 [Li,Ri]，要從左界 >Ri 的所有區間中，
44 找到有著最大的右界的區間，連接當前區間。

45 //problem
46 長度 n 的直線中有數個加熱器，
47 在 x 的加熱器可以讓 [x-r,x+r] 內的物品加熱，
48 問最少要幾個加熱器可以把 [0,n] 的範圍加熱。

49 //solution
50 對於最左邊沒加熱的點a，選擇最遠可以加熱a的加熱器，

59 更新已加熱範圍，重複上述動作繼續尋找加熱器。

```

60
61 //code
62 int main(){
63     int n, r;
64     int a[1005];
65     cin>>n>>r;
66     for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
67     int i=1,ans=0;
68     while(i<=n){
69         int R=min(i+r-1,n),L=max(i-r+1,0)
70         int nextR=-1;
71         for(int j=R;j>=L;--j){
72             if(a[j]){
73                 nextR=j;
74                 break;
75             }
76         }
77         if(nextR==-1){
78             ans=-1;
79             break;
80         }
81         ++ans;
82         i=nextR+r;
83     }
84     cout<<ans<<'\n';
85 }

```

86 最多不重疊區間

87 //problem

88 給你 n 條線段區間為 $[Li, Ri]$ ，

89 請問最多可以選擇幾條不重疊的線段(頭尾可相連)?

90 //solution

91 依照右界由小到大排序，

92 每次取到一個不重疊的線段，答案 +1。

```

93 //code
94 struct Line{
95     int L,R;
96     bool operator<(const Line &rhs)const{
97         return R<rhs.R;
98     }
99 };
100
101 int main(){
102     int t;
103     cin>>t;
104     Line a[30];
105     while(t--){
106         int n=0;
107         while(cin>>a[n].L>>a[n].R,a[n].L||a[n].R)
108             ++n;
109         sort(a,a+n);
110         int ans=1,R=a[0].R;
111         for(int i=1;i<n;i++){
112             if(a[i].L>=R){
113                 ++ans;
114                 R=a[i].R;
115             }
116         }
117         cout<<ans<<'\n';
118     }
119 }

```

120 最小化最大延遲問題

121 //problem

122 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，

123 期限是 D_i ，第 i 項工作延遲的時間為 $Li=\max(0, Fi-Di)$ ，

124 原本 Fi 為第 i 項工作的完成時間，

125 求一種工作排序使 $\max Li$ 最小。

126 //solution

127 按照到期時間從早到晚處理。

```

135
136 //code
137 struct Work{
138     int t, d;
139     bool operator<(const Work &rhs)const{
140         return d<rhs.d;
141     }
142 };
143
144 int main(){
145     int n;
146     Work a[10000];
147     cin>>n;
148     for(int i=0;i<n;++i)
149         cin>>a[i].t>>a[i].d;
150     sort(a,a+n);
151     int maxL=0,sumT=0;
152     for(int i=0;i<n;++i){
153         sumT+=a[i].t;
154         maxL=max(maxL,sumT-a[i].d);
155     }
156     cout<<maxL<<'\n';
157 }

```

158 最少延遲數量問題

159 //problem

160 給定 N 個工作，每個工作的需要處理時長為 T_i ，

161 期限是 D_i ，求一種工作排序使得逾期工作數量最小。

162 //solution

163 期限越早到期的工作越先做。將工作依照到期時間從早到晚排序，

164 依序放入工作列表中，如果發現有工作預期，

165 就從目前選擇的工作中，移除耗時最長的工作。

166 上述方法為 Moore-Hodgson s Algorithm。

167 //problem

168 給定烏龜的重量和可承受重量，問最多可以疊幾隻烏龜？

169 //solution

170 和最少延遲數量問題是相同的問題，只要將題敘做轉換。

171 工作處理時長 → 烏龜重量

172 工作期限 → 烏龜可承受重量

173 多少工作不延期 → 可以疊幾隻烏龜

```

174 //code
175 struct Work{
176     int t, d;
177     bool operator<(const Work &rhs)const{
178         return d<rhs.d;
179     }
180 };
181
182 int main(){
183     int n=0;
184     Work a[10000];
185     priority_queue<int> pq;
186     while(cin>>a[n].t>>a[n].d)
187         ++n;
188     sort(a,a+n);
189     int sumT=0,ans=n;
190     for(int i=0;i<n;++i){
191         pq.push(a[i].t);
192         sumT+=a[i].t;
193         if(a[i].d<sumT){
194             int x=pq.top();
195             pq.pop();
196             sumT-=x;
197             --ans;
198         }
199     }
200     cout<<ans<<'\n';
201 }

```

202 任務調度問題


```

211 //problem
212 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為  $T_i$ ，
213 期限是  $D_i$ ，如果第  $i$  項工作延遲需要受到  $p_i$  單位懲罰，
214 請問最少會受到多少單位懲罰。
215
216 //solution
217 依照懲罰由大到小排序，
218 每項工作依序嘗試可不可以放在  $D_i - T_i + 1, D_i - T_i, \dots, 1, 0$ ，
219 如果有空閒就放進去，否則延後執行。
220
221 //problem
222 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為  $T_i$ ，
223 期限是  $D_i$ ，如果第  $i$  項工作在期限內完成會獲得  $a_i$ 
224 單位獎勵，
225 請問最多會獲得多少單位獎勵。
226
227 //solution
228 和上題相似，這題變成依照獎勵由大到小排序。
229
230 //code
231 struct Work{
232     int d,p;
233     bool operator<(const Work &rhs)const{
234         return p>rhs.p;
235     }
236 };
237 int main(){
238     int n;
239     Work a[100005];
240     bitset<100005> ok;
241     while(cin>>n){
242         ok.reset();
243         for(int i=0;i<n;++i)
244             cin>>a[i].d>>a[i].p;
245         sort(a,a+n);
246         int ans=0;
247         for(int i=0;i<n;++i){
248             int j=a[i].d;
249             while(j--){
250                 if(!ok[j]){
251                     ans+=a[i].p;
252                     ok[j]=true;
253                     break;
254                 }
255             }
256             cout<<ans<<"\n";
257         }
258     }

```

7.7 floyd warshall

```

1 int w[n][n];
2 int d[n][n];
3 int p[n][n];
4 // 由 i 點到 j 點的路徑，其中繼點為 p[i][j]。
5
6 void floyd_warshall(){ //O(V^3)
7     for(int i=0;i<n;i++){
8         for(int j=0;j<n;j++){
9             d[i][j]=w[i][j];
10            p[i][j]=-1; // 預設為沒有中繼點
11        }
12    }
13    for(int i=0;i<n;i++) d[i][i]=0;
14    for(int k=0;k<n;k++){
15        for(int i=0;i<n;i++){
16            for(int j=0;j<n;j++){
17                if(d[i][k]+d[k][j]<d[i][j]){
18                    d[i][j]=d[i][k]+d[k][j];
19                    p[i][j]=k; // 由 i 點走到 j 點經過了 k 點
20                }
21            }
22        }
23    }
24    // 這支函式並不會印出起點和終點，必須另行印出。

```

```

23 void find_path(int s,int t){ // 印出最短路徑
24     if(p[s][t]==-1) return; // 沒有中繼點就結束
25     find_path(s,p[s][t]); // 前半段最短路徑
26     cout<<p[s][t]; // 中繼點
27     find_path(p[s][t],t); // 後半段最短路徑
28 }

```

7.8 dinic

```

1 const int maxn = 1e5 + 10;
2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
3
4 struct Edge {
5     int s, t, cap, flow;
6 };
7
8 int n, m, S, T;
9 int level[maxn], dfs_idx[maxn];
10 vector<Edge> E;
11 vector<vector<int>> G;
12
13 void init() {
14     S = 0;
15     T = n + m;
16     E.clear();
17     G.assign(maxn, vector<int>());
18 }
19
20 void addEdge(int s, int t, int cap) {
21     E.push_back({s, t, cap, 0});
22     E.push_back({t, s, 0, 0});
23     G[s].push_back(E.size()-2);
24     G[t].push_back(E.size()-1);
25 }
26
27 bool bfs() {
28     queue<int> q({S});
29
30     memset(level, -1, sizeof(level));
31     level[S] = 0;
32
33     while(!q.empty()) {
34         int cur = q.front();
35         q.pop();
36
37         for(int i : G[cur]) {
38             Edge e = E[i];
39             if(level[e.t]==-1 && e.cap>e.flow) {
40                 level[e.t] = level[e.s] + 1;
41                 q.push(e.t);
42             }
43         }
44     }
45     return level[T];
46 }
47
48 int dfs(int cur, int lim) {
49     if(cur==T || lim==0) return lim;
50
51     int result = 0;
52     for(int& i=dfs_idx[cur]; i<G[cur].size() && lim; i++) {
53         Edge& e = E[G[cur][i]];
54         if(level[e.s]+1 != level[e.t]) continue;
55
56         int flow = dfs(e.t, min(lim, e.cap-e.flow));
57         if(flow <= 0) continue;
58
59         e.flow += flow;
60         result += flow;
61         E[G[cur][i]^1].flow -= flow;
62         lim -= flow;
63     }
64     return result;
65 }

```

```

66
67 int dinic() {          // O((V^2)E)
68     int result = 0;
69     while(bfs()) {
70         memset(dfs_idx, 0, sizeof(dfs_idx));
71         result += dfs(S, inf);
72     }
73     return result;
74 }

```

7.9 SegmentTree

```

1 #define MAXN 1000
2 int data[MAXN]; //原數據
3 int st[4 * MAXN]; //線段樹
4 int tag[4 * MAXN]; //懶標
5
6 inline int pull(int l, int r) {
7     // 隨題目改變sum、max、min
8     // l、r是左右樹的index
9     return st[l] + st[r];
10 }
11
12 void build(int l, int r, int i) {
13     // 在[l, r]區間建樹，目前根的index為i
14     if (l == r) {
15         st[i] = data[l];
16         return;
17     }
18     int mid = l + ((r - l) >> 1);
19     build(l, mid, i * 2);
20     build(mid + 1, r, i * 2 + 1);
21     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
22 }
23
24 int query(int ql, int qr, int l, int r, int i) {
25     // [ql, qr]是查詢區間,[l, r]是當前節點包含的區間
26     if (ql <= l && r <= qr)
27         return st[i];
28     int mid = l + ((r - l) >> 1);
29     if (tag[i]) {
30         //如果當前懶標有值則更新左右節點
31         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
32         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
33         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
34         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
35         tag[i] = 0;
36     }
37     int sum = 0;
38     if (ql <= mid)
39         sum += query(ql, qr, l, mid, i * 2);
40     if (qr > mid)
41         sum += query(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1);
42     return sum;
43 }
44
45 void update(int ql, int qr, int l, int r, int i, int c) {
46     // [ql, qr]是查詢區間,[l, r]是當前節點包含的區間
47     // c是變化量
48     if (ql <= l && r <= qr) {
49         st[i] += (r - l + 1) * c;
50         //求和,此需乘上區間長度
51         tag[i] += c;
52         return;
53     }
54     int mid = l + ((r - l) >> 1);
55     if (tag[i] && l != r) {
56         //如果當前懶標有值則更新左右節點
57         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
58         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
59         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
60         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
61         tag[i] = 0;
62     }

```

```

62     if (ql <= mid) update(ql, qr, l, mid, i * 2, c);
63     if (qr > mid) update(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1, c);
64     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
65 }
66 //如果是直接改值而不是加值，query與update中的tag與st的
67 //改值從+=改成=

```

7.10 Nim Game

```

1 //兩人輪流取銅板，每人每次需在某堆取一枚以上的銅板，
2 //但不能同時在兩堆取銅板，直到最後，
3 //將銅板拿光的人贏得此遊戲。
4
5 #include <bits/stdc++.h>
6 #define maxn 23+5
7 using namespace std;
8
9 int SG[maxn];
10 int visited[1000+5];
11 int pile[maxn], ans;
12
13 void calculateSG(){
14     SG[0]=0;
15     for(int i=1;i<=maxn;i++){
16         int cur=0;
17         for(int j=0;j<i;j++){
18             for(int k=0;k<=j;k++){
19                 visited[SG[j]^SG[k]]=i;
20             }
21             while(visited[cur]==i) cur++;
22             SG[i]=cur;
23         }
24     }
25
26 int main(){
27     calculateSG();
28     int Case=0,n;
29     while(cin>>n,n){
30         ans=0;
31         for(int i=1;i<=n;i++) cin>>pile[i];
32         for(int i=1;i<=n;i++){
33             if(pile[i]&1) ans^=SG[n-i];
34             cout<<"Game "<<Case<<": ";
35             if(!ans) cout<<"-1 -1 -1\n";
36             else{
37                 bool flag=0;
38                 for(int i=1;i<=n;i++){
39                     if(pile[i]){
40                         for(int j=i+1;j<=n;j++){
41                             for(int k=j;k<=n;k++){
42                                 if((SG[n-i]^SG[n-j]^SG[n-k])==ans){
43                                     cout<<i-1<<" "<<j-1<<" "<<k-1<<endl;
44                                     flag=1;
45                                     break;
46                                 }
47                             }
48                             if(flag) break;
49                         }
50                     }
51                     if(flag) break;
52                 }
53             }
54             return 0;
55         }
56     }
57     /*
58     input
59     4 1 0 1 100
60     3 1 0 5
61     2 2 1
62     0
63     output
64     Game 1: 0 2 3
65     Game 2: 0 1 1
66     Game 3: -1 -1 -1

```

67 */

7.11 Trie

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 const int maxn = 300000 + 10;
5 const int mod = 20071027;
6
7 int dp[maxn];
8 int mp[4000*100 + 10][26];
9 char str[maxn];
10
11 struct Trie {
12     int seq;
13     int val[maxn];
14
15     Trie() {
16         seq = 0;
17         memset(val, 0, sizeof(val));
18         memset(mp, 0, sizeof(mp));
19     }
20
21     void insert(char* s, int len) {
22         int r = 0;
23         for(int i=0; i<len; i++) {
24             int c = s[i] - 'a';
25             if(!mp[r][c]) mp[r][c] = ++seq;
26             r = mp[r][c];
27         }
28         val[r] = len;
29         return;
30     }
31
32     int find(int idx, int len) {
33         int result = 0;
34         for(int r=0; idx<len; idx++) {
35             int c = str[idx] - 'a';
36             if(!(r = mp[r][c])) return result;
37             if(val[r])
38                 result = (result + dp[idx + 1]) % mod;
39         }
40         return result;
41     }
42 };
43
44 int main() {
45     int n, tc = 1;
46
47     while(~scanf("%s%d", str, &n)) {
48         Trie tr;
49         int len = strlen(str);
50         char word[100+10];
51
52         memset(dp, 0, sizeof(dp));
53         dp[len] = 1;
54
55         while(n--) {
56             scanf("%s", word);
57             tr.insert(word, strlen(word));
58         }
59
60         for(int i=len-1; i>=0; i--)
61             dp[i] = tr.find(i, len);
62         printf("Case %d: %d\n", tc++, dp[0]);
63     }
64     return 0;
65 }
66
67 /*****
68 ****Input****
69 * abcd
70 * 4
71 * a b cd ab
72 ****

```

73 ****Output***

74 * Case 1: 2

75 ****

76 */

7.12 SPFA

```

1 struct Edge
2 {
3     int t;
4     long long w;
5     Edge(){};
6     Edge(int _t, long long _w) : t(_t), w(_w) {}
7 };
8
9 bool SPFA(int st) // 平均O(V + E) 最糟O(VE)
10 {
11     vector<int> cnt(n, 0);
12     bitset<MXV> inq(0);
13     queue<int> q;
14     q.push(st);
15     dis[st] = 0;
16     inq[st] = true;
17     while (!q.empty())
18     {
19         int cur = q.front();
20         q.pop();
21         inq[cur] = false;
22         for (auto &e : G[cur])
23         {
24             if (dis[e.t] <= dis[cur] + e.w)
25                 continue;
26             dis[e.t] = dis[cur] + e.w;
27             if (inq[e.t])
28                 continue;
29             ++cnt[e.t];
30             if (cnt[e.t] > n)
31                 return false; // negative cycle
32             inq[e.t] = true;
33             q.push(e.t);
34         }
35     }
36     return true;
37 }

```

7.13 dijkstra

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define maxn 50000+5
3 #define INF 0x3f3f3f3f
4 using namespace std;
5
6 struct edge{
7     int v,w;
8 };
9
10 struct Item{
11     int u,dis;
12     bool operator< (const Item &rhs) const{
13         return dis>rhs.dis;
14     }
15 };
16
17 vector<edge> G[maxn];
18 int dist[maxn];
19
20 void dijkstra(int s){ // O((V + E)log(E))
21     memset(dist,INF,sizeof(dist));
22     dist[s]=0;
23     priority_queue<Item> pq;
24     pq.push({s,0});
25     while(!pq.empty()){
26         Item now=pq.top();

```

```

27     pq.pop();
28     if(now.dis>dist[now.u]) continue;
29     for(edge e:G[now.u]){
30         if(dist[e.v]>dist[now.u]+e.w){
31             dist[e.v]=dist[now.u]+e.w;
32             pq.push({e.v,dist[e.v]});
33         }
34     }
35 }
36 }
37
38 int main(){
39     int t,cas=1;
40     cin>>t;
41     while(t--){
42         int n,m,s,t;
43         cin>>n>>m>>s>>t;
44         for(int i=0;i<=n;i++) G[i].clear();
45         int u,v,w;
46         for(int i=0;i<m;i++){
47             cin>>u>>v>>w;
48             G[u].push_back({v,w});
49             G[v].push_back({u,w});
50         }
51         dijkstra(s);
52         cout<<"Case #"<<cas++<<" ";
53         if(dist[t]==INF) cout<<"unreachable\n";
54         else cout<<dist[t]<<endl;
55     }
56 }

```

7.14 SCC Tarjan

```

1 //Strongly Connected Components
2 //Tarjan O(V + E)
3 int dfn[N], low[N], dfncnt, sk[N], in_stack[N], tp;
4 //dfn[u]: dfs時u被visited的順序
5 //low[u]: 在u的dfs子樹中能回到最早已在stack中的節點
6 int scc[N], sc;//節點 u 所在 SCC 的編號
7 int sz[N];//強連通 u 的大小
8
9 void tarjan(int u) {
10     low[u] = dfn[u] = ++dfncnt, s[++tp] = u,
11     in_stack[u] = 1;
12     for (int i = h[u]; i; i = e[i].nex) {
13         const int &v = e[i].t;
14         if (!dfn[v]) {
15             tarjan(v);
16             low[u] = min(low[u], low[v]);
17         } else if (in_stack[v]) {
18             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
19         }
20     }
21     if (dfn[u] == low[u]) {
22         ++sc;
23         while (s[tp] != u) {
24             scc[s[tp]] = sc;
25             sz[sc]++;
26             in_stack[s[tp]] = 0;
27             --tp;
28         }
29         scc[s[tp]] = sc;
30         sz[sc]++;
31         in_stack[s[tp]] = 0;
32         --tp;
33     }
34 }

```

7.15 SCC Kosaraju

```

1 //做兩次dfs, O(V + E)
2 //g 是原圖, g2 是反圖
3 //s是dfs離開的節點

```

```

4 void dfs1(int u) {
5     vis[u] = true;
6     for (int v : g[u])
7         if (!vis[v]) dfs1(v);
8     s.push_back(u);
9 }
10
11 void dfs2(int u) {
12     group[u] = sccCnt;
13     for (int v : g2[u])
14         if (!group[v]) dfs2(v);
15 }
16
17 void kosaraju() {
18     sccCnt = 0;
19     for (int i = 1; i <= n; ++i)
20         if (!vis[i]) dfs1(i);
21     for (int i = n; i >= 1; --i)
22         if (!group[s[i]]) {
23             ++sccCnt;
24             dfs2(s[i]);
25         }
26 }

```

7.16 ArticulationPoints Tarjan

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 vector<vector<int>>> G;
5 int N;
6 int timer;
7 bool visited[105];
8 int visTime[105]; // 第一次visit的時間
9 int low[105];
10 // 最小能回到的父節點(不能是自己的parent)的visTime
11 int res;
12 //求割點數量
13 void tarjan(int u, int parent) {
14     int child = 0;
15     bool isCut = false;
16     visited[u] = true;
17     visTime[u] = low[u] = ++timer;
18     for (int v: G[u]) {
19         if (!visited[v]) {
20             ++child;
21             tarjan(v, u);
22             low[u] = min(low[u], low[v]);
23             if (parent != -1 && low[v] >= visTime[u])
24                 isCut = true;
25         }
26         else if (v != parent)
27             low[u] = min(low[u], visTime[v]);
28     }
29     //If u is root of DFS tree->有兩個以上的children
30     if (parent == -1 && child >= 2)
31         isCut = true;
32     if (isCut)
33         ++res;
34 }
35
36 int main()
37 {
38     char input[105];
39     char* token;
40     while (scanf("%d", &N) != EOF && N)
41     {
42         G.assign(105, vector<int>());
43         memset(visited, false, sizeof(visited));
44         memset(low, 0, sizeof(low));
45         memset(visTime, 0, sizeof(visTime));
46         timer = 0;
47         res = 0;
48         getchar(); // for \n
49         while (fgets(input, 105, stdin))

```

```

50 {
51     if (input[0] == '0')
52         break;
53     int size = strlen(input);
54     input[size - 1] = '\0';
55     --size;
56     token = strtok(input, " ");
57     int u = atoi(token);
58     int v;
59     while (token = strtok(NULL, " "))
60     {
61         v = atoi(token);
62         G[u].emplace_back(v);
63         G[v].emplace_back(u);
64     }
65 }
66 tarjan(1, -1);
67 printf("%d\n", res);
68 }
69 return 0;
70 }

```

7.17 最小樹狀圖

```

1  定義
2  有向圖上的最小生成樹 (Directed Minimum Spanning Tree)
3  稱為最小樹形圖。
4
5  const int maxn = 60 + 10;
6  const int inf = 0x3f3f3f3f;
7
8  struct Edge {
9      int s, t, cap, cost;
10 }; // cap 為頻寬 (optional)
11
12 int n, m, c;
13 int inEdge[maxn], idx[maxn], pre[maxn], vis[maxn];
14
15 // 對於每個點，選擇對它入度最小的那條邊
16 // 找環，如果沒有則 return;
17 // 進行縮環並更新其他點到環的距離。
18 int dirMST(vector<Edge> edges, int low) {
19     int result = 0, root = 0, N = n;
20
21     while(true) {
22         memset(inEdge, 0x3f, sizeof(inEdge));
23
24         // 找所有點的 in edge 放進 inEdge
25         // optional: low 為最小 cap 限制
26         for(const Edge& e : edges) {
27             if(e.cap < low) continue;
28             if(e.s!=e.t && e.cost<inEdge[e.t]) {
29                 inEdge[e.t] = e.cost;
30                 pre[e.t] = e.s;
31             }
32         }
33
34         for(int i=0; i<N; i++) {
35             if(i!=root && inEdge[i]==inf)
36                 return -1; //除了root 還有點沒有in edge
37         }
38
39         int seq = inEdge[root] = 0;
40         memset(idx, -1, sizeof(idx));
41         memset(vis, -1, sizeof(vis));
42
43         // 找所有的 cycle，一起編號為 seq
44         for(int i=0; i<N; i++) {
45             result += inEdge[i];
46             int cur = i;
47             while(vis[cur]!=i && idx[cur]==-1) {
48                 if(cur == root) break;
49                 vis[cur] = i;
50                 cur = pre[cur];

```

```

51     }
52     if(cur!=root && idx[cur]==-1) {
53         for(int j=pre[cur]; j!=cur; j=pre[j])
54             idx[j] = seq;
55         idx[cur] = seq++;
56     }
57 }
58
59 if(seq == 0) return result; // 沒有 cycle
60
61 for(int i=0; i<N; i++)
62     // 沒有被縮點的點
63     if(idx[i] == -1) idx[i] = seq++;
64
65 // 縮點並重新編號
66 for(Edge& e : edges) {
67     if(idx[e.s] != idx[e.t])
68         e.cost -= inEdge[e.t];
69     e.s = idx[e.s];
70     e.t = idx[e.t];
71 }
72 N = seq;
73 root = idx[root];
74 }
75 }
76
77 =====
78
79 Tarjan 的DMST 演算法
80 Tarjan 提出了一種能夠在
81 O(m+nlog n)時間內解決最小樹形圖問題的演算法。
82
83 流程
84 Tarjan 的演算法分為收縮與伸展兩個過程。
85 接下來先介紹收縮的過程。
86 我們要假設輸入的圖是滿足強連通的，
87 如果不滿足那就加入 O(n) 條邊使其滿足，
88 並且這些邊的邊權是無窮大的。
89
90 我們需要一個堆存儲結點的入邊編號，入邊權值，
91 結點總代價等相關信息，由於後續過程中會有堆的合併操作，
92 這裡採用左偏樹 與並查集實現。
93 演算法的每一步都選擇一個任意結點v，
94 需要保證v不是根節點，並且在堆中沒有它的入邊。
95 再將v的最小入邊加入到堆中，
96 如果新加入的這條邊使堆中的邊形成了環，
97 那麼將構成環的那些結點收縮，
98 我們不妨將這些已經收縮的結點命名為超級結點，
99 再繼續這個過程，如果所有的頂點都縮成了超級結點，
100 那麼收縮過程就結束了。
101 整個收縮過程結束後會得到一棵收縮樹，
102 之後就會對它進行伸展操作。
103
104 堆中的邊總是會形成一條路徑v0 <- v1<- ... <- vk，
105 由於圖是強連通的，這個路徑必然存在，
106 並且其中的 vi 可能是最初的單一結點，
107 也可能是壓縮後的超級結點。
108
109 最初有 v0=a，其中 a 是圖中任意的一個結點，
110 每次都選擇一條最小入邊 vk <- u，
111 如果 u 不是v0,v1,...,vk中的一個結點，
112 那麼就將結點擴展到 v k+1=u。
113 如果 u 是他們其中的一個結點 vi，
114 那麼就找到了一個關於 vi <- ... <- vk <- vi的環，
115 再將他們收縮為一個超級結點c。
116
117 向隊列 P 中放入所有的結點或超級結點，
118 並初始選擇任一節點 a，只要佇列不為空，就進行以下步驟：
119
120 選擇 a 的最小入邊，保證不存在自環，
121 並找到另一頭的結點 b。
122 如果結點b沒有被記錄過說明未形成環，
123 令 a <- b，繼續目前操作尋找環。

```

```

124 如果 b 被記錄過了，就表示出現了環。
125 總結點數加一，並將環上的所有結點重新編號，對堆進行合併，
126 以及結點/超級結點的總權值的更新。
127 更新權值操作就是將環上所有結點的入邊都收集起來，
128 並減去環上入邊的邊權。
129
130 typedef long long ll;
131 #define maxn 102
132 #define INF 0x3f3f3f3f
133
134 struct UnionFind {
135     int fa[maxn << 1];
136     UnionFind() { memset(fa, 0, sizeof(fa)); }
137     void clear(int n) {
138         memset(fa + 1, 0, sizeof(int) * n);
139     }
140     int find(int x) {
141         return fa[x] ? fa[x] = find(fa[x]) : x;
142     }
143     int operator[](int x) { return find(x); }
144 };
145
146 struct Edge {
147     int u, v, w, w0;
148 };
149
150 struct Heap {
151     Edge *e;
152     int rk, constant;
153     Heap *lch, *rch;
154
155     Heap(Edge *_e):
156         e(_e), rk(1), constant(0), lch(NULL), rch(NULL){}
157
158     void push() {
159         if (lch) lch->constant += constant;
160         if (rch) rch->constant += constant;
161         e->w += constant;
162         constant = 0;
163     }
164 };
165
166 Heap *merge(Heap *x, Heap *y) {
167     if (!x) return y;
168     if (!y) return x;
169     if (x->e->w + x->constant > y->e->w + y->constant)
170         swap(x, y);
171     x->push();
172     x->rch = merge(x->rch, y);
173     if (!x->lch || x->lch->rk < x->rch->rk)
174         swap(x->lch, x->rch);
175     if (x->rch)
176         x->rk = x->rch->rk + 1;
177     else
178         x->rk = 1;
179     return x;
180 }
181
182 Edge *extract(Heap *&x) {
183     Edge *r = x->e;
184     x->push();
185     x = merge(x->lch, x->rch);
186     return r;
187 }
188
189 vector<Edge> in[maxn];
190 int n, m, fa[maxn << 1], nxt[maxn << 1];
191 Edge *ed[maxn << 1];
192 Heap *Q[maxn << 1];
193 UnionFind id;
194
195 void contract() {
196     bool mark[maxn << 1];
197     //將圖上的每一個節點與其相連的那些節點進行記錄
198     for (int i = 1; i <= n; i++) {
199         queue<Heap *> q;

```

```

200         for (int j = 0; j < in[i].size(); j++)
201             q.push(new Heap(&in[i][j]));
202         while (q.size() > 1) {
203             Heap *u = q.front();
204             q.pop();
205             Heap *v = q.front();
206             q.pop();
207             q.push(merge(u, v));
208         }
209         Q[i] = q.front();
210     }
211     mark[1] = true;
212     for(int a=1,b=1,p;Q[a];b=a,mark[b]=true){
213         //尋找最小入邊以及其端點，保證無環
214         do {
215             ed[a] = extract(Q[a]);
216             a = id[ed[a]->u];
217         } while (a == b && Q[a]);
218         if (a == b) break;
219         if (!mark[a]) continue;
220         //對發現的環進行收縮，以及環內的節點重新編號，
221         //總權值更新
222         for (a = b, n++; a != n; a = p) {
223             id.fa[a] = fa[a] = n;
224             if (Q[a]) Q[a]->constant -= ed[a]->w;
225             Q[n] = merge(Q[n], Q[a]);
226             p = id[ed[a]->u];
227             nxt[p == n ? b : p] = a;
228         }
229     }
230 }
231
232 ll expand(int x, int r);
233 ll expand_iter(int x) {
234     ll r = 0;
235     for(int u=nxt[x];u!=x;u=nxt[u]){
236         if (ed[u]->w0 >= INF)
237             return INF;
238         else
239             r+=expand(ed[u]->v,u)+ed[u]->w0;
240     }
241     return r;
242 }
243
244 ll expand(int x, int t) {
245     ll r = 0;
246     for (; x != t; x = fa[x]) {
247         r += expand_iter(x);
248         if (r >= INF) return INF;
249     }
250     return r;
251 }
252
253 void link(int u, int v, int w) {
254     in[v].push_back({u, v, w, w});
255 }
256
257 int main() {
258     int rt;
259     scanf("%d %d %d", &n, &m, &rt);
260     for (int i = 0; i < m; i++) {
261         int u, v, w;
262         scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);
263         link(u, v, w);
264     }
265     //保證強連通
266     for (int i = 1; i <= n; i++)
267         link(i > 1 ? i - 1 : n, i, INF);
268     contract();
269     ll ans = expand(rt, n);
270     if (ans >= INF)
271         puts("-1");
272     else
273         printf("%lld\n", ans);
274     return 0;
275 }
276

```


8 geometry

8.1 intersection

```

1 using LL = long long;
2
3 struct Point2D {
4     LL x, y;
5 };
6
7 struct Line2D {
8     Point2D s, e;
9     LL a, b, c; // L: ax + by = c
10    Line2D(Point2D s, Point2D e): s(s), e(e) {
11        a = e.y - s.y;
12        b = s.x - e.x;
13        c = a * s.x + b * s.y;
14    }
15 };
16
17 // 用克拉馬公式求二元一次解
18 Point2D intersection2D(Line2D l1, Line2D l2) {
19     LL D = l1.a * l2.b - l2.a * l1.b;
20     LL Dx = l1.c * l2.b - l2.c * l1.b;
21     LL Dy = l1.a * l2.c - l2.a * l1.c;
22
23     if(D) { // intersection
24         double x = 1.0 * Dx / D;
25         double y = 1.0 * Dy / D;
26     } else {
27         if(Dx || Dy) // Parallel lines
28             else // Same line
29     }
30 }

```

8.2 半平面相交

```

1 // Q: 給定一張凸包(已排序的點),
2 // 找出圖中離凸包外最遠的距離
3
4 const int maxn = 100 + 10;
5 const double eps = 1e-7;
6
7 struct Vector {
8     double x, y;
9     Vector(double x=0.0, double y=0.0): x(x), y(y) {}
10
11    Vector operator+(Vector v) {
12        return Vector(x+v.x, y+v.y);
13    }
14    Vector operator-(Vector v) {
15        return Vector(x-v.x, y-v.y);
16    }
17    Vector operator*(double val) {
18        return Vector(x*val, y*val);
19    }
20    double dot(Vector v) { return x*v.x + y*v.y; }
21    double cross(Vector v) { return x*v.y - y*v.x; }
22    double length() { return sqrt(dot(*this)); }
23    Vector unit_normal_vector() {
24        double len = length();
25        return Vector(-y/len, x/len);
26    }
27 };
28
29 using Point = Vector;
30
31 struct Line {
32     Point p;
33     Vector v;
34     double ang;
35     Line(Point p={}, Vector v={}): p(p), v(v) {
36         ang = atan2(v.y, v.x);
37     }

```

```

38    bool operator<(const Line& l) const {
39        return ang < l.ang;
40    }
41    Point intersection(Line l) {
42        Vector u = p - l.p;
43        double t = l.v.cross(u) / v.cross(l.v);
44        return p + v*t;
45    }
46 };
47
48 int n, m;
49 Line narrow[maxn]; // 要判斷的直線
50 Point poly[maxn]; // 能形成半平面交的凸包邊界點
51
52 // return true if point p is on the left of line l
53 bool onLeft(Point p, Line l) {
54     return l.v.cross(p-l.p) > 0;
55 }
56
57 int halfplaneIntersection() {
58     int l, r;
59     Line L[maxn]; // 排序後的向量隊列
60     Point P[maxn]; // s[i] 跟 s[i-1] 的交點
61
62     L[l=r=0] = narrow[0]; // notice: narrow is sorted
63     for(int i=1; i<n; i++) {
64         while(l<r && !onLeft(P[r-1], narrow[i])) r--;
65         while(l<r && !onLeft(P[l], narrow[i])) l++;
66
67         L[++r] = narrow[i];
68         if(l < r) P[r-1] = L[r-1].intersection(L[r]);
69     }
70
71     while(l<r && !onLeft(P[r-1], L[l])) r--;
72     if(r-l <= 1) return 0;
73
74     P[r] = L[r].intersection(L[l]);
75
76     int m=0;
77     for(int i=1; i<=r; i++) {
78         poly[m++] = P[i];
79     }
80
81     return m;
82 }
83
84 Point pt[maxn];
85 Vector vec[maxn];
86 Vector normal[maxn]; // normal[i] = vec[i] 的單位法向量
87
88 double bsearch(double l=0.0, double r=1e4) {
89     if(abs(r-l) < 1e-7) return l;
90
91     double mid = (l + r) / 2;
92
93     for(int i=0; i<n; i++) {
94         narrow[i] = Line(pt[i]+normal[i]*mid, vec[i]);
95     }
96
97     if(halfplaneIntersection())
98         return bsearch(mid, r);
99     else return bsearch(l, mid);
100 }
101
102 int main() {
103     while(~scanf("%d", &n) && n) {
104         for(int i=0; i<n; i++) {
105             double x, y;
106             scanf("%lf%lf", &x, &y);
107             pt[i] = {x, y};
108         }
109         for(int i=0; i<n; i++) {
110             vec[i] = pt[(i+1)%n] - pt[i];
111             normal[i] = vec[i].unit_normal_vector();
112         }
113
114         printf("%.6lf\n", bsearch());

```

```

115     }
116     return 0;
117 }

```

8.3 凸包

```

1 // q: 平面上給定多個區域，由多個座標點所形成，再給定
2 // 多點(x,y)，判斷有落點的區域(destroyed)的面積總和。
3 #include <bits/stdc++.h>
4 using namespace std;
5
6 const int maxn = 500 + 10;
7 const int maxCoordinate = 500 + 10;
8
9 struct Point {
10     int x, y;
11 };
12
13 int n;
14 bool destroyed[maxn];
15 Point arr[maxn];
16 vector<Point> polygons[maxn];
17
18 void scanAndSortPoints() {
19     int minX = maxCoordinate, minY = maxCoordinate;
20     for(int i=0; i<n; i++) {
21         int x, y;
22         scanf("%d%d", &x, &y);
23         arr[i] = (Point){x, y};
24         if(y < minY || (y == minY && x < minX)) {
25             // If there are floating points, use:
26             // if(y<minY || (abs(y-minY)<eps && x<minX)) {
27                 minX = x, minY = y;
28             }
29         }
30     }
31     sort(arr, arr+n, [minX, minY](Point& a, Point& b){
32         double theta1 = atan2(a.y - minY, a.x - minX);
33         double theta2 = atan2(b.y - minY, b.x - minX);
34         return theta1 < theta2;
35     });
36     return;
37 }
38
39 // returns cross product of u(AB) x v(AC)
40 int cross(Point& A, Point& B, Point& C) {
41     int u[2] = {B.x - A.x, B.y - A.y};
42     int v[2] = {C.x - A.x, C.y - A.y};
43     return (u[0] * v[1]) - (u[1] * v[0]);
44 }
45
46 // size of arr = n >= 3
47 // st = the stack using vector, m = index of the top
48 vector<Point> convex_hull() {
49     vector<Point> st(arr, arr+3);
50     for(int i=3, m=2; i<n; i++, m++) {
51         while(m >= 2) {
52             if(cross(st[m], st[m-1], arr[i]) < 0)
53                 break;
54             st.pop_back();
55             m--;
56         }
57         st.push_back(arr[i]);
58     }
59     return st;
60 }
61
62 bool inPolygon(vector<Point>& vec, Point p) {
63     vec.push_back(vec[0]);
64     for(int i=1; i<vec.size(); i++) {
65         if(cross(vec[i-1], vec[i], p) < 0) {
66             return false;
67         }
68     }
69     vec.pop_back();

```

```

70     return true;
71 }
72
73     1 | x1    x2    x3    x4    x5            xn |
74     A = - | x      x      x      x      x ... x |
75           2 | y1    y2    y3    y4    y5            yn |
76 double calculateArea(vector<Point>& v) {
77     v.push_back(v[0]); // make v[n] = v[0]
78     double result = 0.0;
79     for(int i=1; i<v.size(); i++)
80         result += v[i-1].x*v[i].y - v[i-1].y*v[i].x;
81     v.pop_back();
82     return result / 2.0;
83 }
84
85 int main() {
86     int p = 0;
87     while(~scanf("%d", &n) && (n != -1)) {
88         scanAndSortPoints();
89         polygons[p++] = convex_hull();
90     }
91
92     int x, y;
93     double result = 0.0;
94     while(~scanf("%d%d", &x, &y)) {
95         for(int i=0; i<p; i++) {
96             if(inPolygon(polygons[i], (Point){x, y}))
97                 destroyed[i] = true;
98         }
99     }
100     for(int i=0; i<p; i++) {
101         if(destroyed[i])
102             result += calculateArea(polygons[i]);
103     }
104     printf("%.2lf\n", result);
105     return 0;
106 }

```

9 動態規劃

9.1 LCS 和 LIS

```

1 //最長共同子序列(LCS)
2 給定兩序列 A,B，求最長的序列 C，
3 C 同時為 A,B 的子序列。
4
5 //最長遞增子序列 (LIS)
6 給你一個序列 A，求最長的序列 B，
7 B 是一個（非）嚴格遞增序列，且為 A 的子序列。
8
9 //LCS 和 LIS 題目轉換
10 LIS 轉成 LCS
11     1. A 為原序列， B=sort(A)
12     2. 對 A,B 做 LCS
13 LCS 轉成 LIS
14     1. A, B 為原本的兩序列
15     2. 最 A 序列作編號轉換，將轉換規則套用在 B
16     3. 對 B 做 LIS
17     4. 重複的數字在編號轉換時後要變成不同的數字，
18        越早出現的數字要越小
19     5. 如果有數字在 B 裡面而不在 A 裡面，
20        直接忽略這個數字不做轉換即可

```

10 Section2

10.1 thm

- 中文測試

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

•

$$\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$$

•

$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx$$

•

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

11 DP

11.1 DP 公式

Edit Distance S_1 經過 增、刪 或 換 字 變 成 S_2 $dp[i][j]$ = $\begin{cases} dp[i-1][j-1] & \text{if } S_1[i] = S_2[j] \\ \min\{dp[i][j-1], dp[i-1][j], dp[i-1][j-1]\} + 1 & \text{if } S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases}$

11.2 DP 表格

1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							
50							
51							
52							
53							
54							
55							
56							
57							
58							

59							
60							
61							
62							
63							
64							
65							
66							
67							
68							
69							
70							
71							
72							
73							
74							
75							
76							
77							
78							
79							
80							
81							
82							
83							
84							
85							
86							
87							
88							
89							
90							
91							
92							
93							
94							
95							
96							
97							
98							
99							
100							
101							
102							
103							
104							
105							
106							
107							
108							
109							
110							
111							
112							
113							
114							
115							
116							
117							
118							
119							
120							
121							
122							
123							
124							
125							
126							
127							
128							
129							
130							
131							
132							
133							
134							
135							

136							
137							
138							
139							
140							
141							
142							
143							
144							
145							
146							
147							
148							
149							
150							
151							
152							
153							
154							
155							
156							
157							
158							
159							
160							
161							
162							
163							
164							
165							
166							
167							
168							
169							
170							
171							
172							
173							
174							
175							
176							
177							
178							
179							
180							
181							
182							
183							
184							
185							
186							
187							
188							
189							
190							
191							
192							
193							
194							
195							
196							
197							
198							
199							
200							
201							
202							
203							
204							
205							
206							
207							
208							
209							
210							
211							
212							

213							
214							
215							
216							
217							
218							
219							
220							
221							
222							
223							
224							
225							
226							
227							
228							
229							
230							
231							
232							
233							
234							
235							
236							
237							
238							
239							
240							
241							
242							
243							
244							
245							
246							
247							
248							
249							
250							
251							
252							
253							
254							
255							
256							
257							
258							
259							
260							
261							
262							
263							
264							
265							
266							
267							
268							
269							
270							
271							
272							
273							
274							
275							
276							
277							
278							
279							
280							
281							
282							
283							
284							
285							
286							
287							
288							
289							

290							
291							
292	-----						
293							
294							
295	-----						
296							
297							
298	-----						
299							
300							
301	-----						
302							
303							
304	-----						
305							
306							
307	-----						
308							
309							
310	-----						
311							
312							
313	-----						
314							
315							
316	-----						
317							
318							
319	-----						
320							
321							
322	-----						
323							
324							
325	-----						
326							
327							
328	-----						
329							
330							
331	-----						
332							
333							
334	-----						
335							
336							
337	-----						
338							
339							
340	-----						
341							
342							
343	-----						
344							
345							
346	-----						
347							
348							
349	-----						
350							
351							
352	-----						
353							
354							
355	-----						
356							
357							
358	-----						
359							
360							
361	-----						
362							
363							
364	-----						
365							
366							

367	-----						
368							
369							
370	-----						
371							
372							
373	-----						
374							
375							
376	-----						
377							
378							
379	-----						
380							
381							
382	-----						
383							
384							
385	-----						
386							
387							
388	-----						
389							
390							
391	-----						
392							
393							
394	-----						
395							
396							
397	-----						
398							
399							
400	-----						
401							
402							
403	-----						
404							
405							
406	-----						
407							
408							
409	-----						
410							
411							
412	-----						
413							
414							
415	-----						
416							
417							
418	-----						
419							
420							
421	-----						
422							
423							
424	-----						
425							
426							
427	-----						
428							
429							
430	-----						
431							
432							
433	-----						
434							
435							
436	-----						
437							
438							
439	-----						
440							
441							
442	-----						
443							

444									
445	-----								
446									
447									
448	-----								
449									
450									
451	-----								
452									
453									
454	-----								
455									
456									
457	-----								
458									
459									
460	-----								
461									
462									
463	-----								
464									
465									
466	-----								
467									
468									
469	-----								
470									
471									
472	-----								
473									
474									
475	-----								
476									
477									
478	-----								
479									
480									
481	-----								
482									
483									
484	-----								
485									
486									
487	-----								
488									
489									
490	-----								
491									
492									
493	-----								
494									
495									
496	-----								
497									
498									
499	-----								
500									
501									
502	-----								
503									
504									
505	-----								
506									
507									
508	-----								
509									
510									
511	-----								
512									
513									
514	-----								
515									
516									
517	-----								
518									
519									
520	-----								

521									
522									
523	-----								
524									
525									
526	-----								
527									
528									
529	-----								
530									
531									
532	-----								
533									
534									
535	-----								
536									
537									
538	-----								
539									
540									
541	-----								
542									
543									
544	-----								
545									
546									
547	-----								
548									
549									
550	-----								
551									
552									
553	-----								
554									
555									
556	-----								
557									
558									
559	-----								
560									
561									
562	-----								
563									
564									
565	-----								
566									
567									
568	-----								
569									
570									
571	-----								
572									
573									
574	-----								
575									
576									
577	-----								
578									
579									
580	-----								
581									
582									
583	-----								
584									
585									
586	-----								
587									
588									
589	-----								
590									
591									
592	-----								
593									
594									
595	-----								
596									
597									

598							
599							
600							
601							
602							
603							
604							
605							
606							
607							
608							
609							
610							
611							
612							
613							
614							
615							
616							
617							
618							
619							
620							
621							
622							
623							
624							
625							
626							
627							
628							
629							
630							
631							
632							
633							
634							
635							
636							
637							
638							
639							
640							
641							
642							
643							
644							
645							
646							
647							
648							
649							
650							
651							
652							
653							
654							
655							
656							
657							
658							
659							
660							
661							
662							
663							
664							
665							
666							
667							
668							
669							
670							
671							
672							
673							
674							

675							
676							
677							
678							
679							
680							
681							
682							
683							
684							
685							
686							
687							
688							
689							
690							
691							
692							
693							
694							
695							
696							
697							
698							
699							
700							
701							
702							
703							
704							
705							
706							
707							
708							
709							
710							
711							
712							
713							
714							
715							
716							
717							
718							
719							
720							
721							
722							
723							
724							
725							
726							
727							
728							
729							
730							
731							
732							
733							
734							
735							
736							
737							
738							
739							
740							
741							
742							
743							
744							
745							
746							
747							
748							
749							
750							
751							

752									
753									
754	-----								
755									
756									
757	-----								
758									
759									
760	-----								
761									
762									
763	-----								
764									
765									
766	-----								
767									
768									
769	-----								
770									
771									
772	-----								
773									
774									
775	-----								
776									
777									
778	-----								
779									
780									
781	-----								
782									
783									
784	-----								
785									
786									
787	-----								
788									
789									
790	-----								
791									
792									
793	-----								
794									
795									
796	-----								
797									
798									
799	-----								
800									
801									
802	-----								
803									
804									
805	-----								
806									
807									
808	-----								
809									
810									
811	-----								
812									
813									
814	-----								
815									
816									
817	-----								
818									
819									
820	-----								
821									
822									
823	-----								
824									
825									
826	-----								
827									
828									

829	-----								
830									
831									
832	-----								
833									
834									
835	-----								
836									
837									
838	-----								
839									
840									
841	-----								
842									
843									
844	-----								
845									
846									
847	-----								
848									
849									
850	-----								
851									
852									
853	-----								
854									
855									
856	-----								
857									
858									
859	-----								
860									
861									
862	-----								
863									
864									
865	-----								
866									
867									
868	-----								
869									
870									
871	-----								
872									
873									
874	-----								
875									
876									
877	-----								
878									
879									
880	-----								
881									
882									
883	-----								
884									
885									
886	-----								
887									
888									
889	-----								
890									
891									
892	-----								
893									
894									
895	-----								
896									
897									
898	-----								
899									
900									
901	-----								
902									
903									
904	-----								
905									

906									
907	-----								
908									
909									
910	-----								
911									
912									
913	-----								
914									
915									
916	-----								
917									
918									
919	-----								
920									
921									
922	-----								
923									
924									
925	-----								
926									
927									
928	-----								
929									
930									
931	-----								
932									
933									
934	-----								
935									
936									
937	-----								
938									
939									
940	-----								
941									
942									
943	-----								
944									
945									
946	-----								
947									
948									
949	-----								
950									
951									
952	-----								
953									
954									
955	-----								
956									
957									
958	-----								
959									
960									
961	-----								
962									
963									
964	-----								
965									
966									
967	-----								
968									
969									
970	-----								
971									
972									
973	-----								
974									
975									
976	-----								
977									
978									
979	-----								
980									
981									
982	-----								

983									
984									
985	-----								
986									
987									
988	-----								
989									
990									
991	-----								
992									
993									
994	-----								
995									
996									
997	-----								
998									
999									
1000	-----								
1001									
1002									
1003	-----								
1004									
1005									
1006	-----								
1007									
1008									
1009	-----								
1010									
1011									
1012	-----								
1013									
1014									
1015	-----								
1016									
1017									
1018	-----								
1019									
1020									
1021	-----								
1022									
1023									
1024	-----								
1025									
1026									
1027	-----								
1028									
1029									
1030	-----								
1031									
1032									
1033	-----								
1034									
1035									
1036	-----								
1037									
1038									
1039	-----								
1040									
1041									
1042	-----								
1043									
1044									
1045	-----								
1046									
1047									
1048	-----								
1049									
1050									
1051	-----								
1052									
1053									
1054	-----								
1055									
1056									
1057	-----								
1058									
1059									

1060							
1061							
1062							
1063							
1064							
1065							
1066							
1067							
1068							
1069							
1070							
1071							
1072							
1073							
1074							
1075							
1076							
1077							
1078							
1079							
1080							
1081							
1082							
1083							
1084							
1085							
1086							
1087							
1088							
1089							
1090							
1091							
1092							
1093							
1094							
1095							
1096							
1097							
1098							
1099							
1100							
1101							
1102							
1103							
1104							
1105							
1106							
1107							
1108							
1109							
1110							
1111							
1112							
1113							
1114							
1115							
1116							
1117							
1118							
1119							
1120							
1121							
1122							
1123							
1124							
1125							
1126							
1127							
1128							
1129							
1130							
1131							
1132							
1133							
1134							
1135							
1136							

1137							
1138							
1139							
1140							
1141							
1142							
1143							
1144							
1145							
1146							
1147							
1148							
1149							
1150							
1151							
1152							
1153							
1154							
1155							
1156							
1157							
1158							
1159							
1160							
1161							
1162							
1163							
1164							
1165							
1166							
1167							
1168							
1169							
1170							
1171							
1172							
1173							
1174							
1175							
1176							
1177							
1178							
1179							
1180							
1181							
1182							
1183							
1184							
1185							
1186							
1187							
1188							
1189							
1190							
1191							
1192							
1193							
1194							
1195							
1196							
1197							
1198							
1199							
1200							
1201							
1202							
1203							
1204							
1205							
1206							
1207							
1208							
1209							
1210							
1211							
1212							
1213							

1214									
1215									
1216	-----								
1217									
1218									
1219	-----								
1220									
1221									
1222	-----								
1223									
1224									
1225	-----								
1226									
1227									
1228	-----								
1229									
1230									
1231	-----								
1232									
1233									
1234	-----								
1235									
1236									
1237	-----								
1238									
1239									
1240	-----								
1241									
1242									
1243	-----								
1244									
1245									
1246	-----								
1247									
1248									
1249	-----								
1250									
1251									
1252	-----								
1253									
1254									
1255	-----								
1256									
1257									
1258	-----								
1259									
1260									
1261	-----								
1262									
1263									
1264	-----								
1265									
1266									
1267	-----								
1268									
1269									
1270	-----								
1271									
1272									
1273	-----								
1274									
1275									
1276	-----								
1277									
1278									
1279	-----								
1280									
1281									
1282	-----								
1283									
1284									
1285	-----								
1286									
1287									
1288	-----								
1289									
1290									

1291	-----								
1292									
1293									
1294	-----								
1295									
1296									
1297	-----								
1298									
1299									
1300	-----								
1301									
1302									
1303	-----								
1304									
1305									
1306	-----								
1307									
1308									
1309	-----								
1310									
1311									
1312	-----								
1313									
1314									
1315	-----								
1316									
1317									
1318	-----								
1319									
1320									
1321	-----								
1322									
1323									
1324	-----								
1325									
1326									
1327	-----								
1328									
1329									
1330	-----								
1331									
1332									
1333	-----								
1334									
1335									
1336	-----								
1337									
1338									
1339	-----								
1340									
1341									
1342	-----								
1343									
1344									
1345	-----								
1346									
1347									
1348	-----								
1349									
1350									
1351	-----								
1352									
1353									
1354	-----								
1355									
1356									
1357	-----								
1358									
1359									
1360	-----								
1361									
1362									
1363	-----								
1364									
1365									
1366	-----								
1367									

1368									
1369	-----								
1370									
1371									
1372	-----								
1373									
1374									
1375	-----								
1376									
1377									
1378	-----								
1379									
1380									
1381	-----								
1382									
1383									
1384	-----								
1385									
1386									
1387	-----								
1388									
1389									
1390	-----								
1391									
1392									
1393	-----								
1394									
1395									
1396	-----								
1397									
1398									
1399	-----								
1400									
1401									
1402	-----								
1403									
1404									
1405	-----								
1406									
1407									
1408	-----								
1409									
1410									
1411	-----								
1412									
1413									
1414	-----								
1415									
1416									
1417	-----								
1418									
1419									
1420	-----								
1421									
1422									
1423	-----								
1424									
1425									
1426	-----								
1427									
1428									
1429	-----								
1430									
1431									
1432	-----								
1433									
1434									
1435	-----								
1436									
1437									
1438	-----								
1439									
1440									
1441	-----								
1442									
1443									
1444	-----								

1445									
1446									
1447	-----								
1448									
1449									
1450	-----								
1451									
1452									
1453	-----								
1454									
1455									
1456	-----								
1457									
1458									
1459	-----								
1460									
1461									
1462	-----								
1463									
1464									
1465	-----								
1466									
1467									
1468	-----								
1469									
1470									
1471	-----								
1472									
1473									
1474	-----								
1475									
1476									
1477	-----								
1478									
1479									
1480	-----								
1481									
1482									
1483	-----								
1484									
1485									
1486	-----								
1487									
1488									
1489	-----								
1490									
1491									
1492	-----								
1493									
1494									
1495	-----								
1496									
1497									
1498	-----								
1499									
1500									
1501	-----								
1502									
1503									
1504	-----								
1505									
1506									
1507	-----								
1508									
1509									
1510	-----								
1511									
1512									
1513	-----								
1514									
1515									
1516	-----								
1517									
1518									
1519	-----								
1520									
1521									

1522							
1523							
1524							
1525							
1526							
1527							
1528							
1529							
1530							
1531							
1532							
1533							
1534							

12 slogan

12.1 slogan

Figure 1 displays a 20x20 grid of cells, numbered 1 to 20 on the left. The grid is divided into four quadrants by a vertical line at column 10 and a horizontal line at row 10. The top-left quadrant (rows 1-10, columns 1-10) shows a pattern of black and red diagonal lines. The top-right quadrant (rows 1-10, columns 11-20) shows a pattern of black and red diagonal lines. The bottom-left quadrant (rows 11-20, columns 1-10) shows a pattern of black and red diagonal lines. The bottom-right quadrant (rows 11-20, columns 11-20) shows a pattern of black and red diagonal lines. The pattern evolves from a simple diagonal line in the first generation to a complex, fractal-like structure by the 20th generation.