

Contents

1	math	1
1.1	公式	1
1.2	矩陣快速冪	1
1.3	質數與因數	1
1.4	Pisano Period	2
1.5	歐拉函數	2
1.6	乘法逆元、組合數	2
1.7	大步小步	2
2	字串	3
2.1	最長迴文子字串	3
2.2	KMP	3
2.3	Z Algorithm	3
3	algorithm	4
3.1	三分搜	4
3.2	差分	4
3.3	greedy	4
3.4	dinic	5
3.5	SCC Tarjan	5
3.6	SCC Kosaraju	6
3.7	ArticulationPoints Tarjan	6
3.8	最小樹狀圖	6
3.9	二分圖最大匹配	6
3.10	Astar	6
3.11	JosephusProblem	7
3.12	KM	7
3.13	LCA 倍增法	7
3.14	LCA 樹壓平 RMQ	8
3.15	LCA 樹鍊剖分	8
3.16	MCMF	9
3.17	莫隊	9
3.18	Dancing Links	10
4	DataStructure	10
4.1	BIT	10
4.2	ChthollyTree	10
4.3	線段樹 1D	11
4.4	線段樹 2D	11
4.5	權值線段樹	12
4.6	Trie	12
4.7	AC Trie	12
4.8	單調隊列	13
5	Geometry	13
5.1	公式	13
5.2	Template	13
5.3	Polygon	14
5.4	Intersection	14
5.5	最小圓覆蓋	14
5.6	旋轉卡尺	14
5.7	凸包	14
5.8	半平面相交	14
6	DP	15
6.1	以價值為主的背包	15
6.2	抽屜	15
6.3	Barcode	15
6.4	Deque 最大差距	15
6.5	LCS 和 LIS	15
6.6	RangeDP	15
6.7	stringDP	16
6.8	樹 DP 有幾個 path 長度為 k	16
6.9	TreeDP reroot	16
6.10	WeightedLIS	16

1 math

1.1 公式

1. Most Divisor Number

Range	最多因數數	因數個數
10^9	735134400	1344
2^{31}	2095133040	1600
10^{18}	897612484786617600	103680
2^{64}	9200527969062830400	161280

2. Catlan Number

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n}, C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$
$$C = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

3. Faulhaber’s formula

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r} B_r n^{p-r+1}$$

where $B_0 = 1, B_r = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \frac{B_i}{r-i+1}$

也可用高斯消去法找 $deg(p+1)$ 的多項式，例：

$$\sum_{k=1}^n k^2 = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

$$\begin{bmatrix} 0^3 & 0^2 & 0^1 & 0^0 \\ 1^3 & 1^2 & 1^1 & 1^0 \\ 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 3^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

4. SG Function

$$SG(x) = mex\{SG(y) | x \rightarrow y\}$$
$$mex(S) = \min\{n | n \in \mathbb{N}, n \notin S\}$$

5. Fibonacci

$$\begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} f_{n+p} & f_{n+p+1} \end{bmatrix}, p \in \mathbb{N}$$

6. Pick’s Theorem

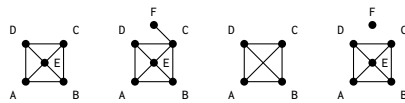
給定頂點座標均是整點（或正方形格子點）的簡單多邊形，其面積 A 和內部格點數目 i 、邊上格點數目 b 的關係為

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

7. Euler’s Formula

對於有 V 個點、 E 條邊、 F 個面（含外部）的連通平面圖

$$F + V - E = 2$$



(1)、(2)○；(3)×， \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交；(4)×，非連通圖

1.2 矩陣快速冪

```
1 using ll = long long;
2 using mat = vector<vector<ll>>;
3 const int mod = 1e9 + 7;
4
5
6 mat operator*(mat A, mat B) {
7     mat res(A.size(), vector<ll>(B[0].size()));
8     for(int i=0; i<A.size(); i++) {
9         for(int j=0; j<B[0].size(); j++) {
10             for(int k=0; k<B.size(); k++) {
11                 res[i][j] += A[i][k] * B[k][j] % mod;
12                 res[i][j] %= mod;
13             }
14         }
15     }
16     return res;
17 }
18
19 mat I = ;
20 // compute matrix M^n
21 // 需先 init I 矩陣
22 mat mpow(mat& M, int n) {
23     if(n <= 1) return n ? M : I;
24     mat v = mpow(M, n>>1);
25     return (n & 1) ? v*v*M : v*v;
26 }
27
28 // 迴圈版本
29 mat mpow(mat M, int n) {
30     mat res(M.size(), vector<ll>(M[0].size()));
31     for(int i=0; i<res.size(); i++)
32         res[i][i] = 1;
33     for(; n; n>>=1) {
34         if(n & 1) res = res * M;
35         M = M * M;
36     }
37     return res;
38 }
```

1.3 質數與因數

```
1 歐拉篩 O(n)
2 #define MAXN 47000 //sqrt(2^31)=46,340...
3 bool isPrime[MAXN];
4 int p[MAXN];
5 int pSize=0;
6 void getPrimes(){
7     memset(isPrime,true,sizeof(isPrime));
8     isPrime[0]=isPrime[1]=false;
9     for(int i=2;i<MAXN;i++){
10         if(isPrime[i]) p[pSize++]=i;
11         for(int j=0;j<pSize&&i*p[j]<=MAXN;j++){
12             isPrime[i*p[j]]=false;
13             if(i%p[j]==0) break;
14         }
15     }
16 }
17
18 最大公因數 O(log(min(a,b)))
19 int GCD(int a, int b){
20     if(b == 0) return a;
21     return GCD(b, a%b);
22 }
23
24 質因數分解
25 void primeFactorization(int n){
26     for(int i=0; i<p.size(); ++i) {
27         if(p[i]*p[i] > n) break;
28         if(n % p[i]) continue;
29         cout << p[i] << ' ';
30         while(n%p[i] == 0) n /= p[i];
31     }
32     if(n != 1) cout << n << ' ';
33     cout << '\n';
34 }
```

```

35 擴展歐幾里得算法 ax + by = GCD(a, b)
36
37 int ext_euc(int a, int b, int &x, int &y) {
38     if(b == 0){
39         x = 1, y = 0;
40         return a;
41     }
42     int d = ext_euc(b, a%b, y, x);
43     y -= a/b*x;
44     return d;
45 }
46
47 int main(){
48     int a, b, x, y;
49     cin >> a >> b;
50     ext_euc(a, b, x, y);
51     cout << x << ' ' << y << endl;
52     return 0;
53 }
54
55 歌德巴赫猜想
56 解：把偶數 N (6≤N≤10^6) 寫成兩個質數的和。
57 #define N 2000000
58 int ox[N], p[N], pr;
59 void PrimeTable(){
60     ox[0] = ox[1] = 1;
61     pr = 0;
62     for(int i=2;i<N;i++){
63         if(!ox[i]) p[pr++] = i;
64         for(int j=0; i*p[j]<N&&j<pr; j++)
65             ox[i*p[j]] = 1;
66     }
67 }
68
69 int main(){
70     PrimeTable();
71     int n;
72     while(cin>>n, n){
73         int x;
74         for(x=1;; x+=2)
75             if(!ox[x] && !ox[n-x]) break;
76         printf("%d = %d + %d\n", n, x, n-x);
77     }
78 }
79
80 problem :
81 給定整數 N，求N最少可以拆成多少個質數的和。
82 如果N是質數，則答案為 1。
83 如果N是偶數(N!=2)，則答案為2(強歌德巴赫猜想)。
84 如果N是奇數且N-2是質數，則答案為2(2+質數)。
85 其他狀況答案為 3 (弱歌德巴赫猜想)。
86
87 bool isPrime(int n){
88     for(int i=2;i<n;++i){
89         if(i*i>n) return true;
90         if(n%i==0) return false;
91     }
92     return true;
93 }
94
95 int main(){
96     int n;
97     cin>>n;
98     if(isPrime(n)) cout<<"1\n";
99     else if(n%2==0||isPrime(n-2)) cout<<"2\n";
100    else cout<<"3\n";

```

1.4 Pisano Period

```

1 #include <cstdio>
2 #include <vector>
3 using namespace std;
4
5 /*
6  Pisano Period + 快速幂 + mod
7  Pisano Period:
8      費氏數列在mod n的情況下會有循環週期，

```

```

9      且週期的結束判斷會在fib[i - 1] == 0 &&
10         fib[i] == 1時，
11      此時循環週期長度是i - 1
12
13 所以這題是在找出循環週期後，
14 用快速幂並mod(循環週期長度)即可AC(快速幂記得mod)，
15 此外fib要mod n，也要找週期，所以用預處理的方式列表
16 */
17 #define maxn 1005
18
19 /*
20  Pisano period可證一個週期的長度會在[n, n ^ n]之間
21 */
22 //很可惜，會爆
23 // int fib[maxn][maxn * maxn];
24 //改用vector
25 vector<int> fib[maxn];
26 int period[maxn];
27
28 int qpow(int a, unsigned long long b, int
29         mod)
30 {
31     if (b == 0)
32         return a;
33     long long res = 1;
34     while (b)
35     {
36         if (b & 1)
37             res = ((a % mod) * (res % mod)) % mod;
38         a = ((a % mod) * (a % mod)) % mod;
39         b >>= 1;
40     }
41     return res;
42 }
43
44 int main()
45 {
46     int t;
47     unsigned long long a, b;
48     int n;
49
50     //注意：這裡沒算mod 1的循環長度，
51     //因為mod 1都等於0，沒有週期
52     for (int i = 2; i < maxn; ++i)
53     {
54         fib[i].emplace_back(0);
55         fib[i].emplace_back(1);
56         for (int j = 2; j < maxn * maxn; ++j)
57         {
58             fib[i].emplace_back(
59                 (fib[i][j-1]*fib[i][j-2])%i
60             );
61             if (fib[i][j-1]==0&&fib[i][j]==1)
62             {
63                 period[i] = j - 1;
64                 break;
65             }
66         }
67     }
68
69     scanf("%d", &t);
70
71     while (t--)
72     {
73         scanf("%llu %llu %d", &a, &b, &n);
74         if (a == 0)
75             puts("0");
76         else if (n == 1) //當mod 1時任何數都是0，
77             //所以直接輸出0，避免我們沒算
78             //fib[1][i]的問題(Runtime
79             error)
80             printf("%d\n",
81                 fib[n][qpow(a % period[n], b,
82                     period[n])]);
83         return 0;

```

```

82 }
83
84 //計算閉區間 [1,n] 中有幾個正整數與 n 互質
85
86 int phi(){
87     int ans=n;
88     for(int i=2;i*i<=n;i++){
89         if(n%i==0){
90             ans=ans-ans/i;
91             while(n%i==0) n/=i;
92         }
93     }
94     if(n>1) ans=ans-ans/n;
95     return ans;
96 }

```

1.5 歐拉函數

1.6 乘法逆元、組合數

$$x^{-1} \bmod m = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1 \\ -\left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor (m \bmod x)^{-1}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\bmod m)$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1 \\ (m - \left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor)(m \bmod x)^{-1}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\bmod m)$$

若 $p \in \text{prime}$ ，根據費馬小定理，則

$$\begin{aligned} \therefore ax &\equiv 1 \pmod{p} \\ \therefore ax &\equiv a^{p-1} \pmod{p} \\ \therefore x &\equiv a^{p-2} \pmod{p} \end{aligned}$$

```

1 using ll = long long;
2 const int maxn = 2e5 + 10;
3 const int mod = 1e9 + 7;
4
5 int fact[maxn] = {1, 1}; // x! % mod
6 int inv[maxn] = {1, 1}; // x^(-1) % mod
7 int invFact[maxn] = {1, 1}; // (x!)*(-1) % mod
8
9 void build() {
10     for(int x=2; x<maxn; x++) {
11         fact[x] = (ll)x * fact[x-1] % mod;
12         inv[x] = (ll)(mod-mod/x)*inv[mod%x]%mod;
13         invFact[x] = (ll)invFact[x-1]*inv[x]%mod;
14     }
15 }
16
17 // 前提：mod 為質數
18 void build() {
19     auto qpow = [&](ll a, int b) {
20         ll res = 1;
21         for(; b; b>>=1) {
22             if(b & 1) res = res * a % mod;
23             a = a * a % mod;
24         }
25         return res;
26     };
27
28     for(int x=2; x<maxn; x++) {
29         fact[x] = (ll)x * fact[x-1] % mod;
30         invFact[x] = qpow(fact[x], mod-2);
31     }
32 }
33
34 // C(a, b) % mod
35 int comb(int a, int b) {
36     if(a < b) return 0;
37     ll x = fact[a];
38     ll y = (ll)invFact[b] * invFact[a-b] % mod;
39     return x * y % mod;
40 }

```

1.7 大步小步

2 字串

2.1 最長迴文子字串

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define T(x) ((x)%2 ? s[(x)/2] : '. ')
3 using namespace std;
4
5 string s;
6 int n;
7
8 int ex(int l,int r){
9     int i=0;
10    while(l-i>=0&&r+i<n&&T(l-i)==T(r+i)) i++;
11    return i;
12 }
13
14 int main(){
15     cin>>s;
16     n=2*s.size()+1;
17     int mx=0;
18     int center=0;
19     vector<int> r(n);
20     int ans=1;
21     r[0]=1;
22     for(int i=1;i<n;i++){
23         int ii=center-(i-center);
24         int len=mx-i+1;
25         if(i>mx){
26             r[i]=ex(i,i);
27             center=i;
28             mx=i+r[i]-1;
29         }
30         else if(r[ii]==len){
31             r[i]=len+ex(i-len,i+len);
32             center=i;
33             mx=i+r[i]-1;
34         }
35         else r[i]=min(r[ii],len);
36         ans=max(ans,r[i]);
37     }
38     cout<<ans-1<<"\n";
39     return 0;
40 }

```

2.2 KMP

```

1 const int maxn = 1e6 + 10;
2
3 int n, m; // len(a), len(b)
4 int f[maxn]; // failure function
5 char a[maxn], b[maxn];
6
7 void failureFuntion() { // f[0] = 0
8     for(int i=1, j=0; i<m; ) {
9         if(b[i] == b[j]) f[i++] = ++j;
10        else if(j) j = f[j-1];
11        else f[i++] = 0;
12    }
13 }
14
15 int kmp() {
16     int i = 0, j = 0, res = 0;
17     while(i < n) {
18         if(a[i] == b[j]) i++, j++;
19         else if(j) j = f[j-1];
20         else i++;
21         if(j == m) {
22             res++; // 找到答案
23             j = 0; // non-overlapping
24         }
25     }
26     return res;
27 }
28

```

```

29 // Problem: 所有在b裡, 前後綴相同的長度
30 // b = ababcbababababababab
31 // f = 001201234123456789
32 // 前9 = 後9
33 // 前4 = 前9的後4 = 後4
34 // 前2 = 前4的後2 = 前9的後2 = 後2
35 for(int j=m; j; j=f[j-1]) {
36     // j 是答案
37 }

```

2.3 Z Algorithm

```

1 const int maxn = 1e6 + 10;
2
3 int z[maxn]; // s[0:z[i]] = s[i:i+z[i]]
4 string s;
5
6 void makeZ() { // z[0] = 0
7     for(int i=1, l=0, r=0; i<s.length(); i++) {
8         if(i<=r && z[i-l]<r-i+1) z[i] = z[i-l];
9         else {
10            z[i] = max(0, r-i+1);
11            while(i+z[i]<s.length() &&
12                s[z[i]]==s[i+z[i]]) z[i]++;
13        }
14        if(i+z[i]-1 > r) l = i, r = i+z[i]-1;
15    }
16 }

```

```

1 題意
2 給定 B,N,P, 求出 L 滿足 B^L N(mod P)。
3 題解
4 餘數的循環節長度必定為 P 的因數, 因此
5   B^0 B^P, B^1 B^(P+1), ... ,
6 也就是說如果有解則 L<N, 枚舉 0,1,2,L-1
7   能得到結果, 但會超時。
8 將 L 拆成 mx+y, 只要分別枚舉 x,y 就能得到答案,
9   設 m=√P 能保證最多枚舉 2√P 次。
10  B^(mx+y) N(mod P)
11  B^(mx)B^y N(mod P)
12  B^y N(B^(-m))^x (mod P)
13 先求出 B^0,B^1,B^2,...,B^(m-1),
14 再枚舉 N(B^(-m)), N(B^(-m))^2,... 查看是否有對應的
15   B^y。
16 這種算法稱為大步小步演算法,
17 大步指的是枚舉 x (一次跨 m 步),
18 小步指的是枚舉 y (一次跨 1 步)。
19 複雜度分析
20 利用 map/unorder_map 存放
21   B^0,B^1,B^2,...,B^(m-1),
22 枚舉 x 查詢 map/unorder_map 是否有對應的 B^y,
23 存放和查詢最多 2√P 次, 時間複雜度為
24   O(√P log√P)/O(√P)。
25
26 using LL = long long;
27 LL B, N, P;
28 LL fpow(LL a, LL b, LL c){
29     LL res=1;
30     for(;b>=1;){
31         if(b&1)
32             res=(res*a)%c;
33         a=(a*a)%c;
34         b>>=1;
35     }
36     return res;
37 }
38 LL BSGS(LL a, LL b, LL p){
39     a%=p, b%=p;
40     if(a==0)
41         return b==0?1:-1;
42     if(b==1)
43         return 0;
44     map<LL, LL> tb;
45     LL sq=ceil(sqrt(p-1));
46     LL inv=fpow(a, p-sq-1, p);
47     tb[1]=sq;
48     for(LL i=1, tmp=1; i<sq; ++i){
49         tmp=(tmp*a)%p;
50         if(!tb.count(tmp))
51             tb[tmp]=i;
52     }
53     for(LL i=0; i<sq; ++i){
54         if(tb.count(b)){
55             LL res=tb[b];
56             return i*sq+(res==sq?0:res);
57         }
58         b=(b*inv)%p;
59     }
60     return -1;
61 }
62 int main(){
63     IOS; //輸入優化
64     while(cin>>P>>B>>N){
65         LL ans=BSGS(B,N,P);
66         if(ans!=-1)
67             cout<<"no solution\n";
68         else
69             cout<<ans<<"\n";
70     }
71 }

```

3 algorithm

3.1 三分搜

```

1  題意
2  給定兩射線方向和速度，問兩射線最近距離。
3  題解
4  假設  $F(t)$  為兩射線在時間  $t$  的距離， $F(t)$ 
    為二次函數，
5  可用三分查找二次函數最小值。
6  struct Point{
7      double x, y, z;
8      Point() {}
9      Point(double _x, double _y, double _z):
10         x(_x), y(_y), z(_z){}
11     friend istream& operator>>(istream& is,
12         Point& p) {
13         is >> p.x >> p.y >> p.z;
14         return is;
15     }
16     Point operator+(const Point &rhs) const{
17         return Point(x+rhs.x, y+rhs.y, z+rhs.z);
18     }
19     Point operator-(const Point &rhs) const{
20         return Point(x-rhs.x, y-rhs.y, z-rhs.z);
21     }
22     Point operator*(const double &d) const{
23         return Point(x*d, y*d, z*d);
24     }
25     Point operator/(const double &d) const{
26         return Point(x/d, y/d, z/d);
27     }
28     double dist(const Point &rhs) const{
29         double res = 0;
30         res+=(x-rhs.x)*(x-rhs.x);
31         res+=(y-rhs.y)*(y-rhs.y);
32         res+=(z-rhs.z)*(z-rhs.z);
33         return res;
34     };
35     int main(){
36         IOS; //輸入優化
37         int T;
38         cin>>T;
39         for(int ti=1; ti<=T; ++ti){
40             double time;
41             Point x1, y1, d1, x2, y2, d2;
42             cin>>time>>x1>>y1>>x2>>y2;
43             d1=(y1-x1)/time;
44             d2=(y2-x2)/time;
45             double L=0, R=1e8, m1, m2, f1, f2;
46             double ans = x1.dist(x2);
47             while(abs(L-R)>1e-10){
48                 m1=(L+R)/2;
49                 m2=(m1+R)/2;
50                 f1=((d1*m1)+x1).dist((d2*m1)+x2);
51                 f2=((d1*m2)+x1).dist((d2*m2)+x2);
52                 ans = min(ans, min(f1, f2));
53                 if(f1<f2) R=m2;
54                 else L=m1;
55             }
56             cout<<"Case "<<ti<<": ";
57             cout << fixed << setprecision(4) <<
                sqrt(ans) << '\n';
58         }
59     }

```

3.2 差分

```

1  用途：在區間  $[l, r]$  加上一個數字  $v$ 。
2   $b[l] += v$ ; ( $b[0 \sim l]$  加上  $v$ )
3   $b[r+1] -= v$ ; ( $b[r+1 \sim n]$  減去  $v$  ( $b[r]$  仍保留  $v$ ))
4  給的  $a[]$  是前綴和數列，建構  $b[]$ ，
5  因為  $a[i] = b[0] + b[1] + b[2] + \dots + b[i]$ ，
6  所以  $b[i] = a[i] - a[i-1]$ 。

```

```

7  在  $b[l]$  加上  $v$ ， $b[r+1]$  減去  $v$ ，
8  最後再從 0 跑到  $n$  使  $b[i] += b[i-1]$ 。
9  這樣一來， $b[]$  是一個在某區間加上  $v$  的前綴和。
10 int a[1000], b[1000];
11 // a: 前綴和數列, b: 差分數列
12 int main(){
13     int n, l, r, v;
14     cin >> n;
15     for(int i=1; i<=n; i++){
16         cin >> a[i];
17         b[i] = a[i] - a[i-1]; //建構差分數列
18     }
19     cin >> l >> r >> v;
20     b[l] += v;
21     b[r+1] -= v;
22     for(int i=1; i<=n; i++){
23         b[i] += b[i-1];
24         cout << b[i] << ' ';
25     }
26 }

```

3.3 greedy

```

1  刪數字問題
2  //problem
3  給定一個數字  $N(\leq 10^4)$ ，需要刪除  $K$  個數字，
4  請問刪除  $K$  個數字後最小的數字為何？
5  //solution
6  刪除滿足第  $i$  位數大於第  $i+1$  位數的最左邊第  $i$ 
    位數，
7  扣除高位數的影響較扣除低位數的大。
8  //code
9  int main(){
10     string s;
11     int k;
12     cin>>s>>k;
13     for(int i=0; i<k; ++i){
14         if((int)s.size()==0) break;
15         int pos =(int)s.size()-1;
16         for(int j=0; j<(int)s.size()-1; ++j){
17             if(s[j]>s[j+1]){
18                 pos=j;
19                 break;
20             }
21         }
22         s.erase(pos, 1);
23     }
24     while((int)s.size()>0&&s[0]=='0')
25         s.erase(0, 1);
26     if((int)s.size()) cout<<s<<'\n';
27     else cout<<0<<'\n';
28 }
29 最小區間覆蓋長度
30 //problem
31 給定  $n$  條線段區間為  $[Li, Ri]$ ，
32 請問最少要選幾個區間才能完全覆蓋  $[0, S]$ ？
33 //solution
34 先將所有區間依照左界由小到大的排序，
35 對於當前區間  $[Li, Ri]$ ，要從左界  $>Li$  的所有區間中，
36 找到有著最大的右界的區間，連接當前區間。
37 //problem
38 長度  $n$  的直線中有數個加熱器，
39 在  $x$  的加熱器可以讓  $[x-r, x+r]$  內的物品加熱，
40 問最少要幾個加熱器可以把  $[0, n]$  的範圍加熱。
41 //solution
42 對於最左邊沒加熱的點  $a$ ，選擇最遠可以加熱  $a$  的加熱器，
43 更新已加熱範圍，重複上述動作繼續尋找加熱器。
44 //code
45 int main(){
46     int n, r;
47     int a[1005];
48     cin>>n>>r;
49     for(int i=1; i<=n; ++i) cin>>a[i];
50     int i=1, ans=0;
51     while(i<=n){
52         int R=min(i+r-1, n), L=max(i-r+1, 0)

```

```

54         int nextR=-1;
55         for(int j=R; j>=L; --j){
56             if(a[j]){
57                 nextR=j;
58                 break;
59             }
60         }
61         if(nextR==-1){
62             ans=-1;
63             break;
64         }
65         ++ans;
66         i=nextR+r;
67     }
68     cout<<ans<<'\n';
69 }
70 最多不重疊區間
71 //problem
72 給你  $n$  條線段區間為  $[Li, Ri]$ ，
73 請問最多可以選擇幾條不重疊的線段(頭尾可相連)？
74 //solution
75 依照右界由小到大的排序，
76 每次取到一個不重疊的線段，答案 +1。
77 //code
78 struct Line{
79     int L, R;
80     bool operator<(const Line &rhs) const{
81         return R<rhs.R;
82     }
83 };
84 int main(){
85     int t;
86     cin>>t;
87     Line a[30];
88     while(t--){
89         int n=0;
90         while(cin>>a[n].L>>a[n].R, a[n].L||a[n].R){
91             ++n;
92         }
93         sort(a, a+n);
94         int ans=1, R=a[0].R;
95         for(int i=1; i<n; ++i){
96             if(a[i].L>=R){
97                 ++ans;
98                 R=a[i].R;
99             }
100         }
101         cout<<ans<<'\n';
102     }
103 最小化最大延遲問題
104 //problem
105 給定  $N$  項工作，每項工作的需要處理時長為  $Ti$ ，
106 期限是  $Di$ ，第  $i$  項工作延遲的時間為
     $Li=\max(0, Fi-Di)$ ，
107 原本  $Fi$  為第  $i$  項工作的完成時間，
108 求一種工作排序使  $\max Li$  最小。
109 //solution
110 按照到期時間從早到晚處理。
111 //code
112 struct Work{
113     int t, d;
114     bool operator<(const Work &rhs) const{
115         return d<rhs.d;
116     }
117 };
118 int main(){
119     int n;
120     Work a[10000];
121     cin>>n;
122     for(int i=0; i<n; ++i)
123         cin>>a[i].t>>a[i].d;
124     sort(a, a+n);
125     int maxL=0, sumT=0;
126     for(int i=0; i<n; ++i){
127         sumT+=a[i].t;
128         maxL=max(maxL, sumT-a[i].d);
129     }
130     cout<<maxL<<'\n';

```

```

131 }
132 最少延遲數量問題
133 //problem
134 給定 N 個工作，每個工作的需要處理時長為 Ti，
135 期限是 Di，求一種工作排序使得逾期工作數量最小。
136 //solution
137 期限越早到期的工作越先做。
138 將工作依照到期時間從早到晚排序，
139 依序放入工作列表中，如果發現有工作預期，
140 就從目前選擇的工作中，移除耗時最長的工作。
141 上述方法為 Moore-Hodgson's Algorithm。
142
143 //problem
144 給定烏龜的重量和可承受重量，問最多可以疊幾隻烏龜？
145 //solution
146 和最少延遲數量問題是相同的問題，只要將題敘做轉換。
147 工作處理時長 → 烏龜重量
148 工作期限 → 烏龜可承受重量
149 多少工作不延期 → 可以疊幾隻烏龜

```

```

150 //code
151 struct Work{
152     int t, d;
153     bool operator<(const Work &rhs)const{
154         return d<rhs.d;
155     }
156 };
157 int main(){
158     int n=0;
159     Work a[10000];
160     priority_queue<int> pq;
161     while(cin>>a[n].t>>a[n].d)
162         ++n;
163     sort(a,a+n);
164     int sumT=0,ans=n;
165     for(int i=0;i<n;++i){
166         pq.push(a[i].t);
167         sumT+=a[i].t;
168         if(a[i].d<sumT){
169             int x=pq.top();
170             pq.pop();
171             sumT-=x;
172             --ans;
173         }
174     }
175     cout<<ans<<'\n';
176 }

```

```

178 任務調度問題
179 //problem
180 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 Ti，
181 期限是 Di，如果第 i 項工作延遲需要受到 pi
182 單位懲罰，
183 請問最少會受到多少單位懲罰。
184 //solution
185 依照懲罰由大到小排序，
186 每項工作依序嘗試可不可以放在
187 Di-Ti+1, Di-Ti, ..., 1, 0，
188 如果有空間就放進去，否則延後執行。
189 //problem
190 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 Ti，
191 期限是 Di，如果第 i 項工作在期限內完成會獲得 ai
192 單位獎勵，
193 請問最多會獲得多少單位獎勵。
194 //solution
195 和上題相似，這題變成依照獎勵由大到小排序。
196 //code
197 struct Work{
198     int d,p;
199     bool operator<(const Work &rhs)const{
200         return p>rhs.p;
201     }
202 };
203 int main(){
204     int n;
205     Work a[100005];
206     bitset<100005> ok;
207     while(cin>>n){

```

```

206     ok.reset();
207     for(int i=0;i<n;++i)
208         cin>>a[i].d>>a[i].p;
209     sort(a,a+n);
210     int ans=0;
211     for(int i=0;i<n;++i){
212         int j=a[i].d;
213         while(j--){
214             if(!ok[j]){
215                 ans+=a[i].p;
216                 ok[j]=true;
217                 break;
218             }
219         }
220     }
221     cout<<ans<<'\n';
222 }

```

3.4 dinic

```

1 const int maxn = 1e5 + 10;
2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
3 struct Edge {
4     int s, t, cap, flow;
5 };
6 int n, m, S, T;
7 int level[maxn], dfs_idx[maxn];
8 vector<Edge> E;
9 vector<vector<int>> G;
10 void init() {
11     S = 0;
12     T = n + m;
13     E.clear();
14     G.assign(maxn, vector<int>());
15 }
16 void addEdge(int s, int t, int cap) {
17     E.push_back({s, t, cap, 0});
18     E.push_back({t, s, 0, 0});
19     G[s].push_back(E.size()-2);
20     G[t].push_back(E.size()-1);
21 }
22 bool bfs() {
23     queue<int> q({S});
24     memset(level, -1, sizeof(level));
25     level[S] = 0;
26     while(!q.empty()) {
27         int cur = q.front();
28         q.pop();
29         for(int i : G[cur]) {
30             Edge e = E[i];
31             if(level[e.t]==-1 &&
32                e.cap>e.flow) {
33                 level[e.t] = level[e.s] + 1;
34                 q.push(e.t);
35             }
36         }
37     }
38     return level[T];
39 }
40 int dfs(int cur, int lim) {
41     if(cur==T || lim==0) return lim;
42     int result = 0;
43     for(int& i=dfs_idx[cur]; i<G[cur].size()
44        && lim; i++) {
45         Edge& e = E[G[cur][i]];
46         if(level[e.s]+1 != level[e.t])
47             continue;
48         int flow = dfs(e.t, min(lim,
49            e.cap-e.flow));
50         if(flow <= 0) continue;
51         e.flow += flow;
52         result += flow;
53         E[G[cur][i]^1].flow -= flow;
54         lim -= flow;
55     }
56     return result;
57 }

```

```

54 int dinic() { // O((V^2)E)
55     int result = 0;
56     while(bfs()) {
57         memset(dfs_idx, 0, sizeof(dfs_idx));
58         result += dfs(S, inf);
59     }
60     return result;
61 }

```

3.5 SCC Tarjan

```

1 //單純考SCC，每個SCC中找成本最小的蓋，如果有多個一樣小
2 //的要數出來，因為題目要方法數
3 //注意以下程式有縮點，但沒存起來，
4 //存法就是開一個array -> ID[u] = SCCID
5 #define maxn 100005
6 #define MOD 1000000007
7 long long cost[maxn];
8 vector<vector<int>> G;
9 int SCC = 0;
10 stack<int> sk;
11 int dfn[maxn];
12 int low[maxn];
13 bool inStack[maxn];
14 int dfsTime = 1;
15 long long totalCost = 0;
16 long long ways = 1;
17 void dfs(int u) {
18     dfn[u] = low[u] = dfsTime;
19     ++dfsTime;
20     sk.push(u);
21     inStack[u] = true;
22     for (int v: G[u]) {
23         if (dfn[v] == 0) {
24             dfs(v);
25             low[u] = min(low[u], low[v]);
26         }
27         else if (inStack[v]) {
28             //屬於同個SCC且是我的back edge
29             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
30         }
31     }
32     //如果是SCC
33     if (dfn[u] == low[u]) {
34         long long minCost = 0x3f3f3f3f;
35         int currWays = 0;
36         ++SCC;
37         while (1) {
38             int v = sk.top();
39             inStack[v] = 0;
40             sk.pop();
41             if (minCost > cost[v]) {
42                 minCost = cost[v];
43                 currWays = 1;
44             }
45             else if (minCost == cost[v]) {
46                 ++currWays;
47             }
48             if (v == u)
49                 break;
50         }
51         totalCost += minCost;
52         ways = (ways * currWays) % MOD;
53     }
54 }
55 int main() {
56     int n;
57     scanf("%d", &n);
58     for (int i = 1; i <= n; ++i)
59         scanf("%lld", &cost[i]);
60     G.assign(n + 5, vector<int>());
61     int m;
62     scanf("%d", &m);
63     int u, v;
64     for (int i = 0; i < m; ++i) {
65         scanf("%d %d", &u, &v);
66         G[u].emplace_back(v);

```



```

67 }
68 for (int i = 1; i <= n; ++i) {
69     if (dfn[i] == 0)
70         dfs(i);
71 }
72 printf("%lld %lld\n", totalCost, ways %
73     MOD);
74 return 0;
75 }

```

3.6 SCC Kosaraju

```

1 //做兩次dfs, O(V + E)
2 //g 是原圖, g2 是反圖
3 //s是dfs離開的節點
4 void dfs1(int u) {
5     vis[u] = true;
6     for (int v : g[u])
7         if (!vis[v]) dfs1(v);
8     s.push_back(u);
9 }
10
11 void dfs2(int u) {
12     group[u] = sccCnt;
13     for (int v : g2[u])
14         if (!group[v]) dfs2(v);
15 }
16
17 void kosaraju() {
18     sccCnt = 0;
19     for (int i = 1; i <= n; ++i)
20         if (!vis[i]) dfs1(i);
21     for (int i = n; i >= 1; --i)
22         if (!group[s[i]]) {
23             ++sccCnt;
24             dfs2(s[i]);
25         }
26 }

```

3.7 ArticulationPoints Tarjan

```

1 vector<vector<int>> G;
2 int N, timer;
3 bool visited[105];
4 int dfn[105]; // 第一次visit的時間
5 int low[105];
6 //最小能回到的父節點
7 //(不能是自己的parent)的visTime
8 int res;
9 //求割點數量
10 void tarjan(int u, int parent) {
11     int child = 0;
12     bool isCut = false;
13     visited[u] = true;
14     dfn[u] = low[u] = ++timer;
15     for (int v: G[u]) {
16         if (!visited[v]) {
17             ++child;
18             tarjan(v, u);
19             low[u] = min(low[u], low[v]);
20             if (parent != -1 && low[v] >=
21                 dfn[u])
22                 isCut = true;
23         }
24         else if (v != parent)
25             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
26     }
27     //If u is root of DFS
28     //tree->有兩個以上的children
29     if (parent == -1 && child >= 2)
30         isCut = true;
31     if (isCut) ++res;
32 }
33 int main() {

```

```

32 char input[105];
33 char* token;
34 while (scanf("%d", &N) != EOF && N) {
35     G.assign(105, vector<int>());
36     memset(visited, false,
37         sizeof(visited));
38     memset(low, 0, sizeof(low));
39     memset(dfn, 0, sizeof(visited));
40     timer = 0;
41     res = 0;
42     getchar(); // for \n
43     while (fgets(input, 105, stdin)) {
44         if (input[0] == '\0')
45             break;
46         int size = strlen(input);
47         input[size - 1] = '\0';
48         --size;
49         token = strtok(input, " ");
50         int u = atoi(token);
51         int v;
52         while (token = strtok(NULL, " "))
53             v = atoi(token);
54         G[u].emplace_back(v);
55         G[v].emplace_back(u);
56     }
57     tarjan(1, -1);
58     printf("%d\n", res);
59 }
60 return 0;
61 }

```

3.8 最小樹狀圖

```

1 const int maxn = 60 + 10;
2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
3 struct Edge {
4     int s, t, cap, cost;
5 }; // cap 為頻寬 (optional)
6 int n, m, c;
7 int inEdge[maxn], idx[maxn], pre[maxn],
8     vis[maxn];
9 // 對於每個點, 選擇對它入度最小的那條邊
10 // 找環, 如果沒有則 return;
11 // 進行縮環並更新其他點到環的距離。
12 int dirMST(vector<Edge> edges, int low) {
13     int result = 0, root = 0, N = n;
14     while(true) {
15         memset(inEdge, 0x3f, sizeof(inEdge));
16         // 找所有點的 in edge 放進 inEdge
17         // optional: low 為最小 cap 限制
18         for(const Edge& e : edges) {
19             if(e.cap < low) continue;
20             if(e.s!=e.t &&
21                 e.cost<inEdge[e.t]) {
22                 inEdge[e.t] = e.cost;
23                 pre[e.t] = e.s;
24             }
25         }
26         for(int i=0; i<N; i++) {
27             if(i!=root && inEdge[i]==inf)
28                 return -1; //除了root 還有點沒有 in
29                 edge
30         }
31         int seq = inEdge[root] = 0;
32         memset(idx, -1, sizeof(idx));
33         memset(vis, -1, sizeof(vis));
34         // 找所有的 cycle, 一起編號為 seq
35         for(int i=0; i<N; i++) {
36             result += inEdge[i];
37             int cur = i;
38             while(vis[cur]!=i &&
39                 idx[cur]==-1) {
40                 if(cur == root) break;
41                 vis[cur] = i;
42                 cur = pre[cur];

```

```

39     }
40     if(cur!=root && idx[cur]==-1) {
41         for(int j=pre[cur]; j!=cur;
42             j=pre[j])
43             idx[j] = seq;
44         idx[cur] = seq++;
45     }
46     if(seq == 0) return result; // 沒有
47     cycle
48     for(int i=0; i<N; i++)
49         // 沒有被縮點的點
50         if(idx[i] == -1) idx[i] = seq++;
51     // 縮點並重新編號
52     for(Edge& e : edges) {
53         if(idx[e.s] != idx[e.t])
54             e.cost -= inEdge[e.t];
55         e.s = idx[e.s];
56         e.t = idx[e.t];
57     }
58     N = seq;
59     root = idx[root];
60 }

```

3.9 二分圖最大匹配

```

1 /* 核心: 最大點獨立集 = |V| -
2    /最大匹配數/, 用匈牙利演算法找出最大匹配數 */
3 vector<Student> boys;
4 vector<Student> girls;
5 vector<vector<int>> G;
6 bool used[505];
7 int p[505];
8 bool match(int i) {
9     for (int j: G[i]) {
10         if (!used[j]) {
11             used[j] = true;
12             if (p[j] == -1 || match(p[j])) {
13                 p[j] = i;
14                 return true;
15             }
16         }
17     }
18     return false;
19 }
20 void maxMatch(int n) {
21     memset(p, -1, sizeof(p));
22     int res = 0;
23     for (int i = 0; i < boys.size(); ++i) {
24         memset(used, false, sizeof(used));
25         if (match(i))
26             ++res;
27     }
28     cout << n - res << '\n';
29 }

```

3.10 Astar

```

1 /*A*求k短路
2 f(x) = g(x) + h(x)
3 g(x) 是實際cost, h(x) 是估計cost
4 在此h(x)用所有點到終點的最短距離, 則當用Astar找點
5 當該點cnt[u] == k時即得到該點的第k短路
6 */
7 #define maxn 105
8 struct Edge {
9     int u, v, w;
10 };
11 struct Item_pqH {
12     int u, w;
13     bool operator <(const Item_pqH& other)
14     const {
15         return this->w > other.w;

```

```

15 }
16 };
17 struct Item_astar {
18     int u, g, f;
19     bool operator <(const Item_astar& other) const {
20         return this->f > other.f;
21     }
22 };
23 vector<vector<Edge>> G;
24 //反向圖，用於建h(u)
25 vector<vector<Edge>> invertG;
26 int h[maxn];
27 bool visited[maxn];
28 int cnt[maxn];
29 //用反向圖去求出每一點到終點的最短距離，並以此當作h(u)
30 void dijkstra(int s, int t) {
31     memset(visited, 0, sizeof(visited));
32     priority_queue<Item_astar> pq;
33     pq.push({s, 0});
34     h[s] = 0;
35     while (!pq.empty()) {
36         Item_astar curr = pq.top();
37         pq.pop();
38         visited[curr.u] = true;
39         for (Edge& edge: invertG[curr.u]) {
40             if (!visited[edge.v]) {
41                 if (h[edge.v] > h[curr.u] + edge.w) {
42                     h[edge.v] = h[curr.u] + edge.w;
43                     pq.push({edge.v, h[edge.v]});
44                 }
45             }
46         }
47     }
48 }
49 int Astar(int s, int t, int k) {
50     memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
51     priority_queue<Item_astar> pq;
52     pq.push({s, 0, h[s]});
53     while (!pq.empty()) {
54         Item_astar curr = pq.top();
55         pq.pop();
56         ++cnt[curr.u];
57         //終點出現k次，此時即可得k短路
58         if (cnt[t] == k)
59             return curr.g;
60         for (Edge& edge: G[curr.u]) {
61             if (cnt[edge.v] < k) {
62                 pq.push({edge.v, curr.g + edge.w, curr.g + edge.w + h[edge.v]});
63             }
64         }
65     }
66     return -1;
67 }
68 int main() {
69     int n, m;
70     while (scanf("%d %d", &n, &m) && (n != 0 && m != 0)) {
71         G.assign(n + 5, vector<Edge>());
72         invertG.assign(n + 5, vector<Edge>());
73         int s, t, k;
74         scanf("%d %d %d", &s, &t, &k);
75         int u, v, w;
76         for (int i = 0; i < m; ++i) {
77             scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);
78             G[u].emplace_back(Edge(u, v, w));
79             invertG[v].emplace_back(Edge(v, u, w));
80         }
81         memset(h, 0x3f, sizeof(h));
82         dijkstra(t, s);
83         printf("%d\n", Astar(s, t, k));
84     }

```

```

85     return 0;
86 }

```

3.11 JosephusProblem

```

1 //JosephusProblem，只是規定要先砍1號
2 //所以當作有n - 1個人，目標的13順移成12
3 //再者從0開始比較好算，所以目標12順移成11
4 // O(n)
5 int getWinner(int n, int k) {
6     int winner = 0;
7     for (int i = 1; i <= n; ++i)
8         winner = (winner + k) % i;
9     return winner;
10 }
11
12 int main() {
13     int n;
14     while (scanf("%d", &n) != EOF && n) {
15         --n;
16         for (int k = 1; k <= n; ++k) {
17             if (getWinner(n, k) == 11) {
18                 printf("%d\n", k);
19                 break;
20             }
21         }
22     }
23     return 0;
24 }
25
26 // O(k log(n))
27 int josephus(int n, int k) {
28     if (n == 1) return 0;
29     if (k == 1) return n - 1;
30     if (k > n) return (josephus(n-1, k) + k) % n;
31     int res = josephus(n - n / k, k);
32     res -= n % k;
33     if (res < 0)
34         res += n; // mod n
35     else
36         res += res / (k - 1); // 还原位置
37     return res;
38 }

```

3.12 KM

```

1 #define maxn 505
2 int W[maxn][maxn];
3 int Lx[maxn], Ly[maxn];
4 bool S[maxn], T[maxn];
5 //L[i] = j -> S_i配給T_j, -1 for 還沒匹配
6 int L[maxn];
7 int n;
8 bool match(int i) {
9     S[i] = true;
10    for (int j = 0; j < n; ++j) {
11        // KM重點
12        // Lx + Ly >= selected_edge(x, y)
13        // 要想辦法降低Lx + Ly
14        // 所以選Lx + Ly == selected_edge(x, y)
15        if (Lx[i] + Ly[j] == W[i][j] && !T[j]) {
16            T[j] = true;
17            if ((L[j] == -1) || match(L[j])) {
18                L[j] = i;
19                return true;
20            }
21        }
22    }
23    return false;
24 }
25 //修改二分圖上的交錯路徑上點的權重
26 //此舉是在通過調整vertex labeling看看

```

```

27 //能不能產生出新的增廣路
28 //(KM的增廣路要求Lx[i] + Ly[j] == W[i][j])
29 //在這裡優先從最小的diff調看，才能保證最大權重匹配
30 void update()
31 {
32     int diff = 0x3f3f3f3f;
33     for (int i = 0; i < n; ++i) {
34         if (S[i]) {
35             for (int j = 0; j < n; ++j) {
36                 if (!T[j])
37                     diff = min(diff, Lx[i] + Ly[j] - W[i][j]);
38             }
39         }
40     }
41     for (int i = 0; i < n; ++i) {
42         if (S[i]) Lx[i] -= diff;
43         if (T[i]) Ly[i] += diff;
44     }
45 }
46 void KM()
47 {
48     for (int i = 0; i < n; ++i) {
49         L[i] = -1;
50         Lx[i] = Ly[i] = 0;
51         for (int j = 0; j < n; ++j)
52             Lx[i] = max(Lx[i], W[i][j]);
53     }
54     for (int i = 0; i < n; ++i) {
55         while(1) {
56             memset(S, false, sizeof(S));
57             memset(T, false, sizeof(T));
58             if (match(i))
59                 break;
60             else
61                 update(); //去調整vertex labeling以增加增廣路徑
62         }
63     }
64 }
65 int main() {
66     while (scanf("%d", &n) != EOF) {
67         for (int i = 0; i < n; ++i)
68             for (int j = 0; j < n; ++j)
69                 scanf("%d", &W[i][j]);
70         KM();
71         int res = 0;
72         for (int i = 0; i < n; ++i) {
73             if (i != 0)
74                 printf(" %d", Lx[i]);
75             else
76                 printf("%d", Lx[i]);
77             res += Lx[i];
78         }
79         puts("");
80         for (int i = 0; i < n; ++i) {
81             if (i != 0)
82                 printf(" %d", Ly[i]);
83             else
84                 printf("%d", Ly[i]);
85             res += Ly[i];
86         }
87         puts("");
88         printf("%d\n", res);
89     }
90     return 0;
91 }

```

3.13 LCA 倍增法

```

1 //倍增法預處理O(nlogn)，查詢O(logn)，
2 //利用lca找樹上任兩點距離
3 #define maxn 100005
4 struct Edge {
5     int u, v, w;
6 };
7 vector<vector<Edge>> G; // tree

```

```

8 int fa[maxn][31]; //fa[u][i] -> u的第2^i個祖先
9 long long dis[maxn][31];
10 int dep[maxn]; //深度
11 void dfs(int u, int p) { //預處理fa
12     fa[u][0] = p; //因為u的第2^0 = 1的祖先就是p
13     dep[u] = dep[p] + 1;
14     //第2^i的祖先是(第2^(i-1)個祖先)的
15     //第2^(i-1)的祖先
16     //ex: 第8個祖先是 (第4個祖先)的第4個祖先
17     for (int i = 1; i < 31; ++i) {
18         fa[u][i] = fa[fa[u][i-1]][i-1];
19         dis[u][i] = dis[fa[u][i-1]][i-1]
20             + dis[u][i-1];
21     }
22     //遍歷子節點
23     for (Edge& edge: G[u]) {
24         if (edge.v == p)
25             continue;
26         dis[edge.v][0] = edge.w;
27         dfs(edge.v, u);
28     }
29 long long lca(int x, int y) {
30     //此函數是找lca同時計算x、y的距離 -> dis(x,
31     //lca) + dis(lca, y)
32     //讓y比x深
33     if (dep[x] > dep[y])
34         swap(x, y);
35     int deltaDep = dep[y] - dep[x];
36     long long res = 0;
37     //讓y與x在同一個深度
38     for (int i = 0; deltaDep != 0; ++i,
39         deltaDep >>= 1)
40         if (deltaDep & 1)
41             res += dis[y][i], y = fa[y][i];
42     if (y == x) //x = y -> x、y彼此是彼此的祖先
43         return res;
44     //往上找，一起跳，但x、y不能重疊
45     for (int i = 30; i >= 0 && y != x; --i) {
46         if (fa[x][i] != fa[y][i]) {
47             res += dis[x][i] + dis[y][i];
48             x = fa[x][i];
49             y = fa[y][i];
50         }
51     }
52     //最後發現不能跳了，此時x的第2^0 =
53     //1個祖先(或說y的第2^0 =
54     //1的祖先)即為x、y的lca
55     res += dis[x][0] + dis[y][0];
56     return res;
57 }
58 int main() {
59     int n, q;
60     while (~scanf("%d", &n) && n) {
61         int v, w;
62         G.assign(n + 5, vector<Edge>());
63         for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
64             scanf("%d %d", &v, &w);
65             G[i + 1].push_back({i + 1, v + 1, w});
66             G[v + 1].push_back({v + 1, i + 1, w});
67         }
68         dfs(1, 0);
69         scanf("%d", &q);
70         int u;
71         while (q--) {
72             scanf("%d %d", &u, &v);
73             printf("%lld%c", lca(u + 1, v +
74                 1), (q ? ' ' : '\n'));
75         }
76     }
77     return 0;
78 }

```

3.14 LCA 樹壓平 RMQ

```

1 //樹壓平求LCA RMQ(sparse table
2 //O(nlogn)建立，O(1)查詢)，求任意兩點距離，

```

```

2 //如果用笛卡兒樹可以壓到O(n)建立，O(1)查詢
3 //理論上可以過，但遇到直鏈的case dfs深度會stack
4 //overflow
5 #define maxn 100005
6 struct Edge {
7     int u, v, w;
8 };
9 int dep[maxn], pos[maxn];
10 long long dis[maxn];
11 int st[maxn * 2][32]; //sparse table
12 int realLCA[maxn * 2][32];
13 //最小深度對應的節點，及真正的LCA
14 int Log[maxn]; //取代std::log2
15 int tp; // timestamp
16 vector<vector<Edge>> G; // tree
17 void calLog() {
18     Log[1] = 0;
19     Log[2] = 1;
20     for (int i = 3; i < maxn; ++i)
21         Log[i] = Log[i / 2] + 1;
22 }
23 void buildST() {
24     for (int j = 0; Log[tp]; ++j) {
25         for (int i = 0; i + (1 << j) - 1 < tp;
26             ++i) {
27             if (st[i - 1][j] < st[i - 1][j + (1 <<
28                 j) - 1]) {
29                 st[i][j] = st[i - 1][j];
30                 realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j];
31             }
32             else {
33                 st[i][j] = st[i - 1][j + (1 << i -
34                     1)];
35                 realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j + (1
36                     << i - 1)];
37             }
38         }
39     }
40 }
41 int query(int l, int r) { // [l, r] min
42     //depth即為lca的深度
43     int k = Log[r - l + 1];
44     if (st[l][k] < st[r - (1 << k) + 1][k])
45         return realLCA[l][k];
46     else
47         return realLCA[r - (1 << k) + 1][k];
48 }
49 void dfs(int u, int p) { //euler tour
50     pos[u] = tp;
51     st[tp][0] = dep[u];
52     realLCA[tp][0] = dep[u];
53     ++tp;
54     for (int i = 0; i < G[u].size(); ++i) {
55         Edge& edge = G[u][i];
56         if (edge.v == p) continue;
57         dep[edge.v] = dep[u] + 1;
58         dis[edge.v] = dis[edge.u] + edge.w;
59         dfs(edge.v, u);
60         st[tp++][0] = dep[u];
61     }
62 }
63 long long getDis(int u, int v) {
64     if (pos[u] > pos[v])
65         swap(u, v);
66     int lca = query(pos[u], pos[v]);
67     return dis[u] + dis[v] - 2 *
68         dis[query(pos[u], pos[v])];
69 }
70 int main() {
71     int n, q;
72     calLog();
73     while (~scanf("%d", &n) && n) {
74         int v, w;
75         G.assign(n + 5, vector<Edge>());
76         tp = 0;
77         for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
78             scanf("%d %d", &v, &w);
79             G[i].push_back({i, v, w});
80         }
81     }
82 }

```

```

72 G[v].push_back({v, i, w});
73 }
74 dfs(0, -1);
75 buildST();
76 scanf("%d", &q);
77 int u;
78 while (q--) {
79     scanf("%d %d", &u, &v);
80     printf("%lld%c", getDis(u, v),
81         (q ? ' ' : '\n'));
82 }
83 return 0;
84 }

```

3.15 LCA 樹鍊剖分

```

1 #define maxn 5005
2 //LCA，用來練習樹鍊剖分
3 //題意：給定樹，找任兩點的中點，
4 //若中點不存在(路徑為even)，就是中間的兩個點
5 int dfn[maxn];
6 int parent[maxn];
7 int depth[maxn];
8 int subtreeSize[maxn];
9 //樹鍊的頂點
10 int top[maxn];
11 //將dfn轉成node編號
12 int dfnToNode[maxn];
13 //重兒子
14 int hson[maxn];
15 int dfsTime = 1;
16 //tree
17 vector<vector<int>> G;
18 //處理parent、depth、subtreeSize、dfnToNode
19 void dfs1(int u, int p) {
20     parent[u] = p;
21     hson[u] = -1;
22     subtreeSize[u] = 1;
23     for (int v: G[u]) {
24         if (v != p) {
25             depth[v] = depth[u] + 1;
26             dfs1(v, u);
27             subtreeSize[u] += subtreeSize[v];
28             if (hson[u] == -1 ||
29                 subtreeSize[hson[u]] <
30                 subtreeSize[v]) {
31                 hson[u] = v;
32             }
33         }
34     }
35 }
36 //實際剖分 <- 參數t是top的意思
37 //t初始應為root本身
38 void dfs2(int u, int t) {
39     top[u] = t;
40     dfn[u] = dfsTime;
41     dfnToNode[dfn[u]] = u;
42     ++dfsTime;
43     //葉子點 -> 沒有重兒子
44     if (hson[u] == -1)
45         return;
46     //優先對重兒子dfs，才能保證同一重鍊dfn連續
47     dfs2(hson[u], t);
48     for (int v: G[u]) {
49         if (v != parent[u] && v != hson[u])
50             dfs2(v, v);
51     }
52 }
53 //不斷跳鍊，當跳到同一條鍊時，深度小的即為LCA
54 //跳鍊時優先鍊頂深度大的跳
55 int LCA(int u, int v) {
56     while (top[u] != top[v]) {
57         if (depth[top[u]] > depth[top[v]])
58             u = parent[top[u]];
59         else
60             v = parent[top[v]];
61     }
62 }

```


3.16 MCMF

```

59 }
60 return (depth[u] > depth[v]) ? v : u;
61 }
62 int getK_parent(int u, int k) {
63     while (k-- && (u != -1))
64         u = parent[u];
65     return u;
66 }
67 int main() {
68     int n;
69     while (scanf("%d", &n) && n) {
70         dfsTime = 1;
71         G.assign(n + 5, vector<int>());
72         int u, v;
73         for (int i = 1; i < n; ++i) {
74             scanf("%d %d", &u, &v);
75             G[u].emplace_back(v);
76             G[v].emplace_back(u);
77         }
78         dfs1(1, -1);
79         dfs2(1, 1);
80         int q;
81         scanf("%d", &q);
82         for (int i = 0; i < q; ++i) {
83             scanf("%d %d", &u, &v);
84             //先得到LCA
85             int lca = LCA(u, v);
86             //計算路徑長(經過的邊)
87             int dis = depth[u] + depth[v] - 2
                        * depth[lca];
88             //讓v比u深或等於
89             if (depth[u] > depth[v])
90                 swap(u, v);
91             if (u == v) {
92                 printf("The fleas meet at
93                     %d.\n", u);
94             }
95             else if (dis % 2 == 0) {
96                 //路徑長是even -> 有中點
97                 printf("The fleas meet at
98                     %d.\n", getK_parent(v,
99                         dis / 2));
100             }
101             else {
102                 //路徑長是odd -> 沒有中點
103                 if (depth[u] == depth[v]) {
104                     int x = getK_parent(u, dis
105                         / 2);
106                     int y = getK_parent(v, dis
107                         / 2);
108                     if (x > y)
109                         swap(x, y);
110                     printf("The fleas jump
111                         forever between %d
112                         and %d.\n", x, y);
113                 }
114                 else {
115                     //技巧: 讓深的點v往上dis /
116                     //2步 = y,
117                     //這個點的parent設為x
118                     //此時的x、y就是答案要的中點兩點
119                     //主要是往下不好找, 所以改用深的點
120                     int y = getK_parent(v, dis
121                         / 2);
122                     int x = getK_parent(y, 1);
123                     if (x > y)
124                         swap(x, y);
125                     printf("The fleas jump
126                         forever between %d
127                         and %d.\n", x, y);
128                 }
129             }
130         }
131     }
132     return 0;
133 }

```

```

63 long long MCMF() {
64     long long maxFlow = 0;
65     long long minCost = 0;
66     while (SPFA(maxFlow, minCost))
67         ;
68     return minCost;
69 }
70 int main() {
71     int T;
72     scanf("%d", &T);
73     for (int Case = 1; Case <= T; ++Case){
74         //總共幾個月, 囤貨成本
75         int M, I;
76         scanf("%d %d", &M, &I);
77         //node size
78         n = M + M + 2;
79         G.assign(n + 5, vector<int>());
80         edges.clear();
81         s = 0;
82         t = M + M + 1;
83         for (int i = 1; i <= M; ++i) {
84             int produceCost, produceMax,
85                 sellPrice, sellMax,
86                 inventoryMonth;
87             scanf("%d %d %d %d %d",
88                 &produceCost, &produceMax,
89                 &sellPrice, &sellMax,
90                 &inventoryMonth);
91             addEdge(s, i, produceMax,
92                 produceCost);
93             addEdge(M + i, t, sellMax,
94                 -sellPrice);
95             for (int j = 0; j <=
96                 inventoryMonth; ++j) {
97                 if (i + j <= M)
98                     addEdge(i, M + i + j, INF,
99                         I * j);
100             }
101         }
102         printf("Case %d: %lld\n", Case,
103             -MCMF());
104     }
105     return 0;
106 }

```

3.17 莫隊

```

1 /*利用prefix前綴XOR和
2 如果要求[x, y]的XOR和只要回答prefix[y] ^
3   prefix[x - 1]即可在O(1)回答
4 同時維護cnt[i]代表[x, y]XOR和 == i的個數
5 如此我們知道[l, r]可以快速知道[l - 1, r], [l
6   + 1, r], [l, r - 1], [l, r + 1]的答案
7 就符合Mo's algorithm的思維O(N * sqrt(n))
8 每次轉移為O(1), 具體轉移方法在下面*/
9 #define maxn 100005
10 //在此prefix[i]是[1, i]的XOR和
11 int prefix[maxn];
12 //log_2(1000000) =
13   19.931568569324174087221916576937...
14 //所以開到1 << 20
15 //cnt[i]代表的是有符合nums[x, y] such that
16   nums[x] ^ nums[x + 1] ^ .. ^ nums[y] ==
17   i
18 //的個數
19 long long cnt[1 << 20];
20 //塊大小 -> sqrt(n)
21 int sqrtQ;
22 struct Query {
23     int l, r, id;
24     bool operator < (const Query& other)
25     const {
26         if (this->l / sqrtQ != other.l /
27             sqrtQ)
28             return this->l < other.l;
29         //奇偶排序(優化)
30         if (this->l / sqrtQ & 1)

```

```

24         return this->r < other.r;
25         return this->r > other.r;
26     }
27 };
28 Query queries[maxn];
29 long long ans[maxn];
30 long long res = 0;
31 int k;
32 void add(int x) {
33     res += cnt[k ^ prefix[x]];
34     ++cnt[prefix[x]];
35 }
36 void sub(int x) {
37     --cnt[prefix[x]];
38     res -= cnt[k ^ prefix[x]];
39 }
40 int main() {
41     int n, m;
42     scanf("%d %d %d", &n, &m, &k);
43     sqrtQ = sqrt(n);
44     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
45         scanf("%d", &prefix[i]);
46         prefix[i] ^= prefix[i - 1];
47     }
48     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
49         scanf("%d %d", &queries[i].l,
50             &queries[i].r);
51         //減1是因為prefix[i]是[1,
52             i]的前綴XOR和，所以題目問[1,
53             r]我們要回答[1 - 1, r]的答案
54         --queries[i].l;
55         queries[i].id = i;
56     }
57     sort(queries + 1, queries + m + 1);
58     int l = 1, r = 0;
59     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
60         while (l < queries[i].l) {
61             sub(l);
62             ++l;
63         }
64         while (l > queries[i].l) {
65             --l;
66             add(l);
67         }
68         while (r < queries[i].r) {
69             ++r;
70             add(r);
71         }
72         while (r > queries[i].r) {
73             --r;
74             sub(r);
75         }
76         ans[queries[i].id] = res;
77     }
78     for (int i = 1; i <= m; ++i){
79         printf("%lld\n", ans[i]);
80     }
81     return 0;
82 }

```

3.18 Dancing Links

```

1 struct DLX {
2     int seq, resSize;
3     int col[maxn], row[maxn];
4     int U[maxn], D[maxn], R[maxn], L[maxn];
5     int rowHead[maxn], colSize[maxn];
6     int result[maxn];
7     DLX(int r, int c) {
8         for(int i=0; i<=c; i++) {
9             L[i] = i-1, R[i] = i+1;
10            U[i] = D[i] = i;
11        }
12        L[R[seq=c]=0]=c;
13        resSize = -1;
14        memset(rowHead, 0, sizeof(rowHead));
15        memset(colSize, 0, sizeof(colSize));

```

```

16    }
17    void insert(int r, int c) {
18        row[++seq]=r, col[seq]=c,
19        ++colSize[c];
20        U[seq]=c, D[seq]=D[c], U[D[c]]=seq,
21        D[c]=seq;
22        if(rowHead[r]) {
23            L[seq]=rowHead[r],
24            R[seq]=R[rowHead[r]];
25            L[R[rowHead[r]]]=seq,
26            R[rowHead[r]]=seq;
27        } else {
28            rowHead[r] = L[seq] = R[seq] =
29            seq;
30        }
31    }
32    void remove(int c) {
33        L[R[c]] = L[c], R[L[c]] = R[c];
34        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
35            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j]) {
36                U[D[j]] = U[j];
37                D[U[j]] = D[j];
38                --colSize[col[j]];
39            }
40        }
41    }
42    void recover(int c) {
43        for(int i=U[c]; i!=c; i=U[i]) {
44            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j]) {
45                U[D[j]] = D[U[j]] = j;
46                ++colSize[col[j]];
47            }
48        }
49        L[R[c]] = R[L[c]] = c;
50    }
51    bool dfs(int idx=0) { // 判斷其中一解版
52        if(R[0] == 0) {
53            resSize = idx;
54            return true;
55        }
56        int c = R[0];
57        for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
58            if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
59        }
60        remove(c);
61        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
62            result[idx] = row[i];
63            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
64                remove(col[j]);
65            if(dfs(idx+1)) return true;
66            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
67                recover(col[j]);
68        }
69        recover(c);
70        return false;
71    }
72    void dfs(int idx=0) { // 判斷最小 dfs
73        depth 版
74        if(R[0] == 0) {
75            resSize = min(resSize, idx); //
76            注意init值
77            return;
78        }
79        int c = R[0];
80        for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
81            if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
82        }
83        remove(c);
84        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
85            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
86                remove(col[j]);
87            dfs(idx+1);
88            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
89                recover(col[j]);
90        }
91        recover(c);
92    }
93 }
94 };

```

4 DataStructure

4.1 BIT

```

1 template <class T> class BIT {
2 private:
3     int size;
4     vector<T> bit;
5     vector<T> arr;
6 public:
7     BIT(int sz=0): size(sz), bit(sz+1),
8         arr(sz) {}
9
10    /** Sets the value at index idx to val. */
11    void set(int idx, T val) {
12        add(idx, val - arr[idx]);
13    }
14
15    /** Adds val to the element at index idx.
16        */
17    void add(int idx, T val) {
18        arr[idx] += val;
19        for (++idx; idx<=size; idx+=(idx & -idx))
20            bit[idx] += val;
21    }
22
23    /** @return The sum of all values in [0,
24        idx]. */
25    T pre_sum(int idx) {
26        T total = 0;
27        for (++idx; idx>0; idx+=(idx & -idx))
28            total += bit[idx];
29        return total;
30    }
31 };

```

4.2 ChthollyTree

```

1 //重點：要求輸入資料隨機，否則可能被卡時間
2 struct Node {
3     long long l, r;
4     mutable long long val;
5     Node(long long l, long long r, long long
6         val)
7         : l(l), r(r), val(val){}
8     bool operator < (const Node& other)
9         const{
10        return this->l < other.l;
11    }
12 };
13 set<Node> chthollyTree;
14 //將[l, r] 拆成 [l, pos - 1], [pos, r]
15 set<Node>::iterator split(long long pos) {
16     //找第一個左端點大於等於pos的區間
17     set<Node>::iterator it =
18     chthollyTree.lower_bound(Node(pos,
19         0, 0));
20     //運氣很好直接找到左端點是pos的區間
21     if (it != chthollyTree.end() && it->l ==
22         pos)
23         return it;
24     //到這邊代表找到的是第一個左端點大於pos的區間
25     //it - 1即可找到左端點等於pos的區間
26     //(不會是別的，因為沒有重疊的區間)
27     --it;
28     long long l = it->l, r = it->r;
29     long long val = it->val;
30     chthollyTree.erase(it);
31     chthollyTree.insert(Node(l, pos - 1,
32         val));
33     //回傳左端點是pos的區間iterator
34     return chthollyTree.insert(Node(pos, r,
35         val)).first;
36 }
37 }
38 //區間賦值

```

```

31 void assign(long long l, long long r, long
    long val) {
32     //<注意>
33     //end與begin的順序不能調換，因為end的split可能會改
34     //因為end可以在原本begin的區間中
35     set<Node>::iterator end = split(r + 1),
        begin = split(l);
36     //begin到end全部刪掉
37     chthollyTree.erase(begin, end);
38     //填回去 [l, r] 的區間
39     chthollyTree.insert(Node(l, r, val));
40 }
41 //區間加值(直接一個個區間去加)
42 void add(long long l, long long r, long long
    val) {
43     set<Node>::iterator end = split(r + 1);
44     set<Node>::iterator begin = split(l);
45     for (set<Node>::iterator it = begin; it
        != end; ++it)
46         it->val += val;
47 }
48 //查詢區間第k小 -> 直接把每個區間丟去vector排序
49 long long getKthSmallest(long long l, long
    long r, long long k) {
50     set<Node>::iterator end = split(r + 1);
51     set<Node>::iterator begin = split(l);
52     //pair -> first: val, second: 區間長度
53     vector<pair<long long, long long>> vec;
54     for (set<Node>::iterator it = begin; it
        != end; ++it) {
55         vec.push_back({it->val, it->r - it->l
            + 1});
56     }
57     sort(vec.begin(), vec.end());
58     for (const pair<long long, long long>&
        p: vec) {
59         k -= p.second;
60         if (k <= 0)
61             return p.first;
62     }
63     //不應該跑到這
64     return -1;
65 }
66 //快速幂
67 long long qpow(long long x, long long n,
    long long mod) {
68     long long res = 1;
69     x %= mod;
70     while (n)
71     {
72         if (n & 1)
73             res = res * x % mod;
74         n >>= 1;
75         x = x * x % mod;
76     }
77     return res;
78 }
79 //區間n次方和
80 long long sumOfPow(long long l, long long r,
    long long n, long long mod) {
81     long long total = 0;
82     set<Node>::iterator end = split(r + 1);
83     set<Node>::iterator begin = split(l);
84     for (set<Node>::iterator it = begin; it
        != end; ++it)
85     {
86         total = (total + qpow(it->val, n,
            mod) * (it->r - it->l + 1)) %
            mod;
87     }
88     return total;
89 }

```

4.3 線段樹 1D

```

1 #define MAXN 1000
2 int data[MAXN]; //原數據

```

```

3 int st[4 * MAXN]; //線段樹
4 int tag[4 * MAXN]; //懶標
5 inline int pull(int l, int r) {
6     // 隨題目改變sum、max、min
7     // l、r是左右樹的index
8     return st[l] + st[r];
9 }
10 void build(int l, int r, int i) {
11     // 在[l, r]區間建樹，目前根的index為i
12     if (l == r) {
13         st[i] = data[l];
14         return;
15     }
16     int mid = l + ((r - l) >> 1);
17     build(l, mid, i * 2);
18     build(mid + 1, r, i * 2 + 1);
19     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
20 }
21 int qry(int ql, int qr, int l, int r, int i) {
22     // [ql,qr]是查詢區間，[l,r]是當前節點包含的區間
23     if (ql <= l && r <= qr)
24         return st[i];
25     int mid = l + ((r - l) >> 1);
26     if (tag[i]) {
27         //如果當前懶標有值則更新左右節點
28         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
29         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
30         tag[i * 2] += tag[i];
31         tag[i * 2 + 1] += tag[i];
32         tag[i] = 0;
33     }
34     int sum = 0;
35     if (ql <= mid)
36         sum += query(ql, qr, l, mid, i * 2);
37     if (qr > mid)
38         sum += query(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1);
39     return sum;
40 }
41 void update(
42     int ql, int qr, int l, int r, int i, int c) {
43     // [ql,qr]是查詢區間，[l,r]是當前節點包含的區間
44     // c是變化量
45     if (ql <= l && r <= qr) {
46         st[i] += (r - l + 1) * c;
47         //求和，此需乘上區間長度
48         tag[i] += c;
49         return;
50     }
51     int mid = l + ((r - l) >> 1);
52     if (tag[i] && l != r) {
53         //如果當前懶標有值則更新左右節點
54         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
55         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
56         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
57         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
58         tag[i] = 0;
59     }
60     if (ql <= mid) update(ql, qr, l, mid, i
        * 2, c);
61     if (qr > mid) update(ql, qr, mid + 1, r,
        i * 2 + 1, c);
62     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
63     //如果是直接改值而不是加值，query與update中的tag與st
64     //改值從+=改成=

```

4.4 線段樹 2D

```

1 //純2D segment tree 區間查詢單點修改最大最小值
2 #define maxn 2005 //500 * 4 + 5
3 int maxST[maxn][maxn], minST[maxn][maxn];
4 int N;
5 void modifyY(int index, int l, int r, int
    val, int yPos, int xIndex, bool
    xIsLeaf) {
6     if (l == r) {
7         if (xIsLeaf) {

```

```

8         maxST[xIndex][index] =
            minST[xIndex][index] = val;
9         return;
10     }
11     maxST[xIndex][index] =
        max(maxST[xIndex * 2][index],
            maxST[xIndex * 2 + 1][index]);
12     minST[xIndex][index] =
        min(minST[xIndex * 2][index],
            minST[xIndex * 2 + 1][index]);
13 }
14 else {
15     int mid = (l + r) / 2;
16     if (yPos <= mid)
17         modifyY(index * 2, l, mid, val,
            yPos, xIndex, xIsLeaf);
18     else
19         modifyY(index * 2 + 1, mid + 1,
            r, val, yPos, xIndex,
            xIsLeaf);
20 }
21 maxST[xIndex][index] =
        max(maxST[xIndex][index * 2],
            maxST[xIndex][index * 2 + 1]);
22 minST[xIndex][index] =
        min(minST[xIndex][index * 2],
            minST[xIndex][index * 2 + 1]);
23 }
24 }
25 void modifyX(int index, int l, int r, int
    val, int xPos, int yPos) {
26     if (l == r) {
27         modifyY(1, 1, N, val, yPos, index,
            true);
28     }
29     else {
30         int mid = (l + r) / 2;
31         if (xPos <= mid)
32             modifyX(index * 2, l, mid, val,
                xPos, yPos);
33         else
34             modifyX(index * 2 + 1, mid + 1,
                r, val, xPos, yPos);
35         modifyY(1, 1, N, val, yPos, index,
            false);
36     }
37 }
38 void queryY(int index, int l, int r, int
    yql, int yqr, int xIndex, int& vmax,
    int& vmin) {
39     if (yql <= l && r <= yqr) {
40         vmax = max(vmax,
            maxST[xIndex][index]);
41         vmin = min(vmin,
            minST[xIndex][index]);
42     }
43     else
44     {
45         int mid = (l + r) / 2;
46         if (yql <= mid)
47             queryY(index * 2, l, mid, yql,
                yqr, xIndex, vmax, vmin);
48         if (mid < yqr)
49             queryY(index * 2 + 1, mid + 1, r,
                yql, yqr, xIndex, vmax,
                vmin);
50     }
51 }
52 void queryX(int index, int l, int r, int
    xql, int xqr, int yql, int yqr, int&
    vmax, int& vmin) {
53     if (xql <= l && r <= xqr) {
54         queryY(1, 1, N, yql, yqr, index,
            vmax, vmin);
55     }
56     else {
57         int mid = (l + r) / 2;
58         if (xql <= mid)

```

```

59     queryX(index * 2, 1, mid, xql,
60         xqr, yql, yqr, vmax, vmin);
61     if (mid < xqr)
62         queryX(index * 2 + 1, mid + 1, r,
63             xql, xqr, yql, yqr, vmax,
64             vmin);
65 }
66 }
67 int main() {
68     while (scanf("%d", &N) != EOF) {
69         int val;
70         for (int i = 1; i <= N; ++i) {
71             for (int j = 1; j <= N; ++j) {
72                 scanf("%d", &val);
73                 modifyX(1, 1, N, val, i, j);
74             }
75         }
76         int q;
77         int vmax, vmin;
78         int xql, xqr, yql, yqr;
79         char op;
80         scanf("%d", &q);
81         while (q--) {
82             getchar(); //for \n
83             scanf("%c", &op);
84             if (op == 'q') {
85                 scanf("%d %d %d %d", &xql,
86                     &yql, &xqr, &yqr);
87                 vmax = -0x3f3f3f3f;
88                 vmin = 0x3f3f3f3f;
89                 queryX(1, 1, N, xql, xqr,
90                     yql, yqr, vmax, vmin);
91                 printf("%d %d\n", vmax, vmin);
92             }
93             else {
94                 scanf("%d %d %d", &xql, &yql,
95                     &val);
96                 modifyX(1, 1, N, val, xql,
97                     yql);
98             }
99         }
100     }
101     return 0;
102 }

```

4.5 權值線段樹

```

1 //權值線段樹 + 離散化 解決區間第k小問題
2 //其他網路上的解法: 2個heap, Treap, AVL tree
3 #define maxn 30005
4 int nums[maxn];
5 int getArr[maxn];
6 int id[maxn];
7 int st[maxn << 2];
8 void update(int index, int l, int r, int qx)
9 {
10     if (l == r)
11     {
12         ++st[index];
13         return;
14     }
15     int mid = (l + r) / 2;
16     if (qx <= mid)
17         update(index * 2, l, mid, qx);
18     else
19         update(index * 2 + 1, mid + 1, r, qx);
20     st[index] = st[index * 2] + st[index * 2
21         + 1];
22 }
23 //找區間第k個小的
24 int query(int index, int l, int r, int k) {
25     if (l == r)
26         return id[l];
27     int mid = (l + r) / 2;
28     //k比左子樹小
29     if (k <= st[index * 2])

```

```

29     return query(index * 2, l, mid, k);
30 }
31 else
32     return query(index * 2 + 1, mid + 1,
33         r, k - st[index * 2]);
34 }
35 int main() {
36     int t;
37     cin >> t;
38     bool first = true;
39     while (t--) {
40         if (first)
41             first = false;
42         else
43             puts("");
44         memset(st, 0, sizeof(st));
45         int m, n;
46         cin >> m >> n;
47         for (int i = 1; i <= m; ++i) {
48             cin >> nums[i];
49             id[i] = nums[i];
50         }
51         for (int i = 0; i < n; ++i)
52             cin >> getArr[i];
53         //離散化
54         //防止m == 0
55         if (m)
56             sort(id + 1, id + m + 1);
57         int stSize = unique(id + 1, id + m +
58             1) - (id + 1);
59         for (int i = 1; i <= m; ++i) {
60             nums[i] = lower_bound(id + 1, id
61                 + stSize + 1, nums[i]) - id;
62         }
63         int addCount = 0;
64         int getCount = 0;
65         int k = 1;
66         while (getCount < n) {
67             if (getArr[getCount] == addCount)
68             {
69                 printf("%d\n", query(1, 1,
70                     stSize, k));
71                 ++k;
72                 ++getCount;
73             }
74             else {
75                 update(1, 1, stSize,
76                     nums[addCount + 1]);
77                 ++addCount;
78             }
79         }
80     }
81     return 0;
82 }

```

4.6 Trie

```

1 const int maxc = 26; // 單字字符數
2 const char minc = 'a'; // 首個 ASCII
3
4 struct TrieNode {
5     int cnt;
6     TrieNode* child[maxc];
7
8     TrieNode() {
9         cnt = 0;
10        for(auto& node : child) {
11            node = nullptr;
12        }
13    }
14 };
15
16 struct Trie {
17     TrieNode* root;
18
19     Trie() { root = new TrieNode(); }
20
21     void insert(string word) {

```

```

22     TrieNode* cur = root;
23     for(auto& ch : word) {
24         int c = ch - minc;
25         if(!cur->child[c])
26             cur->child[c] = new TrieNode();
27         cur = cur->child[c];
28     }
29     cur->cnt++;
30 }
31
32 void remove(string word) {
33     TrieNode* cur = root;
34     for(auto& ch : word) {
35         int c = ch - minc;
36         if(!cur->child[c]) return;
37         cur = cur->child[c];
38     }
39     cur->cnt--;
40 }
41
42 // 字典裡有出現 word
43 bool search(string word, bool prefix=0) {
44     TrieNode* cur = root;
45     for(auto& ch : word) {
46         int c = ch - minc;
47         if(!cur->child[c]) return false;
48         cur = cur->child[c];
49     }
50     return cur->cnt || prefix;
51 }
52
53 // 字典裡有 word 的前綴為 prefix
54 bool startsWith(string prefix) {
55     return search(prefix, true);
56 }

```

4.7 AC Trie

```

1 const int maxn = 1e4 + 10; // 單字字數
2 const int maxl = 50 + 10; // 單字字長
3 const int maxc = 128; // 單字字符數
4 const char minc = ' '; // 首個 ASCII
5
6 int trie[maxn*maxl][maxc]; // 原字典樹
7 int val[maxn*maxl]; // 結尾(單字編號)
8 int cnt[maxn*maxl]; // 結尾(重複個數)
9 int fail[maxn*maxl]; // failure link
10 bool vis[maxn*maxl]; // 同單字不重複
11
12 struct ACTrie {
13     int seq, root;
14
15     ACTrie() {
16         seq = 0;
17         root = newNode();
18     }
19
20     int newNode() {
21         for(int i=0; i<maxc; i++) trie[seq][i]=0;
22         val[seq] = cnt[seq] = fail[seq] = 0;
23         return seq++;
24     }
25
26     void insert(char* s, int wordId=0) {
27         int p = root;
28         for(; *s; s++) {
29             int c = *s - minc;
30             if(!trie[p][c]) trie[p][c] = newNode();
31             p = trie[p][c];
32         }
33         val[p] = wordId;
34         cnt[p]++;
35     }
36
37     void build() {
38         queue<int> q({root});
39         while(!q.empty()) {

```

```

40 int p = q.front();
41 q.pop();
42 for(int i=0; i<maxc; i++) {
43     int& t = trie[p][i];
44     if(t) {
45         fail[t] = p?trie[fail[p]][i]:root;
46         q.push(t);
47     } else {
48         t = trie[fail[p]][i];
49     }
50 }
51 }
52 }
53
54 // 要存 wordId 才要 vec
55 // 同單字重複match要把所有vis取消掉
56 int match(char* s, vector<int>& vec) {
57     int res = 0;
58     memset(vis, 0, sizeof(vis));
59     for(int p=root; *s; s++) {
60         p = trie[p][*s-minc];
61         for(int k=p; k && !vis[k]; k=fail[k]) {
62             vis[k] = true;
63             res += cnt[k];
64             if(cnt[k]) vec.push_back(val[k]);
65         }
66     }
67     return res;    // 匹配到的單字量
68 }
69 };
70
71 ACTrie ac;    // 建構, 初始化
72 ac.insert(s); // 加字典單字
73 // 加完字典後
74 ac.build();   // !!! 建 failure link !!!
75 ac.match(s);  // 多模式匹配(加vec存編號)

```

4.8 單調隊列

```

1 //單調隊列
2 "如果一個選手比你小還比你強，你就可以退役了。"
3
4 example
5
6 給出一個長度為 n 的數組，
7 輸出每 k 個連續的數中的最大值和最小值。
8
9 #include <bits/stdc++.h>
10 #define maxn 1000100
11 using namespace std;
12 int q[maxn], a[maxn];
13 int n, k;
14 //得到這個隊列裡的最小值，直接找到最後的就行了
15 void getmin() {
16     int head=0,tail=0;
17     for(int i=1;i<k;i++) {
18         while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i])
19             tail--;
20         q[++tail]=i;
21     }
22     for(int i=k; i<=n;i++) {
23         while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i])
24             tail--;
25         q[++tail]=i;
26         while(q[head]<=i-k) head++;
27         cout<<a[q[head]]<<" ";
28     }
29     cout<<endl;
30 }
31 // 和上面同理
32 void getmax() {
33     int head=0,tail=0;
34     for(int i=1;i<k;i++) {
35         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
36         q[++tail]=i;
37     }
38     for(int i=k;i<=n;i++) {
39         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
40         q[++tail]=i;
41         while(q[head]<=i-k) head++;
42         cout<<a[q[head]]<<" ";
43     }
44     cout<<endl;
45 }

```

```

37 while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
38 q[++tail]=i;
39 while(q[head]<=i-k) head++;
40 cout<<a[q[head]]<<" ";
41 }
42 cout<<endl;
43 }
44
45 int main(){
46     cin>>n>>k; //每k個連續的數
47     for(int i=1;i<=n;i++) cin>>a[i];
48     getmin();
49     getmax();
50     return 0;
51 }

```

5 Geometry

5.1 公式

1. Circle and Line

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

兩平行直線

$L_1: ax + by + c_1 = 0$ 與 $L_2: ax + by + c_2 = 0$

的距離

$$d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Triangle

設三角形頂點為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

點 A, B, C 的對邊長分別為 a, b, c

三角形面積為 Δ

重心為 (G_x, G_y) ，內心為 (I_x, I_y) ，

外心為 (O_x, O_y) 和垂心為 (H_x, H_y)

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, G_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$I_x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, I_y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}$$

$$O_x = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{4\Delta}, O_y = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{4\Delta}$$

$$H_x = -\frac{\begin{vmatrix} x_2x_3 + y_2y_3 & x_1x_3 + y_1y_3 & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{2\Delta}$$

$$H_y = -\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3 + y_2y_3 & x_1x_3 + y_1y_3 & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{2\Delta}$$

任意三角形，重心、外心、垂心共線

$$G_x = \frac{2}{3}O_x + \frac{1}{3}H_x, G_y = \frac{2}{3}O_y + \frac{1}{3}H_y$$

5.2 Template

```

1 using DBL = double;
2 using TP = DBL; // 存點的型態
3
4 const DBL pi = acos(-1);
5 const DBL eps = 1e-8;
6 const TP inf = 1e30;
7 const int maxn = 5e4 + 10;
8
9 struct Vector {
10     TP x, y;
11     Vector(TP x=0, TP y=0): x(x), y(y) {}
12     DBL length();
13 };
14 using Point = Vector;
15 using Polygon = vector<Point>;
16
17 Vector operator+(Vector a, Vector b) {
18     return Vector(a.x+b.x, a.y+b.y); }
19 Vector operator-(Vector a, Vector b) {
20     return Vector(a.x-b.x, a.y-b.y); }
21 Vector operator*(Vector a, DBL b) {
22     return Vector(a.x*b, a.y*b); }
23 Vector operator/(Vector a, DBL b) {
24     return Vector(a.x/b, a.y/b); }
25
26 TP dot(Vector a, Vector b) {
27     return a.x*b.x + a.y*b.y;
28 }
29 TP cross(Vector a, Vector b) {

```



```

30 return a.x*b.y - a.y*b.x;
31 }
32 DBL Vector::length() {
33     return sqrt(dot(*this, *this));
34 }
35 DBL dis(Point a, Point b) {
36     return sqrt(dot(a-b, a-b));
37 }
38 Vector unit_normal_vector(Vector v) {
39     DBL len = v.length();
40     return Vector(-v.y/len, v.x/len);
41 }
42
43 struct Line {
44     Point p;
45     Vector v;
46     DBL ang;
47     Line(Point _p={}, Vector _v={}) {
48         p = _p;
49         v = _v;
50         ang = atan2(v.y, v.x);
51     }
52     bool operator<(const Line& l) const {
53         return ang < l.ang;
54     }
55 };
56
57 struct Segment {
58     Point s, e;
59     Segment(): s({0, 0}), e({0, 0}) {}
60     Segment(Point s, Point e): s(s), e(e) {}
61     DBL length() { return dis(s, e); }
62 };
63
64 struct Circle {
65     Point o;
66     DBL r;
67     Circle(): o({0, 0}), r(0) {}
68     Circle(Point o, DBL r=0): o(o), r(r) {}
69     Circle(Point a, Point b) { // ab 直徑
70         o = (a + b) / 2;
71         r = dis(o, a);
72     }
73     Circle(Point a, Point b, Point c) {
74         Vector u = b-a, v = c-a;
75         DBL c1=dot(u, a+b)/2, c2=dot(v, a+c)/2;
76         DBL dx=c1*v.y-c2*u.y, dy=u.x*c2-v.x*c1;
77         o = Point(dx, dy) / cross(u, v);
78         r = dis(o, a);
79     }
80     bool cover(Point p) {
81         return dis(o, p) <= r;
82     }
83 };

```

5.3 Polygon

```

1 // 判斷點 (point) 是否在凸包 (p) 內
2 bool pointInConvex(Polygon& p, Point point) {
3     // 根據 TP 型態來寫，沒浮點數不用 dblcmp
4     auto dblcmp=[](DBL v){return (v>0)-(v<0)};
5     // 不包含線上，改 '>=' 為 '>'
6     auto test = [&](Point& p0, Point& p1) {
7         return dblcmp(cross(p1-p0, point-p0))>=0;
8     };
9     p.push_back(p[0]);
10    for(int i=1; i<p.size(); i++) {
11        if(!test(p[i-1], p[i])) {
12            p.pop_back();
13            return false;
14        }
15    }
16    p.pop_back();
17    return true;
18 }
19
20 // 計算簡單多邊形的面積

```

```

21 // ! p 為排序過的點 !
22 DBL polygonArea(Polygon& p) {
23     DBL sum = 0;
24     for(int i=0, n=p.size(); i<n; i++)
25         sum += cross(p[i], p[(i+1)%n]);
26     return abs(sum) / 2.0;
27 }

```

5.4 Intersection

```

1 // 除 intersection(Line a, Line b) 之外，
2 // 皆尚未丟 online judge
3
4 int dcmp(DBL a, DBL b=0.0) {
5     return (a > b) - (a < b);
6 }
7
8 bool hasIntersection(Point p, Segment s) {
9     return dcmp(cross(p-s.s, s.s-s.e))==0&&
10    dcmp(dot(p.x-s.s.x, p.x-s.e.x))<=0&&
11    dcmp(dot(p.y-s.s.y, p.y-s.e.y))<=0;
12 }
13
14 bool hasIntersection(Point p, Line l) {
15     return dcmp(cross(p-l.p, l.v)) == 0;
16 }
17
18 DBL dis(Line l, Point p) {
19     DBL t = cross(p, l.v) + cross(l.v, l.p);
20     return abs(t) / sqrt(dot(l.v, l.v));
21 }
22
23 Point intersection(Line a, Line b) {
24     Vector u = a.p - b.p;
25     DBL t = 1.0*cross(b.v, u)/cross(a.v, b.v);
26     return a.p + a.v*t;
27 }

```

5.5 最小圓覆蓋

```

1 vector<Point> p(3); // 在圖上的點
2 Circle MEC(vector<Point>& v, int n, int d=0){
3     Circle mec;
4     if(d == 1) mec = Circle(p[0]);
5     if(d == 2) mec = Circle(p[0], p[1]);
6     if(d == 3) return Circle(p[0], p[1], p[2]);
7     for(int i=0; i<n; i++) {
8         if(mec.cover(v[i])) continue;
9         p[d] = v[i];
10        mec = MEC(v, i, d+1);
11    }
12    return mec;
13 }

```

5.6 旋轉卡尺

```

1 // 回傳凸包內最遠兩點的距離
2 int longest_distance(Polygon& p) {
3     auto test = [&](Line l, Point a, Point b) {
4         return cross(l.v, a-l.p)<=cross(l.v, b-l.p);
5     };
6     if(p.size() <= 2) {
7         return cross(p[0]-p[1], p[0]-p[1]);
8     }
9     int mx = 0;
10    for(int i=0, j=1, n=p.size(); i<n; i++) {
11        Line l(p[i], p[(i+1)%n] - p[i]);
12        for(; test(l, p[j], p[(j+1)%n]); j=(j+1)%n);
13        mx = max({
14            mx,
15            dot(p[(i+1)%n]-p[j], p[(i+1)%n]-p[j]),
16            dot(p[i]-p[j], p[i]-p[j])

```

```

17 });
18 }
19 return mx;
20 }

```

5.7 凸包

- TP 為 Point 裡 x 和 y 的型態
- struct Point 需要加入並另外計算的 variables:
 1. ang, 該點與基準點的 atan2 值
 2. d2, 該點與基準點的 (距離)²
- 注意計算 d2 的型態範圍限制

```

1 using TP = long long;
2 using Polygon = vector<Point>;
3
4 const TP inf = 1e9; // 座標點最大值
5
6 Polygon convex_hull(Point* p, int n) {
7     auto dblcmp = [](DBL a, DBL b=0.0) {
8         return (a>b) - (a<b);
9     };
10    auto rmv = [&](Point a, Point b, Point c) {
11        return cross(b-a, c-b) <= 0; // 非浮點數
12        return dblcmp(cross(b-a, c-b)) <= 0;
13    };
14
15    // 選最下裡最左的當基準點，可在輸入時計算
16    TP lx = inf, ly = inf;
17    for(int i=0; i<n; i++) {
18        if(p[i].y<ly || (p[i].y==ly&&p[i].x<lx)){
19            lx = p[i].x, ly = p[i].y;
20        }
21    }
22
23    for(int i=0; i<n; i++) {
24        p[i].ang=atan2(p[i].y-ly, p[i].x-lx);
25        p[i].d2 = (p[i].x-lx)*(p[i].x-lx) +
26            (p[i].y-ly)*(p[i].y-ly);
27    }
28    sort(p, p+n, [&](Point& a, Point& b) {
29        if(dblcmp(a.ang, b.ang))
30            return a.ang < b.ang;
31        return a.d2 < b.d2;
32    });
33
34    int m = 1; // stack size
35    Point st[n] = {p[n]=p[0]};
36    for(int i=1; i<n; i++) {
37        for(; m>1&&rmv(st[m-2], st[m-1], p[i]); m--);
38        st[m++] = p[i];
39    }
40    return Polygon(st, st+m-1);
41 }

```

5.8 半平面相交

```

1 using DBL = double;
2 using TP = DBL; // 存點的型態
3 using Polygon = vector<Point>;
4
5 const int maxn = 5e4 + 10;
6
7 // Return: 能形成半平面交的凸包邊界點
8 Polygon halfplaneIntersect(vector<Line>& nar){
9     sort(nar.begin(), nar.end());
10    // DBL 跟 0 比較，沒浮點數不用
11    auto dblcmp=[](DBL v){return (v>0)-(v<0)};
12    // p 是否在 l 的左半平面
13    auto lft = [&](Point p, Line l) {
14        return dblcmp(cross(l.v, p-l.p)) > 0;
15    };
16

```

```

17 int ql = 0, qr = 0;
18 Line L[maxn] = {nar[0]};
19 Point P[maxn];
20
21 for(int i=1; i<nar.size(); i++) {
22     for(; ql<qr&&!lft(P[qr-1], nar[i]); qr--);
23     for(; ql<qr&&!lft(P[ql], nar[i]); ql++);
24     L[++qr] = nar[i];
25     if(dblcmp(cross(L[qr].v, L[qr-1].v))==0) {
26         if(lft(nar[i].p, L[--qr])) L[qr]=nar[i];
27     }
28     if(ql < qr)
29         P[qr-1] = intersection(L[qr-1], L[qr]);
30 }
31 for(; ql<qr && !lft(P[qr-1], L[ql]); qr--);
32 if(qr-ql <= 1) return {};
33 P[qr] = intersection(L[qr], L[ql]);
34 return Polygon(P+ql, P+qr+1);
35 }

```

6 DP

6.1 以價值為主的背包

```

1 /*w 變得太大所以一般的01背包解法變得不可能
2 觀察題目w變成10^9
3 而v_i變成10^3
4 N不變10^2
5 試著湊湊看dp狀態
6 dp[maxn][maxv]是可接受的複雜度
7 剩下的是轉移式，轉移式變成
8 dp[i][j] = w ->
    當目前只考慮到第i個商品時，達到獲利j時最少的weight
    = w
9 所以答案是dp[n][1 ~ maxv]找價值最大且裝的下的*/
10 #define maxn 105
11 #define maxv 100005
12 long long dp[maxn][maxv];
13 long long weight[maxn];
14 long long v[maxn];
15 int main() {
16     int n;
17     long long w;
18     scanf("%d %lld", &n, &w);
19     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
20         scanf("%lld %lld", &weight[i], &v[i]);
21     }
22     memset(dp, 0x3f, sizeof(dp));
23     dp[0][0] = 0;
24     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
25         for (int j = 0; j <= maxv; ++j) {
26             if (j - v[i] >= 0)
27                 dp[i][j] = dp[i-1][j - v[i]] + weight[i];
28             dp[i][j] = min(dp[i-1][j], dp[i][j]);
29         }
30     }
31     long long res = 0;
32     for (int j = maxv - 1; j >= 0; --j) {
33         if (dp[n][j] <= w) {
34             res = j;
35             break;
36         }
37     }
38     printf("%lld\n", res);
39     return 0;
40 }

```

6.2 抽屜

```

1 long long dp[70][70][2];
2 // 初始條件
3 dp[1][0][0] = dp[1][1][1] = 1;
4 for (int i = 2; i <= 66; ++i){
5     // i個抽屜0個安全且上方0 =
6     // (底下i-1個抽屜且1個安全且最上面L) +
7     // (底下n-1個抽屜0個安全且最上方為0)
8     dp[i][0][0]=dp[i-1][1][1]+dp[i-1][0][0];
9     for (int j = 1; j <= i; ++j) {
10         dp[i][j][0] =
11             dp[i-1][j+1][1]+dp[i-1][j][0];
12         dp[i][j][1] =
13             dp[i-1][j-1][1]+dp[i-1][j-1][0];
14     }
15 } //答案在 dp[n][s][0] + dp[n][s][1];

```

6.3 Barcode

```

1 int N, K, M;
2 long long dp[55][55];
3 // n -> 目前剩多少units
4 // k -> 目前剩多少bars

```

```

5 // m -> 1 bar最多多少units
6 long long dfs(int n, int k) {
7     if (k == 1) {
8         return (n <= M);
9     }
10    if (dp[n][k] != -1)
11        return dp[n][k];
12    long long result = 0;
13    for (int i = 1; i < min(M + 1, n); ++i)
14        { // < min(M + 1, n)是因為n不能==0
15            result += dfs(n - i, k - 1);
16        }
17    return dp[n][k] = result;
18 }
19 int main() {
20     while (scanf("%d %d %d", &N, &K, &M) !=
21             EOF) {
22         memset(dp, -1, sizeof(dp));
23         printf("%lld\n", dfs(N, K));
24     }
25 }

```

6.4 Deque 最大差距

```

1 /*定義dp[l][r]是l ~ r時與先手最大差異值
2 轉移式: dp[l][r] = max{a[l] - solve(l + 1,
3             r), a[r] - solve(l, r - 1)}
4 裡面用減的主要是因為求的是相減且會一直換手，
5 所以正負正負...*/
6 #define maxn 3005
7 bool vis[maxn][maxn];
8 long long dp[maxn][maxn];
9 long long a[maxn];
10 long long solve(int l, int r) {
11     if (l > r) return 0;
12     if (vis[l][r]) return dp[l][r];
13     vis[l][r] = true;
14     long long res = a[l] - solve(l + 1, r);
15     res = max(res, a[r] - solve(l, r - 1));
16     return dp[l][r] = res;
17 }
18 int main() {
19     ...
20     printf("%lld\n", solve(1, n));
21 }

```

6.5 LCS 和 LIS

```

1 //LCS 和 LIS 題目轉換
2 LIS 轉成 LCS
3 1. A 為原序列，B=sort(A)
4 2. 對 A,B 做 LCS
5 LCS 轉成 LIS
6 1. A, B 為原本的兩序列
7 2. 最 A 序列作編號轉換，將轉換規則套用在 B
8 3. 對 B 做 LIS
9 4. 重複的數字在編號轉換時後要變成不同的數字，
10 越早出現的數字要越小
11 5. 如果有數字在 B 裡面而不在 A 裡面，
12 直接忽略這個數字不做轉換即可

```

6.6 RangeDP

```

1 //區間dp
2 int dp[55][55];
3 // dp[i][j] -> [i,j] 切割區間中最小的cost
4 int cuts[55];
5 int solve(int i, int j) {
6     if (dp[i][j] != -1)
7         return dp[i][j];
8     //代表沒有其他切法，只能是cuts[j] - cuts[i]

```

```

9   if (i == j - 1)
10      return dp[i][j] = 0;
11   int cost = 0x3f3f3f3f;
12   for (int m = i + 1; m < j; ++m) {
13       //枚舉區間中間切點
14       cost = min(cost, solve(i, m) +
15                 solve(m, j) + cuts[j] - cuts[i]);
16   }
17   return dp[i][j] = cost;
18 }
19 int main() {
20     int l, n;
21     while (scanf("%d", &l) != EOF && l) {
22         scanf("%d", &n);
23         for (int i = 1; i <= n; ++i)
24             scanf("%d", &cuts[i]);
25         cuts[0] = 0;
26         cuts[n + 1] = 1;
27         memset(dp, -1, sizeof(dp));
28         printf("ans = %d.\n", solve(0, n + 1));
29     }
30     return 0;
31 }

```

6.7 stringDP

Edit distance S_1 最少需要經過幾次增、刪或換字變成 S_2

$$dp[i, j] = \begin{cases} i + 1, & \text{if } j = -1 \\ j + 1, & \text{if } i = -1 \\ dp[i - 1, j - 1], & \text{if } S_1[i] = S_2[j] \\ \min \begin{cases} dp[i, j - 1] \\ dp[i - 1, j] \\ dp[i - 1, j - 1] \end{cases} + 1, & \text{if } S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases}$$

Longest Palindromic Subsequence

$$dp[l, r] = \begin{cases} 1 & \text{if } l = r \\ dp[l + 1, r - 1] & \text{if } S[l] = S[r] \\ \max\{dp[l + 1, r], dp[l, r - 1]\} & \text{if } S[l] \neq S[r] \end{cases}$$

6.8 樹 DP 有幾個 path 長度為 k

```

1 #define maxn 50005
2 #define maxk 505
3 //dp[u][u的child且距離u長度k的數量]
4 long long dp[maxn][maxk];
5 vector<vector<int>>> G;
6 int n, k;
7 long long res = 0;
8 void dfs(int u, int p) {
9     //u自己
10    dp[u][0] = 1;
11    for (int v: G[u]) {
12        if (v == p)
13            continue;
14        dfs(v, u);
15        for (int i = 1; i <= k; ++i) {
16            //子樹v距離i - 1的等於對於u來說距離i的
17            dp[u][i] += dp[v][i - 1];
18        }
19    }
20    //統計在u子樹中距離u為k的數量
21    res += dp[u][k];
22    long long cnt = 0;
23    for (int v: G[u]) {
24        if (v == p)
25            continue; //重點算法
26        for (int x = 0; x <= k - 2; ++x) {
27            cnt +=
28                dp[v][x] * (dp[u][k - x - 1] - dp[v][k - x - 2]);
29        }
30    }
31    res += cnt / 2;
32 }
33 int main() {

```

```

34 ...
35 dfs(1, -1);
36 printf("%lld\n", res);
37 return 0;
38 }

```

6.9 TreeDP reroot

```

1 /*re-root dp on tree O(n + n + n) -> O(n)*
2 class Solution {
3 public:
4     vector<int> sumOfDistancesInTree(int n,
5     vector<vector<int>>& edges) {
6         this->res.assign(n, 0);
7         G.assign(n + 5, vector<int>());
8         for (vector<int>& edge: edges) {
9             G[edge[0]].emplace_back(edge[1]);
10            G[edge[1]].emplace_back(edge[0]);
11        }
12        memset(this->visited, 0,
13               sizeof(this->visited));
14        this->dfs(0);
15        memset(this->visited, 0,
16               sizeof(this->visited));
17        this->res[0] = this->dfs2(0, 0);
18        memset(this->visited, 0,
19               sizeof(this->visited));
20        this->dfs3(0, n);
21        return this->res;
22    }
23 private:
24     vector<vector<int>> G;
25     bool visited[30005];
26     int subtreeSize[30005];
27     vector<int> res;
28     //求subtreeSize
29     int dfs(int u) {
30         this->visited[u] = true;
31         for (int v: this->G[u])
32             if (!this->visited[v])
33                 this->subtreeSize[u] +=
34                     this->dfs(v);
35         //自己
36         this->subtreeSize[u] += 1;
37         return this->subtreeSize[u];
38     }
39     //求res[0], 0到所有點的距離
40     int dfs2(int u, int dis) {
41         this->visited[u] = true;
42         int sum = 0;
43         for (int v: this->G[u])
44             if (!visited[v])
45                 sum += this->dfs2(v, dis + 1);
46         //要加上自己的距離
47         return sum + dis;
48     }
49     //算出所有的res
50     void dfs3(int u, int n) {
51         this->visited[u] = true;
52         for (int v: this->G[u]) {
53             if (!visited[v]) {
54                 this->res[v] = this->res[u] +
55                     n - 2 *
56                     this->subtreeSize[v];
57                 this->dfs3(v, n);
58             }
59         }
60     }
61 }

```

6.10 Weighted LIS

```

1 #define maxn 200005
2 long long dp[maxn];

```

```

3 long long height[maxn];
4 long long B[maxn];
5 long long st[maxn << 2];
6 void update(int p, int index, int l, int r,
7             long long v) {
8     if (l == r) {
9         st[index] = v;
10        return;
11    }
12    int mid = (l + r) >> 1;
13    if (p <= mid)
14        update(p, (index << 1), l, mid, v);
15    else
16        update(p, (index << 1) + 1, mid + 1, r, v);
17    st[index] =
18        max(st[index << 1], st[(index << 1) + 1]);
19 }
20 long long query(int index, int l, int r, int
21                ql, int qr) {
22     if (ql <= l && r <= qr)
23         return st[index];
24     int mid = (l + r) >> 1;
25     long long res = -1;
26     if (ql <= mid)
27         res =
28             max(res, query(index << 1, l, mid, ql, qr));
29     if (mid < qr)
30         res =
31             max(res, query((index << 1) + 1, mid + 1, r, ql, qr));
32     return res;
33 }
34 int main() {
35     int n;
36     scanf("%d", &n);
37     for (int i = 1; i <= n; ++i)
38         scanf("%lld", &height[i]);
39     for (int i = 1; i <= n; ++i)
40         scanf("%lld", &B[i]);
41     long long res = B[1];
42     update(height[1], 1, 1, n, B[1]);
43     for (int i = 2; i <= n; ++i) {
44         long long temp;
45         if (height[i] - 1 >= 1)
46             temp =
47                 B[i] + query(1, 1, n, 1, height[i] - 1);
48         else
49             temp = B[i];
50         update(height[i], 1, 1, n, temp);
51         res = max(res, temp);
52     }
53     printf("%lld\n", res);
54     return 0;
55 }

```