

Contents

1	ubuntu	1
1.1	run	1
1.2	cp.sh	1
2	Basic	1
2.1	ascii	1
2.2	limits	1
3	字串	2
3.1	最長迴文子字串	2
3.2	stringstream	2
4	STL	2
4.1	BIT	2
4.2	priority_queue	2
4.3	deque	2
4.4	map	2
4.5	unordered_map	3
4.6	set	3
4.7	multiset	3
4.8	unordered_set	3
4.9	單調隊列	3
5	sort	4
5.1	大數排序	4
6	math	4
6.1	質數與因數	4
6.2	快速冪	5
6.3	歐拉函數	5
6.4	atan	5
6.5	大步小步	5
7	algorithm	6
7.1	basic	6
7.2	二分搜	6
7.3	三分搜	6
7.4	prefix sum	7
7.5	差分	7
7.6	greedy	7
7.7	floyd warshall	9
7.8	dinic	9
7.9	SegmentTree	10
7.10	Nim Game	10
7.11	Trie	11
7.12	SPFA	11
7.13	dijkstra	11
7.14	SCC Tarjan	12
7.15	SCC Kosaraju	12
7.16	ArticulationPoints Tarjan	12
7.17	最小樹狀圖	13
8	geometry	15
8.1	intersection	15
8.2	半平面相交	15
8.3	凸包	16
9	動態規劃	16
9.1	LCS 和 LIS	16
10	Section2	16
10.1	thm	16
11	DP	17
11.1	字串 DP	17
11.2	表格	17
12	slogan	27
12.1	slogan	27

1 ubuntu

1.1 run

1 | ~\$ bash cp.sh PA

1.2 cp.sh

```
1 #!/bin/bash
2 clear
3 g++ $1.cpp -DDBG -o $1
4 if [[ "$?" == "0" ]]; then
5     echo Running
6     ./$1 < $1.in > $1.out
7     echo END
8 fi
```

2 Basic

2.1 ascii

int	char	int	char	int	char
32		64	@	96	`
33	!	65	A	97	a
34	"	66	B	98	b
35	#	67	C	99	c
36	\$	68	D	100	d
37	%	69	E	101	e
38	&	70	F	102	f
39	'	71	G	103	g
40	(72	H	104	h
41)	73	I	105	i
42	*	74	J	106	j
43	+	75	K	107	k
44	,	76	L	108	l
45	-	77	M	109	m
46	.	78	N	110	n
47	/	79	O	111	o
48	0	80	P	112	p
49	1	81	Q	113	q
50	2	82	R	114	r
51	3	83	S	115	s
52	4	84	T	116	t
53	5	85	U	117	u
54	6	86	V	118	v
55	7	87	W	119	w
56	8	88	X	120	x
57	9	89	Y	121	y
58	:	90	Z	122	z
59	;	91	[123	{
60	<	92	\	124	
61	=	93]	125	}
62	>	94	^	126	~
63	?	95	_		

2.2 limits

	[Type]	[size]	[range]
2	char	1	127 to -128
3	signed char	1	127 to -128
4	unsigned char	1	0 to 255
5	short	2	32767 to -32768
6	int	4	2147483647 to -2147483648
7	unsigned int	4	0 to 4294967295
8	long	4	2147483647 to -2147483648
9	unsigned long	4	0 to 18446744073709551615
10	long long	8	
11		9223372036854775807	to -9223372036854775808
12	double	8	1.79769e+308 to 2.22507e-308
13	long double	16	1.18973e+4932 to 3.3621e-4932
14	float	4	3.40282e+38 to 1.17549e-38
15	unsigned long long	8	0 to 18446744073709551615
16	string	32	

3 字串

3.1 最長迴文子字串

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define T(x) ((x)%2 ? s[(x)/2] : '. ')
3 using namespace std;
4
5 string s;
6 int n;
7
8 int ex(int l,int r){
9     int i=0;
10    while(l-i>=0&&r+i<n&&T(l-i)==T(r+i)) i++;
11    return i;
12 }
13
14 int main(){
15     cin>>s;
16     n=2*s.size()+1;
17     int mx=0;
18     int center=0;
19     vector<int> r(n);
20     int ans=1;
21     r[0]=1;
22     for(int i=1;i<n;i++){
23         int ii=center-(i-center);
24         int len=mx-i+1;
25         if(i>mx){
26             r[i]=ex(i,i);
27             center=i;
28             mx=i+r[i]-1;
29         }
30         else if(r[ii]==len){
31             r[i]=len+ex(i-len,i+len);
32             center=i;
33             mx=i+r[i]-1;
34         }
35         else r[i]=min(r[ii],len);
36         ans=max(ans,r[i]);
37     }
38     cout<<ans-1<<"\n";
39     return 0;
40 }

```

3.2 stringstream

```

1 string s,word;
2 stringstream ss;
3 getline(cin,s);
4 ss<<s;
5 while(ss>>word) cout<<word<<endl;

```

4 STL

4.1 BIT

```

1 template <class T> class BIT {
2 private:
3     int size;
4     vector<T> bit;
5     vector<T> arr;
6
7 public:
8     BIT(int sz=0): size(sz), bit(sz+1), arr(sz) {}
9
10    /** Sets the value at index idx to val. */
11    void set(int idx, T val) {
12        add(idx, val - arr[idx]);
13    }

```

```

14
15    /** Adds val to the element at index idx. */
16    void add(int idx, T val) {
17        arr[idx] += val;
18        for (++idx; idx<=size; idx+=(idx & -idx))
19            bit[idx] += val;
20    }
21
22    /** @return The sum of all values in [0, idx]. */
23    T pre_sum(int idx) {
24        T total = 0;
25        for (++idx; idx>0; idx--=(idx & -idx))
26            total += bit[idx];
27        return total;
28    }
29 };

```

4.2 priority_queue

```

1 priority_queue: 優先隊列，資料預設由大到小排序。
2
3 讀取優先權最高的值：
4     x = pq.top();
5     pq.pop(); //讀取後刪除
6 判斷是否為空的priority_queue：
7     pq.empty() //回傳 true
8     pq.size() //回傳 0
9 如需改變priority_queue的優先權定義：
10    priority_queue<T> pq; //預設由大到小
11    priority_queue<T, vector<T>, greater<T>> pq; //改成由小到大
12
13    priority_queue<T, vector<T>, cmp> pq; //cmp

```

4.3 deque

```

1 deque 是 C++ 標準模板函式庫
2 (Standard Template Library, STL)
3 中的雙向佇列容器 (Double-ended Queue) ,
4 跟 vector 相似，不過在 vector
5 中若是要添加新元素至開端，
6 其時間複雜度為 O(N)，但在 deque 中則是 O(1)。
7 同樣也能在我們需要儲存更多元素的時候自動擴展空間，
8 讓我們不必煩惱佇列長度的問題。
9 dq.push_back() //在 deque 的最尾端新增元素
10 dq.push_front() //在 deque 的開頭新增元素
11 dq.pop_back() //移除 deque 最尾端的元素
12 dq.pop_front() //移除 deque 最開頭的元素
13 dq.back() //取出 deque 最尾端的元素
14 dq.front() //回傳 deque 最開頭的元素
15 dq.insert()
16 dq.insert(position, n, val)
17     position: 插入元素的 index 值
18     n: 元素插入次數
19     val: 插入的元素值
20 dq.erase() //刪除元素，需要使用迭代器指定刪除的元素或位置，
21 //同時也會返回指向刪除元素下一元素的迭代器。
22 dq.clear() //清空整個 deque 佇列。
23 dq.size() //檢查 deque 的尺寸
24 dq.empty() //如果 deque 佇列為空返回 1；
25 //若是存在任何元素，則返回 0
26 dq.begin() //返回一個指向 deque 開頭的迭代器
27 dq.end() //指向 deque 結尾，
28 //不是最後一個元素，
29 //而是最後一個元素的下一個位置

```

4.4 map

```

1 map：存放 key-value pairs 的映射資料結構，
2   會按 key 由小到大排序。
3 元素存取
4 operator[]：存取指定的[i]元素的資料
5
6 迭代器
7 begin()：回傳指向map頭部元素的迭代器
8 end()：回傳指向map末尾的迭代器
9 rbegin()：回傳一個指向map尾部的反向迭代器
10 rend()：回傳一個指向map頭部的反向迭代器
11
12 遍歷整個map時，利用iterator操作：
13 取key：it->first 或 (*it).first
14 取value：it->second 或 (*it).second
15
16 容量
17 empty()：檢查容器是否為空，空則回傳true
18 size()：回傳元素數量
19 max_size()：回傳可以容納的最大元素個數
20
21 修改器
22 clear()：刪除所有元素
23 insert()：插入元素
24 erase()：刪除一個元素
25 swap()：交換兩個map
26
27 查找
28 count()：回傳指定元素出現的次數
29 find()：查找一個元素
30
31 //實作範例
32 #include <bits/stdc++.h>
33 using namespace std;
34 int main(){
35     //declaration container and iterator
36     map<string, string> mp;
37     map<string, string>::iterator iter;
38     map<string, string>::reverse_iterator iter_r;
39
40     //insert element
41     mp.insert(pair<string, string>
42               ("r000", "student_zero"));
43     mp["r123"] = "student_first";
44     mp["r456"] = "student_second";
45
46     //traversal
47     for(iter=mp.begin(); iter!=mp.end(); iter++)
48         cout<<iter->first<<" "
49              <<iter->second<<endl;
50     for(iter_r=mp.rbegin(); iter_r!=mp.rend(); iter_r++)
51         cout<<iter_r->first<<" "
52              <<iter_r->second<<endl;
53
54     //find and erase the element
55     iter=mp.find("r123");
56     mp.erase(iter);
57     iter=mp.find("r123");
58     if(iter!=mp.end())
59         cout<<"Find, the value is "
60              <<iter->second<<endl;
61     else cout<<"Do not Find"<<endl;
62     return 0;
63 }

```

4.5 unordered_map

```

1 unordered_map：存放 key-value pairs
2   的「無序」映射資料結構。
3 用法與map相同

```

4.6 set

```

1 set：集合，去除重複的元素，資料由小到大排序。
2
3 取值：使用iterator
4     x = *st.begin();
5         // set中的第一個元素(最小的元素)。
6     x = *st.rbegin();
7         // set中的最後一個元素(最大的元素)。
8
9 判斷是否為空的set：
10     st.empty() 回傳true
11     st.size() 回傳零
12
13 常用來搭配的member function：
14     st.count(x);
15     auto it = st.find(x);
16         // binary search, O(log(N))
17     auto it = st.lower_bound(x);
18         // binary search, O(log(N))
19     auto it = st.upper_bound(x);
20         // binary search, O(log(N))

```

4.7 multiset

```

1 與 set 用法雷同，但會保留重複的元素。
2 資料由小到大排序。
3 宣告：
4     multiset<int> st;
5 刪除資料：
6     st.erase(val);
7         //會刪除所有值為 val 的元素。
8     st.erase(st.find(val));
9         //只刪除第一個值為 val 的元素。

```

4.8 unordered_set

```

1 unordered_set 的實作方式通常是用雜湊表(hash table)，
2 資料插入和查詢的時間複雜度很低，為常數級別O(1)，
3 相對的代價是消耗較多的記憶體，空間複雜度較高，
4 無自動排序功能。
5
6 unordered_set 判斷元素是否存在
7 unordered_set<int> myunordered_set;
8 myunordered_set.insert(2);
9 myunordered_set.insert(4);
10 myunordered_set.insert(6);
11 cout << myunordered_set.count(4) << "\n"; // 1
12 cout << myunordered_set.count(8) << "\n"; // 0

```

4.9 單調隊列

```

1 //單調隊列
2 "如果一個選手比你小還比你強，你就可以退役了。"--單調隊列
3
4 example
5
6 給出一個長度為 n 的數組，
7 輸出每 k 個連續的數中的最大值和最小值。
8
9 #include <bits/stdc++.h>
10 #define maxn 1000100
11 using namespace std;
12 int q[maxn], a[maxn];
13 int n, k;
14
15 void getmin() {
16     // 得到這個隊列裡的最小值，直接找到最後的就行了

```

```

17 | int head=0,tail=0;
18 | for(int i=1;i<k;i++) {
19 |     while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
20 |     q[++tail]=i;
21 | }
22 | for(int i=k;i<=n;i++) {
23 |     while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
24 |     q[++tail]=i;
25 |     while(q[head]<=i-k) head++;
26 |     cout<<a[q[head]]<<" ";
27 | }
28 | cout<<endl;
29 | }
30 |
31 | void getmax() { // 和上面同理
32 |     int head=0,tail=0;
33 |     for(int i=1;i<k;i++) {
34 |         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
35 |         q[++tail]=i;
36 |     }
37 |     for(int i=k;i<=n;i++) {
38 |         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i])tail--;
39 |         q[++tail]=i;
40 |         while(q[head]<=i-k) head++;
41 |         cout<<a[q[head]]<<" ";
42 |     }
43 |     cout<<endl;
44 | }
45 |
46 | int main(){
47 |     cin>>n>>k; //每k個連續的數
48 |     for(int i=1;i<=n;i++) cin>>a[i];
49 |     getmin();
50 |     getmax();
51 |     return 0;
52 | }

```

5 sort

5.1 大數排序

```

1 | #python大數排序
2 |
3 | while True:
4 |     try:
5 |         n = int(input())           # 有幾筆數字需要排序
6 |         arr = []                   # 建立空串列
7 |         for i in range(n):
8 |             arr.append(int(input())) # 依序將數字存入串列
9 |             arr.sort()               # 串列排序
10 |         for i in arr:
11 |             print(i)                # 依序印出串列中每個項目
12 |     except:
13 |         break

```

6 math

6.1 質數與因數

```

1 | 埃氏篩法
2 | int n;
3 | vector<int> isprime(n+1,1);
4 | isprime[0]=isprime[1]=0;
5 | for(int i=2;i<=n;i++){
6 |     if(isprime[i])
7 |         for(int j=i*i;j<=n;j+=i) isprime[j]=0;
8 | }
9 |
10 | 歐拉篩O(n)
11 | #define MAXN 47000 //sqrt(2^31)=46,340...

```

```

12 | bool isPrime[MAXN];
13 | int prime[MAXN];
14 | int primeSize=0;
15 | void getPrimes(){
16 |     memset(isPrime, true, sizeof(isPrime));
17 |     isPrime[0]=isPrime[1]=false;
18 |     for(int i=2;i<MAXN;i++){
19 |         if(isPrime[i]) prime[primeSize++]=i;
20 |         for(int
21 |             j=0;j<primeSize&&i*prime[j]<=MAXN;++j){
22 |             isPrime[i*prime[j]]=false;
23 |             if(i%prime[j]==0) break;
24 |         }
25 |     }
26 | }
27 | 最大公因數 0(log(min(a,b)))
28 | int GCD(int a,int b){
29 |     if(b==0) return a;
30 |     return GCD(b,a%b);
31 | }
32 |
33 | 質因數分解
34 | void primeFactorization(int n){
35 |     for(int i=0;i<(int)p.size();++i){
36 |         if(p[i]*p[i]>n) break;
37 |         if(n%p[i]) continue;
38 |         cout<<p[i]<<' ';
39 |         while(n%p[i]==0) n/=p[i];
40 |     }
41 |     if(n!=1) cout<<n<<' ';
42 |     cout<<'\n';
43 | }
44 |
45 | 擴展歐幾里得算法
46 | //ax+by=GCD(a,b)
47 | #include <bits/stdc++.h>
48 | using namespace std;
49 |
50 | int ext_euc(int a,int b,int &x,int &y){
51 |     if(b==0){
52 |         x=1,y=0;
53 |         return a;
54 |     }
55 |     int d=ext_euc(b,a%b,y,x);
56 |     y-=a/b*x;
57 |     return d;
58 | }
59 |
60 | int main(){
61 |     int a,b,x,y;
62 |     cin>>a>>b;
63 |     ext_euc(a,b,x,y);
64 |     cout<<x<<' '<<y<<endl;
65 |     return 0;
66 | }
67 |
68 |
69 |
70 | 歌德巴赫猜想
71 | solution : 把偶數 N (6≤N≤10^6) 寫成兩個質數的和。
72 | #include <iostream>
73 | using namespace std;
74 | #define N 20000000
75 | int ox[N],p[N],pr;
76 | void PrimeTable(){
77 |     ox[0]=ox[1]=1;
78 |     pr=0;
79 |     for(int i=2;i<N;i++){
80 |         if(!ox[i]) p[pr++]=i;
81 |         for(int j=0;i*p[j]<N&&j<pr;j++)
82 |             ox[i*p[j]]=1;
83 |     }
84 | }
85 |
86 | int main(){
87 |     PrimeTable();

```

```

88     int n;
89     while(cin>>n,n){
90         int x;
91         for(x=1;;x+=2)
92             if(!ox[x]&&!ox[n-x]) break;
93         printf("%d = %d + %d\n",n,x,n-x);
94     }
95 }
96 problem : 給定整數 N ,
97           求 N 最少可以拆成多少個質數的和。
98 如果 N 是質數,則答案為 1。
99 如果 N 是偶數(不包含2),則答案為 2 (強歌德巴赫猜想)。
100 如果 N 是奇數且 N-2 是質數,則答案為 2 (2+質數)。
101 其他狀況答案為 3 (弱歌德巴赫猜想)。
102 #include<bits/stdc++.h>
103 using namespace std;
104
105 bool isPrime(int n){
106     for(int i=2;i<n;++i){
107         if(i*i>n) return true;
108         if(n%i==0) return false;
109     }
110     return true;
111 }
112
113 int main(){
114     int n;
115     cin>>n;
116     if(isPrime(n)) cout<<"1\n";
117     else if(n%2==0||isPrime(n-2)) cout<<"2\n";
118     else cout<<"3\n";
119 }

```

6.2 快速幂

```

1 計算 a^b
2 #include<iostream>
3 #define ll long long
4 using namespace std;
5
6 const ll MOD=1000000007;
7 ll fp(ll a, ll b) {
8     int ans=1;
9     while(b>0){
10         if(b&1) ans=ans*a%MOD;
11         a=a*a%MOD;
12         b>>=1;
13     }
14     return ans;
15 }
16
17 int main() {
18     int a,b;
19     cin>>a>>b;
20     cout<<fp(a,b);
21 }

```

6.3 歐拉函數

```

1 //計算閉區間 [1,n] 中的正整數與 n 互質的個數
2
3 int phi(){
4     int ans=n;
5     for(int i=2;i*i<=n;i++){
6         if(n%i==0){
7             ans=ans-ans/i;
8             while(n%i==0) n/=i;
9         }
10    }
11    if(n>1) ans=ans-ans/n;
12    return ans;
13 }

```

6.4 atan

```

1 說明
2     atan() 和 atan2() 函數分別計算 x 和 y/x 的反正切。
3
4 回覆值
5     atan() 函數會傳回介於範圍 - /2 到 /2 弧度之間的值。
6     atan2() 函數會傳回介於 - 至 弧度之間的值。
7     如果 atan2() 函數的兩個引數都是零,
8     則函數會將 errno 設為 EDOM, 並傳回值 0。
9
10 範例
11 #include <math.h>
12 #include <stdio.h>
13
14 int main(void){
15     double a,b,c,d;
16
17     c=0.45;
18     d=0.23;
19
20     a=atan(c);
21     b=atan2(c,d);
22
23     printf("atan(%lf)=%lf\n",c,a);
24     printf("atan2(%lf,%lf)=%lf\n",c,d,b);
25 }
26
27 /*
28 atan(0.450000)=0.422854
29 atan2(0.450000,0.230000)=1.098299
30 */

```

6.5 大步小步

```

1 題意
2 給定 B,N,P, 求出 L 滿足 B^L ≡ N(mod P)。
3
4 題解
5 餘數的循環節長度必定為 P 的因數, 因此
6   B^0, B^1, B^2, ..., B^(P-1), ...
7 也就是說如果有解則 L<N, 枚舉 0,1,2,...,L-1
8 能得到結果, 但會超時。
9
10 將 L 拆成 mx+y, 只要分別枚舉 x,y 就能得到答案,
11 設 m=√P 能保證最多枚舉 2√P 次。
12
13 B^(mx+y) ≡ N(mod P)
14 B^(mx) B^y ≡ N(mod P)
15 B^y ≡ N(B^(-m))^x (mod P)
16
17 先求出 B^0, B^1, B^2, ..., B^(m-1),
18 再枚舉 N(B^(-m)), N(B^(-m))^2, ... 查看是否有對應的 B^y。
19 這種算法稱為大步小步演算法,
20 大步指的是枚舉 x (一次跨 m 步),
21 小步指的是枚舉 y (一次跨 1 步)。
22
23 複雜度分析
24 利用 map/unorder_map 存放 B^0, B^1, B^2, ..., B^(m-1),
25 枚舉 x 查詢 map/unorder_map 是否有對應的 B^y,
26 存放和查詢最多 2√P 次, 時間複雜度為 O(√P log √P)/O(√P)。
27
28 #include <bits/stdc++.h>
29 using namespace std;
30 using LL = long long;
31 LL B, N, P;
32
33 LL fpow(LL a, LL b, LL c){
34     LL res=1;

```

```

35     for(;b; b >= 1){
36         if(b&1)
37             res=(res*a)%c;
38         a=(a*a)%c;
39     }
40     return res;
41 }
42
43 LL BSGS(LL a, LL b, LL p){
44     a%=p, b%=p;
45     if(a==0)
46         return b==0?1:-1;
47     if(b==1)
48         return 0;
49     map<LL, LL> tb;
50     LL sq=ceil(sqrt(p-1));
51     LL inv=fpow(a, p-sq-1, p);
52     tb[1]=sq;
53     for(LL i=1, tmp=1; i<sq; ++i){
54         tmp=(tmp*a)%p;
55         if(!tb.count(tmp))
56             tb[tmp]=i;
57     }
58     for(LL i=0; i<sq; ++i){
59         if(tb.count(b)){
60             LL res=tb[b];
61             return i*sq+(res==sq?0:res);
62         }
63         b=(b*inv)%p;
64     }
65     return -1;
66 }
67
68 int main(){
69     ios::sync_with_stdio(false);
70     cin.tie(0), cout.tie(0);
71     while(cin>>P>>B>>N){
72         LL ans=BSGS(B, N, P);
73         if(ans!=-1)
74             cout<<"no solution\n";
75         else
76             cout<<ans<<"\n";
77     }
78 }

```

7 algorithm

7.1 basic

```

1 min_element: 找尋最小元素
2 min_element(first, last)
3 max_element: 找尋最大元素
4 max_element(first, last)
5 sort: 排序, 預設由小排到大。
6 sort(first, last)
7 sort(first, last, cmp): 可自行定義比較運算子 cmp。
8 find: 尋找元素。
9 find(first, last, val)
10 lower_bound: 尋找第一個小於 x 的元素位置,
11     如果不存在, 則回傳 last。
12 lower_bound(first, last, val)
13 upper_bound: 尋找第一個大於 x 的元素位置,
14     如果不存在, 則回傳 last。
15 upper_bound(first, last, val)
16 next_permutation: 將序列順序轉換成下一個字典序,
17     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
18 next_permutation(first, last)
19 prev_permutation: 將序列順序轉換成上一個字典序,
20     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
21 prev_permutation(first, last)

```

7.2 二分搜

```

1 int binary_search(int target) {
2     // For range [ok, ng) or (ng, ok], "ok" is for the
3     // index that target value exists, with "ng" doesn't.
4     int ok = maxn, ng = -1;
5     // For first lower_bound, ok=maxn and ng=-1,
6     // for last lower_bound, ok = -1 and ng = maxn
7     // (the "check" funtion
8     // should be changed depending on it.)
9     while(abs(ok - ng) > 1) {
10         int mid = (ok + ng) >> 1;
11         if(check(mid)) ok = mid;
12         else ng = mid;
13     }
14     // Be careful, "arr[mid]>=target" for first
15     // lower_bound and "arr[mid]<=target" for
16     // last lower_bound. For range (ng, ok],
17     // convert it into (ng, mid] and (mid, ok] than
18     // choose the first one, or convert [ok, ng) into
19     // [ok, mid) and [mid, ng) and then choose
20     // the second one.
21     return ok;
22 }
23
24 lower_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 ≥ k 的位置
25 upper_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 > k 的位置
26 upper_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 ≤ k 的位置
27 lower_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 < k 的位置
28 (lower_bound, upper_bound) //等於 k 的範圍
29 equal_range(arr, arr+n, k);

```

7.3 三分搜

```

1 題意
2 給定兩射線方向和速度, 問兩射線最近距離。
3
4 題解
5 假設 F(t) 為兩射線在時間 t 的距離, F(t) 為二次函數,
6 可用三分搜找二次函數最小值。
7
8 #include <bits/stdc++.h>
9 using namespace std;
10
11 struct Point{
12     double x, y, z;
13     Point() {}
14     Point(double _x, double _y, double _z):
15         x(_x), y(_y), z(_z){}
16     friend istream& operator>>(istream& is, Point& p)
17     {
18         is >> p.x >> p.y >> p.z;
19         return is;
20     }
21     Point operator+(const Point &rhs) const{
22         return Point(x+rhs.x, y+rhs.y, z+rhs.z);
23     }
24     Point operator-(const Point &rhs) const{
25         return Point(x-rhs.x, y-rhs.y, z-rhs.z);
26     }
27     Point operator*(const double &d) const{
28         return Point(x*d, y*d, z*d);
29     }
30     Point operator/(const double &d) const{
31         return Point(x/d, y/d, z/d);
32     }
33     double dist(const Point &rhs) const{
34         double res = 0;
35         res+=(x-rhs.x)*(x-rhs.x);
36         res+=(y-rhs.y)*(y-rhs.y);
37         res+=(z-rhs.z)*(z-rhs.z);
38         return res;
39     }
40 };

```



```

40
41 int main(){
42     ios::sync_with_stdio(false);
43     cin.tie(0),cout.tie(0);
44     int T;
45     cin>>T;
46     for(int ti=1;ti<=T;++ti){
47         double time;
48         Point x1,y1,d1,x2,y2,d2;
49         cin>>time>>x1>>y1>>x2>>y2;
50         d1=(y1-x1)/time;
51         d2=(y2-x2)/time;
52         double L=0,R=1e8,m1,m2,f1,f2;
53         double ans = x1.dist(x2);
54         while(abs(L-R)>1e-10){
55             m1=(L+R)/2;
56             m2=(m1+R)/2;
57             f1=((d1*m1)+x1).dist((d2*m1)+x2);
58             f2=((d1*m2)+x1).dist((d2*m2)+x2);
59             ans = min(ans,min(f1,f2));
60             if(f1<f2) R=m2;
61             else L=m1;
62         }
63         cout<<"Case "<<ti<<" : ";
64         cout<<fixed<<setprecision(4)<<sqrt(ans)<<"\n";
65     }
66 }

```

7.4 prefix sum

```

1 // 前綴和
2 陣列前n項的和。
3 b[i]=a[0]+a[1]+a[2]+ ... +a[i]
4 區間和 [l, r]: b[r]-b[l-1] (要保留b[l]所以-1)
5
6 #include<bits/stdc++.h>
7 using namespace std;
8 int main(){
9     int n;
10    cin>>n;
11    int a[n],b[n];
12    for(int i=0;i<n;i++) cin>>a[i];
13    b[0]=a[0];
14    for(int i=1;i<n;i++) b[i]=b[i-1]+a[i];
15    for(int i=0;i<n;i++) cout<<b[i]<<" ";
16    cout<<"\n";
17    int l,r;
18    cin>>l>>r;
19    cout<<b[r]-b[l-1]; //區間和
20 }

```

7.5 差分

```

1 // 差分
2 用途：在區間 [l, r] 加上一個數字v。
3 b[l] += v; (b[0~l] 加上v)
4 b[r+1] -= v; (b[r+1~n] 減去v (b[r] 仍保留v) )
5 給的 a[] 是前綴和數列，建構 b[]，
6 因為 a[i] = b[0] + b[1] + b[2] + ... + b[i]，
7 所以 b[i] = a[i] - a[i-1]。
8 在 b[l] 加上 v，b[r+1] 減去 v，
9 最後再從 0 跑到 n 使 b[i] += b[i-1]。
10 這樣一來，b[] 是一個在某區間加上v的前綴和。
11
12 #include <bits/stdc++.h>
13 using namespace std;
14 int a[1000], b[1000];
15 // a: 前綴和數列, b: 差分數列
16 int main(){
17     int n, l, r, v;
18     cin >> n;
19     for(int i=1; i<=n; i++){

```

```

20         cin >> a[i];
21         b[i] = a[i] - a[i-1]; //建構差分數列
22     }
23     cin >> l >> r >> v;
24     b[l] += v;
25     b[r+1] -= v;
26
27     for(int i=1; i<=n; i++){
28         b[i] += b[i-1];
29         cout << b[i] << " ";
30     }
31 }

```

7.6 greedy

1 //貪心
2 貪心演算法的核心為，
3 採取在目前狀態下最好或最佳（即最有利）的選擇。
4 貪心演算法雖然能獲得當前最佳解，
5 但不保證能獲得最後（全域）最佳解，
6 提出想法後可以先試圖尋找有沒有能推翻原本的想法的反例，
7 確認無誤再實作。

8
9 刪除數字問題

10 //problem
11 給定一個數字 $N(\leq 10^{100})$ ，需要刪除 K 個數字，
12 請問刪除 K 個數字後最小的數字為何？

13 //solution
14 刪除滿足第 i 位數大於第 i+1 位數的最左邊第 i 位數，
15 扣除高位數的影響較扣除低位數的大。

```

16 //code
17 int main(){
18     string s;
19     int k;
20     cin>>s>>k;
21     for(int i=0;i<k;++i){
22         if((int)s.size()==0) break;
23         int pos =(int)s.size()-1;
24         for(int j=0;j<(int)s.size()-1;++j){
25             if(s[j]>s[j+1]){
26                 pos=j;
27                 break;
28             }
29         }
30         s.erase(pos,1);
31     }
32     while((int)s.size()>0&&s[0]=='0')
33         s.erase(0,1);
34     if((int)s.size()) cout<<s<<"\n";
35     else cout<<0<<"\n";
36 }

```

37 最小區間覆蓋長度

38 //problem
39 給定 n 條線段區間為 [Li,Ri]，
40 請問最少要選幾個區間才能完全覆蓋 [0,S]?

41 //solution
42 先將所有區間依照左界由小到大排序，
43 對於當前區間 [Li,Ri]，要從左界 >Ri 的所有區間中，
44 找到有著最大的右界的區間，連接當前區間。

45 //problem
46 長度 n 的直線中有數個加熱器，
47 在 x 的加熱器可以讓 [x-r,x+r] 內的物品加熱，
48 問最少要幾個加熱器可以把 [0,n] 的範圍加熱。

49 //solution
50 對於最左邊沒加熱的點a，選擇最遠可以加熱a的加熱器，

59 更新已加熱範圍，重複上述動作繼續尋找加熱器。

```

60
61 //code
62 int main(){
63     int n, r;
64     int a[1005];
65     cin>>n>>r;
66     for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
67     int i=1,ans=0;
68     while(i<=n){
69         int R=min(i+r-1,n),L=max(i-r+1,0)
70         int nextR=-1;
71         for(int j=R;j>=L;--j){
72             if(a[j]){
73                 nextR=j;
74                 break;
75             }
76         }
77         if(nextR==-1){
78             ans=-1;
79             break;
80         }
81         ++ans;
82         i=nextR+r;
83     }
84     cout<<ans<<'\n';
85 }

```

86 最多不重疊區間

87 //problem

88 給你 n 條線段區間為 $[Li,Ri]$ ，

89 請問最多可以選擇幾條不重疊的線段(頭尾可相連)?

90 //solution

91 依照右界由小到大排序，

92 每次取到一個不重疊的線段，答案 +1。

```

93 //code
94 struct Line{
95     int L,R;
96     bool operator<(const Line &rhs)const{
97         return R<rhs.R;
98     }
99 };
100
101 int main(){
102     int t;
103     cin>>t;
104     Line a[30];
105     while(t--){
106         int n=0;
107         while(cin>>a[n].L>>a[n].R,a[n].L||a[n].R)
108             ++n;
109         sort(a,a+n);
110         int ans=1,R=a[0].R;
111         for(int i=1;i<n;i++){
112             if(a[i].L>=R){
113                 ++ans;
114                 R=a[i].R;
115             }
116         }
117         cout<<ans<<'\n';
118     }
119 }

```

120 最小化最大延遲問題

121 //problem

122 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，

123 期限是 D_i ，第 i 項工作延遲的時間為 $Li=\max(0,Fi-Di)$ ，

124 原本 Fi 為第 i 項工作的完成時間，

125 求一種工作排序使 $\max Li$ 最小。

126 //solution

127 按照到期時間從早到晚處理。

```

135
136 //code
137 struct Work{
138     int t, d;
139     bool operator<(const Work &rhs)const{
140         return d<rhs.d;
141     }
142 };
143
144 int main(){
145     int n;
146     Work a[10000];
147     cin>>n;
148     for(int i=0;i<n;++i)
149         cin>>a[i].t>>a[i].d;
150     sort(a,a+n);
151     int maxL=0,sumT=0;
152     for(int i=0;i<n;++i){
153         sumT+=a[i].t;
154         maxL=max(maxL,sumT-a[i].d);
155     }
156     cout<<maxL<<'\n';
157 }

```

158 最少延遲數量問題

159 //problem

160 給定 N 個工作，每個工作的需要處理時長為 T_i ，

161 期限是 D_i ，求一種工作排序使得逾期工作數量最小。

162 //solution

163 期限越早到期的工作越先做。將工作依照到期時間從早到晚排序，

164 依序放入工作列表中，如果發現有工作預期，

165 就從目前選擇的工作中，移除耗時最長的工作。

166 上述方法為 Moore-Hodgson's Algorithm。

167 //problem

168 給定烏龜的重量和可承受重量，問最多可以疊幾隻烏龜？

169 //solution

170 和最少延遲數量問題是相同的問題，只要將題敘做轉換。

171 工作處理時長 → 烏龜重量

172 工作期限 → 烏龜可承受重量

173 多少工作不延期 → 可以疊幾隻烏龜

```

174 //code
175 struct Work{
176     int t, d;
177     bool operator<(const Work &rhs)const{
178         return d<rhs.d;
179     }
180 };
181
182 int main(){
183     int n=0;
184     Work a[10000];
185     priority_queue<int> pq;
186     while(cin>>a[n].t>>a[n].d)
187         ++n;
188     sort(a,a+n);
189     int sumT=0,ans=n;
190     for(int i=0;i<n;++i){
191         pq.push(a[i].t);
192         sumT+=a[i].t;
193         if(a[i].d<sumT){
194             int x=pq.top();
195             pq.pop();
196             sumT-=x;
197             --ans;
198         }
199     }
200     cout<<ans<<'\n';
201 }

```

202 任務調度問題

211 //problem
 212 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
 213 期限是 D_i ，如果第 i 項工作延遲需要受到 p_i 單位懲罰，
 214 請問最少會受到多少單位懲罰。

215 //solution
 216 依照懲罰由大到小排序，
 217 每項工作依序嘗試可不可以放在 $D_i - T_i + 1, D_i - T_i, \dots, 1, 0$ ，
 218 如果有空閒就放進去，否則延後執行。

221 //problem
 222 給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
 223 期限是 D_i ，如果第 i 項工作在期限內完成會獲得 a_i
 224 單位獎勵，
 225 請問最多會獲得多少單位獎勵。

226 //solution
 227 和上題相似，這題變成依照獎勵由大到小排序。

228 //code
 229 struct Work{
 230 int d,p;
 231 bool operator<(const Work &rhs)const{
 232 return p>rhs.p;
 233 }
 234 };
 235
 236 int main(){
 237 int n;
 238 Work a[100005];
 239 bitset<100005> ok;
 240 while(cin>>n){
 241 ok.reset();
 242 for(int i=0;i<n;++i)
 243 cin>>a[i].d>>a[i].p;
 244 sort(a,a+n);
 245 int ans=0;
 246 for(int i=0;i<n;++i){
 247 int j=a[i].d;
 248 while(j--)
 249 if(!ok[j]){
 250 ans+=a[i].p;
 251 ok[j]=true;
 252 break;
 253 }
 254 }
 255 }
 256 cout<<ans<<"\n";
 257 }
 258 }

7.7 floyd warshall

1 int w[n][n];
 2 int d[n][n];
 3 int p[n][n];
 4 // 由 i 點到 j 點的路徑，其中繼點為 $p[i][j]$ 。
 5
 6 void floyd_warshall(){ //O(V^3)
 7 for(int i=0;i<n;i++)
 8 for(int j=0;j<n;j++){
 9 d[i][j]=w[i][j];
 10 p[i][j]=-1; // 預設為沒有中繼點
 11 }
 12 for(int i=0;i<n;i++) d[i][i]=0;
 13 for(int k=0;k<n;k++)
 14 for(int i=0;i<n;i++)
 15 for(int j=0;j<n;j++){
 16 if(d[i][k]+d[k][j]<d[i][j]){
 17 d[i][j]=d[i][k]+d[k][j];
 18 p[i][j]=k; // 由 i 點走到 j 點經過了 k 點
 19 }
 20 }
 21 }
 22 // 這支函式並不會印出起點和終點，必須另行印出。

23 void find_path(int s,int t){ // 印出最短路徑
 24 if(p[s][t]==-1) return; // 沒有中繼點就結束
 25 find_path(s,p[s][t]); // 前半段最短路徑
 26 cout<<p[s][t]; // 中繼點
 27 find_path(p[s][t],t); // 後半段最短路徑
 28 }

7.8 dinic

1 const int maxn = 1e5 + 10;
 2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
 3
 4 struct Edge {
 5 int s, t, cap, flow;
 6 };
 7
 8 int n, m, S, T;
 9 int level[maxn], dfs_idx[maxn];
 10 vector<Edge> E;
 11 vector<vector<int>> G;
 12
 13 void init() {
 14 S = 0;
 15 T = n + m;
 16 E.clear();
 17 G.assign(maxn, vector<int>());
 18 }
 19
 20 void addEdge(int s, int t, int cap) {
 21 E.push_back({s, t, cap, 0});
 22 E.push_back({t, s, 0, 0});
 23 G[s].push_back(E.size()-2);
 24 G[t].push_back(E.size()-1);
 25 }
 26
 27 bool bfs() {
 28 queue<int> q({S});
 29
 30 memset(level, -1, sizeof(level));
 31 level[S] = 0;
 32
 33 while(!q.empty()) {
 34 int cur = q.front();
 35 q.pop();
 36
 37 for(int i : G[cur]) {
 38 Edge e = E[i];
 39 if(level[e.t]==-1 && e.cap>e.flow) {
 40 level[e.t] = level[e.s] + 1;
 41 q.push(e.t);
 42 }
 43 }
 44 }
 45 return level[T];
 46 }
 47
 48 int dfs(int cur, int lim) {
 49 if(cur==T || lim==0) return lim;
 50
 51 int result = 0;
 52 for(int& i=dfs_idx[cur]; i<G[cur].size() && lim;
 53 i++) {
 54 Edge& e = E[G[cur][i]];
 55 if(level[e.s]+1 != level[e.t]) continue;
 56
 57 int flow = dfs(e.t, min(lim, e.cap-e.flow));
 58 if(flow <= 0) continue;
 59
 60 e.flow += flow;
 61 result += flow;
 62 E[G[cur][i]^1].flow -= flow;
 63 lim -= flow;
 64 }
 65 return result;
 66 }

```

66
67 int dinic() {          // O((V^2)E)
68     int result = 0;
69     while(bfs()) {
70         memset(dfs_idx, 0, sizeof(dfs_idx));
71         result += dfs(S, inf);
72     }
73     return result;
74 }

```

7.9 SegmentTree

```

1 #define MAXN 1000
2 int data[MAXN]; //原數據
3 int st[4 * MAXN]; //線段樹
4 int tag[4 * MAXN]; //懶標
5
6 inline int pull(int l, int r) {
7     // 隨題目改變sum、max、min
8     // l、r是左右樹的index
9     return st[l] + st[r];
10 }
11
12 void build(int l, int r, int i) {
13     // 在[l, r]區間建樹，目前根的index為i
14     if (l == r) {
15         st[i] = data[l];
16         return;
17     }
18     int mid = l + ((r - l) >> 1);
19     build(l, mid, i * 2);
20     build(mid + 1, r, i * 2 + 1);
21     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
22 }
23
24 int query(int ql, int qr, int l, int r, int i) {
25     // [ql, qr]是查詢區間,[l, r]是當前節點包含的區間
26     if (ql <= l && r <= qr)
27         return st[i];
28     int mid = l + ((r - l) >> 1);
29     if (tag[i]) {
30         //如果當前懶標有值則更新左右節點
31         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
32         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
33         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
34         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
35         tag[i] = 0;
36     }
37     int sum = 0;
38     if (ql <= mid)
39         sum += query(ql, qr, l, mid, i * 2);
40     if (qr > mid)
41         sum += query(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1);
42     return sum;
43 }
44
45 void update(int ql, int qr, int l, int r, int i, int c) {
46     // [ql, qr]是查詢區間,[l, r]是當前節點包含的區間
47     // c是變化量
48     if (ql <= l && r <= qr) {
49         st[i] += (r - l + 1) * c;
50         //求和,此需乘上區間長度
51         tag[i] += c;
52         return;
53     }
54     int mid = l + ((r - l) >> 1);
55     if (tag[i] && l != r) {
56         //如果當前懶標有值則更新左右節點
57         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
58         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
59         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
60         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
61         tag[i] = 0;
62     }

```

```

62     if (ql <= mid) update(ql, qr, l, mid, i * 2, c);
63     if (qr > mid) update(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1, c);
64     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
65 }
66 //如果是直接改值而不是加值，query與update中的tag與st的
67 //改值從+=改成=

```

7.10 Nim Game

```

1 //兩人輪流取銅板，每人每次需在某堆取一枚以上的銅板，
2 //但不能同時在兩堆取銅板，直到最後，
3 //將銅板拿光的人贏得此遊戲。
4
5 #include <bits/stdc++.h>
6 #define maxn 23+5
7 using namespace std;
8
9 int SG[maxn];
10 int visited[1000+5];
11 int pile[maxn], ans;
12
13 void calculateSG(){
14     SG[0]=0;
15     for(int i=1;i<=maxn;i++){
16         int cur=0;
17         for(int j=0;j<i;j++){
18             for(int k=0;k<=j;k++){
19                 visited[SG[j]^SG[k]]=i;
20             }
21             while(visited[cur]==i) cur++;
22             SG[i]=cur;
23         }
24     }
25
26 int main(){
27     calculateSG();
28     int Case=0,n;
29     while(cin>>n,n){
30         ans=0;
31         for(int i=1;i<=n;i++) cin>>pile[i];
32         for(int i=1;i<=n;i++){
33             if(pile[i]&1) ans^=SG[n-i];
34             cout<<"Game "<<Case<<": ";
35             if(!ans) cout<<"-1 -1 -1\n";
36             else{
37                 bool flag=0;
38                 for(int i=1;i<=n;i++){
39                     if(pile[i]){
40                         for(int j=i+1;j<=n;j++){
41                             for(int k=j;k<=n;k++){
42                                 if((SG[n-i]^SG[n-j]^SG[n-k])==ans){
43                                     cout<<i-1<<" "<<j-1<<" "<<k-1<<endl;
44                                     flag=1;
45                                     break;
46                                 }
47                             }
48                             if(flag) break;
49                         }
50                     }
51                     if(flag) break;
52                 }
53             }
54             return 0;
55         }
56     }
57     /*
58     input
59     4 1 0 1 100
60     3 1 0 5
61     2 2 1
62     0
63     output
64     Game 1: 0 2 3
65     Game 2: 0 1 1
66     Game 3: -1 -1 -1

```

67 */

7.11 Trie

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 const int maxn = 300000 + 10;
5 const int mod = 20071027;
6
7 int dp[maxn];
8 int mp[4000*100 + 10][26];
9 char str[maxn];
10
11 struct Trie {
12     int seq;
13     int val[maxn];
14
15     Trie() {
16         seq = 0;
17         memset(val, 0, sizeof(val));
18         memset(mp, 0, sizeof(mp));
19     }
20
21     void insert(char* s, int len) {
22         int r = 0;
23         for(int i=0; i<len; i++) {
24             int c = s[i] - 'a';
25             if(!mp[r][c]) mp[r][c] = ++seq;
26             r = mp[r][c];
27         }
28         val[r] = len;
29         return;
30     }
31
32     int find(int idx, int len) {
33         int result = 0;
34         for(int r=0; idx<len; idx++) {
35             int c = str[idx] - 'a';
36             if(!(r = mp[r][c])) return result;
37             if(val[r])
38                 result = (result + dp[idx + 1]) % mod;
39         }
40         return result;
41     }
42 };
43
44 int main() {
45     int n, tc = 1;
46
47     while(~scanf("%s%d", str, &n)) {
48         Trie tr;
49         int len = strlen(str);
50         char word[100+10];
51
52         memset(dp, 0, sizeof(dp));
53         dp[len] = 1;
54
55         while(n--) {
56             scanf("%s", word);
57             tr.insert(word, strlen(word));
58         }
59
60         for(int i=len-1; i>=0; i--)
61             dp[i] = tr.find(i, len);
62         printf("Case %d: %d\n", tc++, dp[0]);
63     }
64     return 0;
65 }
66
67 /*****
68 ****Input****
69 * abcd
70 * 4
71 * a b cd ab
72 ****

```

73 ****Output***

74 * Case 1: 2

75 ****

76 */

7.12 SPFA

```

1 struct Edge
2 {
3     int t;
4     long long w;
5     Edge(){};
6     Edge(int _t, long long _w) : t(_t), w(_w) {}
7 };
8
9 bool SPFA(int st) // 平均O(V + E) 最糟O(VE)
10 {
11     vector<int> cnt(n, 0);
12     bitset<MXV> inq(0);
13     queue<int> q;
14     q.push(st);
15     dis[st] = 0;
16     inq[st] = true;
17     while (!q.empty())
18     {
19         int cur = q.front();
20         q.pop();
21         inq[cur] = false;
22         for (auto &e : G[cur])
23         {
24             if (dis[e.t] <= dis[cur] + e.w)
25                 continue;
26             dis[e.t] = dis[cur] + e.w;
27             if (inq[e.t])
28                 continue;
29             ++cnt[e.t];
30             if (cnt[e.t] > n)
31                 return false; // negative cycle
32             inq[e.t] = true;
33             q.push(e.t);
34         }
35     }
36     return true;
37 }

```

7.13 dijkstra

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define maxn 50000+5
3 #define INF 0x3f3f3f3f
4 using namespace std;
5
6 struct edge{
7     int v,w;
8 };
9
10 struct Item{
11     int u,dis;
12     bool operator< (const Item &rhs) const{
13         return dis>rhs.dis;
14     }
15 };
16
17 vector<edge> G[maxn];
18 int dist[maxn];
19
20 void dijkstra(int s){ // O((V + E)log(E))
21     memset(dist,INF,sizeof(dist));
22     dist[s]=0;
23     priority_queue<Item> pq;
24     pq.push({s,0});
25     while(!pq.empty()){
26         Item now=pq.top();

```

```

27     pq.pop();
28     if(now.dis>dist[now.u]) continue;
29     for(edge e:G[now.u]){
30         if(dist[e.v]>dist[now.u]+e.w){
31             dist[e.v]=dist[now.u]+e.w;
32             pq.push({e.v,dist[e.v]});
33         }
34     }
35 }
36 }
37
38 int main(){
39     int t,cas=1;
40     cin>>t;
41     while(t--){
42         int n,m,s,t;
43         cin>>n>>m>>s>>t;
44         for(int i=0;i<=n;i++) G[i].clear();
45         int u,v,w;
46         for(int i=0;i<m;i++){
47             cin>>u>>v>>w;
48             G[u].push_back({v,w});
49             G[v].push_back({u,w});
50         }
51         dijkstra(s);
52         cout<<"Case #"<<cas++<<" ";
53         if(dist[t]==INF) cout<<"unreachable\n";
54         else cout<<dist[t]<<endl;
55     }
56 }

```

7.14 SCC Tarjan

```

1 //Strongly Connected Components
2 //Tarjan O(V + E)
3 int dfn[N], low[N], dfncnt, sk[N], in_stack[N], tp;
4 //dfn[u]: dfs時u被visited的順序
5 //low[u]: 在u的dfs子樹中能回到最早已在stack中的節點
6 int scc[N], sc;//節點 u 所在 SCC 的編號
7 int sz[N];//強連通 u 的大小
8
9 void tarjan(int u) {
10     low[u] = dfn[u] = ++dfncnt, s[++tp] = u,
11     in_stack[u] = 1;
12     for (int i = h[u]; i; i = e[i].nex) {
13         const int &v = e[i].t;
14         if (!dfn[v]) {
15             tarjan(v);
16             low[u] = min(low[u], low[v]);
17         } else if (in_stack[v]) {
18             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
19         }
20     }
21     if (dfn[u] == low[u]) {
22         ++sc;
23         while (s[tp] != u) {
24             scc[s[tp]] = sc;
25             sz[sc]++;
26             in_stack[s[tp]] = 0;
27             --tp;
28         }
29         scc[s[tp]] = sc;
30         sz[sc]++;
31         in_stack[s[tp]] = 0;
32         --tp;
33     }
34 }

```

7.15 SCC Kosaraju

```

1 //做兩次dfs, O(V + E)
2 //g 是原圖, g2 是反圖
3 //s是dfs離開的節點

```

```

4 void dfs1(int u) {
5     vis[u] = true;
6     for (int v : g[u])
7         if (!vis[v]) dfs1(v);
8     s.push_back(u);
9 }
10
11 void dfs2(int u) {
12     group[u] = sccCnt;
13     for (int v : g2[u])
14         if (!group[v]) dfs2(v);
15 }
16
17 void kosaraju() {
18     sccCnt = 0;
19     for (int i = 1; i <= n; ++i)
20         if (!vis[i]) dfs1(i);
21     for (int i = n; i >= 1; --i)
22         if (!group[s[i]]) {
23             ++sccCnt;
24             dfs2(s[i]);
25         }
26 }

```

7.16 ArticulationPoints Tarjan

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 vector<vector<int>>> G;
5 int N;
6 int timer;
7 bool visited[105];
8 int visTime[105]; // 第一次visit的時間
9 int low[105];
10 // 最小能回到的父節點(不能是自己的parent)的visTime
11 int res;
12 //求割點數量
13 void tarjan(int u, int parent) {
14     int child = 0;
15     bool isCut = false;
16     visited[u] = true;
17     visTime[u] = low[u] = ++timer;
18     for (int v: G[u]) {
19         if (!visited[v]) {
20             ++child;
21             tarjan(v, u);
22             low[u] = min(low[u], low[v]);
23             if (parent != -1 && low[v] >= visTime[u])
24                 isCut = true;
25         }
26         else if (v != parent)
27             low[u] = min(low[u], visTime[v]);
28     }
29     //If u is root of DFS tree->有兩個以上的children
30     if (parent == -1 && child >= 2)
31         isCut = true;
32     if (isCut)
33         ++res;
34 }
35
36 int main()
37 {
38     char input[105];
39     char* token;
40     while (scanf("%d", &N) != EOF && N)
41     {
42         G.assign(105, vector<int>());
43         memset(visited, false, sizeof(visited));
44         memset(low, 0, sizeof(low));
45         memset(visTime, 0, sizeof(visTime));
46         timer = 0;
47         res = 0;
48         getchar(); // for \n
49         while (fgets(input, 105, stdin))

```

```

50 {
51     if (input[0] == '0')
52         break;
53     int size = strlen(input);
54     input[size - 1] = '\0';
55     --size;
56     token = strtok(input, " ");
57     int u = atoi(token);
58     int v;
59     while (token = strtok(NULL, " "))
60     {
61         v = atoi(token);
62         G[u].emplace_back(v);
63         G[v].emplace_back(u);
64     }
65 }
66 tarjan(1, -1);
67 printf("%d\n", res);
68 }
69 return 0;
70 }

```

7.17 最小樹狀圖

```

1  定義
2  有向圖上的最小生成樹 (Directed Minimum Spanning Tree)
3  稱為最小樹形圖。
4
5  const int maxn = 60 + 10;
6  const int inf = 0x3f3f3f3f;
7
8  struct Edge {
9      int s, t, cap, cost;
10 }; // cap 為頻寬 (optional)
11
12 int n, m, c;
13 int inEdge[maxn], idx[maxn], pre[maxn], vis[maxn];
14
15 // 對於每個點，選擇對它入度最小的那條邊
16 // 找環，如果沒有則 return;
17 // 進行縮環並更新其他點到環的距離。
18 int dirMST(vector<Edge> edges, int low) {
19     int result = 0, root = 0, N = n;
20
21     while(true) {
22         memset(inEdge, 0x3f, sizeof(inEdge));
23
24         // 找所有點的 in edge 放進 inEdge
25         // optional: low 為最小 cap 限制
26         for(const Edge& e : edges) {
27             if(e.cap < low) continue;
28             if(e.s!=e.t && e.cost<inEdge[e.t]) {
29                 inEdge[e.t] = e.cost;
30                 pre[e.t] = e.s;
31             }
32         }
33
34         for(int i=0; i<N; i++) {
35             if(i!=root && inEdge[i]==inf)
36                 return -1; //除了 root 還有點沒有 in edge
37         }
38
39         int seq = inEdge[root] = 0;
40         memset(idx, -1, sizeof(idx));
41         memset(vis, -1, sizeof(vis));
42
43         // 找所有的 cycle，一起編號為 seq
44         for(int i=0; i<N; i++) {
45             result += inEdge[i];
46             int cur = i;
47             while(vis[cur]!=i && idx[cur]==-1) {
48                 if(cur == root) break;
49                 vis[cur] = i;
50                 cur = pre[cur];

```

```

51     }
52     if(cur!=root && idx[cur]==-1) {
53         for(int j=pre[cur]; j!=cur; j=pre[j])
54             idx[j] = seq;
55         idx[cur] = seq++;
56     }
57 }
58
59 if(seq == 0) return result; // 沒有 cycle
60
61 for(int i=0; i<N; i++)
62     // 沒有被縮點的點
63     if(idx[i] == -1) idx[i] = seq++;
64
65 // 縮點並重新編號
66 for(Edge& e : edges) {
67     if(idx[e.s] != idx[e.t])
68         e.cost -= inEdge[e.t];
69     e.s = idx[e.s];
70     e.t = idx[e.t];
71 }
72 N = seq;
73 root = idx[root];
74 }
75 }
76
77 =====
78
79 Tarjan 的DMST 演算法
80 Tarjan 提出了一種能夠在
81 O(m+nlog n)時間內解決最小樹形圖問題的演算法。
82
83 流程
84 Tarjan 的演算法分為收縮與伸展兩個過程。
85 接下來先介紹收縮的過程。
86 我們要假設輸入的圖是滿足強連通的，
87 如果不滿足那就加入 O(n) 條邊使其滿足，
88 並且這些邊的邊權是無窮大的。
89
90 我們需要一個堆存儲結點的入邊編號，入邊權值，
91 結點總代價等相關信息，由於後續過程中會有堆的合併操作，
92 這裡採用左偏樹 與並查集實現。
93 演算法的每一步都選擇一個任意結點v，
94 需要保證v不是根節點，並且在堆中沒有它的入邊。
95 再將v的最小入邊加入到堆中，
96 如果新加入的這條邊使堆中的邊形成了環，
97 那麼將構成環的那些結點收縮，
98 我們不妨將這些已經收縮的結點命名為超級結點，
99 再繼續這個過程，如果所有的頂點都縮成了超級結點，
100 那麼收縮過程就結束了。
101 整個收縮過程結束後會得到一棵收縮樹，
102 之後就會對它進行伸展操作。
103
104 堆中的邊總是會形成一條路徑v0 <- v1<- ... <- vk，
105 由於圖是強連通的，這個路徑必然存在，
106 並且其中的 vi 可能是最初的單一結點，
107 也可能是壓縮後的超級結點。
108
109 最初有 v0=a，其中 a 是圖中任意的一個結點，
110 每次都選擇一條最小入邊 vk <- u，
111 如果 u 不是v0,v1,...,vk中的一個結點，
112 那麼就將結點擴展到 v k+1=u。
113 如果 u 是他們其中的一個結點 vi，
114 那麼就找到了一個關於 vi <- ... <- vk <- vi的環，
115 再將他們收縮為一個超級結點c。
116
117 向隊列 P 中放入所有的結點或超級結點，
118 並初始選擇任一節點 a，只要佇列不為空，就進行以下步驟：
119
120 選擇 a 的最小入邊，保證不存在自環，
121 並找到另一頭的結點 b。
122 如果結點b沒有被記錄過說明未形成環，
123 令 a <- b，繼續目前操作尋找環。

```

```

124 如果 b 被記錄過了，就表示出現了環。
125 總結點數加一，並將環上的所有結點重新編號，對堆進行合併，
126 以及結點/超級結點的總權值的更新。
127 更新權值操作就是將環上所有結點的入邊都收集起來，
128 並減去環上入邊的邊權。
129
130 typedef long long ll;
131 #define maxn 102
132 #define INF 0x3f3f3f3f
133
134 struct UnionFind {
135     int fa[maxn << 1];
136     UnionFind() { memset(fa, 0, sizeof(fa)); }
137     void clear(int n) {
138         memset(fa + 1, 0, sizeof(int) * n);
139     }
140     int find(int x) {
141         return fa[x] ? fa[x] = find(fa[x]) : x;
142     }
143     int operator[](int x) { return find(x); }
144 };
145
146 struct Edge {
147     int u, v, w, w0;
148 };
149
150 struct Heap {
151     Edge *e;
152     int rk, constant;
153     Heap *lch, *rch;
154
155     Heap(Edge *_e):
156         e(_e), rk(1), constant(0), lch(NULL), rch(NULL){}
157
158     void push() {
159         if (lch) lch->constant += constant;
160         if (rch) rch->constant += constant;
161         e->w += constant;
162         constant = 0;
163     }
164 };
165
166 Heap *merge(Heap *x, Heap *y) {
167     if (!x) return y;
168     if (!y) return x;
169     if (x->e->w + x->constant > y->e->w + y->constant)
170         swap(x, y);
171     x->push();
172     x->rch = merge(x->rch, y);
173     if (!x->lch || x->lch->rk < x->rch->rk)
174         swap(x->lch, x->rch);
175     if (x->rch)
176         x->rk = x->rch->rk + 1;
177     else
178         x->rk = 1;
179     return x;
180 }
181
182 Edge *extract(Heap *&x) {
183     Edge *r = x->e;
184     x->push();
185     x = merge(x->lch, x->rch);
186     return r;
187 }
188
189 vector<Edge> in[maxn];
190 int n, m, fa[maxn << 1], nxt[maxn << 1];
191 Edge *ed[maxn << 1];
192 Heap *Q[maxn << 1];
193 UnionFind id;
194
195 void contract() {
196     bool mark[maxn << 1];
197     //將圖上的每一個節點與其相連的那些節點進行記錄
198     for (int i = 1; i <= n; i++) {
199         queue<Heap *> q;

```

```

200         for (int j = 0; j < in[i].size(); j++)
201             q.push(new Heap(&in[i][j]));
202         while (q.size() > 1) {
203             Heap *u = q.front();
204             q.pop();
205             Heap *v = q.front();
206             q.pop();
207             q.push(merge(u, v));
208         }
209         Q[i] = q.front();
210     }
211     mark[1] = true;
212     for(int a=1,b=1,p;Q[a];b=a,mark[b]=true){
213         //尋找最小入邊以及其端點，保證無環
214         do {
215             ed[a] = extract(Q[a]);
216             a = id[ed[a]->u];
217         } while (a == b && Q[a]);
218         if (a == b) break;
219         if (!mark[a]) continue;
220         //對發現的環進行收縮，以及環內的節點重新編號，
221         //總權值更新
222         for (a = b, n++; a != n; a = p) {
223             id.fa[a] = fa[a] = n;
224             if (Q[a]) Q[a]->constant -= ed[a]->w;
225             Q[n] = merge(Q[n], Q[a]);
226             p = id[ed[a]->u];
227             nxt[p == n ? b : p] = a;
228         }
229     }
230 }
231
232 ll expand(int x, int r);
233 ll expand_iter(int x) {
234     ll r = 0;
235     for(int u=nxt[x];u!=x;u=nxt[u]){
236         if (ed[u]->w0 >= INF)
237             return INF;
238         else
239             r+=expand(ed[u]->v,u)+ed[u]->w0;
240     }
241     return r;
242 }
243
244 ll expand(int x, int t) {
245     ll r = 0;
246     for (; x != t; x = fa[x]) {
247         r += expand_iter(x);
248         if (r >= INF) return INF;
249     }
250     return r;
251 }
252
253 void link(int u, int v, int w) {
254     in[v].push_back({u, v, w, w});
255 }
256
257 int main() {
258     int rt;
259     scanf("%d %d %d", &n, &m, &rt);
260     for (int i = 0; i < m; i++) {
261         int u, v, w;
262         scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);
263         link(u, v, w);
264     }
265     //保證強連通
266     for (int i = 1; i <= n; i++)
267         link(i > 1 ? i - 1 : n, i, INF);
268     contract();
269     ll ans = expand(rt, n);
270     if (ans >= INF)
271         puts("-1");
272     else
273         printf("%lld\n", ans);
274     return 0;
275 }
276

```


8 geometry

8.1 intersection

```

1 using LL = long long;
2
3 struct Point2D {
4     LL x, y;
5 };
6
7 struct Line2D {
8     Point2D s, e;
9     LL a, b, c; // L: ax + by = c
10    Line2D(Point2D s, Point2D e): s(s), e(e) {
11        a = e.y - s.y;
12        b = s.x - e.x;
13        c = a * s.x + b * s.y;
14    }
15 };
16
17 // 用克拉馬公式求二元一次解
18 Point2D intersection2D(Line2D l1, Line2D l2) {
19     LL D = l1.a * l2.b - l2.a * l1.b;
20     LL Dx = l1.c * l2.b - l2.c * l1.b;
21     LL Dy = l1.a * l2.c - l2.a * l1.c;
22
23     if(D) { // intersection
24         double x = 1.0 * Dx / D;
25         double y = 1.0 * Dy / D;
26     } else {
27         if(Dx || Dy) // Parallel lines
28             else // Same line
29     }
30 }

```

8.2 半平面相交

```

1 // Q: 給定一張凸包(已排序的點),
2 // 找出圖中離凸包外最遠的距離
3
4 const int maxn = 100 + 10;
5 const double eps = 1e-7;
6
7 struct Vector {
8     double x, y;
9     Vector(double x=0.0, double y=0.0): x(x), y(y) {}
10
11    Vector operator+(Vector v) {
12        return Vector(x+v.x, y+v.y);
13    }
14    Vector operator-(Vector v) {
15        return Vector(x-v.x, y-v.y);
16    }
17    Vector operator*(double val) {
18        return Vector(x*val, y*val);
19    }
20    double dot(Vector v) { return x*v.x + y*v.y; }
21    double cross(Vector v) { return x*v.y - y*v.x; }
22    double length() { return sqrt(dot(*this)); }
23    Vector unit_normal_vector() {
24        double len = length();
25        return Vector(-y/len, x/len);
26    }
27 };
28
29 using Point = Vector;
30
31 struct Line {
32     Point p;
33     Vector v;
34     double ang;
35     Line(Point p={}, Vector v={}): p(p), v(v) {
36         ang = atan2(v.y, v.x);
37     }

```

```

38    bool operator<(const Line& l) const {
39        return ang < l.ang;
40    }
41    Point intersection(Line l) {
42        Vector u = p - l.p;
43        double t = l.v.cross(u) / v.cross(l.v);
44        return p + v*t;
45    }
46 };
47
48 int n, m;
49 Line narrow[maxn]; // 要判斷的直線
50 Point poly[maxn]; // 能形成半平面交的凸包邊界點
51
52 // return true if point p is on the left of line l
53 bool onLeft(Point p, Line l) {
54     return l.v.cross(p-l.p) > 0;
55 }
56
57 int halfplaneIntersection() {
58     int l, r;
59     Line L[maxn]; // 排序後的向量隊列
60     Point P[maxn]; // s[i] 跟 s[i-1] 的交點
61
62     L[l=r=0] = narrow[0]; // notice: narrow is sorted
63     for(int i=1; i<n; i++) {
64         while(l<r && !onLeft(P[r-1], narrow[i])) r--;
65         while(l<r && !onLeft(P[l], narrow[i])) l++;
66
67         L[++r] = narrow[i];
68         if(l < r) P[r-1] = L[r-1].intersection(L[r]);
69     }
70
71     while(l<r && !onLeft(P[r-1], L[l])) r--;
72     if(r-l <= 1) return 0;
73
74     P[r] = L[r].intersection(L[l]);
75
76     int m=0;
77     for(int i=1; i<=r; i++) {
78         poly[m++] = P[i];
79     }
80
81     return m;
82 }
83
84 Point pt[maxn];
85 Vector vec[maxn];
86 Vector normal[maxn]; // normal[i] = vec[i] 的單位法向量
87
88 double bsearch(double l=0.0, double r=1e4) {
89     if(abs(r-l) < 1e-7) return l;
90
91     double mid = (l + r) / 2;
92
93     for(int i=0; i<n; i++) {
94         narrow[i] = Line(pt[i]+normal[i]*mid, vec[i]);
95     }
96
97     if(halfplaneIntersection())
98         return bsearch(mid, r);
99     else return bsearch(l, mid);
100 }
101
102 int main() {
103     while(~scanf("%d", &n) && n) {
104         for(int i=0; i<n; i++) {
105             double x, y;
106             scanf("%lf%lf", &x, &y);
107             pt[i] = {x, y};
108         }
109         for(int i=0; i<n; i++) {
110             vec[i] = pt[(i+1)%n] - pt[i];
111             normal[i] = vec[i].unit_normal_vector();
112         }
113
114         printf("%.6lf\n", bsearch());

```

```

115     }
116     return 0;
117 }

```

8.3 凸包

```

1 // q: 平面上給定多個區域，由多個座標點所形成，再給定
2 // 多點(x,y)，判斷有落點的區域(destroyed)的面積總和。
3 #include <bits/stdc++.h>
4 using namespace std;
5
6 const int maxn = 500 + 10;
7 const int maxCoordinate = 500 + 10;
8
9 struct Point {
10     int x, y;
11 };
12
13 int n;
14 bool destroyed[maxn];
15 Point arr[maxn];
16 vector<Point> polygons[maxn];
17
18 void scanAndSortPoints() {
19     int minX = maxCoordinate, minY = maxCoordinate;
20     for(int i=0; i<n; i++) {
21         int x, y;
22         scanf("%d%d", &x, &y);
23         arr[i] = (Point){x, y};
24         if(y < minY || (y == minY && x < minX)) {
25             // If there are floating points, use:
26             // if(y<minY || (abs(y-minY)<eps && x<minX)) {
27                 minX = x, minY = y;
28             }
29         }
30     }
31     sort(arr, arr+n, [minX, minY](Point& a, Point& b){
32         double theta1 = atan2(a.y - minY, a.x - minX);
33         double theta2 = atan2(b.y - minY, b.x - minX);
34         return theta1 < theta2;
35     });
36     return;
37 }
38
39 // returns cross product of u(AB) x v(AC)
40 int cross(Point& A, Point& B, Point& C) {
41     int u[2] = {B.x - A.x, B.y - A.y};
42     int v[2] = {C.x - A.x, C.y - A.y};
43     return (u[0] * v[1]) - (u[1] * v[0]);
44 }
45
46 // size of arr = n >= 3
47 // st = the stack using vector, m = index of the top
48 vector<Point> convex_hull() {
49     vector<Point> st(arr, arr+3);
50     for(int i=3, m=2; i<n; i++, m++) {
51         while(m >= 2) {
52             if(cross(st[m], st[m-1], arr[i]) < 0)
53                 break;
54             st.pop_back();
55             m--;
56         }
57         st.push_back(arr[i]);
58     }
59     return st;
60 }
61
62 bool inPolygon(vector<Point>& vec, Point p) {
63     vec.push_back(vec[0]);
64     for(int i=1; i<vec.size(); i++) {
65         if(cross(vec[i-1], vec[i], p) < 0) {
66             return false;
67         }
68     }
69     vec.pop_back();

```

```

70     return true;
71 }
72
73     1 | x1    x2    x3    x4    x5            xn |
74     A = - | x      x      x      x      x ... x |
75           2 | y1    y2    y3    y4    y5            yn |
76 double calculateArea(vector<Point>& v) {
77     v.push_back(v[0]); // make v[n] = v[0]
78     double result = 0.0;
79     for(int i=1; i<v.size(); i++)
80         result += v[i-1].x*v[i].y - v[i-1].y*v[i].x;
81     v.pop_back();
82     return result / 2.0;
83 }
84
85 int main() {
86     int p = 0;
87     while(~scanf("%d", &n) && (n != -1)) {
88         scanAndSortPoints();
89         polygons[p++] = convex_hull();
90     }
91
92     int x, y;
93     double result = 0.0;
94     while(~scanf("%d%d", &x, &y)) {
95         for(int i=0; i<p; i++) {
96             if(inPolygon(polygons[i], (Point){x, y}))
97                 destroyed[i] = true;
98         }
99     }
100     for(int i=0; i<p; i++) {
101         if(destroyed[i])
102             result += calculateArea(polygons[i]);
103     }
104     printf("%.2lf\n", result);
105     return 0;
106 }

```

9 動態規劃

9.1 LCS 和 LIS

```

1 //最長共同子序列(LCS)
2 給定兩序列 A,B，求最長的序列 C，
3 C 同時為 A,B 的子序列。
4
5 //最長遞增子序列 (LIS)
6 給你一個序列 A，求最長的序列 B，
7 B 是一個（非）嚴格遞增序列，且為 A 的子序列。
8
9 //LCS 和 LIS 題目轉換
10 LIS 轉成 LCS
11     1. A 為原序列， B=sort(A)
12     2. 對 A,B 做 LCS
13 LCS 轉成 LIS
14     1. A, B 為原本的兩序列
15     2. 最 A 序列作編號轉換，將轉換規則套用在 B
16     3. 對 B 做 LIS
17     4. 重複的數字在編號轉換時後要變成不同的數字，
18        越早出現的數字要越小
19     5. 如果有數字在 B 裡面而不在 A 裡面，
20        直接忽略這個數字不做轉換即可

```

10 Section2

10.1 thm

- 中文測試

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$

• $\int_0^\infty e^{-x} \, dx$

• $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

11 DP

11.1 字串 DP

• Edit distance

S_1 最少需要經過幾次增、刪或換字變成 S_2

$$dp[i][j] = \begin{cases} i+1 & \text{if } j = -1 \\ j+1 & \text{if } i = -1 \\ dp[i-1][j-1] & \text{if } S_1[i] = S_2[j] \\ \min \begin{Bmatrix} dp[i-1][j] \\ dp[i][j-1] \end{Bmatrix} & \text{if } S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases} + 1$$

• Longest Palindromic Subsequence

$$dp[l][r] = \begin{cases} 1 & \text{if } l = r \\ dp[l+1][r-1] & \text{if } S[l] = S[r] \\ \max\{dp[l+1][r], dp[l][r-1]\} & \text{if } S[l] \neq S[r] \end{cases}$$

11.2 DP 表格

1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								
38								
39								
40								
41								
42								
43								
44								
45								
46								
47								
48								

49								
50								
51								
52								
53								
54								
55								
56								
57								
58								
59								
60								
61								
62								
63								
64								
65								
66								
67								
68								
69								
70								
71								
72								
73								
74								
75								
76								
77								
78								
79								
80								
81								
82								
83								
84								
85								
86								
87								
88								
89								
90								
91								
92								
93								
94								
95								
96								
97								
98								
99								
100								
101								
102								
103								
104								
105								
106								
107								
108								
109								
110								
111								
112								
113								
114								
115								
116								
117								
118								
119								
120								
121								
122								
123								
124								
125								

Jc11							
126							
127	-	-	-	-	-	-	-
128							
129							
130	-	-	-	-	-	-	-
131							
132							
133	-	-	-	-	-	-	-
134							
135							
136	-	-	-	-	-	-	-
137							
138							
139	-	-	-	-	-	-	-
140							
141							
142	-	-	-	-	-	-	-
143							
144							
145	-	-	-	-	-	-	-
146							
147							
148	-	-	-	-	-	-	-
149							
150							
151	-	-	-	-	-	-	-
152							
153							
154	-	-	-	-	-	-	-
155							
156							
157	-	-	-	-	-	-	-
158							
159							
160	-	-	-	-	-	-	-
161							
162							
163	-	-	-	-	-	-	-
164							
165							
166	-	-	-	-	-	-	-
167							
168							
169	-	-	-	-	-	-	-
170							
171							
172	-	-	-	-	-	-	-
173							
174							
175	-	-	-	-	-	-	-
176							
177							
178	-	-	-	-	-	-	-
179							
180							
181	-	-	-	-	-	-	-
182							
183							
184	-	-	-	-	-	-	-
185							
186							
187	-	-	-	-	-	-	-
188							
189							
190	-	-	-	-	-	-	-
191							
192							
193	-	-	-	-	-	-	-
194							
195							
196	-	-	-	-	-	-	-
197							
198							
199	-	-	-	-	-	-	-
200							
201							
202	-	-	-	-	-	-	-

FJCU							
203							
204							
205	-	-	-	-	-	-	-
206							
207							
208	-	-	-	-	-	-	-
209							
210							
211	-	-	-	-	-	-	-
212							
213							
214	-	-	-	-	-	-	-
215							
216							
217	-	-	-	-	-	-	-
218							
219							
220	-	-	-	-	-	-	-
221							
222							
223	-	-	-	-	-	-	-
224							
225							
226	-	-	-	-	-	-	-
227							
228							
229	-	-	-	-	-	-	-
230							
231							
232	-	-	-	-	-	-	-
233							
234							
235	-	-	-	-	-	-	-
236							
237							
238	-	-	-	-	-	-	-
239							
240							
241	-	-	-	-	-	-	-
242							
243							
244	-	-	-	-	-	-	-
245							
246							
247	-	-	-	-	-	-	-
248							
249							
250	-	-	-	-	-	-	-
251							
252							
253	-	-	-	-	-	-	-
254							
255							
256	-	-	-	-	-	-	-
257							
258							
259	-	-	-	-	-	-	-
260							
261							
262	-	-	-	-	-	-	-
263							
264							
265	-	-	-	-	-	-	-
266							
267							
268	-	-	-	-	-	-	-
269							
270							
271	-	-	-	-	-	-	-
272							
273							
274	-	-	-	-	-	-	-
275							
276							
277	-	-	-	-	-	-	-
278							
279							

280							
281							
282							
283							
284							
285							
286							
287							
288							
289							
290							
291							
292							
293							
294							
295							
296							
297							
298							
299							
300							
301							
302							
303							
304							
305							
306							
307							
308							
309							
310							
311							
312							
313							
314							
315							
316							
317							
318							
319							
320							
321							
322							
323							
324							
325							
326							
327							
328							
329							
330							
331							
332							
333							
334							
335							
336							
337							
338							
339							
340							
341							
342							
343							
344							
345							
346							
347							
348							
349							
350							
351							
352							
353							
354							
355							
356							

357							
358							
359							
360							
361							
362							
363							
364							
365							
366							
367							
368							
369							
370							
371							
372							
373							
374							
375							
376							
377							
378							
379							
380							
381							
382							
383							
384							
385							
386							
387							
388							
389							
390							
391							
392							
393							
394							
395							
396							
397							
398							
399							
400							
401							
402							
403							
404							
405							
406							
407							
408							
409							
410							
411							
412							
413							
414							
415							
416							
417							
418							
419							
420							
421							
422							
423							
424							
425							
426							
427							
428							
429							
430							
431							
432							
433							

434									
435									
436	-----								
437									
438									
439	-----								
440									
441									
442	-----								
443									
444									
445	-----								
446									
447									
448	-----								
449									
450									
451	-----								
452									
453									
454	-----								
455									
456									
457	-----								
458									
459									
460	-----								
461									
462									
463	-----								
464									
465									
466	-----								
467									
468									
469	-----								
470									
471									
472	-----								
473									
474									
475	-----								
476									
477									
478	-----								
479									
480									
481	-----								
482									
483									
484	-----								
485									
486									
487	-----								
488									
489									
490	-----								
491									
492									
493	-----								
494									
495									
496	-----								
497									
498									
499	-----								
500									
501									
502	-----								
503									
504									
505	-----								
506									
507									
508	-----								
509									
510									

511	-----								
512									
513									
514	-----								
515									
516									
517	-----								
518									
519									
520	-----								
521									
522									
523	-----								
524									
525									
526	-----								
527									
528									
529	-----								
530									
531									
532	-----								
533									
534									
535	-----								
536									
537									
538	-----								
539									
540									
541	-----								
542									
543									
544	-----								
545									
546									
547	-----								
548									
549									
550	-----								
551									
552									
553	-----								
554									
555									
556	-----								
557									
558									
559	-----								
560									
561									
562	-----								
563									
564									
565	-----								
566									
567									
568	-----								
569									
570									
571	-----								
572									
573									
574	-----								
575									
576									
577	-----								
578									
579									
580	-----								
581									
582									
583	-----								
584									
585									
586	-----								
587									

588							
589	-----						
590							
591							
592	-----						
593							
594							
595	-----						
596							
597							
598	-----						
599							
600							
601	-----						
602							
603							
604	-----						
605							
606							
607	-----						
608							
609							
610	-----						
611							
612							
613	-----						
614							
615							
616	-----						
617							
618							
619	-----						
620							
621							
622	-----						
623							
624							
625	-----						
626							
627							
628	-----						
629							
630							
631	-----						
632							
633							
634	-----						
635							
636							
637	-----						
638							
639							
640	-----						
641							
642							
643	-----						
644							
645							
646	-----						
647							
648							
649	-----						
650							
651							
652	-----						
653							
654							
655	-----						
656							
657							
658	-----						
659							
660							
661	-----						
662							
663							
664	-----						

665							
666							
667	-----						
668							
669							
670	-----						
671							
672							
673	-----						
674							
675							
676	-----						
677							
678							
679	-----						
680							
681							
682	-----						
683							
684							
685	-----						
686							
687							
688	-----						
689							
690							
691	-----						
692							
693							
694	-----						
695							
696							
697	-----						
698							
699							
700	-----						
701							
702							
703	-----						
704							
705							
706	-----						
707							
708							
709	-----						
710							
711							
712	-----						
713							
714							
715	-----						
716							
717							
718	-----						
719							
720							
721	-----						
722							
723							
724	-----						
725							
726							
727	-----						
728							
729							
730	-----						
731							
732							
733	-----						
734							
735							
736	-----						
737							
738							
739	-----						
740							
741							

742							
743							
744							
745							
746							
747							
748							
749							
750							
751							
752							
753							
754							
755							
756							
757							
758							
759							
760							
761							
762							
763							
764							
765							
766							
767							
768							
769							
770							
771							
772							
773							
774							
775							
776							
777							
778							
779							
780							
781							
782							
783							
784							
785							
786							
787							
788							
789							
790							
791							
792							
793							
794							
795							
796							
797							
798							
799							
800							
801							
802							
803							
804							
805							
806							
807							
808							
809							
810							
811							
812							
813							
814							
815							
816							
817							
818							

819							
820							
821							
822							
823							
824							
825							
826							
827							
828							
829							
830							
831							
832							
833							
834							
835							
836							
837							
838							
839							
840							
841							
842							
843							
844							
845							
846							
847							
848							
849							
850							
851							
852							
853							
854							
855							
856							
857							
858							
859							
860							
861							
862							
863							
864							
865							
866							
867							
868							
869							
870							
871							
872							
873							
874							
875							
876							
877							
878							
879							
880							
881							
882							
883							
884							
885							
886							
887							
888							
889							
890							
891							
892							
893							
894							
895							

896							
897							
898	-----						
899							
900							
901	-----						
902							
903							
904	-----						
905							
906							
907	-----						
908							
909							
910	-----						
911							
912							
913	-----						
914							
915							
916	-----						
917							
918							
919	-----						
920							
921							
922	-----						
923							
924							
925	-----						
926							
927							
928	-----						
929							
930							
931	-----						
932							
933							
934	-----						
935							
936							
937	-----						
938							
939							
940	-----						
941							
942							
943	-----						
944							
945							
946	-----						
947							
948							
949	-----						
950							
951							
952	-----						
953							
954							
955	-----						
956							
957							
958	-----						
959							
960							
961	-----						
962							
963							
964	-----						
965							
966							
967	-----						
968							
969							
970	-----						
971							
972							

973	-----						
974							
975							
976	-----						
977							
978							
979	-----						
980							
981							
982	-----						
983							
984							
985	-----						
986							
987							
988	-----						
989							
990							
991	-----						
992							
993							
994	-----						
995							
996							
997	-----						
998							
999							
1000	-----						
1001							
1002							
1003	-----						
1004							
1005							
1006	-----						
1007							
1008							
1009	-----						
1010							
1011							
1012	-----						
1013							
1014							
1015	-----						
1016							
1017							
1018	-----						
1019							
1020							
1021	-----						
1022							
1023							
1024	-----						
1025							
1026							
1027	-----						
1028							
1029							
1030	-----						
1031							
1032							
1033	-----						
1034							
1035							
1036	-----						
1037							
1038							
1039	-----						
1040							
1041							
1042	-----						
1043							
1044							
1045	-----						
1046							
1047							
1048	-----						
1049							

1050									
1051	-----								
1052									
1053									
1054	-----								
1055									
1056									
1057	-----								
1058									
1059									
1060	-----								
1061									
1062									
1063	-----								
1064									
1065									
1066	-----								
1067									
1068									
1069	-----								
1070									
1071									
1072	-----								
1073									
1074									
1075	-----								
1076									
1077									
1078	-----								
1079									
1080									
1081	-----								
1082									
1083									
1084	-----								
1085									
1086									
1087	-----								
1088									
1089									
1090	-----								
1091									
1092									
1093	-----								
1094									
1095									
1096	-----								
1097									
1098									
1099	-----								
1100									
1101									
1102	-----								
1103									
1104									
1105	-----								
1106									
1107									
1108	-----								
1109									
1110									
1111	-----								
1112									
1113									
1114	-----								
1115									
1116									
1117	-----								
1118									
1119									
1120	-----								
1121									
1122									
1123	-----								
1124									
1125									
1126	-----								

1127									
1128									
1129	-----								
1130									
1131									
1132	-----								
1133									
1134									
1135	-----								
1136									
1137									
1138	-----								
1139									
1140									
1141	-----								
1142									
1143									
1144	-----								
1145									
1146									
1147	-----								
1148									
1149									
1150	-----								
1151									
1152									
1153	-----								
1154									
1155									
1156	-----								
1157									
1158									
1159	-----								
1160									
1161									
1162	-----								
1163									
1164									
1165	-----								
1166									
1167									
1168	-----								
1169									
1170									
1171	-----								
1172									
1173									
1174	-----								
1175									
1176									
1177	-----								
1178									
1179									
1180	-----								
1181									
1182									
1183	-----								
1184									
1185									
1186	-----								
1187									
1188									
1189	-----								
1190									
1191									
1192	-----								
1193									
1194									
1195	-----								
1196									
1197									
1198	-----								
1199									
1200									
1201	-----								
1202									
1203									

1204							
1205							
1206							
1207							
1208							
1209							
1210							
1211							
1212							
1213							
1214							
1215							
1216							
1217							
1218							
1219							
1220							
1221							
1222							
1223							
1224							
1225							
1226							
1227							
1228							
1229							
1230							
1231							
1232							
1233							
1234							
1235							
1236							
1237							
1238							
1239							
1240							
1241							
1242							
1243							
1244							
1245							
1246							
1247							
1248							
1249							
1250							
1251							
1252							
1253							
1254							
1255							
1256							
1257							
1258							
1259							
1260							
1261							
1262							
1263							
1264							
1265							
1266							
1267							
1268							
1269							
1270							
1271							
1272							
1273							
1274							
1275							
1276							
1277							
1278							
1279							
1280							

1281							
1282							
1283							
1284							
1285							
1286							
1287							
1288							
1289							
1290							
1291							
1292							
1293							
1294							
1295							
1296							
1297							
1298							
1299							
1300							
1301							
1302							
1303							
1304							
1305							
1306							
1307							
1308							
1309							
1310							
1311							
1312							
1313							
1314							
1315							
1316							
1317							
1318							
1319							
1320							
1321							
1322							
1323							
1324							
1325							
1326							
1327							
1328							
1329							
1330							
1331							
1332							
1333							
1334							
1335							
1336							
1337							
1338							
1339							
1340							
1341							
1342							
1343							
1344							
1345							
1346							
1347							
1348							
1349							
1350							
1351							
1352							
1353							
1354							
1355							
1356							
1357							

1358									
1359									
1360	-----								
1361									
1362									
1363	-----								
1364									
1365									
1366	-----								
1367									
1368									
1369	-----								
1370									
1371									
1372	-----								
1373									
1374									
1375	-----								
1376									
1377									
1378	-----								
1379									
1380									
1381	-----								
1382									
1383									
1384	-----								
1385									
1386									
1387	-----								
1388									
1389									
1390	-----								
1391									
1392									
1393	-----								
1394									
1395									
1396	-----								
1397									
1398									
1399	-----								
1400									
1401									
1402	-----								
1403									
1404									
1405	-----								
1406									
1407									
1408	-----								
1409									
1410									
1411	-----								
1412									
1413									
1414	-----								
1415									
1416									
1417	-----								
1418									
1419									
1420	-----								
1421									
1422									
1423	-----								
1424									
1425									
1426	-----								
1427									
1428									
1429	-----								
1430									
1431									
1432	-----								
1433									
1434									

1435	-----								
1436									
1437									
1438	-----								
1439									
1440									
1441	-----								
1442									
1443									
1444	-----								
1445									
1446									
1447	-----								
1448									
1449									
1450	-----								
1451									
1452									
1453	-----								
1454									
1455									
1456	-----								
1457									
1458									
1459	-----								
1460									
1461									
1462	-----								
1463									
1464									
1465	-----								
1466									
1467									
1468	-----								
1469									
1470									
1471	-----								
1472									
1473									
1474	-----								
1475									
1476									
1477	-----								
1478									
1479									
1480	-----								
1481									
1482									
1483	-----								
1484									
1485									
1486	-----								
1487									
1488									
1489	-----								
1490									
1491									
1492	-----								
1493									
1494									
1495	-----								
1496									
1497									
1498	-----								
1499									
1500									
1501	-----								
1502									
1503									
1504	-----								
1505									
1506									
1507	-----								
1508									
1509									
1510	-----								
1511									

Figure 1 displays a 20x20 grid of cells, representing a pattern over 20 generations. The grid is divided into two horizontal sections of 10 rows each. The top section (rows 1-10) shows a pattern of black and red lines. The bottom section (rows 11-20) shows a pattern of black and red lines. The pattern evolves from a simple initial state to a more complex, fractal-like structure. The grid is labeled with numbers 1 to 20 on the left side.