

Contents

1 字串

- 1.1 最長迴文子字串 1
- 1.2 KMP 1

2 math

- 2.1 SG 1
- 2.2 質數與因數 1
- 2.3 歐拉函數 2
- 2.4 atan 2
- 2.5 大步小步 2

3 algorithm

- 3.1 basic 3
- 3.2 二分搜 3
- 3.3 三分搜 3
- 3.4 差分 4
- 3.5 greedy 4
- 3.6 dinic 5
- 3.7 SCC Tarjan 6
- 3.8 ArticulationPoints Tarjan 6
- 3.9 最小樹狀圖 7
- 3.10 二分圖最大匹配 8
- 3.11 JosephusProblem 9
- 3.12 KM 9
- 3.13 LCA 倍增法 10
- 3.14 LCA 樹壓平 RMQ 10
- 3.15 MCMF 11
- 3.16 莫隊 11
- 3.17 Dancing Links 12

4 DataStructure

- 4.1 線段樹 1D 13
- 4.2 線段樹 2D 13
- 4.3 權值線段樹 14
- 4.4 Trie 14
- 4.5 單調隊列 15

5 geometry

- 5.1 intersection 15
- 5.2 半平面相交 16
- 5.3 凸包 16

6 DP

- 6.1 抽屜 17
- 6.2 Deque 最大差距 17
- 6.3 LCS 和 LIS 17
- 6.4 RangeDP 18
- 6.5 stringDP 18
- 6.6 TreeDP 有幾個 path 長度為 k 18
- 6.7 TreeDP reroot 18
- 6.8 WeightedLIS 19

1 字串

1.1 最長迴文子字串

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #define T(x) ((x)%2 ? s[(x)/2] : '. ')
3 using namespace std;
4
5 string s;
6 int n;
7
8 int ex(int l,int r){
9     int i=0;
10    while(l-i>=0&&r+i<n&&T(l-i)==T(r+i)) i++;
11    return i;
12 }
13
14 int main(){
15     cin>>s;
16     n=2*s.size()+1;
17     int mx=0;
18     int center=0;
19     vector<int> r(n);
20     int ans=1;
21     r[0]=1;
22     for(int i=1;i<n;i++){
23         int ii=center-(i-center);
24         int len=mx-i+1;

```

```

25     if(i>mx){
26         r[i]=ex(i,i);
27         center=i;
28         mx=i+r[i]-1;
29     }
30     else if(r[ii]==len){
31         r[i]=len+ex(i-len,i+len);
32         center=i;
33         mx=i+r[i]-1;
34     }
35     else r[i]=min(r[ii],len);
36     ans=max(ans,r[i]);
37 }
38 cout<<ans-1<<"\n";
39 return 0;
40 }

```

1.2 KMP

```

1 #define maxn 1000005
2 int nextArr[maxn];
3 void getNextArr(const string& str) {
4     nextArr[0] = 0;
5     int prefixLen = 0;
6     for (int i = 1; i < str.size(); ++i) {
7         prefixLen = nextArr[i - 1];
8         //如果不一樣就在之前算過的prefix中搜有沒有更短的前後綴
9         while (prefixLen > 0 && str[prefixLen] != str[i])
10             prefixLen = nextArr[prefixLen - 1];
11         //一樣就繼承之前的前後綴長度+1
12         if (str[prefixLen] == str[i])
13             ++prefixLen;
14         nextArr[i] = prefixLen;
15     }
16     for (int i = 0; i < str.size() - 1; ++i) {
17         vis[nextArr[i]] = true;
18     }
19 }

```

2 math

2.1 SG

- $SG(x) = mex\{SG(y) | x \rightarrow y\}$
- $mex(S) = \min\{n | n \in \mathbb{N}, n \notin S\}$

2.2 質數與因數

```

1 歐拉篩O(n)
2 #define MAXN 47000 //sqrt(2^31)=46,340...
3 bool isPrime[MAXN];
4 int prime[MAXN];
5 int primeSize=0;
6 void getPrimes(){
7     memset(isPrime,true,sizeof(isPrime));
8     isPrime[0]=isPrime[1]=false;
9     for(int i=2;i<MAXN;i++){
10         if(isPrime[i]) prime[primeSize++]=i;
11         for(int
12             j=0;j<primeSize&&i*prime[j]<=MAXN;++j){
13             isPrime[i*prime[j]]=false;
14             if(i%prime[j]==0) break;
15         }
16     }
17 }
18
19 最大公因數 O(log(min(a,b)))
20 int GCD(int a,int b){
21     if(b==0) return a;

```

```

21     return GCD(b,a%b);
22 }
23
24 質因數分解
25 void primeFactorization(int n){
26     for(int i=0;i<(int)p.size();++i){
27         if(p[i]*p[i]>n) break;
28         if(n%p[i]) continue;
29         cout<<p[i]<<' ';
30         while(n%p[i]==0) n/=p[i];
31     }
32     if(n!=1) cout<<n<<' ';
33     cout<<'\n';
34 }

```

擴展歐幾里得算法

```

37 //ax+by=GCD(a,b)
38
39 int ext_euc(int a,int b,int &x,int &y){
40     if(b==0){
41         x=1,y=0;
42         return a;
43     }
44     int d=ext_euc(b,a%b,y,x);
45     y-=a/b*x;
46     return d;
47 }
48
49 int main(){
50     int a,b,x,y;
51     cin>>a>>b;
52     ext_euc(a,b,x,y);
53     cout<<x<<' '<<y<<endl;
54     return 0;
55 }

```

歌德巴赫猜想

```

60 solution : 把偶數 N (6≤N≤10^6) 寫成兩個質數的和。
61 #define N 20000000
62 int ox[N],p[N],pr;
63 void PrimeTable(){
64     ox[0]=ox[1]=1;
65     pr=0;
66     for(int i=2;i<N;i++){
67         if(!ox[i]) p[pr++]=i;
68         for(int j=0;i*p[j]<N&&j<pr;j++)
69             ox[i*p[j]]=1;
70     }
71 }
72
73 int main(){
74     PrimeTable();
75     int n;
76     while(cin>>n,n){
77         int x;
78         for(x=1;x+=2)
79             if(!ox[x]&&!ox[n-x]) break;
80         printf("%d = %d + %d\n",n,x,n-x);
81     }
82 }

```

problem : 給定整數 N ,

求 N 最少可以拆成多少個質數的和。

如果 N 是質數，則答案為 1。

如果 N 是偶數(不包含2)，則答案為 2 (強歌德巴赫猜想)。

如果 N 是奇數且 N-2 是質數，則答案為 2 (2+質數)。

其他狀況答案為 3 (弱歌德巴赫猜想)。

```

89
90 bool isPrime(int n){
91     for(int i=2;i<n;++i){
92         if(i>n) return true;
93         if(n%i==0) return false;
94     }
95     return true;
96 }

```

```

97
98 int main(){
99     int n;
100     cin>>n;
101     if(isPrime(n)) cout<<"1\n";
102     else if(n%2==0||isPrime(n-2)) cout<<"2\n";
103     else cout<<"3\n";
104 }

```

2.3 歐拉函數

```

1 //計算閉區間 [1,n] 中有幾個正整數與 n 互質
2
3 int phi(){
4     int ans=n;
5     for(int i=2;i*i<=n;i++){
6         if(n%i==0){
7             ans=ans-ans/i;
8             while(n%i==0) n/=i;
9         }
10    if(n>1) ans=ans-ans/n;
11    return ans;
12 }

```

2.4 atan

```

1 說明
2     atan() 和 atan2() 函數分別計算 x 和 y/x 的反正切。
3
4 回傳值
5     atan() 函數會傳回介於範圍 -pi/2 到 pi/2
6     弧度之間的值。
7     atan2() 函數會傳回介於 -pi 至 pi 弧度之間的值。
8     如果 atan2() 函數的兩個引數都是零，
9     則函數會將 errno 設為 EDOM，並傳回值 0。
10 範例
11 int main(void){
12     double a,b,c,d;
13     c=0.45;
14     d=0.23;
15     a=atan(c);
16     b=atan2(c,d);
17     printf("atan(%lf)=%lf/n",c,a);
18     printf("atan2(%lf,%lf)=%lf/n",c,d,b);
19 }
20
21 // atan(0.450000)=0.422854
22 // atan2(0.450000,0.230000)=1.098299

```

2.5 大步小步

```

1 題意
2 給定 B,N,P，求出 L 滿足 B^L ≡ N(mod P)。
3 題解
4 餘數的循環節長度必定為 P 的因數，因此
5 也就是說如果有解則 L<N，枚舉 0,1,2,L-1
6 能得到結果，但會超時。
7 將 L 拆成 mx+y，只要分別枚舉 x,y 就能得到答案，
8 設 m=√P 能保證最多枚舉 2√P 次。
9 B^(mx+y) ≡ N(mod P)
10 B^(mx)B^y ≡ N(mod P)
11 先求出 B^0,B^1,B^2,...,B^(m-1)，
12 再枚舉 N(B^(-m)),N(B^(-m))^2,... 查看是否有對應的 B^y。
13 這種算法稱為大步小步演算法，
14 大步指的是枚舉 x (一次跨 m 步)，
15 小步指的是枚舉 y (一次跨 1 步)。

```

16 複雜度分析
 17 利用 map/unorder_map 存放 $B^0, B^1, B^2, \dots, B^{(m-1)}$,
 18 枚舉 x 查詢 map/unorder_map 是否有對應的 B^y ,
 19 存放和查詢最多 $2\sqrt{P}$ 次, 時間複雜度為 $O(\sqrt{P} \log \sqrt{P}) / O(\sqrt{P})$ 。

```
20
21 using LL = long long;
22 LL B, N, P;
23 LL fpow(LL a, LL b, LL c){
24     LL res=1;
25     for(;b;b>>=1){
26         if(b&1)
27             res=(res*a)%c;
28         a=(a*a)%c;
29     }
30     return res;
31 }
32 LL BSGS(LL a, LL b, LL p){
33     a%=p, b%=p;
34     if(a==0)
35         return b==0?1:-1;
36     if(b==1)
37         return 0;
38     map<LL, LL> tb;
39     LL sq=ceil(sqrt(p-1));
40     LL inv=fpow(a, p-sq-1, p);
41     tb[1]=sq;
42     for(LL i=1, tmp=1; i<sq; ++i){
43         tmp=(tmp*a)%p;
44         if(!tb.count(tmp))
45             tb[tmp]=i;
46     }
47     for(LL i=0; i<sq; ++i){
48         if(tb.count(b)){
49             LL res=tb[b];
50             return i*sq+(res==sq?0:res);
51         }
52         b=(b*inv)%p;
53     }
54     return -1;
55 }
56 int main(){
57     IOS; //輸入優化
58     while(cin>>P>>B>>N){
59         LL ans=BSGS(B, N, P);
60         if(ans!=-1)
61             cout<<"no solution\n";
62         else
63             cout<<ans<<"\n";
64     }
65 }
```

3 algorithm

3.1 basic

```
1 min_element: 找尋最小元素
2 min_element(first, last)
3 max_element: 找尋最大元素
4 max_element(first, last)
5 sort: 排序, 預設由小排到大。
6 sort(first, last)
7 sort(first, last, cmp): 可自行定義比較運算子 cmp。
8 find: 尋找元素。
9 find(first, last, val)
10 lower_bound: 尋找第一個小於 x 的元素位置,
11     如果不存在, 則回傳 last。
12 lower_bound(first, last, val)
13 upper_bound: 尋找第一個大於 x 的元素位置,
14     如果不存在, 則回傳 last。
15 upper_bound(first, last, val)
16 next_permutation: 將序列順序轉換成下一個字典序,
17     如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
18 next_permutation(first, last)
```

19 prev_permutation: 將序列順序轉換成上一個字典序,
 20 如果存在回傳 true, 反之回傳 false。
 21 prev_permutation(first, last)

3.2 二分搜

```
1 int binary_search(int target) {
2     // For range [ok, ng) or (ng, ok], "ok" is for the
3     // index that target value exists, with "ng" doesn't.
4     int ok = maxn, ng = -1;
5     // For first lower_bound, ok=maxn and ng=-1,
6     // for last lower_bound, ok = -1 and ng = maxn
7     // (the "check" funtion
8     // should be changed depending on it.)
9     while(abs(ok - ng) > 1) {
10         int mid = (ok + ng) >> 1;
11         if(check(mid)) ok = mid;
12         else ng = mid;
13     }
14     // Be careful, "arr[mid]>=target" for first
15     // lower_bound and "arr[mid]<=target" for
16     // last lower_bound. For range (ng, ok],
17     // convert it into (ng, mid] and (mid, ok] than
18     // choose the first one, or convert [ok, ng) into
19     // [ok, mid) and [mid, ng) and than choose
20     // the second one.
21     return ok;
22 }
23 lower_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 ≥ k 的位置
24 upper_bound(arr, arr + n, k); //最左邊 > k 的位置
25 upper_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 ≤ k 的位置
26 lower_bound(arr, arr + n, k) - 1; //最右邊 < k 的位置
27 (lower_bound, upper_bound) //等於 k 的範圍
28 equal_range(arr, arr+n, k);
```

3.3 三分搜

```
1 題意
2 給定兩射線方向和速度, 問兩射線最近距離。
3 題解
4 假設 F(t) 為兩射線在時間 t 的距離, F(t) 為二次函數,
5 可用三分查找二次函數最小值。
6 struct Point{
7     double x, y, z;
8     Point() {}
9     Point(double _x, double _y, double _z):
10         x(_x), y(_y), z(_z){}
11     friend istream& operator>>(istream& is, Point& p)
12     {
13         is >> p.x >> p.y >> p.z;
14         return is;
15     }
16     Point operator+(const Point &rhs) const{
17         return Point(x+rhs.x, y+rhs.y, z+rhs.z);
18     }
19     Point operator-(const Point &rhs) const{
20         return Point(x-rhs.x, y-rhs.y, z-rhs.z);
21     }
22     Point operator*(const double &d) const{
23         return Point(x*d, y*d, z*d);
24     }
25     Point operator/(const double &d) const{
26         return Point(x/d, y/d, z/d);
27     }
28     double dist(const Point &rhs) const{
29         double res = 0;
30         res+=(x-rhs.x)*(x-rhs.x);
31         res+=(y-rhs.y)*(y-rhs.y);
32         res+=(z-rhs.z)*(z-rhs.z);
33         return res;
34     }
35 }
```

```

35 int main(){
36     IOS;          //輸入優化
37     int T;
38     cin>>T;
39     for(int ti=1;ti<=T;++ti){
40         double time;
41         Point x1,y1,d1,x2,y2,d2;
42         cin>>time>>x1>>y1>>x2>>y2;
43         d1=(y1-x1)/time;
44         d2=(y2-x2)/time;
45         double L=0,R=1e8,m1,m2,f1,f2;
46         double ans = x1.dist(x2);
47         while(abs(L-R)>1e-10){
48             m1=(L+R)/2;
49             m2=(m1+R)/2;
50             f1=((d1*m1)+x1).dist((d2*m1)+x2);
51             f2=((d1*m2)+x1).dist((d2*m2)+x2);
52             ans = min(ans,min(f1,f2));
53             if(f1<f2) R=m2;
54             else L=m1;
55         }
56         cout<<"Case "<<ti<<": ";
57         cout<<fixed<<setprecision(4)<<sqrt(ans)<<'\n';
58     }
59 }

```

3.4 差分

用途：在區間 $[l, r]$ 加上一個數字 v 。

$b[l] += v$; ($b[0 \sim l]$ 加上 v)

$b[r+1] -= v$; ($b[r+1 \sim n]$ 減去 v ($b[r]$ 仍保留 v))

給的 $a[]$ 是前綴和數列，建構 $b[]$ ，

因為 $a[i] = b[0] + b[1] + b[2] + \dots + b[i]$ ，

所以 $b[i] = a[i] - a[i-1]$ 。

在 $b[l]$ 加上 v ， $b[r+1]$ 減去 v ，

最後再從 0 跑到 n 使 $b[i] += b[i-1]$ 。

這樣一來， $b[]$ 是一個在某區間加上 v 的前綴和。

```

10 int a[1000], b[1000];
11 // a: 前綴和數列, b: 差分數列
12 int main(){
13     int n, l, r, v;
14     cin >> n;
15     for(int i=1; i<=n; i++){
16         cin >> a[i];
17         b[i] = a[i] - a[i-1]; //建構差分數列
18     }
19     cin >> l >> r >> v;
20     b[l] += v;
21     b[r+1] -= v;
22     for(int i=1; i<=n; i++){
23         b[i] += b[i-1];
24         cout << b[i] << ' ';
25     }
26 }

```

3.5 greedy

貪心演算法的核心為，

採取在目前狀態下最好或最佳（即最有利）的選擇。

貪心演算法雖然能獲得當前最佳解，

但不保證能獲得最後（全域）最佳解，

提出想法後可以先試圖尋找有沒有能推翻原本的想法的反例，

確認無誤再實作。

刪數字問題

```

9 //problem
10 給定一個數字  $N(\leq 10^{100})$ ，需要刪除  $K$  個數字，
11 請問刪除  $K$  個數字後最小的數字為何？
12 //solution
13 刪除滿足第  $i$  位數大於第  $i+1$  位數的最左邊第  $i$  位數，
14 扣除高位數的影響較扣除低位數的大。

```

```

15 //code
16 int main(){
17     string s;
18     int k;
19     cin>>s>>k;
20     for(int i=0;i<k;++i){
21         if((int)s.size()==0) break;
22         int pos =(int)s.size()-1;
23         for(int j=0;j<(int)s.size()-1;++j){
24             if(s[j]>s[j+1]){
25                 pos=j;
26                 break;
27             }
28         }
29         s.erase(pos,1);
30     }
31     while((int)s.size()>0&&s[0]=='0')
32         s.erase(0,1);
33     if((int)s.size()) cout<<s<<'\n';
34     else cout<<0<<'\n';
35 }

```

最小區間覆蓋長度

//problem

給定 n 條線段區間為 $[Li, Ri]$ ，

請問最少要選幾個區間才能完全覆蓋 $[0, S]$ ？

//solution

先將所有區間依照左界由小到大排序，

對於當前區間 $[Li, Ri]$ ，要從左界 $> Ri$ 的所有區間中，

找到有著最大的右界的區間，連接當前區間。

//problem

長度 n 的直線中有數個加熱器，

在 x 的加熱器可以讓 $[x-r, x+r]$ 內的物品加熱，

問最少要幾個加熱器可以把 $[0, n]$ 的範圍加熱。

//solution

對於最左邊沒加熱的點 a ，選擇最遠可以加熱 a 的加熱器，

更新已加熱範圍，重複上述動作繼續尋找加熱器。

```

52 //code
53 int main(){
54     int n, r;
55     int a[1005];
56     cin>>n>>r;
57     for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
58     int i=1,ans=0;
59     while(i<=n){
60         int R=min(i+r-1,n),L=max(i-r+1,0)
61         int nextR=-1;
62         for(int j=R;j>=L;--j){
63             if(a[j]){
64                 nextR=j;
65                 break;
66             }
67         }
68         if(nextR==-1){
69             ans=-1;
70             break;
71         }
72         ++ans;
73         i=nextR+r;
74     }
75     cout<<ans<<'\n';
76 }

```

最多不重疊區間

//problem

給你 n 條線段區間為 $[Li, Ri]$ ，

請問最多可以選擇幾條不重疊的線段（頭尾可相連）？

//solution

依照右界由小到大排序，

每次取到一個不重疊的線段，答案 $+1$ 。

```

84 //code
85 struct Line{
86     int L,R;
87     bool operator<(const Line &rhs)const{
88         return R<rhs.R;
89     }
90 };

```

```

91 int main(){
92     int t;
93     cin>>t;
94     Line a[30];
95     while(t--){
96         int n=0;
97         while(cin>>a[n].L>>a[n].R,a[n].L||a[n].R)
98             ++n;
99         sort(a,a+n);
100         int ans=1,R=a[0].R;
101         for(int i=1;i<n;i++){
102             if(a[i].L>=R){
103                 ++ans;
104                 R=a[i].R;
105             }
106         }
107         cout<<ans<<'\\n';
108     }
109 }

```

最小化最大延遲問題

//problem

給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，第 i 項工作延遲的時間為 $L_i = \max(0, F_i - D_i)$ ，
原本 F_i 為第 i 項工作的完成時間，
求一種工作排序使 $\max L_i$ 最小。

//solution

按照到期時間從早到晚處理。

//code

```

119 struct Work{
120     int t, d;
121     bool operator< (const Work &rhs) const{
122         return d<rhs.d;
123     }
124 };
125 int main(){
126     int n;
127     Work a[10000];
128     cin>>n;
129     for(int i=0;i<n;++i)
130         cin>>a[i].t>>a[i].d;
131     sort(a,a+n);
132     int maxL=0,sumT=0;
133     for(int i=0;i<n;++i){
134         sumT+=a[i].t;
135         maxL=max(maxL,sumT-a[i].d);
136     }
137     cout<<maxL<<'\\n';
138 }

```

最少延遲數量問題

//problem

給定 N 個工作，每個工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，求一種工作排序使得逾期工作數量最小。

//solution

期限越早到期的工作越先做。將工作依照到期時間從早到晚排序，
依序放入工作列表中，如果發現有工作預期，
就從目前選擇的工作中，移除耗時最長的工作。
上述方法為 Moore-Hodgson's Algorithm。

//problem

給定烏龜的重量和可承受重量，問最多可以疊幾隻烏龜？

//solution

和最少延遲數量問題是相同的問題，只要將題敘做轉換。

工作處理時長 \rightarrow 烏龜重量

工作期限 \rightarrow 烏龜可承受重量

多少工作不延期 \rightarrow 可以疊幾隻烏龜

//code

```

157 struct Work{
158     int t, d;
159     bool operator< (const Work &rhs) const{
160         return d<rhs.d;
161     }
162 };
163 int main(){
164     int n=0;
165     Work a[10000];

```

```

166     priority_queue<int> pq;
167     while(cin>>a[n].t>>a[n].d)
168         ++n;
169     sort(a,a+n);
170     int sumT=0,ans=n;
171     for(int i=0;i<n;++i){
172         pq.push(a[i].t);
173         sumT+=a[i].t;
174         if(a[i].d<sumT){
175             int x=pq.top();
176             pq.pop();
177             sumT-=x;
178             --ans;
179         }
180     }
181     cout<<ans<<'\\n';
182 }
183

```

任務調度問題

//problem

給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，如果第 i 項工作延遲需要受到 p_i 單位懲罰，
請問最少會受到多少單位懲罰。

//solution

依照懲罰由大到小排序，

每項工作依序嘗試可不可以放在 $D_i - T_i + 1, D_i - T_i, \dots, 1, 0$ ，
如果有空閒就放進去，否則延後執行。

//problem

給定 N 項工作，每項工作的需要處理時長為 T_i ，
期限是 D_i ，如果第 i 項工作在期限內完成會獲得 a_i
單位獎勵，

請問最多會獲得多少單位獎勵。

//solution

和上題相似，這題變成依照獎勵由大到小排序。

//code

```

201 struct Work{
202     int d,p;
203     bool operator< (const Work &rhs) const{
204         return p>rhs.p;
205     }
206 };
207 int main(){
208     int n;
209     Work a[100005];
210     bitset<100005> ok;
211     while(cin>>n){
212         ok.reset();
213         for(int i=0;i<n;++i)
214             cin>>a[i].d>>a[i].p;
215         sort(a,a+n);
216         int ans=0;
217         for(int i=0;i<n;++i){
218             int j=a[i].d;
219             while(j--){
220                 if(!ok[j]){
221                     ans+=a[i].p;
222                     ok[j]=true;
223                     break;
224                 }
225             }
226             cout<<ans<<'\\n';
227         }
228     }

```

3.6 dinic

```

1 const int maxn = 1e5 + 10;
2 const int inf = 0x3f3f3f3f;
3 struct Edge {
4     int s, t, cap, flow;
5 };
6 int n, m, S, T;
7 int level[maxn], dfs_idx[maxn];

```

```

8 vector<Edge> E;
9 vector<vector<int>> G;
10 void init() {
11     S = 0;
12     T = n + m;
13     E.clear();
14     G.assign(maxn, vector<int>());
15 }
16 void addEdge(int s, int t, int cap) {
17     E.push_back({s, t, cap, 0});
18     E.push_back({t, s, 0, 0});
19     G[s].push_back(E.size()-2);
20     G[t].push_back(E.size()-1);
21 }
22 bool bfs() {
23     queue<int> q({S});
24     memset(level, -1, sizeof(level));
25     level[S] = 0;
26     while(!q.empty()) {
27         int cur = q.front();
28         q.pop();
29         for(int i : G[cur]) {
30             Edge e = E[i];
31             if(level[e.t]==-1 && e.cap>e.flow) {
32                 level[e.t] = level[e.s] + 1;
33                 q.push(e.t);
34             }
35         }
36     }
37     return ~level[T];
38 }
39 int dfs(int cur, int lim) {
40     if(cur==T || lim==0) return lim;
41     int result = 0;
42     for(int& i=dfs_idx[cur]; i<G[cur].size() && lim; i++) {
43         Edge& e = E[G[cur][i]];
44         if(level[e.s]+1 != level[e.t]) continue;
45         int flow = dfs(e.t, min(lim, e.cap-e.flow));
46         if(flow <= 0) continue;
47         e.flow += flow;
48         result += flow;
49         E[G[cur][i]^1].flow -= flow;
50         lim -= flow;
51     }
52     return result;
53 }
54 int dinic() { // O((V^2)E)
55     int result = 0;
56     while(bfs()) {
57         memset(dfs_idx, 0, sizeof(dfs_idx));
58         result += dfs(S, inf);
59     }
60     return result;
61 }

```

```

17 ++dfsTime;
18 sk.push(u);
19 inStack[u] = true;
20 for (int v: G[u]) {
21     if (dfn[v] == 0) {
22         dfs(v);
23         low[u] = min(low[u], low[v]);
24     }
25     else if (inStack[v]) {
26         //屬於同個SCC且是我的back edge
27         low[u] = min(low[u], dfn[v]);
28     }
29 }
30 //如果是SCC
31 if (dfn[u] == low[u]) {
32     long long minCost = 0x3f3f3f3f;
33     int currWays = 0;
34     ++SCC;
35     while (1) {
36         int v = sk.top();
37         inStack[v] = 0;
38         sk.pop();
39         if (minCost > cost[v]) {
40             minCost = cost[v];
41             currWays = 1;
42         }
43         else if (minCost == cost[v]) {
44             ++currWays;
45         }
46         if (v == u)
47             break;
48     }
49     totalCost += minCost;
50     ways = (ways * currWays) % MOD;
51 }
52 }
53 int main() {
54     int n;
55     scanf("%d", &n);
56     for (int i = 1; i <= n; ++i)
57         scanf("%lld", &cost[i]);
58     G.assign(n + 5, vector<int>());
59     int m;
60     scanf("%d", &m);
61     int u, v;
62     for (int i = 0; i < m; ++i) {
63         scanf("%d %d", &u, &v);
64         G[u].emplace_back(v);
65     }
66     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
67         if (dfn[i] == 0)
68             dfs(i);
69     }
70     printf("%lld %lld\n", totalCost, ways % MOD);
71     return 0;
72 }

```

3.7 SCC Tarjan

```

1 //單純考SCC，每個SCC中找成本最小的蓋，如果有多個一樣小的要數出來，因為題目要方法數
2 //注意以下程式有縮點，但沒存起來，存法就是開一個array
   -> ID[u] = SCCID
3 #define maxn 100005
4 #define MOD 1000000007
5 long long cost[maxn];
6 vector<vector<int>> G;
7 int SCC = 0;
8 stack<int> sk;
9 int dfn[maxn];
10 int low[maxn];
11 bool inStack[maxn];
12 int dfsTime = 1;
13 long long totalCost = 0;
14 long long ways = 1;
15 void dfs(int u) {
16     dfn[u] = low[u] = dfsTime;

```

3.8 ArticulationPoints Tarjan

```

1 vector<vector<int>> G;
2 int N, timer;
3 bool visited[105];
4 int dfn[105]; // 第一次visit的時間
5 int low[105];
6 // 最小能回到的父節點(不能是自己的parent)的visTime
7 int res;
8 //求割點數量
9 void tarjan(int u, int parent) {
10     int child = 0;
11     bool isCut = false;
12     visited[u] = true;
13     dfn[u] = low[u] = ++timer;
14     for (int v: G[u]) {
15         if (!visited[v]) {
16             ++child;

```



```

17     tarjan(v, u);
18     low[u] = min(low[u], low[v]);
19     if (parent != -1 && low[v] >= dfn[u])
20         isCut = true;
21 }
22 else if (v != parent)
23     low[u] = min(low[u], dfn[v]);
24 }
25 //If u is root of DFS tree->有兩個以上的children
26 if (parent == -1 && child >= 2)
27     isCut = true;
28 if (isCut) ++res;
29 }
30 int main() {
31     char input[105];
32     char* token;
33     while (scanf("%d", &N) != EOF && N) {
34         G.assign(105, vector<int>());
35         memset(visited, false, sizeof(visited));
36         memset(low, 0, sizeof(low));
37         memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
38         timer = 0;
39         res = 0;
40         getchar(); // for \n
41         while (fgets(input, 105, stdin)) {
42             if (input[0] == '\0')
43                 break;
44             int size = strlen(input);
45             input[size - 1] = '\0';
46             --size;
47             token = strtok(input, " ");
48             int u = atoi(token);
49             int v;
50             while (token = strtok(NULL, " ")) {
51                 v = atoi(token);
52                 G[u].emplace_back(v);
53                 G[v].emplace_back(u);
54             }
55         }
56         tarjan(1, -1);
57         printf("%d\n", res);
58     }
59     return 0;
60 }

```

3.9 最小樹狀圖

```

1  const int maxn = 60 + 10;
2  const int inf = 0x3f3f3f3f;
3  struct Edge {
4      int s, t, cap, cost;
5  }; // cap 為頻寬 (optional)
6  int n, m, c;
7  int inEdge[maxn], idx[maxn], pre[maxn], vis[maxn];
8  // 對於每個點，選擇對它入度最小的那條邊
9  // 找環，如果沒有則 return;
10 // 進行縮環並更新其他點到環的距離。
11 int dirMST(vector<Edge> edges, int low) {
12     int result = 0, root = 0, N = n;
13     while(true) {
14         memset(inEdge, 0x3f, sizeof(inEdge));
15         // 找所有點的 in edge 放進 inEdge
16         // optional: low 為最小 cap 限制
17         for(const Edge& e : edges) {
18             if(e.cap < low) continue;
19             if(e.s!=e.t && e.cost<inEdge[e.t]) {
20                 inEdge[e.t] = e.cost;
21                 pre[e.t] = e.s;
22             }
23         }
24         for(int i=0; i<N; i++) {
25             if(i!=root && inEdge[i]==inf)
26                 return -1; //除了root 還有點沒有in edge
27         }
28         int seq = inEdge[root] = 0;

```

```

29         memset(idx, -1, sizeof(idx));
30         memset(vis, -1, sizeof(vis));
31         // 找所有的 cycle，一起編號為 seq
32         for(int i=0; i<N; i++) {
33             result += inEdge[i];
34             int cur = i;
35             while(vis[cur]!=i && idx[cur]==-1) {
36                 if(cur == root) break;
37                 vis[cur] = i;
38                 cur = pre[cur];
39             }
40             if(cur!=root && idx[cur]==-1) {
41                 for(int j=pre[cur]; j!=cur; j=pre[j])
42                     idx[j] = seq;
43                 idx[cur] = seq++;
44             }
45         }
46         if(seq == 0) return result; // 沒有 cycle
47         for(int i=0; i<N; i++)
48             // 沒有被縮點的點
49             if(idx[i] == -1) idx[i] = seq++;
50         // 縮點並重新編號
51         for(Edge& e : edges) {
52             if(idx[e.s] != idx[e.t])
53                 e.cost -= inEdge[e.t];
54             e.s = idx[e.s];
55             e.t = idx[e.t];
56         }
57         N = seq;
58         root = idx[root];
59     }
60 }
61 =====
62 O(m+nlog n)時間內解決最小樹形圖問題的演算法。
63 typedef long long ll;
64 #define maxn 102
65 #define INF 0x3f3f3f3f
66 struct UnionFind {
67     int fa[maxn << 1];
68     UnionFind() { memset(fa, 0, sizeof(fa)); }
69     void clear(int n) {
70         memset(fa + 1, 0, sizeof(int) * n);
71     }
72     int find(int x) {
73         return fa[x] ? fa[x] = find(fa[x]) : x;
74     }
75     int operator[](int x) { return find(x); }
76 };
77 struct Edge {
78     int u, v, w, w0;
79 };
80 struct Heap {
81     Edge *e;
82     int rk, constant;
83     Heap *lch, *rch;
84     Heap(Edge *_e):
85         e(_e), rk(1), constant(0), lch(NULL), rch(NULL){}
86     void push() {
87         if (lch) lch->constant += constant;
88         if (rch) rch->constant += constant;
89         e->w += constant;
90         constant = 0;
91     }
92 };
93 Heap *merge(Heap *x, Heap *y) {
94     if (!x) return y;
95     if (!y) return x;
96     if (x->e->w + x->constant > y->e->w + y->constant)
97         swap(x, y);
98     x->push();
99     x->rch = merge(x->rch, y);
100     if (!x->lch || x->lch->rk < x->rch->rk)
101         swap(x->lch, x->rch);
102     if (x->rch)
103         x->rk = x->rch->rk + 1;
104     else
105         x->rk = 1;

```

```

106     return x;
107 }
108 Edge *extract(Heap *&x) {
109     Edge *r = x->e;
110     x->push();
111     x = merge(x->lch, x->rch);
112     return r;
113 }
114 vector<Edge> in[maxn];
115 int n, m, fa[maxn << 1], nxt[maxn << 1];
116 Edge *ed[maxn << 1];
117 Heap *Q[maxn << 1];
118 UnionFind id;
119 void contract() {
120     bool mark[maxn << 1];
121     //將圖上的每一個節點與其相連的那些節點進行記錄
122     for (int i = 1; i <= n; i++) {
123         queue<Heap *> q;
124         for (int j = 0; j < in[i].size(); j++)
125             q.push(new Heap(&in[i][j]));
126         while (q.size() > 1) {
127             Heap *u = q.front();
128             q.pop();
129             Heap *v = q.front();
130             q.pop();
131             q.push(merge(u, v));
132         }
133         Q[i] = q.front();
134     }
135     mark[1] = true;
136     for (int a=1, b=1, p; Q[a]; b=a, mark[b]=true){
137         //尋找最小入邊以及其端點，保證無環
138         do {
139             ed[a] = extract(Q[a]);
140             a = id[ed[a]->u];
141         } while (a == b && Q[a]);
142         if (a == b) break;
143         if (!mark[a]) continue;
144         //對發現的環進行收縮，以及環內的節點重新編號，
145         //總權值更新
146         for (a = b, n++; a != n; a = p) {
147             id.fa[a] = fa[a] = n;
148             if (Q[a]) Q[a]->constant -= ed[a]->w;
149             Q[n] = merge(Q[n], Q[a]);
150             p = id[ed[a]->u];
151             nxt[p == n ? b : p] = a;
152         }
153     }
154 }
155 ll expand(int x, int r);
156 ll expand_iter(int x) {
157     ll r = 0;
158     for (int u=nxt[x]; u!=x; u=nxt[u]){
159         if (ed[u]->w0 >= INF)
160             return INF;
161         else
162             r+=expand(ed[u]->v, u)+ed[u]->w0;
163     }
164     return r;
165 }
166 ll expand(int x, int t) {
167     ll r = 0;
168     for (; x != t; x = fa[x]) {
169         r += expand_iter(x);
170         if (r >= INF) return INF;
171     }
172     return r;
173 }
174 void link(int u, int v, int w) {
175     in[v].push_back({u, v, w, w});
176 }
177 int main() {
178     int rt;
179     scanf("%d %d %d", &n, &m, &rt);
180     for (int i = 0; i < m; i++) {
181         int u, v, w;
182         scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);

```

```

183         link(u, v, w);
184     }
185     //保證強連通
186     for (int i = 1; i <= n; i++)
187         link(i > 1 ? i - 1 : n, i, INF);
188     contract();
189     ll ans = expand(rt, n);
190     if (ans >= INF)
191         puts("-1");
192     else
193         printf("%lld\n", ans);
194     return 0;
195 }

```

3.10 二分圖最大匹配

```

1  /* 核心：最大點獨立集 = |V| -
   /最大匹配數/，用匈牙利演算法找出最大匹配數 */
2  struct Student {
3      int height;
4      char sex;
5      string musicStyle;
6      string sport;
7      bool canMatch(const Student& other) {
8          return ((abs(this->height - other.height) <=
9                  40) && (this->musicStyle ==
10                     other.musicStyle)
11                 && (this->sport != other.sport));
12     };
13  vector<Student> boys;
14  vector<Student> girls;
15  vector<vector<int>>> G;
16  bool used[505];
17  int p[505]; //pair of boys and girls -> p[j] = i
   代表i男生連到j女生
18  istream& operator >> (istream& input, Student&
19      student) {
20      input >> student.height >> student.sex >>
21          student.musicStyle >> student.sport;
22      return input;
23  }
24  bool match(int i) {
25      for (int j: G[i]) {
26          if (!used[j]) {
27              used[j] = true;
28              if (p[j] == -1 || match(p[j])) {
29                  p[j] = i;
30                  return true;
31              }
32          }
33      }
34      return false;
35  }
36  void maxMatch(int n) {
37      memset(p, -1, sizeof(p));
38      int res = 0;
39      for (int i = 0; i < boys.size(); ++i) {
40          memset(used, false, sizeof(used));
41          if (match(i))
42              ++res;
43      }
44      cout << n - res << '\n';
45  }
46  int main() {
47      int t, n;
48      scanf("%d", &t);
49      while (t--) {
50          scanf("%d", &n);
51          boys.clear();
52          girls.clear();
53          G.assign(n + 5, vector<int>());
54          Student student;

```



```

53     for (int i = 0; i < n; ++i) {
54         cin >> student;
55         if (student.sex == 'M')
56             boys.emplace_back(student);
57         else
58             girls.emplace_back(student);
59     }
60     for (int i = 0; i < boys.size(); ++i) {
61         for (int j = 0; j < girls.size(); ++j) {
62             if (boys[i].canMatch(girls[j])) {
63                 G[i].emplace_back(j);
64             }
65         }
66     }
67     maxMatch(n);
68 }
69 return 0;
70 }

```

3.11 JosephusProblem

```

1 //JosephusProblem, 只是規定要先砍1號
2 //所以當作有n - 1個人, 目標的13順移成12
3 //再者從0開始比較好算, 所以目標12順移成11
4 int getWinner(int n, int k) {
5     int winner = 0;
6     for (int i = 1; i <= n; ++i)
7         winner = (winner + k) % i;
8     return winner;
9 }
10 int main() {
11     int n;
12     while (scanf("%d", &n) != EOF && n){
13         --n;
14         for (int k = 1; k <= n; ++k){
15             if (getWinner(n, k) == 11){
16                 printf("%d\n", k);
17                 break;
18             }
19         }
20     }
21     return 0;
22 }

```

3.12 KM

```

1 /*題意: 給定一個W矩陣, 現在分成row、column兩個1維陣列
2 W[i][j]=k即代表column[i] + row[j]要>=k
3 求row[] 與 column[]的所有值在滿足矩陣W的要求之下
4 row[] + column[]所有元素相加起來要最小
5 利用KM求二分圖最大權匹配
6 Lx -> vertex labeling of X
7 Ly -> vertex labeling of y
8 一開始Lx[i] = max(W[i][j]), Ly = 0
9 Lx[i] + Ly[j] >= W[i][j]
10 要最小化全部的(Lx[i] + Ly[j])加總
11 不斷的調整vertex
12     labeling去找到一條交錯邊皆滿足Lx[i] + Ly[j]
13     == W[i][j]的增廣路
14 最後會得到正確的二分圖完美匹配中的最大權分配(先滿足最小
15 意義是將最大化所有匹配邊權重和的問題改成最小化所有點的
16 #define maxn 505
17 int W[maxn][maxn];
18 int Lx[maxn], Ly[maxn];
19 bool S[maxn], T[maxn];
20 //L[i] = j -> S_i配給T_j, -1 for 還沒匹配
21 int L[maxn];
22 int n;
23 bool match(int i) {
24     S[i] = true;
25     for (int j = 0; j < n; ++j) {
26         // KM重點

```

```

25         // Lx + Ly >= selected_edge(x, y)
26         // 要想辦法降低Lx + Ly
27         // 所以選Lx + Ly == selected_edge(x, y)
28         if (Lx[i] + Ly[j] == W[i][j] && !T[j]) {
29             T[j] = true;
30             if ((L[j] == -1) || match(L[j])) {
31                 L[j] = i;
32                 return true;
33             }
34         }
35     }
36     return false;
37 }
38 // 修改二分圖上的交錯路徑上點的權重
39 // 此舉是在通過調整vertex
40 // labeling看看能不能產生出新的增廣路(KM的增廣路要求Lx[i]
41 // + Ly[j] == W[i][j])
42 // 在這裡優先從最小的diff調調看, 才能保證最大權重匹配
43 void update()
44 {
45     int diff = 0x3f3f3f3f;
46     for (int i = 0; i < n; ++i) {
47         if (S[i]) {
48             for (int j = 0; j < n; ++j) {
49                 if (!T[j])
50                     diff = min(diff, Lx[i] + Ly[j] - W[i][j]);
51             }
52             for (int i = 0; i < n; ++i) {
53                 if (S[i]) Lx[i] -= diff;
54                 if (T[i]) Ly[i] += diff;
55             }
56         }
57     }
58 void KM()
59 {
60     for (int i = 0; i < n; ++i) {
61         L[i] = -1;
62         Lx[i] = Ly[i] = 0;
63         for (int j = 0; j < n; ++j)
64             Lx[i] = max(Lx[i], W[i][j]);
65     }
66     for (int i = 0; i < n; ++i) {
67         while(1) {
68             memset(S, false, sizeof(S));
69             memset(T, false, sizeof(T));
70             if (match(i))
71                 break;
72             else
73                 update(); //去調整vertex
74                             //labeling以增加增廣路徑
75         }
76     }
77 }
78 int main() {
79     while (scanf("%d", &n) != EOF) {
80         for (int i = 0; i < n; ++i)
81             for (int j = 0; j < n; ++j)
82                 scanf("%d", &W[i][j]);
83         KM();
84         int res = 0;
85         for (int i = 0; i < n; ++i) {
86             if (i != 0)
87                 printf("%d", Lx[i]);
88             else
89                 printf("%d", Lx[i]);
90             res += Lx[i];
91         }
92         puts("");
93         for (int i = 0; i < n; ++i) {
94             if (i != 0)
95                 printf("%d", Ly[i]);
96             else
97                 printf("%d", Ly[i]);
98             res += Ly[i];
99         }
100     }

```

```

98     puts("");
99     printf("%d\n", res);
100 }
101 return 0;
102 }

```

3.13 LCA 倍增法

```

1 //倍增法預處理  $O(n \log n)$ ，查詢  $O(\log n)$ ，利用 lca 找樹上任兩點
2 #define maxn 100005
3 struct Edge {
4     int u, v, w;
5 };
6 vector<vector<Edge>> G; // tree
7 int fa[maxn][31]; // fa[u][i] -> u 的第  $2^i$  個祖先
8 long long dis[maxn][31];
9 int dep[maxn]; // 深度
10 void dfs(int u, int p) { // 預處理 fa
11     fa[u][0] = p; // 因為 u 的第  $2^0 = 1$  的祖先就是 p
12     dep[u] = dep[p] + 1;
13     // 第  $2^i$  的祖先是 (第  $2^{i-1}$  個祖先) 的第  $2^{i-1}$  的祖先
14     // ex: 第 8 個祖先是 (第 4 個祖先) 的第 4 個祖先
15     for (int i = 1; i < 31; ++i) {
16         fa[u][i] = fa[fa[u][i-1]][i-1];
17         dis[u][i] = dis[fa[u][i-1]][i-1] + dis[u][i-1];
18     }
19     // 遍歷子節點
20     for (Edge& edge : G[u]) {
21         if (edge.v == p) continue;
22         dis[edge.v][0] = edge.w;
23         dfs(edge.v, u);
24     }
25 }
26
27 long long lca(int x, int y)
28 { // 此函數是找 lca 同時計算 x、y 的距離 -> dis(x, lca) + dis(lca, y)
29     // 讓 y 比 x 深
30     if (dep[x] > dep[y]) swap(x, y);
31     int deltaDep = dep[y] - dep[x];
32     long long res = 0;
33     // 讓 y 與 x 在同一個深度
34     for (int i = 0; deltaDep != 0; ++i, deltaDep >>= 1)
35         if (deltaDep & 1)
36             res += dis[y][i], y = fa[y][i];
37     if (y == x) // x = y -> x、y 彼此是彼此的祖先
38         return res;
39     // 往上找，一起跳，但 x、y 不能重疊
40     for (int i = 30; i >= 0 && y != x; --i) {
41         if (fa[x][i] != fa[y][i]) {
42             res += dis[x][i] + dis[y][i];
43             x = fa[x][i];
44             y = fa[y][i];
45         }
46     }
47     // 最後發現不能跳了，此時 x 的第  $2^0 = 1$  個祖先 (或說 y 的第  $2^0 = 1$  的祖先) 即為 x、y 的 lca
48     res += dis[x][0] + dis[y][0];
49     return res;
50 }
51 int main() {
52     int n, q;
53     while (~scanf("%d", &n) && n) {
54         int v, w;
55         G.assign(n + 5, vector<Edge>());
56         for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
57             scanf("%d %d", &v, &w);
58             G[i + 1].push_back({i + 1, v + 1, w});
59             G[v + 1].push_back({v + 1, i + 1, w});
60         }

```

```

61     dfs(1, 0);
62     scanf("%d", &q);
63     int u;
64     while (q--) {
65         scanf("%d %d", &u, &v);
66         printf("%lld%c", lca(u + 1, v + 1), (q) ? ' ' : '\n');
67     }
68 }
69 return 0;
70 }

```

3.14 LCA 樹壓平 RMQ

```

1 //樹壓平求 LCA RMQ (sparse table)
2 //  $O(n \log n)$  建立， $O(1)$  查詢，求任意兩點距離，
3 // 如果用笛卡兒樹可以壓到  $O(n)$  建立， $O(1)$  查詢
4 // 理論上可以過，但遇到直鏈的 case dfs 深度會 stack overflow
5 #define maxn 100005
6 struct Edge {
7     int u, v, w;
8 };
9 int dep[maxn], pos[maxn];
10 long long dis[maxn];
11 int st[maxn * 2][32]; // sparse table
12 int realLCA[maxn * 2][32];
13 // 最小深度對應的節點，及真正的 LCA
14 int Log[maxn]; // 取代 std::log2
15 int tp; // timestamp
16 vector<vector<Edge>> G; // tree
17 void calLog() {
18     Log[1] = 0;
19     Log[2] = 1;
20     for (int i = 3; i < maxn; ++i)
21         Log[i] = Log[i / 2] + 1;
22 }
23 void buildST() {
24     for (int j = 0; Log[tp]; ++j) {
25         for (int i = 0; i + (1 << j) - 1 < tp; ++i) {
26             if (st[i - 1][j] < st[i - 1][j + (1 << i - 1)]) {
27                 st[i][j] = st[i - 1][j];
28                 realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j];
29             }
30             else {
31                 st[i][j] = st[i - 1][j + (1 << i - 1)];
32                 realLCA[i][j] = realLCA[i - 1][j + (1 << i - 1)];
33             }
34         }
35     }
36 } //  $O(n \log n)$ 
37 int query(int l, int r) { // [l, r] min
38     // depth 即為 lca 的深度
39     int k = Log[r - l + 1];
40     if (st[l][k] < st[r - (1 << k) + 1][k])
41         return realLCA[l][k];
42     else
43         return realLCA[r - (1 << k) + 1][k];
44 }
45 void dfs(int u, int p) { // euler tour
46     pos[u] = tp;
47     st[tp][0] = dep[u];
48     realLCA[tp][0] = dep[u];
49     ++tp;
50     for (int i = 0; i < G[u].size(); ++i) {
51         Edge& edge = G[u][i];
52         if (edge.v == p) continue;
53         dep[edge.v] = dep[u] + 1;
54         dis[edge.v] = dis[u] + edge.w;
55         dfs(edge.v, u);
56         st[tp++][0] = dep[u];
57     }
58 }

```

```

56 long long getDis(int u, int v) {
57     if (pos[u] > pos[v])
58         swap(u, v);
59     int lca = query(pos[u], pos[v]);
60     return dis[u] + dis[v] - 2 * dis[query(pos[u],
61         pos[v])];
62 }
63 int main() {
64     int n, q;
65     callog();
66     while (~scanf("%d", &n) && n) {
67         int v, w;
68         G.assign(n + 5, vector<Edge>());
69         tp = 0;
70         for (int i = 1; i <= n - 1; ++i) {
71             scanf("%d %d", &v, &w);
72             G[i].push_back({i, v, w});
73             G[v].push_back({v, i, w});
74         }
75         dfs(0, -1);
76         buildST();
77         scanf("%d", &q);
78         int u;
79         while (q--) {
80             scanf("%d %d", &u, &v);
81             printf("%lld%c", getDis(u, v), (q) ? ' '
82                 : '\n');
83         }
84     }
85     return 0;
86 }

```

3.15 MCMF

```

1 #define maxn 225
2 #define INF 0x3f3f3f3f
3 struct Edge {
4     int u, v, cap, flow, cost;
5 };
6 //node size, edge size, source, target
7 int n, m, s, t;
8 vector<vector<int>> G;
9 vector<Edge> edges;
10 //SPFA用
11 bool inqueue[maxn];
12 //SPFA用的dis[]
13 long long dis[maxn];
14 //maxFlow一路扣回去時要知道parent
15 //<注> 在這題因為G[]中存的是edgeIndex in edges[]
16 //
17 //    所以parent存的也是對應edges[]中的edgeIndex(主要是方便)
18 int parent[maxn];
19 //maxFlow時需要紀錄到node u時的bottleneck
20 //同時也代表著u該次流出去的量
21 long long outFlow[maxn];
22 void addEdge(int u, int v, int cap, int cost) {
23     edges.emplace_back(Edge{u, v, cap, 0, cost});
24     edges.emplace_back(Edge{v, u, 0, 0, -cost});
25     m = edges.size();
26     G[u].emplace_back(m - 2);
27     G[v].emplace_back(m - 1);
28 }
29 //一邊求最短路的同時一邊MaxFlow
30 bool SPFA(long long& maxFlow, long long& minCost) {
31     //memset(outFlow, 0x3f, sizeof(outFlow));
32     memset(dis, 0x3f, sizeof(dis));
33     memset(inqueue, false, sizeof(inqueue));
34     queue<int> q;
35     q.push(s);
36     dis[s] = 0;
37     inqueue[s] = true;
38     outFlow[s] = INF;
39     while (!q.empty()) {
40         int u = q.front();
41         q.pop();

```

```

41         inqueue[u] = false;
42         for (const int edgeIndex: G[u]) {
43             const Edge& edge = edges[edgeIndex];
44             if ((edge.cap > edge.flow) &&
45                 (dis[edge.v] > dis[u] + edge.cost)) {
46                 dis[edge.v] = dis[u] + edge.cost;
47                 parent[edge.v] = edgeIndex;
48                 outFlow[edge.v] = min(outFlow[u],
49                     (long long)(edge.cap -
50                         edge.flow));
51                 if (!inqueue[edge.v]) {
52                     q.push(edge.v);
53                     inqueue[edge.v] = true;
54                 }
55             }
56         }
57         //如果dis[t] > 0代表根本不賺還倒賠
58         if (dis[t] > 0)
59             return false;
60         maxFlow += outFlow[t];
61         minCost += dis[t] * outFlow[t];
62         //一路更新回去這次最短路流完後要維護的MaxFlow演算法相關(如反
63         int curr = t;
64         while (curr != s) {
65             edges[parent[curr]].flow += outFlow[t];
66             edges[parent[curr] ^ 1].flow -= outFlow[t];
67             curr = edges[parent[curr]].u;
68         }
69         return true;
70     }
71 }
72 long long MCMF() {
73     long long maxFlow = 0;
74     long long minCost = 0;
75     while (SPFA(maxFlow, minCost))
76         ;
77     return minCost;
78 }
79 int main() {
80     int T;
81     scanf("%d", &T);
82     for (int Case = 1; Case <= T; ++Case) {
83         //總共幾個月，囤貨成本
84         int M, I;
85         scanf("%d %d", &M, &I);
86         //node size
87         n = M + M + 2;
88         G.assign(n + 5, vector<int>());
89         edges.clear();
90         s = 0;
91         t = M + M + 1;
92         for (int i = 1; i <= M; ++i) {
93             int produceCost, produceMax, sellPrice,
94                 sellMax, inventoryMonth;
95             scanf("%d %d %d %d %d", &produceCost,
96                 &produceMax, &sellPrice, &sellMax,
97                 &inventoryMonth);
98             addEdge(s, i, produceMax, produceCost);
99             addEdge(M + i, t, sellMax, -sellPrice);
100             for (int j = 0; j <= inventoryMonth; ++j) {
101                 if (i + j <= M)
102                     addEdge(i, M + i + j, INF, I * j);
103             }
104             printf("Case %d: %lld\n", Case, -MCMF());
105         }
106     }
107     return 0;
108 }

```

3.16 莫隊

```

1 /*利用prefix前綴XOR和
2 如果要求[x, y]的XOR和只要回答prefix[y] ^ prefix[x -
   1]即可在O(1)回答

```

```

3 同時維護cnt[i]代表[x, y]XOR和 == i的個數
4 如此我們知道[l, r]可以快速知道[l - 1, r], [l + 1,
   r], [l, r - 1], [l, r + 1]的答案
5 就符合Mo's algorithm的思維 $O(N * \sqrt{n})$ 
6 每次轉移為 $O(1)$ ，具體轉移方法在下面*/
7 #define maxn 100005
8 //在此prefix[i]是[1, i]的XOR和
9 int prefix[maxn];
10 //log2(1000000) =
   19.931568569324174087221916576937...
11 //所以開到1 << 20
12 //cnt[i]代表的是有符合nums[x, y] such that nums[x] ^
   nums[x + 1] ^ .. ^ nums[y] == i
13 //的個數
14 long long cnt[1 << 20];
15 //塊大小 -> sqrt(n)
16 int sqrtQ;
17 struct Query {
18     int l, r, id;
19     bool operator < (const Query& other) const {
20         if (this->l / sqrtQ != other.l / sqrtQ)
21             return this->l < other.l;
22         //奇偶排序(優化)
23         if (this->l / sqrtQ & 1)
24             return this->r < other.r;
25         return this->r > other.r;
26     }
27 };
28 Query queries[maxn];
29 long long ans[maxn];
30 long long res = 0;
31 int k;
32 void add(int x) {
33     res += cnt[k ^ prefix[x]];
34     ++cnt[prefix[x]];
35 }
36 void sub(int x) {
37     --cnt[prefix[x]];
38     res -= cnt[k ^ prefix[x]];
39 }
40 int main() {
41     int n, m;
42     scanf("%d %d %d", &n, &m, &k);
43     sqrtQ = sqrt(n);
44     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
45         scanf("%d", &prefix[i]);
46         prefix[i] ^= prefix[i - 1];
47     }
48     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
49         scanf("%d %d", &queries[i].l, &queries[i].r);
50         //減1是因為prefix[i]是[1,
           i]的前綴XOR和，所以題目問[l,
           r]我們要回答[l - 1, r]的答案
51         --queries[i].l;
52         queries[i].id = i;
53     }
54     sort(queries + 1, queries + m + 1);
55     int l = 1, r = 0;
56     for (int i = 1; i <= m; ++i) {
57         while (l < queries[i].l) {
58             sub(l);
59             ++l;
60         }
61         while (l > queries[i].l) {
62             --l;
63             add(l);
64         }
65         while (r < queries[i].r) {
66             ++r;
67             add(r);
68         }
69         while (r > queries[i].r) {
70             sub(r);
71             --r;
72         }
73         ans[queries[i].id] = res;

```

```

74     }
75     for (int i = 1; i <= m; ++i){
76         printf("%lld\n", ans[i]);
77     }
78     return 0;
79 }

```

3.17 Dancing Links

```

1 struct DLX {
2     int seq, resSize;
3     int col[maxn], row[maxn];
4     int U[maxn], D[maxn], R[maxn], L[maxn];
5     int rowHead[maxn], colSize[maxn];
6     int result[maxn];
7     DLX(int r, int c) {
8         for(int i=0; i<=c; i++) {
9             L[i] = i-1, R[i] = i+1;
10            U[i] = D[i] = i;
11        }
12        L[R[seq]=c]=0=c;
13        resSize = -1;
14        memset(rowHead, 0, sizeof(rowHead));
15        memset(colSize, 0, sizeof(colSize));
16    }
17    void insert(int r, int c) {
18        row[++seq]=r, col[seq]=c, ++colSize[c];
19        U[seq]=c, D[seq]=D[c], U[D[c]]=seq, D[c]=seq;
20        if(rowHead[r]) {
21            L[seq]=rowHead[r], R[seq]=R[rowHead[r]];
22            L[R[rowHead[r]]]=seq, R[rowHead[r]]=seq;
23        } else {
24            rowHead[r] = L[seq] = R[seq] = seq;
25        }
26    }
27    void remove(int c) {
28        L[R[c]] = L[c], R[L[c]] = R[c];
29        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
30            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j]) {
31                U[D[j]] = U[j];
32                D[U[j]] = D[j];
33                --colSize[col[j]];
34            }
35        }
36    }
37    void recover(int c) {
38        for(int i=U[c]; i!=c; i=U[i]) {
39            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j]) {
40                U[D[j]] = D[U[j]] = j;
41                ++colSize[col[j]];
42            }
43        }
44        L[R[c]] = R[L[c]] = c;
45    }
46    bool dfs(int idx=0) { // 判斷其中一解版
47        if(R[0] == 0) {
48            resSize = idx;
49            return true;
50        }
51        int c = R[0];
52        for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
53            if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
54        }
55        remove(c);
56        for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
57            result[idx] = row[i];
58            for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
59                remove(col[j]);
60            if(dfs(idx+1)) return true;
61            for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
62                recover(col[j]);
63        }
64        recover(c);
65        return false;
66    }

```

```

67 void dfs(int idx=0) { // 判斷最小 dfs depth 版
68     if(R[0] == 0) {
69         resSize = min(resSize, idx); // 注意init值
70         return;
71     }
72     int c = R[0];
73     for(int i=R[0]; i; i=R[i]) {
74         if(colSize[i] < colSize[c]) c = i;
75     }
76     remove(c);
77     for(int i=D[c]; i!=c; i=D[i]) {
78         for(int j=R[i]; j!=i; j=R[j])
79             remove(col[j]);
80         dfs(idx+1);
81         for(int j=L[i]; j!=i; j=L[j])
82             recover(col[j]);
83     }
84     recover(c);
85 }
86 };

```

4 DataStructure

4.1 線段樹 1D

```

1 #define MAXN 1000
2 int data[MAXN]; //原數據
3 int st[4 * MAXN]; //線段樹
4 int tag[4 * MAXN]; //懶標
5 inline int pull(int l, int r) {
6     // 隨題目改變sum、max、min
7     // l、r是左右樹的index
8     return st[l] + st[r];
9 }
10 void build(int l, int r, int i) {
11     // 在[l, r]區間建樹，目前根的index為i
12     if (l == r) {
13         st[i] = data[l];
14         return;
15     }
16     int mid = l + ((r - l) >> 1);
17     build(l, mid, i * 2);
18     build(mid + 1, r, i * 2 + 1);
19     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
20 }
21 int query(int ql, int qr, int l, int r, int i) {
22     // [ql, qr]是查詢區間，[l, r]是當前節點包含的區間
23     if (ql <= l && r <= qr)
24         return st[i];
25     int mid = l + ((r - l) >> 1);
26     if (tag[i]) {
27         //如果當前懶標有值則更新左右節點
28         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
29         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
30         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
31         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
32         tag[i] = 0;
33     }
34     int sum = 0;
35     if (ql <= mid)
36         sum += query(ql, qr, l, mid, i * 2);
37     if (qr > mid)
38         sum += query(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1);
39     return sum;
40 }
41 void update(int ql, int qr, int l, int r, int i, int c) {
42     // [ql, qr]是查詢區間，[l, r]是當前節點包含的區間
43     // c是變化量
44     if (ql <= l && r <= qr) {
45         st[i] += (r - l + 1) * c;
46         //求和，此需乘上區間長度
47         tag[i] += c;
48         return;
49     }
50     int mid = l + ((r - l) >> 1);
51     if (tag[i] && l != r) {
52         //如果當前懶標有值則更新左右節點
53         st[i * 2] += tag[i] * (mid - l + 1);
54         st[i * 2 + 1] += tag[i] * (r - mid);
55         tag[i * 2] += tag[i]; //下傳懶標至左節點
56         tag[i * 2 + 1] += tag[i]; //下傳懶標至右節點
57         tag[i] = 0;
58     }
59     if (ql <= mid) update(ql, qr, l, mid, i * 2, c);
60     if (qr > mid) update(ql, qr, mid + 1, r, i * 2 + 1, c);
61     st[i] = pull(i * 2, i * 2 + 1);
62 }
63 //如果是直接改值而不是加值，query與update中的tag與st的
64 //改值從+=改成=

```

4.2 線段樹 2D

```

1 //純2D segment tree 區間查詢單點修改最大最小值
2 #define maxn 2005 //500 * 4 + 5
3 int maxST[maxn][maxn], minST[maxn][maxn];
4 int N;
5 void modifyY(int index, int l, int r, int val, int
6     yPos, int xIndex, bool xIsLeaf) {
7     if (l == r) {
8         if (xIsLeaf) {
9             maxST[xIndex][index] =
10                 minST[xIndex][index] = val;
11             return;
12         }
13         maxST[xIndex][index] = max(maxST[xIndex *
14             2][index], maxST[xIndex * 2 + 1][index]);
15         minST[xIndex][index] = min(minST[xIndex *
16             2][index], minST[xIndex * 2 + 1][index]);
17     }
18     else {
19         int mid = (l + r) / 2;
20         if (yPos <= mid)
21             modifyY(index * 2, l, mid, val, yPos,
22                 xIndex, xIsLeaf);
23         else
24             modifyY(index * 2 + 1, mid + 1, r, val,
25                 yPos, xIndex, xIsLeaf);
26         maxST[xIndex][index] =
27             max(maxST[xIndex][index * 2],
28                 maxST[xIndex][index * 2 + 1]);
29         minST[xIndex][index] =
30             min(minST[xIndex][index * 2],
31                 minST[xIndex][index * 2 + 1]);
32     }
33 }
34 void modifyX(int index, int l, int r, int val, int
35     xPos, int yPos) {
36     if (l == r) {
37         modifyY(1, 1, N, val, yPos, index, true);
38     }
39     else {
40         int mid = (l + r) / 2;
41         if (xPos <= mid)
42             modifyX(index * 2, l, mid, val, xPos,
43                 yPos);
44         else
45             modifyX(index * 2 + 1, mid + 1, r, val,
46                 xPos, yPos);
47         modifyY(1, 1, N, val, yPos, index, false);
48     }
49 }
50 void queryY(int index, int l, int r, int yql, int
51     yqr, int xIndex, int& vmax, int& vmin) {
52     if (yql <= l && r <= yqr) {
53         vmax = max(vmax, maxST[xIndex][index]);
54         vmin = min(vmin, minST[xIndex][index]);
55     }
56 }

```

```

43     else
44     {
45         int mid = (l + r) / 2;
46         if (yql <= mid)
47             queryY(index * 2, l, mid, yql, yqr,
48                 xIndex, vmax, vmin);
49         if (mid < yqr)
50             queryY(index * 2 + 1, mid + 1, r, yql,
51                 yqr, xIndex, vmax, vmin);
52     }
53 }
54 void queryX(int index, int l, int r, int xql, int
55     xqr, int yql, int yqr, int& vmax, int& vmin) {
56     if (xql <= l && r <= xqr) {
57         queryY(1, 1, N, yql, yqr, index, vmax, vmin);
58     }
59     else {
60         int mid = (l + r) / 2;
61         if (xql <= mid)
62             queryX(index * 2, l, mid, xql, xqr, yql,
63                 yqr, vmax, vmin);
64         if (mid < xqr)
65             queryX(index * 2 + 1, mid + 1, r, xql,
66                 xqr, yql, yqr, vmax, vmin);
67     }
68 }
69 int main() {
70     while (scanf("%d", &N) != EOF) {
71         int val;
72         for (int i = 1; i <= N; ++i) {
73             for (int j = 1; j <= N; ++j) {
74                 scanf("%d", &val);
75                 modifyX(1, 1, N, val, i, j);
76             }
77         }
78         int q;
79         int vmax, vmin;
80         int xql, xqr, yql, yqr;
81         char op;
82         scanf("%d", &q);
83         while (q--) {
84             getchar(); //for \n
85             scanf("%c", &op);
86             if (op == 'q') {
87                 scanf("%d %d %d %d", &xql, &yql,
88                     &xqr, &yqr);
89                 vmax = -0x3f3f3f3f;
90                 vmin = 0x3f3f3f3f;
91                 queryX(1, 1, N, xql, xqr, yql, yqr,
92                     vmax, vmin);
93                 printf("%d %d\n", vmax, vmin);
94             }
95             else {
96                 scanf("%d %d %d", &xql, &yql, &val);
97                 modifyX(1, 1, N, val, xql, yql);
98             }
99         }
100     }
101     return 0;
102 }

```

4.3 權值線段樹

```

1 //權值線段樹 + 離散化 解決區間第k小問題
2 //其他網路上的解法: 2個heap, Treap, AVL tree
3 #define maxn 30005
4 int nums[maxn];
5 int getArr[maxn];
6 int id[maxn];
7 int st[maxn << 2];
8 void update(int index, int l, int r, int qx) {
9     if (l == r)
10     {
11         ++st[index];
12         return;

```

```

13     }
14     int mid = (l + r) / 2;
15     if (qx <= mid)
16         update(index * 2, l, mid, qx);
17     else
18         update(index * 2 + 1, mid + 1, r, qx);
19     st[index] = st[index * 2] + st[index * 2 + 1];
20 }
21 //找區間第k個小的
22 int query(int index, int l, int r, int k) {
23     if (l == r)
24         return id[l];
25     int mid = (l + r) / 2;
26     //k比左子樹小
27     if (k <= st[index * 2])
28         return query(index * 2, l, mid, k);
29     else
30         return query(index * 2 + 1, mid + 1, r, k -
31             st[index * 2]);
32 }
33 int main() {
34     int t;
35     cin >> t;
36     bool first = true;
37     while (t--) {
38         if (first)
39             first = false;
40         else
41             puts("");
42         memset(st, 0, sizeof(st));
43         int m, n;
44         cin >> m >> n;
45         for (int i = 1; i <= m; ++i) {
46             cin >> nums[i];
47             id[i] = nums[i];
48         }
49         for (int i = 0; i < n; ++i)
50             cin >> getArr[i];
51         //離散化
52         //防止m == 0
53         if (m)
54             sort(id + 1, id + m + 1);
55         int stSize = unique(id + 1, id + m + 1) - (id
56             + 1);
57         for (int i = 1; i <= m; ++i) {
58             nums[i] = lower_bound(id + 1, id + stSize
59                 + 1, nums[i]) - id;
60         }
61         int addCount = 0;
62         int getCount = 0;
63         int k = 1;
64         while (getCount < n) {
65             if (getArr[getCount] == addCount) {
66                 printf("%d\n", query(1, 1, stSize,
67                     k));
68                 ++k;
69                 ++getCount;
70             }
71             else {
72                 update(1, 1, stSize, nums[addCount +
73                     1]);
74                 ++addCount;
75             }
76         }
77     }
78     return 0;
79 }

```

4.4 Trie

```

1 const int maxn = 300000 + 10;
2 const int mod = 20071027;
3 int dp[maxn];
4 int mp[4000*100 + 10][26];

```



```

5 char str[maxn];
6 struct Trie {
7     int seq;
8     int val[maxn];
9     Trie() {
10         seq = 0;
11         memset(val, 0, sizeof(val));
12         memset(mp, 0, sizeof(mp));
13     }
14     void insert(char* s, int len) {
15         int r = 0;
16         for(int i=0; i<len; i++) {
17             int c = s[i] - 'a';
18             if(!mp[r][c]) mp[r][c] = ++seq;
19             r = mp[r][c];
20         }
21         val[r] = len;
22         return;
23     }
24     int find(int idx, int len) {
25         int result = 0;
26         for(int r=0; idx<len; idx++) {
27             int c = str[idx] - 'a';
28             if(!r = mp[r][c]) return result;
29             if(val[r])
30                 result = (result + dp[idx + 1]) % mod;
31         }
32         return result;
33     }
34 };
35 int main() {
36     int n, tc = 1;
37     while(~scanf("%s%d", str, &n)) {
38         Trie tr;
39         int len = strlen(str);
40         char word[100+10];
41         memset(dp, 0, sizeof(dp));
42         dp[len] = 1;
43         while(n--) {
44             scanf("%s", word);
45             tr.insert(word, strlen(word));
46         }
47         for(int i=len-1; i>=0; i--)
48             dp[i] = tr.find(i, len);
49         printf("Case %d: %d\n", tc++, dp[0]);
50     }
51     return 0;
52 }
53 /****Input****
54 * abcd
55 * 4
56 * a b cd ab
57 *****
58 ****Output***
59 * Case 1: 2
60 *****/

```

4.5 單調隊列

```

1 //單調隊列
2 "如果一個選手比你小還比你強，你就可以退役了。"--單調隊列
3
4 example
5
6 給出一個長度為 n 的數組，
7 輸出每 k 個連續的數中的最大值和最小值。
8
9 #include <bits/stdc++.h>
10 #define maxn 1000100
11 using namespace std;
12 int q[maxn], a[maxn];
13 int n, k;
14
15 void getmin() {
16     // 得到這個隊列裡的最小值，直接找到最後的就行了

```

```

17     int head=0, tail=0;
18     for(int i=1; i<=k; i++) {
19         while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
20         q[++tail]=i;
21     }
22     for(int i=k; i<=n; i++) {
23         while(head<=tail&&a[q[tail]]>=a[i]) tail--;
24         q[++tail]=i;
25         while(q[head]<=i-k) head++;
26         cout<<a[q[head]]<<" ";
27     }
28     cout<<endl;
29 }
30
31 void getmax() { // 和上面同理
32     int head=0, tail=0;
33     for(int i=1; i<=k; i++) {
34         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i]) tail--;
35         q[++tail]=i;
36     }
37     for(int i=k; i<=n; i++) {
38         while(head<=tail&&a[q[tail]]<=a[i]) tail--;
39         q[++tail]=i;
40         while(q[head]<=i-k) head++;
41         cout<<a[q[head]]<<" ";
42     }
43     cout<<endl;
44 }
45
46 int main(){
47     cin>>n>>k; //每k個連續的數
48     for(int i=1; i<=n; i++) cin>>a[i];
49     getmin();
50     getmax();
51     return 0;
52 }

```

5 geometry

5.1 intersection

```

1 using LL = long long;
2
3 struct Point2D {
4     LL x, y;
5 };
6
7 struct Line2D {
8     Point2D s, e;
9     LL a, b, c; // L: ax + by = c
10     Line2D(Point2D s, Point2D e): s(s), e(e) {
11         a = e.y - s.y;
12         b = s.x - e.x;
13         c = a * s.x + b * s.y;
14     }
15 };
16
17 // 用克拉馬公式求二元一次解
18 Point2D intersection2D(Line2D l1, Line2D l2) {
19     LL D = l1.a * l2.b - l2.a * l1.b;
20     LL Dx = l1.c * l2.b - l2.c * l1.b;
21     LL Dy = l1.a * l2.c - l2.a * l1.c;
22
23     if(D) { // intersection
24         double x = 1.0 * Dx / D;
25         double y = 1.0 * Dy / D;
26     } else {
27         if(Dx || Dy) // Parallel lines
28             else // Same line
29     }
30 }

```

5.2 半平面相交

```

1 // Q: 給定一張凸包(已排序的點),
2 // 找出圖中離凸包外最遠的距離
3
4 const int maxn = 100 + 10;
5 const double eps = 1e-7;
6
7 struct Vector {
8     double x, y;
9     Vector(double x=0.0, double y=0.0): x(x), y(y) {}
10
11     Vector operator+(Vector v) {
12         return Vector(x+v.x, y+v.y);
13     }
14     Vector operator-(Vector v) {
15         return Vector(x-v.x, y-v.y);
16     }
17     Vector operator*(double val) {
18         return Vector(x*val, y*val);
19     }
20     double dot(Vector v) { return x*v.x + y*v.y; }
21     double cross(Vector v) { return x*v.y - y*v.x; }
22     double length() { return sqrt(dot(*this)); }
23     Vector unit_normal_vector() {
24         double len = length();
25         return Vector(-y/len, x/len);
26     }
27 };
28
29 using Point = Vector;
30
31 struct Line {
32     Point p;
33     Vector v;
34     double ang;
35     Line(Point p={}, Vector v={}): p(p), v(v) {
36         ang = atan2(v.y, v.x);
37     }
38     bool operator<(const Line& l) const {
39         return ang < l.ang;
40     }
41     Point intersection(Line l) {
42         Vector u = p - l.p;
43         double t = l.v.cross(u) / v.cross(l.v);
44         return p + v*t;
45     }
46 };
47
48 int n, m;
49 Line narrow[maxn]; // 要判斷的直線
50 Point poly[maxn]; // 能形成半平面交的凸包邊界點
51
52 // return true if point p is on the left of line l
53 bool onLeft(Point p, Line l) {
54     return l.v.cross(p-l.p) > 0;
55 }
56
57 int halfplaneIntersection() {
58     int l, r;
59     Line L[maxn]; // 排序後的向量隊列
60     Point P[maxn]; // s[i] 跟 s[i-1] 的交點
61
62     L[l=r=0] = narrow[0]; // notice: narrow is sorted
63     for(int i=1; i<n; i++) {
64         while(l<r && !onLeft(P[r-1], narrow[i])) r--;
65         while(l<r && !onLeft(P[l], narrow[i])) l++;
66
67         L[++r] = narrow[i];
68         if(l < r) P[r-1] = L[r-1].intersection(L[r]);
69     }
70
71     while(l<r && !onLeft(P[r-1], L[l])) r--;
72     if(r-l <= 1) return 0;
73
74     P[r] = L[r].intersection(L[l]);

```

```

75
76     int m=0;
77     for(int i=1; i<=r; i++) {
78         poly[m++] = P[i];
79     }
80
81     return m;
82 }
83
84 Point pt[maxn];
85 Vector vec[maxn];
86 Vector normal[maxn]; // normal[i] = vec[i] 的單位法向量
87
88 double bsearch(double l=0.0, double r=1e4) {
89     if(abs(r-l) < eps) return l;
90
91     double mid = (l + r) / 2;
92
93     for(int i=0; i<n; i++) {
94         narrow[i] = Line(pt[i]+normal[i]*mid, vec[i]);
95     }
96
97     if(halfplaneIntersection())
98         return bsearch(mid, r);
99     else return bsearch(l, mid);
100 }
101
102 int main() {
103     while(~scanf("%d", &n) && n) {
104         for(int i=0; i<n; i++) {
105             double x, y;
106             scanf("%lf%lf", &x, &y);
107             pt[i] = {x, y};
108         }
109         for(int i=0; i<n; i++) {
110             vec[i] = pt[(i+1)%n] - pt[i];
111             normal[i] = vec[i].unit_normal_vector();
112         }
113
114         printf("%.6lf\n", bsearch());
115     }
116     return 0;
117 }

```

5.3 凸包

```

1 // Q: 平面上給定多個區域，由多個座標點所形成，再給定
2 // 多點(x,y)，判斷有落點的區域(destroyed)的面積總和。
3 #include <bits/stdc++.h>
4 using namespace std;
5
6 const int maxn = 500 + 10;
7 const int maxCoordinate = 500 + 10;
8
9 struct Point {
10     int x, y;
11 };
12
13 int n;
14 bool destroyed[maxn];
15 Point arr[maxn];
16 vector<Point> polygons[maxn];
17
18 void scanAndSortPoints() {
19     int minX = maxCoordinate, minY = maxCoordinate;
20     for(int i=0; i<n; i++) {
21         int x, y;
22         scanf("%d%d", &x, &y);
23         arr[i] = (Point){x, y};
24         if(y < minY || (y == minY && x < minX)) {
25             // If there are floating points, use:
26             // if(y<minY || (abs(y-minY)<eps && x<minX)) {
27                 minX = x, minY = y;
28             }
29     }

```

```

30     sort(arr, arr+n, [minX, minY](Point& a, Point& b){
31         double theta1 = atan2(a.y - minY, a.x - minX);
32         double theta2 = atan2(b.y - minY, b.x - minX);
33         return theta1 < theta2;
34     });
35     return;
36 }
37
38 // returns cross product of u(AB) x v(AC)
39 int cross(Point& A, Point& B, Point& C) {
40     int u[2] = {B.x - A.x, B.y - A.y};
41     int v[2] = {C.x - A.x, C.y - A.y};
42     return (u[0] * v[1]) - (u[1] * v[0]);
43 }
44
45 // size of arr = n >= 3
46 // st = the stack using vector, m = index of the top
47 vector<Point> convex_hull() {
48     vector<Point> st(arr, arr+3);
49     for(int i=3, m=2; i<n; i++, m++) {
50         while(m >= 2) {
51             if(cross(st[m], st[m-1], arr[i]) < 0)
52                 break;
53             st.pop_back();
54             m--;
55         }
56         st.push_back(arr[i]);
57     }
58     return st;
59 }
60
61 bool inPolygon(vector<Point>& vec, Point p) {
62     vec.push_back(vec[0]);
63     for(int i=1; i<vec.size(); i++) {
64         if(cross(vec[i-1], vec[i], p) < 0) {
65             vec.pop_back();
66             return false;
67         }
68     }
69     vec.pop_back();
70     return true;
71 }
72
73     1 | x1   x2   x3   x4   x5           xn |
74   A = - |   x   x   x   x   x   ... x   |
75     2 | y1   y2   y3   y4   y5           yn |
76 double calculateArea(vector<Point>& v) {
77     v.push_back(v[0]); // make v[n] = v[0]
78     double result = 0.0;
79     for(int i=1; i<v.size(); i++)
80         result += v[i-1].x*v[i].y - v[i-1].y*v[i].x;
81     v.pop_back();
82     return result / 2.0;
83 }
84
85 int main() {
86     int p = 0;
87     while(~scanf("%d", &n) && (n != -1)) {
88         scanAndSortPoints();
89         polygons[p++] = convex_hull();
90     }
91
92     int x, y;
93     double result = 0.0;
94     while(~scanf("%d%d", &x, &y)) {
95         for(int i=0; i<p; i++) {
96             if(inPolygon(polygons[i], (Point){x, y}))
97                 destroyed[i] = true;
98         }
99     }
100     for(int i=0; i<p; i++) {
101         if(destroyed[i])
102             result += calculateArea(polygons[i]);
103     }
104     printf("%.2lf\n", result);
105     return 0;
106 }

```

6 DP

6.1 抽屜

```

1 long long dp[70][70][2];
2 // 初始條件
3 dp[1][0][0] = dp[1][1][1] = 1;
4 for (int i = 2; i <= 66; ++i){
5     // i個抽屜0個安全且上方0 = (底下i -
6     // 1個抽屜且1個安全且最上面1) + (底下n -
7     // 1個抽屜0個安全且最上方為0)
8     dp[i][0][0] = dp[i - 1][1][1] + dp[i - 1][0][0];
9     for (int j = 1; j <= i; ++j) {
10         dp[i][j][0] = dp[i - 1][j + 1][1] + dp[i -
11         1][j][0];
12         dp[i][j][1] = dp[i - 1][j - 1][1] + dp[i -
13         1][j - 1][0];
14     }
15 } //答案在 dp[n][s][0] + dp[n][s][1];

```

6.2 Deque 最大差距

```

1 /*定義dp[l][r]是l ~ r時與先手最大差異值
2 Deque可以拿頭尾
3 所以轉移式中dp[l][r]與dp[l + 1][r]、dp[l][r - 1]有關
4 轉移式:
5 dp[l][r] = max{a[l] - solve(l + 1, r), a[r] -
6 solve(l, r - 1)}
7 裡面用減的主要是因為求的是相減且會一直換手，所以正負正負...*/
8 #define maxn 3005
9 bool vis[maxn][maxn];
10 long long dp[maxn][maxn];
11 long long a[maxn];
12 long long solve(int l, int r) {
13     if (l > r)
14         return 0;
15     if (vis[l][r])
16         return dp[l][r];
17     vis[l][r] = true;
18     long long res = a[l] - solve(l + 1, r);
19     res = max(res, a[r] - solve(l, r - 1));
20     return dp[l][r] = res;
21 }
22 int main() {
23     ...
24     printf("%lld\n", solve(1, n));
25 }

```

6.3 LCS 和 LIS

```

1 //最長共同子序列(LCS)
2 給定兩序列 A,B，求最長的序列 C，
3 C 同時為 A,B 的子序列。
4 //最長遞增子序列 (LIS)
5 給你一個序列 A，求最長的序列 B，
6 B 是一個（非）嚴格遞增序列，且為 A 的子序列。
7 //LCS 和 LIS 題目轉換
8 LIS 轉成 LCS
9 1. A 為原序列，B=sort(A)
10 2. 對 A,B 做 LCS
11 LCS 轉成 LIS
12 1. A, B 為原本的兩序列
13 2. 最 A 序列作編號轉換，將轉換規則套用在 B
14 3. 對 B 做 LIS
15 4. 重複的數字在編號轉換時後要變成不同的數字，
16 越早出現的數字要越小
17 5. 如果有數字在 B 裡面而不在 A 裡面，
18 直接忽略這個數字不做轉換即可

```

6.4 RangeDP

```

1 //區間 dp
2 int dp[55][55]; // dp[i][j] -> [i,
    j] 切割區間中最小的 cost
3 int cuts[55];
4 int solve(int i, int j) {
5     if (dp[i][j] != -1)
6         return dp[i][j];
7     //代表沒有其他切法，只能是 cuts[j] - cuts[i]
8     if (i == j - 1)
9         return dp[i][j] = 0;
10    int cost = 0x3f3f3f3f;
11    for (int m = i + 1; m < j; ++m) {
12        //枚舉區間中間切點
13        cost = min(cost, solve(i, m) + solve(m, j) +
            cuts[j] - cuts[i]);
14    }
15    return dp[i][j] = cost;
16 }
17 int main() {
18     int l;
19     int n;
20     while (scanf("%d", &l) != EOF && l){
21         scanf("%d", &n);
22         for (int i = 1; i <= n; ++i)
23             scanf("%d", &cuts[i]);
24         cuts[0] = 0;
25         cuts[n + 1] = 1;
26         memset(dp, -1, sizeof(dp));
27         printf("The minimum cutting is %d.\n",
            solve(0, n + 1));
28     }
29     return 0;
30 }

```

6.5 stringDP

- Edit distance

S_1 最少需要經過幾次增、刪或換字變成 S_2

$$dp[i][j] = \begin{cases} i+1 & \text{if } j = -1 \\ j+1 & \text{if } i = -1 \\ \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] \\ dp[i][j-1] \\ dp[i-1][j] \end{cases} & \text{if } S_1[i] = S_2[j] \\ \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] \\ dp[i][j-1] \\ dp[i-1][j] \end{cases} + 1 & \text{if } S_1[i] \neq S_2[j] \end{cases}$$

- Longest Palindromic Subsequence

$$dp[l][r] = \begin{cases} 1 & \text{if } l = r \\ dp[l+1][r-1] & \text{if } S[l] = S[r] \\ \max\{dp[l+1][r], dp[l][r-1]\} & \text{if } S[l] \neq S[r] \end{cases}$$

6.6 TreeDP 有幾個 path 長度為 k

```

1 #define maxn 50005
2 #define maxk 505
3 //dp[u][u]的 child 且距離 u 長度 k 的數量
4 long long dp[maxn][maxk];
5 vector<vector<int>> G;
6 int n, k;
7 long long res = 0;
8 void dfs(int u, int p) {
9     //u 自己
10    dp[u][0] = 1;
11    for (int v: G[u]) {
12        if (v == p)
13            continue;
14        dfs(v, u);
15        for (int i = 1; i <= k; ++i) {
16            //子樹 v 距離 i - 1 的等於對於 u 來說距離 i 的
17            dp[u][i] += dp[v][i - 1];
18        }
19    }
20    //統計在 u 子樹中距離 u 為 k 的數量

```

```

21    res += dp[u][k];
22    //統計橫跨 u 但還是在 u 的子樹中合計長度為 k 的:
23    //考慮 u 有一子節點 v，在 v 子樹中距離 v 長度為 x 的
24    //以及不在 v 子樹但在 u 子樹中(這樣才會是橫跨 u)且距離 u 長度為 k
    // - x - 1 的
25    //共有 0.5 * (dp[v][x] * (dp[u][k - x - 1] -
    // dp[v][k - x - 2]))
26    //以上算式是重點，可使複雜度下降，否則枚舉一定超時
27    //其中 dp[u][k - x - 1] 是所有 u 子樹中距離 u 為 k - x
    // - 1 的節點
28    // - dp[v][k - x -
    // 2] 是因為我們不要 v 子樹的節點且距離 u 為 k - x -
    // 1 的(要 v 子樹以外的)，
29    //那些點有 dp[v][k - x - 2]，最後 0.5 是由於計算中 i
    // -> j 以及 j -> i (i、j 是不同節點)
30    //都會被算一遍，所以要 * 0.5
31    long long cnt = 0;
32    for (int v: G[u]) {
33        if (v == p)
34            continue;
35        for (int x = 0; x <= k - 2; ++x) {
36            cnt += dp[v][x] * (dp[u][k - x - 1] -
                dp[v][k - x - 2]);
37        }
38    }
39    res += cnt / 2;
40 }
41 int main() {
42     scanf("%d %d", &n, &k);
43     G.assign(n + 5, vector<int>());
44     int u, v;
45     for (int i = 1; i < n; ++i) {
46         scanf("%d %d", &u, &v);
47         G[u].emplace_back(v);
48         G[v].emplace_back(u);
49     }
50     dfs(1, -1);
51     printf("%lld\n", res);
52     return 0;
53 }

```

6.7 TreeDP reroot

```

1 /*f(0)與f(2)的關係
2 f(2) = f(0) + a - b
3 a = n - b, (subtree(2)以外的節點)
4 b = subtreeSize(2), (subtree(2))
5 所以 f(n) 是 n 為 root 到所有點的距離
6 f(2) = f(0) + n - 2 * subtreeSize(2)
7 這就是快速得到答案的轉移式
8 f(child) = f(parent) + n - 2 * subtreeSize(child)
9 流程
10     1. root = 0 去求各項 subtreeSize
11     2. 求 f(root)
12     3. 以 f(0) 去求出 re-root 後的所有 f(v), v != 0
13 整體來說
14 暴力解 O(n ^ 2)
15 re-root dp on tree O(n + n + n) -> O(n)*
16 class Solution {
17 public:
18     vector<int> sumOfDistancesInTree(int n,
        vector<vector<int>>& edges) {
19         this->res.assign(n, 0);
20         G.assign(n + 5, vector<int>());
21         for (vector<int>& edge: edges) {
22             G[edge[0]].emplace_back(edge[1]);
23             G[edge[1]].emplace_back(edge[0]);
24         }
25         memset(this->visited, 0,
            sizeof(this->visited));
26         this->dfs(0);
27         memset(this->visited, 0,
            sizeof(this->visited));

```

```

28     this->res[0] = this->dfs2(0, 0);
29     memset(this->visited, 0,
30            sizeof(this->visited));
31     this->dfs3(0, n);
32     return this->res;
33 private:
34     vector<vector<int>> G;
35     bool visited[30005];
36     int subtreeSize[30005];
37     vector<int> res;
38     //求 subtreeSize
39     int dfs(int u) {
40         this->visited[u] = true;
41         for (int v: this->G[u]) {
42             if (!this->visited[v]) {
43                 this->subtreeSize[u] += this->dfs(v);
44             }
45         }
46         //自己
47         this->subtreeSize[u] += 1;
48         return this->subtreeSize[u];
49     }
50     //求 res[0], 0到所有點的距離
51     int dfs2(int u, int dis) {
52         this->visited[u] = true;
53         int sum = 0;
54         for (int v: this->G[u]) {
55             if (!visited[v]) {
56                 sum += this->dfs2(v, dis + 1);
57             }
58         }
59         //要加上自己的距離
60         return sum + dis;
61     }
62     //算出所有的 res
63     void dfs3(int u, int n) {
64         this->visited[u] = true;
65         for (int v: this->G[u]) {
66             if (!visited[v]) {
67                 this->res[v] = this->res[u] + n - 2 *
68                     this->subtreeSize[v];
69                 this->dfs3(v, n);
70             }
71         }
72     };

```

```

23     if (ql <= mid)
24         res = max(res, query(index << 1, 1, mid, ql,
25                                qr));
26     if (mid < qr)
27         res = max(res, query((index << 1) + 1, mid +
28                                1, r, ql, qr));
29     return res;
30 }
31 int main() {
32     int n;
33     scanf("%d", &n);
34     for (int i = 1; i <= n; ++i)
35         scanf("%lld", &height[i]);
36     for (int i = 1; i <= n; ++i)
37         scanf("%lld", &B[i]);
38     long long res = B[1];
39     update(height[1], 1, 1, n, B[1]);
40     for (int i = 2; i <= n; ++i) {
41         long long temp;
42         if (height[i] - 1 >= 1)
43             temp = B[i] + query(1, 1, n, 1, height[i]
44                                   - 1);
45         else
46             temp = B[i];
47         update(height[i], 1, 1, n, temp);
48         res = max(res, temp);
49     }
50     printf("%lld\n", res);
51     return 0;
52 }

```

6.8 Weighted LIS

```

1 #define maxn 200005
2 long long dp[maxn];
3 long long height[maxn];
4 long long B[maxn];
5 long long st[maxn << 2];
6 void update(int p, int index, int l, int r, long long
7             v) {
8     if (l == r) {
9         st[index] = v;
10        return;
11    }
12    int mid = (l + r) >> 1;
13    if (p <= mid)
14        update(p, (index << 1), l, mid, v);
15    else
16        update(p, (index << 1) + 1, mid + 1, r, v);
17    st[index] = max(st[index << 1], st[(index << 1) +
18    1]);
19 }
20 long long query(int index, int l, int r, int ql, int
21                qr) {
22     if (ql <= l && r <= qr)
23         return st[index];
24     int mid = (l + r) >> 1;
25     long long res = -1;

```