PROYECTO FINAL PDS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESIME U. ZACATENCO - ICE

Peña Paz Jorge Eduardo

- $(\boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}},\ \mathbf{60°},\ \mathbf{0.4},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)$

Tenemos la siguiente ecuación de diferencia.

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] - Ax[n-1] + x[n-2] + By[n-1] - Cy[n-2]}$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{y[-1] = 0 \wedge y[-2] = 0}$$

Ahora calculamos sus constantes.

- $\boldsymbol{A = 2cos(2\pi * \varphi)} \Longrightarrow A = 2\cos\left(2\pi * \frac{1}{18}\right) = 2\cos\left(\frac{360}{18}\right) = 2\cos(20°) \therefore A = 1.87935$
- $\boldsymbol{B = 2rcos(\beta)} \Longrightarrow B = 2(0.4)\cos(60°) = 0.8\cos(60°) \therefore B = 0.4$
- $\boldsymbol{C = r^2} \Longrightarrow C = (0.4)^2 \therefore C = 0.16$

Sustituyendo todo lo anterior en nuestra ecuación de diferencia tenemos:

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] - (1.87935 * x[n-1]) + x[n-2] + (0.4 * y[n-1]) - (0.16 * y[n-2])}$$

a) CALCULAMOS "h[n]"

Para calcular "h[n]" es necesario calcular la solución total del sistema "y[n]" cuando "x[n]" (entrada) es el impulso, entonces:

$$\boldsymbol{y[n] = y_H[n] + y_P[n] = \delta[n]}$$

$$\boldsymbol{x[n] = \delta[n]} \mid \begin{matrix} \boldsymbol{\delta[n] = 1 \Leftrightarrow n = 0} \\ \boldsymbol{\delta[n] = 1 \Leftrightarrow n \neq 0} \end{matrix}$$

Conociendo lo anterior calculamos la solución homogénea "$y_H[n]$", entonces sí "$x[n]$" es 0, tenemos:

$$\therefore y_H[n] = (0.4 * y[n-1]) - (0.16 * y[n-2]) \mid \boldsymbol{y_H[n] = \lambda^n}$$

$$\Longrightarrow \lambda^n = 0.4\lambda^{n-1} - 0.16\lambda^{n-2} \Longrightarrow \lambda^n - 0.4\lambda^{n-1} + 0.16\lambda^{n-2} = 0 \Longrightarrow \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 0.4\lambda + 0.16) = 0$$

Y si:

$$\boldsymbol{y_H[n] = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n}$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-0.4) \pm \sqrt{(-0.4)^2 - 4(1)(0.16)}}{2(1)} = \frac{0.4 \pm \sqrt{0.16 - 0.64}}{2} = \frac{0.4 \pm \sqrt{-0.48}}{2} = 0.2 \pm 0.3461i$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = 0.2 \pm 0.3461i = \begin{matrix} 0.2 + 0.3461i = 0.4 * e^{-i60°} \\ 0.2 - 0.3461i = 0.4 * e^{i60°} \end{matrix}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{y_H[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^n + C_2(0.4 * e^{i60°})^n}$$

Ahora calculamos "$y_P[n]$", pero como la entrada es "$\delta[n]$", nuestra "$y_P[n]$" será 0, entonces:

$$\boldsymbol{y[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^n + C_2(0.4 * e^{i60°})^n + 0}$$

Ahora es necesario calcular sus constantes, para ello evaluamos la solución y la ecuación original, primeramente, evaluamos la ecuación original con sus condiciones iniciales.

- $\boldsymbol{n = 0} \Longrightarrow y[n] = 1$
- $\boldsymbol{n = 1} \Longrightarrow y[n] = -1.47935$
- $\boldsymbol{n = 2} \Longrightarrow y[n] = 0.24826$
- $\boldsymbol{n = 3} \Longrightarrow y[n] = 0.336$

Ahora evaluamos en la solución total para "n > 0".

- $\boldsymbol{n = 1} \Longrightarrow y[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^1 + C_2(0.4 * e^{i60°})^1 = C_1 0.4e^{-i60°} + C_2 0.4e^{i60°}$
- $\boldsymbol{n = 2} \Longrightarrow y[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^2 + C_2(0.4 * e^{i60°})^2 = C_1 0.4e^{-i120°} + C_2 0.4e^{i120°}$

Ahora solo igualamos los resultados:

$$\boldsymbol{C_1 0.4e^{-i60^\circ} + C_2 0.4e^{i60^\circ} = -1.47935}$$
$$\boldsymbol{C_1 0.4e^{-i120^\circ} + C_2 0.4e^{i120^\circ} = 0.24826}$$

Teniendo nuestro sistema de ecuaciones, resolvemos de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a * C_1 + b * C_2 = z} \\ \boldsymbol{e * C_1 + f * C_2 = w} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{a = 0.4e^{-i60^\circ};\ b = 0.4e^{i60^\circ};\ z = -1.47935} \\ \boldsymbol{e = 0.4e^{-i120^\circ};\ f = 0.4e^{i120^\circ};\ w = 0.24826} \end{matrix}$$

- $\boldsymbol{a * C_1 + b * C_2 = z} \Longrightarrow C_1 = (z - bC_2)\left(\frac{1}{a}\right) \to Ec.1$
- $\boldsymbol{e * C_1 + f * C_2 = w} \Longrightarrow C_1 = e(z - bC_2)\left(\frac{1}{a}\right) + f * C_2 = w \Longrightarrow \frac{ez}{a} - \frac{eb}{a}C_2 + f * C_2 = w \Longrightarrow C_2\left(f - \frac{eb}{a}\right) = w - \frac{ez}{a} \Longrightarrow C_2 = \left(\frac{aw-ez}{a}\right)\left(\frac{a}{af-eb}\right) \therefore C_2 = \frac{aw-ez}{af-eb} \to Ec.2$

Sustituyendo la Ec.2 en la Ec.1 tenemos:

$$C_1 = \left(z - b\frac{aw - ez}{af - eb}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{z}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{aw - ez}{af - eb}\right) \to Ec.3$$

Entonces:

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{z}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{aw - ez}{af - eb}\right);\ C_2 = \frac{aw - ez}{af - eb}}$$

Por lo tanto, tendremos los siguientes valores de constantes:

$$\boldsymbol{C_1 = -3.7887 + 0.0522i = 3.7891 * e^{i179.2112^\circ}}$$

$$\boldsymbol{C_2 = -3.7887 - 0.0522i = 3.72431 * e^{-i179.2112}}$$

Sustituyendo en la solución total.

$$\Longrightarrow y[n] = \left(3.7891 * e^{i179.2112^\circ}\right)\left(0.4e^{-i60^\circ}\right)^n + \left(3.7891 * e^{-i179.2112^\circ}\right)\left(0.4e^{i60^\circ}\right)^n$$

$$\Longrightarrow y[n] = (3.7891)(0.4)^n\left[e^{-i(60°n-179.2112°)} + e^{i(60°n-179.2112°)}\right] = 3.7891(0.4)^n * 2\cos\,(60°n + 179.2112°)$$

Por lo tanto, la solución total en grados y radianes es:

$$\boldsymbol{y[n] = 3.7891(0.4)^n * 2\cos(60°n + 179.2112°) \wedge y[n] = 3.7891(0.4)^n * 2\cos\left(2\pi\frac{6}{36}n + 0.9951\pi\right)}$$

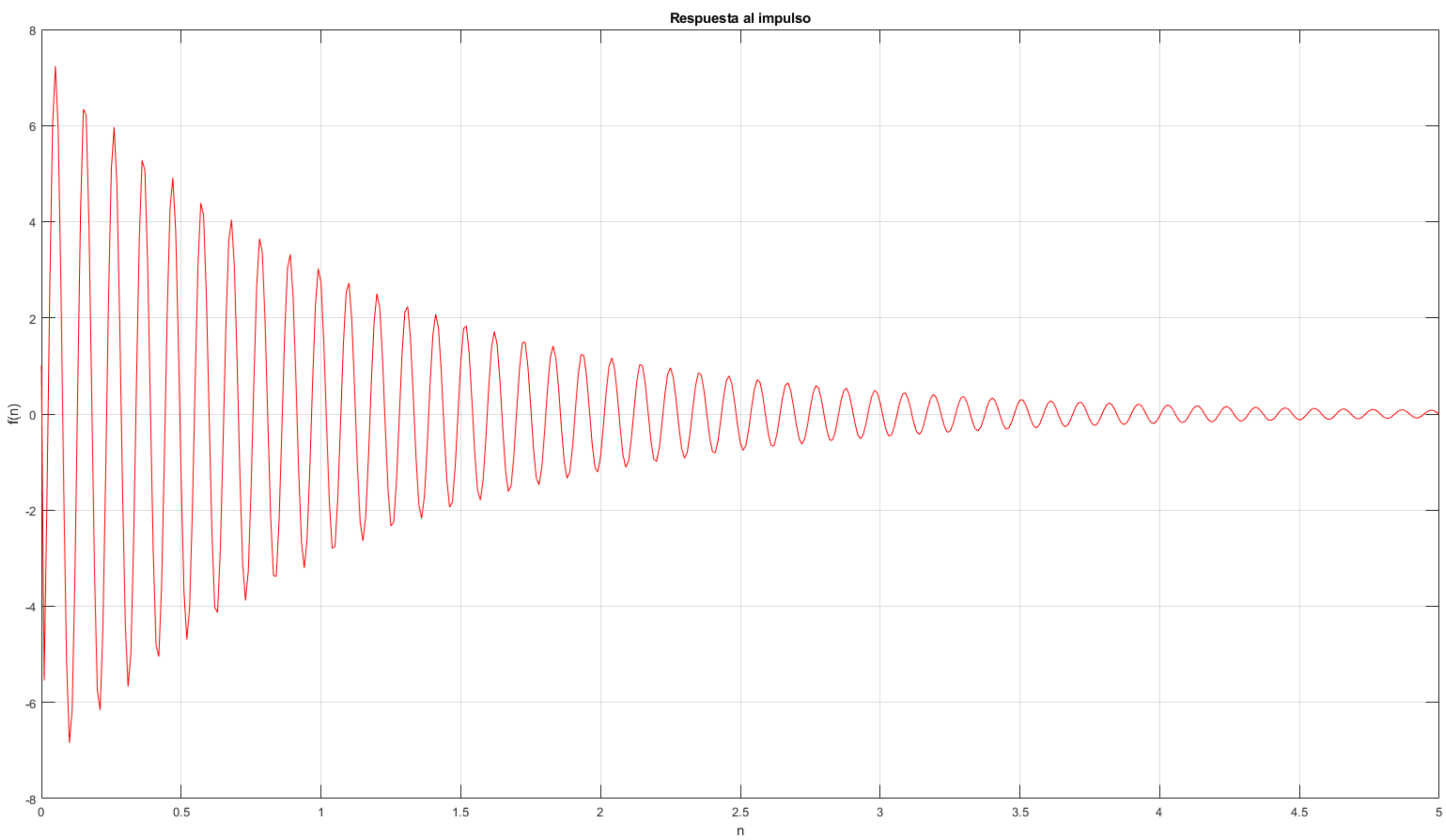
Entonces para conocer su respuesta al impulso evaluamos la solución total para "n = 0", entonces:

- $\boldsymbol{y[n] = 1} \mid \boldsymbol{n = 0} \Longrightarrow 1 = 3.7891(0.4)^0 * 2\cos([60° * 0] + 179.2112°) + k * \delta[0] \therefore k = 8.57748 = 8.57$

Por lo tanto, su respuesta al impulso es:

$$\boldsymbol{h[n] = 3.7891(0.4)^2 * 2\cos(60°n + 179.2112°) + 8.57\delta[n]}$$

b) GRAFICAMOS "h[n]"



c) **RESPUESTA TOTAL A LA ENTRADA "$x[n] = cos(2\pi * \theta * n) * u[n]$"**

Dado que conocemos:

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{9}\ ;\ x[n] = cos(2\pi * \theta * n) * u[n]\ ;\ y[-1] = y[-2] = 0}$$

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] - (1.87935 * x[n-1]) + x[n-2] + (0.4 * y[n-1]) - (0.16 * y[n-2])}$$

Evaluamos para "n >= 0" en la ecuación original, entonces:

- $\boldsymbol{y[n]|\ n = 0} \Longrightarrow y[0] = \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * 0\right) = 1$
- $\boldsymbol{y[n]|\ n = 1} \Longrightarrow y[1] = \cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right) - 1.87935 + 0.4$
- $\boldsymbol{y[n]|\ n = 2} \Longrightarrow y[2] = \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * 2\right) - 1.87935cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right) + 0.4y[1] - 0.16y[0]$

  $$= \cos\left(\frac{4}{9}\pi\right) - 1.87935cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) + 1 - 0.16y[0]$$

- $\boldsymbol{y[n]|\ n = 3} \Longrightarrow y[3] = \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * 3\right) - 1.87935cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * 2\right) + \cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right) + 0.4y[2] - 0.16y[1]$

Retomamos el valor de nuestra solución homogénea del inciso (a), por lo tanto, tenemos:

$$\boldsymbol{y_H[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^n + C_2(0.4 * e^{i60°})^n}$$

Ahora como nuestra entrada no es cero necesitamos calcular su solución particular, para ello:

$$\boldsymbol{y_P[n]} = k_0 \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * n\right) + k_1 \operatorname{sen}\left(2\pi * \frac{1}{9} * n\right) = \boldsymbol{k_0 \cos\left(\frac{2\pi}{9} * n\right) + k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9} * n\right)}$$

Sustituimos "$y_P[n]$" en la ecuación original.

$$\Longrightarrow \left[k_0 \cos\left(\frac{2\pi}{9} * n\right) + k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9} * n\right)\right] u[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{9} n\right) u[n] - \left(1.87935 * \cos\left[\frac{2\pi}{9}\{n-1\}\right]\right) u[n-1] + \cdots$$

$$...\cos\left(\frac{2\pi}{9}[n-2]\right)u[n-2]+\left(0.4\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}*\{n-1\}\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}*\{n-1\}\right)\right]*u[n-1]\right)-\cdots$$

$$...\left(0.16\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}*\{n-2\}\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}*\{n-2\}\right)\right]*u[n-2]\right)$$

Una vez teniendo la ecuación ya sustituida lo que haremos será evaluar para dos valores de “n” y así obtendremos el primer parte para un sistema de ecuaciones de 2 x 2, entonces:

$$\Longrightarrow\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}2\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}2\right)\right]u[2]=\cos\left(\frac{2\pi}{9}2\right)u[2]-\left(1.87935*\cos\left[\frac{2\pi}{9}1\right]\right)u[1]+\cos\left(\frac{2\pi}{9}0\right)u[0]+\cdots$$

$$...\left(0.4\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}1\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}1\right)\right]*u[1]\right)-\left(0.16\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}0\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}0\right)\right]*u[0]\right)$$

Para simplificar de mejor manera la ecuación anterior hacemos lo siguiente:

$$a=\cos\left(\frac{2\pi}{9}2\right)\ ;\ b=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}2\right)\ ;\ c=\cos\left(\frac{2\pi}{9}1\right)\ ;\ d=\cos\left(\frac{2\pi}{9}0\right)\ ;\ e=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}1\right);\ f=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}0\right)$$

$$\Longrightarrow k_0\,a+k_1b=a-1.87935c+d+0.4[k_0\,c+k_1e]-0.16[k_0\,d+k_1f]$$

Solucionando la ecuación tenemos:

$$k_0\,a+k_1b=a-1.87935c+d+0.4k_0c+0.4k_1e-0.16k_0d-0.16k_1f$$

$$\Longrightarrow k_0a-0.4k_0c+0.16k_0d+k_1b-0.4k_1e+0.16k_1f=a-1.87935c+d$$

Factorizamos las “k”s y tenemos:

$$\Longrightarrow k_0(a-0.4c+0.16d)+k_1(b-0.4e+0.16f)=a-1.87935c+d$$

Para la segunda parte de nuestro sistema de ecuaciones es necesario evaluar para tres valores de “n”.

$$\Longrightarrow\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}3\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}3\right)\right]u[3]=\cos\left(\frac{2\pi}{9}3\right)u[3]-\left(1.87935*\cos\left[\frac{2\pi}{9}2\right]\right)u[2]+\cos\left(\frac{2\pi}{9}1\right)u[1]+\cdots$$

$$\ldots\left(0.4\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}2\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}2\right)\right]*u[2]\right)-\left(0.16\left[k_0\cos\left(\frac{2\pi}{9}1\right)+k_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}1\right)\right]*u[1]\right)$$

Realizamos la misma simplificación, pero ahora aparecerán dos constantes nuevas:

$$g=\cos\left(\frac{2\pi}{9}3\right)\ ;h=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}3\right)$$

$$\Longrightarrow k_0\,g+k_1h=g-1.87935a+c+0.4[k_0\,a+k_1b]-0.16[k_0\,c+k_1e]$$

Solucionando la ecuación tenemos:

$$k_0\,g+k_1h=g-1.87935a+c+0.4k_0a+0.4k_1b-0.16k_0c-0.16k_1e$$

$$\Longrightarrow k_0g-0.4k_0a+0.16k_0c+k_1h-0.4k_1b+0.16k_1e=g-1.87935a+c$$

Factorizamos las “k”s y tenemos:

$$\Longrightarrow k_0(g-0.4a+0.16c)+k_1(h-0.4b+0.16e)=g-1.87935a+c$$

Ahora solo “armamos” nuestro sistema de 2 x 2.

$$\boldsymbol{k_0(a-0.4c+0.16d)+k_1(b-0.4e+0.16f)=a-1.87935c+d}$$
$$\boldsymbol{k_0(g-0.4a+0.16c)+k_1(h-0.4b+0.16e)=g-1.87935a+c}$$

Teniendo nuestro sistema de ecuaciones, resolvemos de la siguiente manera:

$$\begin{matrix}\boldsymbol{A*C_1+B*C_2=Z}\\ \boldsymbol{E*C_1+F*C_2=W}\end{matrix}\iff\begin{matrix}\boldsymbol{A=\ a-0.4c+0.16d\,;\ B=\ b-0.4e+0.16f;\ Z=a-1.87935c+d}\\ \boldsymbol{E=\ g-0.4a+0.16c\,;\ F=\ h-0.4b+0.16e\,;\ W=g-1.87935a+c}\end{matrix}$$

Y recordando que tenemos las siguientes fórmulas para el cálculo de constantes:

$$\boldsymbol{C_1=k_0=\frac{z}{a}-\frac{b}{a}\left(\frac{aw-ez}{af-eb}\right)\ ;\ C_2=k_1=\frac{aw-ez}{af-eb}}$$

Tenemos los siguientes valores:

$$\boldsymbol{k_0 = -0.32\ ;\ k_1 = -0.3536}$$

Una vez con estos valores podemos calcular la solución particular

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y_P[n]} = k_0 \cos\left(\frac{2\pi}{9} * n\right) + k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9} * n\right) = \boldsymbol{M * \cos(2\pi * f_0 * n - \alpha)} \ \Big| \ \begin{array}{l} \boldsymbol{M = \sqrt{{k_0}^2 + {k_1}^2}} \\ \boldsymbol{\alpha = tan^{-1}\left(\frac{k_1}{k_0}\right)} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y_P[n] = 0.47689 * \cos\left(\frac{2\pi}{9} * n - 47.8534°\right) = 0.47689 * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * n - 50.67°\right)}$$

Y dado que:

$$\boldsymbol{y[n] = y_H[n] + y_P[n]}$$

$$\Longrightarrow y[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^n + C_2(0.4 * e^{i60°})^n + 0.47689 * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * n - 50.67°\right)$$

Ahora calculamos sus constantes, para ello es necesario evaluar para dos valores de “n”, en nuestro caso 2 y 3:

- $\boldsymbol{n = 2} \Longrightarrow y[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^2 + C_2(0.4 * e^{i60°})^2 + 0.47689 * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * 2 - 50.67°\right)$

$$\Longrightarrow y[n] = 0.4^2 C_1 e^{-i120°} + 0.4^2 C_2 e^{i120°} + 0.47689 * \cos\left(\frac{4\pi}{9} - 50.67°\right)$$

- $\boldsymbol{n = 3} \Longrightarrow y[n] = C_1(0.4 * e^{-i60°})^3 + C_2(0.4 * e^{i60°})^3 + 0.47689 * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * 3 - 50.67°\right)$

$$\Longrightarrow y[n] = 0.4^3 C_1 e^{-i180°} + 0.4^3 C_2 e^{i180°} + 0.47689 * \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 50.67°\right)$$

Y evaluando la ecuación original para “n” igual con 2 y 3, tenemos:

- $\boldsymbol{y[n] |\ n = 2} \Longrightarrow y[2] = \cos\left(\frac{4}{9}\pi\right) - 1.87935 cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) + 1 - 0.16 = -0.42601$
- $\boldsymbol{y[n] |\ n = 3} \Longrightarrow y[3] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1.87935 cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + 0.4(-0.42601) - 0.16(-0.71330) = -0.11657$

Por lo tanto, nuestro nuevo sistema de ecuaciones será:

$$0.16C_1e^{-i120°} + 0.16C_2e^{i120°} = -0.47689 * \cos\left(\frac{4\pi}{9} - 50.67°\right) - 0.42601$$

$$0.064^3C_1e^{-i180°} + 0.064^3C_2e^{i180°} = -0.47689 * \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 50.67°\right) - 0.11657$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{0.16C_1e^{-i120°} + 0.16C_2e^{i120°} = -0.84176} \\ \mathbf{.064C_1e^{-i180°} + .064C_2e^{i180°} = -0.53232} \end{matrix}$$

resolvemos de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a * C_1 + b * C_2 = z} \\ \boldsymbol{e * C_1 + f * C_2 = w} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{a = 0.16e^{-i120°}\ ;\ b = 0.16e^{i120°};\ z = -0.84176} \\ \boldsymbol{e = .064e^{-i180°}\ ;\ f = .064e^{i180°}\ ;\ w = -0.53232} \end{matrix}$$

Y recordando que tenemos las siguientes fórmulas para el cálculo de constantes:

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{z}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{aw - ez}{af - eb}\right)\ ;\ C_2 = \frac{aw - ez}{af - eb}}$$

Por lo tanto, tendremos los siguientes valores de constantes:

$$\boldsymbol{C_1 = 4.1588 - 0.6364i = 4.2072 * e^{-i8.7°}}$$

$$\boldsymbol{C_2 = 4.1588 + 0.6364i = 4.2072 * e^{i8.7°}}$$

Completando la ecuación tenemos:

$$y[n] = 4.2072e^{-i8.7°}(0.4 * e^{-i60°})^n + 4.2072e^{i8.7°}(0.4 * e^{i60°})^n + 0.47689 * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9} * n - 50.67°\right)$$

Y nuestra respuesta total a la entrada es:

$$\boldsymbol{y[n] = 4.2072(0.4)^n * 2\cos(60°n + 8.7°) + 0.47689 * cos\left(\frac{2\pi}{9}n + 50.67°\right)}$$

d) FUNCION DE TRANSFERENCIA

Para poder realizar su función de transferencia del sistema es necesario retomar nuestra ecuación de diferencias.

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] - (1.87935 * x[n-1]) + x[n-2] + (0.4 * y[n-1]) - (0.16 * y[n-2])}$$

A lo anterior le sacaremos su transformada Z.

$$\Longrightarrow Y(z) - (0.4 * Y(z)z^{-1}) + (0.16 * Y(z)z^{-2}) = X(z) - (1.87935 * X(z)z^{-1}) + X(z)z^{-2}$$

$$\Longrightarrow Y(z)[1 - 0.4z^{-1} + 0.16z^{-2}] = X(z)[1 - 1.87935z^{-1} + z^{-2}]$$

Multiplicamos por “z^2” los dos extremos de la ecuación para así tener simplemente la transformada Z.

$$\Longrightarrow (Y(z)[1 - 0.4z^{-1} + 0.16z^{-2}] = X(z)[1 - 1.87935z^{-1} + z^{-2}])z^{2}$$

$$\Longrightarrow Y(z)[z^{2} - 0.4z + 0.16] = X(z)[z^{2} - 1.87935z + 1]$$

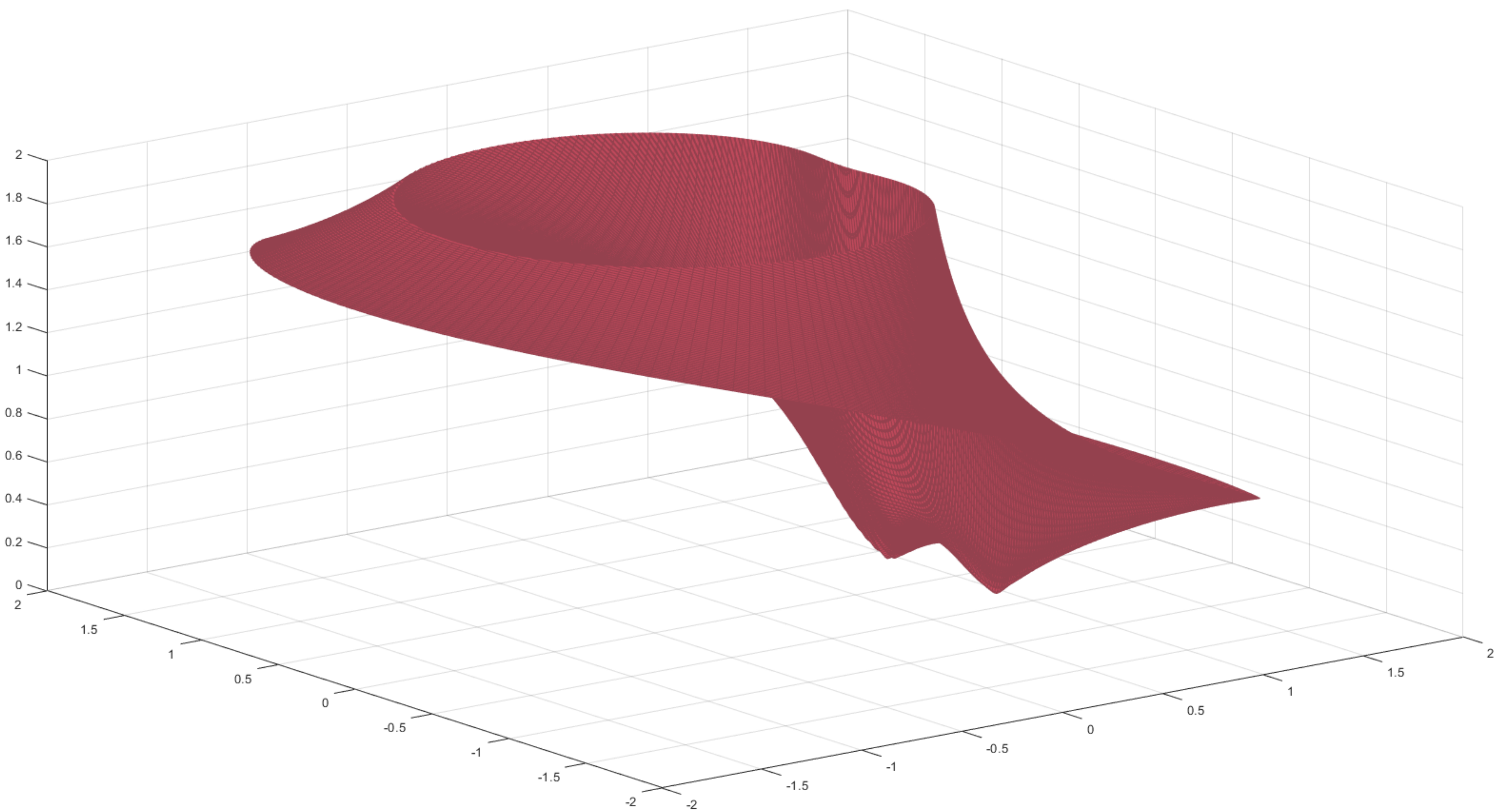
$$\Longrightarrow Y(z)[(z - 0.4e^{i60°})(z - 0.4e^{-i60°})] = X(z)[(z - e^{i8.24°})(z - e^{-i8.24°})]$$

Por lo tanto, nuestra función de transferencia es:

$$\frac{\boldsymbol{Y(z)}}{\boldsymbol{X(z)}} = \boldsymbol{H(z)} \Longrightarrow \frac{\boldsymbol{(z - e^{i20.003°})(z - e^{-i20.003°})}}{\boldsymbol{(z - 0.4e^{i60°})(z - 0.4e^{-i60°})}}$$

Una vez teniendo nuestra función de transferencia la graficamos con ayuda de Matlab.

Peña Paz Jorge Eduardo – 7CM5



e) RESPUESTA EN FRECUENCIA

Para poder conocer su respuesta en frecuencia es necesario retomar nuestra función de transferencia original.

$$\boldsymbol{H(z) \Longrightarrow \frac{(z-e^{i20.003^\circ})(z-e^{-i20.003^\circ})}{(z-0.4e^{i60^\circ})(z-0.4e^{-i60^\circ})}}$$

Y recordando que:

$$\boldsymbol{z = re^{i\omega} = re^{i2\pi f}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{H(z) = \frac{\left(e^{j2\pi f}-e^{i20.003^\circ}\right)\left(e^{j2\pi f}-e^{-i20.003^\circ}\right)}{\left(e^{j2\pi f}-\frac{2}{5}e^{i60^\circ}\right)\left(e^{j2\pi f}-\frac{2}{5}e^{-i60^\circ}\right)}}$$

f) VALOR DE "$H(2\pi f)|_{f=\theta}$"

Recordando que:

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{9}} \Longrightarrow 2\pi f = 2\pi\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2\pi}{9} = 39.9999^\circ \cong 40^\circ$$

Entonces retomando nuestra respuesta en frecuencia de la función de transferencia y aplicando las condiciones deseadas, tenemos:

$$\boldsymbol{H(z) = \left.\frac{\left(e^{i2\pi f}-e^{i20.003^\circ}\right)\left(e^{i2\pi f}-e^{-i20.003^\circ}\right)}{\left(e^{i2\pi f}-\frac{2}{5}e^{i60^\circ}\right)\left(e^{i2\pi f}-\frac{2}{5}e^{-i60^\circ}\right)}\right|_{f=\frac{1}{9}}} = \frac{\left(e^{i40^\circ}-e^{i20.003^\circ}\right)\left(e^{i40^\circ}-e^{-i20.003^\circ}\right)}{\left(e^{i40^\circ}-\frac{2}{5}e^{i60^\circ}\right)\left(e^{i40^\circ}-\frac{2}{5}e^{-i60^\circ}\right)}$$

Realizando las operaciones algebraicas tenemos:

- $\left(e^{i40^\circ}-e^{i20^\circ}\right)\left(e^{i40^\circ}-e^{-i20^\circ}\right)$

$$\Longrightarrow e^{i40^\circ}e^{i40^\circ}-e^{i40^\circ}e^{-i20^\circ}-e^{i20^\circ}e^{i40^\circ}+e^{i20^\circ}e^{-i20^\circ} = e^{i2*40^\circ}-\left(e^{i(20^\circ+40^\circ)}+e^{-i(20^\circ+40^\circ)}\right)+1$$

$$\therefore \left(e^{i40°} - e^{i20°}\right)\left(e^{i40°} - e^{-i20°}\right) = e^{i2*40°} - e^{i40°} 2\cos(20°) + 1$$

- $\left(e^{i40°} - \frac{2}{5}e^{i60°}\right)\left(e^{i40°} - \frac{2}{5}e^{-i60°}\right)$

$$\Longrightarrow e^{i40°}e^{i40°} - \frac{2}{5}e^{i40°}e^{-i60°} - \frac{2}{5}e^{i60°}e^{i40°} + \frac{2}{5} = e^{i2*40°} - \frac{2}{5}2\cos(60°)\,e^{i40°} + 0.4$$

$$\therefore \left(e^{i40°} - e^{i60°}\right)\left(e^{i40°} - e^{-i60°}\right) = e^{i2*40°} - \frac{4}{5}\cos(60°)\,e^{i40°} + 0.4$$

Entonces:

$$\Longrightarrow H\left(\omega = 2\pi\frac{1}{9}\right) = \frac{e^{i2*40°} - 2\cos(20° + 40°) + 1}{e^{i2*40°} - \frac{4}{5}\cos(60° + 40°) + 0.4} = \mathbf{0.66766 + 0.1637i = 0.68743e^{-i13.7765°}}$$

g) TRANSFORMADA Z INVERSA DE "$x[n], (X(z))$

Recordando que:

$$\boldsymbol{x[n] = cos\left(\frac{2\pi}{9}n\right)}$$

$$\Longrightarrow X(z) = \frac{1 - z^{-1} * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right)}{1 - 2 * z^{-1} * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right) + z^{-2}} \Longrightarrow (Hz) = \frac{1 - z^{-1} * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right)}{1 - 2 * z^{-1} * \cos\left(2\pi * \frac{1}{9}\right) + z^{-2}} * \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z}{z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z + 1}$$

$$\therefore \boldsymbol{X(z) = \frac{z^2 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z}{\left(z - e^{i40°}\right)\left(z - e^{-i40°}\right)}}$$

h) TRANSFORMADA Z INVERSA DE "$Y(z) = H(z)X(z)$"

$$\Longrightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \frac{(z-e^{i20°})(z-e^{-i20°})}{(z-0.4e^{i60°})(z-0.4e^{-i60°})} * \frac{z^2 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z}{(z-e^{i40°})(z-e^{-i40°})}$$

- $(z-e^{i20°})(z-e^{-i20°}) \Longrightarrow z^2 - ze^{-i20°} - ze^{i20°} + e^{i20°}e^{-i20°} = z^2 - z(e^{i20°}+e^{-i20°}) + 1 = z^2 - 2\cos(20°)z + 1$
- $z^2 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z \Longrightarrow z\left[z - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right]$

$$\Longrightarrow Y(z) = \frac{z^2 - 1.87938z + 1}{(z-0.4e^{i60°})(z-0.4e^{-i60°})} * \frac{z\left[z-\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right]}{(z-e^{i40°})(z-e^{-i40°})}$$

Desarrollando la expresión tenemos:

$$Y(z) = \frac{z\left[z^3 - 1.87938z^2 + z - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z^2 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right]}{(z-0.4e^{i60°})(z-0.4e^{-i60°})(z-e^{i40°})(z-e^{-i40°})}$$

$$\Longrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 - 1.87938z^2 + z - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z^2 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)z - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z-0.4e^{i60°})(z-0.4e^{-i60°})(z-e^{i40°})(z-e^{-i40°})}$$

Factorizando:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z-0.4e^{i60°})(z-0.4e^{-i60°})(z-e^{i40°})(z-e^{-i40°})}$$

Aplicando expansión por fracciones parciales tenemos:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{\left(z-\frac{2}{5}e^{i60°}\right)} + \frac{B}{\left(z-\frac{2}{5}e^{-i60°}\right)} + \frac{C}{(z-e^{i40°})} + \frac{D}{(z-e^{-i40°})}$$

- $A = \frac{Y(z)}{z}\left(z - \frac{2}{5}e^{i60^\circ}\right)\Big|_{z=\frac{2}{5}e^{i60^\circ}} = \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} * \left(z - \frac{2}{5}e^{i60^\circ}\right)$

$$\Longrightarrow \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} = 0.569 + 0.3415i = 0.6636e^{i30.9712^\circ}$$

- $B = \frac{Y(z)}{z}\left(z - \frac{2}{5}e^{-i60^\circ}\right)\Big|_{z=\frac{2}{5}e^{-i60^\circ}} = \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} * \left(z - \frac{2}{5}e^{-i60^\circ}\right)$

$$\Longrightarrow \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} = 0.569 - 0.3415i = 0.6636e^{-i30.9712^\circ}$$

- $C = \frac{Y(z)}{z}(z - e^{i40^\circ})\Big|_{z=e^{i40^\circ}} = \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} * (z - e^{i40^\circ})$

$$\Longrightarrow \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} = -0.16 + 0.1768i = 0.2384e^{i32.1444^\circ}$$

- $D = \frac{Y(z)}{z}(z - e^{-i40^\circ})\Big|_{z=e^{-i40^\circ}} = \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})(z - e^{-i40^\circ})} * (z - e^{-i40^\circ})$

$$\Longrightarrow \frac{z^3 - z^2\left(1.87938 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) + z\left(1 + 1.87938\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{(z - 0.4e^{i60^\circ})(z - 0.4e^{-i60^\circ})(z - e^{i40^\circ})} = -0.16 - 0.1768i = 0.2384e^{-i32.1444^\circ}$$

Sustituimos los resultados obtenidos.

$$Y(z)=\frac{0.6636e^{i30.9712°}z}{\left(z-\frac{2}{5}e^{i60°}\right)}+\frac{0.6636e^{-i30.9712°}z}{\left(z-\frac{2}{5}e^{-i60°}\right)}+\frac{0.2384e^{i32.1444°}z}{(z-e^{i40°})}+\frac{0.2384e^{-i32.1444°}z}{(z-e^{-i40°})}$$

Aplicando su transformada Z inversa:

$$y[n]=0.6636e^{i30.9712°}\left(\frac{2}{5}\right)^n e^{i60°n}+0.6636e^{-i30.9712°}\left(\frac{2}{5}\right)^n e^{-i60°n}+0.2384e^{i32.1444°}e^{i40°n}+0.2384e^{-i32.1444°}e^{-i40°n}$$

$$\Longrightarrow y[n]=0.6636\left(\frac{2}{5}\right)^n\left[e^{i(60°n+30.9712°)}+e^{-i(60°n+30.9712°)}\right]+0.2384\left[e^{i(40°n+32.1444°)}+e^{-i(40°n+32.1444°)}\right]$$

$$\Longrightarrow y[n]=0.6636\left(\frac{2}{5}\right)^n 2\cos(60°n+30.9712°)+0.2384*2\cos(40°n+32.1444°)$$

$$\therefore \boldsymbol{y[n]=1.3272\left(\frac{2}{5}\right)^n\cos(60°n+30.9712°)+0.4768*\cos\left(\frac{2\pi}{9}n+32.1444°\right)}$$