

# Introduction aux MLMs et estimation de (co)variances génétiques

Jemay Salomon

UMR GQE Le Moulon

Université Paris–Saclay, INRAE, CNRS, AgroParisTech

# Outline

## Modèle linéaire simple

- Notations

- Vraisemblance

- Estimation de  $\beta$

- Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

- Notations

- Vraisemblance

- Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

- Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Notations

$$y = X\beta + \epsilon$$

- $y$  : vecteur de dimension  $n$  contenant les observations (réponses)
- $X$  : matrice d'incidence de dimension  $n \times p$  des variables explicatives (prédicteurs)
- $\beta$  : vecteur de dimension  $p$  contenant les paramètres correspondant aux effets des variables explicatives sur la moyenne des observations
- $\epsilon$  : vecteur de dimension  $n$  contenant les erreurs modélisées par des variables aléatoires
- $n$  : nombre d'observations

# Notations

- $i$  : indice indiquant la  $i$ -ème observation, donc  $i \in \{1, \dots, n\}$
- $p$  : nombre de variables explicatives; on suppose  $n > p$  (pas toujours le cas!)
- $j$  : indice indiquant la  $j$ -ème variable explicative, donc  $j \in \{1, \dots, p\}$
- $R$  : matrice de dimension  $n \times n$  de variance-covariance des erreurs (supposée définie positive, donc inversible);  $R = \sigma_e^2 I_n$  où  $I_n$  correspond à la matrice identité  $n \times n$

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Vraisemblance

- ▶ données :  $\mathcal{D} = \{y \mid X\}$
- ▶ paramètres :  $\Theta = \{\beta, \sigma_e^2\}$

$$y = X\beta + \epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(0, \sigma_e^2 I_n)$$

$$\Leftrightarrow y \mid X, \beta, \sigma_e^2 \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma_e^2 I_n)$$

L'espérance et la variance-covariance des observations sont :

- ▶  $\mathbb{E}[y \mid X, \beta] = X\beta$
- ▶  $\text{Cov}[y \mid \sigma_e^2] = \sigma_e^2 I_n$



# Vraisemblance

Les observations étant modélisées comme indépendantes conditionnellement aux prédicteurs, on peut utiliser leur produit :

$$\mathcal{L}(\Theta; \mathcal{D}) = f(y \mid X, \beta, \sigma_e^2) = \prod_{i=1}^n f(y_i \mid X_{i\cdot}, \beta, \sigma_e^2)$$

où  $X_{i\cdot}$  étant la  $i$ -ème ligne de  $X$ .

En pratique, on utilise la **log-vraisemblance**  $\ell$ , et le produit se transforme en somme :

$$\begin{aligned}\ell(\Theta; \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^n \log f(y_i \mid x_i, \Theta) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} (y - X\beta)^\top (y - X\beta)\end{aligned}$$

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Estimation de $\beta$

## Distance à minimiser

La "longueur" du vecteur d'erreurs  $\epsilon = y - X\beta$ .

## Méthode des moindres carrés ordinaires (OLS)

Identifier  $\hat{\beta}$  qui minimise la somme des carrés des erreurs (ESS) :

$$\hat{\beta}_{\text{OLS}} = \arg \min_{\beta} \text{ESS}$$

$$\text{ESS} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - X_{i\cdot}\beta)^2$$

# Estimation de $\beta$

## Forme matricielle

$$\text{ESS} = (y - X\beta)^\top (y - X\beta) = \|y - X\beta\|_2^2$$

## Dérivées

- ▶ Dérivée première :  $\frac{d\text{ESS}}{d\beta}(\beta) = -2X^\top (y - X\beta)$
- ▶ Dérivée seconde :  $\frac{d^2\text{ESS}}{d\beta^2}(\beta) = 2X^\top X$

## Convexité

La dérivée seconde étant positive, l'ESS est convexe : il existe un minimum global.

# Estimation de $\beta$

## Équations normales de Gauss

Annulation de la dérivée première :

$$\frac{d\text{ESS}}{d\beta}(\hat{\beta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^{\top} X \hat{\beta} = X^{\top} y$$

## Estimation de $\beta$

$$\hat{\beta} = (X^{\top} X)^{-} X^{\top} y$$

où  $-$  désigne l'inverse généralisée.

## Grandeurs dérivées

- ▶ Valeurs ajustées :  $\hat{y} = X\hat{\beta}$
- ▶ Résidus :  $\hat{\epsilon} = y - X\hat{\beta} = y - \hat{y}$

# Estimation de $\beta$

## Projection orthogonale

$\hat{\beta}$  minimise la distance entre  $y$  et  $C(X) = X\beta$  : projection orthogonale de  $y$  sur  $C(X)$ .

$$X^{\top}(y - X\beta) = 0$$

Matrice de projection (hat matrix) :  $P = X(X^{\top}X)^{-1}X^{\top}$

## Maximum de vraisemblance

Sous l'hypothèse de normalité, on retrouve les mêmes équations :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta}(\hat{\beta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X^{\top}X)\hat{\beta} = X^{\top}y$$

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Estimation de $\sigma_e^2$

## Somme des carrés résiduelle (RSS)

$$\text{RSS} = \sum_i \hat{\epsilon}_i^2 = (y - \hat{y})^\top (y - \hat{y}) = y^\top (I_n - P)y$$

avec  $P = X(X^\top X)^{-1}X^\top$  (matrice de projection, idempotente et symétrique).

## Espérance de RSS

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{RSS}] &= \mathbb{E}[\text{tr}[y^\top (I_n - P)y]] \\ &= \text{tr}[(I_n - P)\mathbb{E}[yy^\top]] \\ &= \text{tr}[(I_n - P)(X\beta\beta^\top X^\top + \sigma_e^2 I_n)] \\ &= \sigma_e^2 \text{tr}[(I_n - P)] \\ &= \sigma_e^2 (n - r(X))\end{aligned}$$



# Estimation de $\sigma_e^2$

Estimateur sans biais (OLS)

$$S_{\text{OLS}}^2 = \frac{\text{RSS}}{n - r(X)}$$

où  $r(X) = p$  quand  $X$  est de plein rang.

# Estimation de $\sigma_e^2$

## Estimateur du maximum de vraisemblance

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_e^2}(\hat{\sigma}_e^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}_{e\text{ML}}^2 = \frac{1}{n}(y - X\hat{\beta})^\top (y - X\hat{\beta}) = \frac{\text{RSS}}{n}$$

## Biais de l'estimateur ML

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_{e\text{ML}}^2] = \frac{n - r(X)}{n} \sigma_e^2$$

L'estimateur ML est **biaisé** (sous-estime  $\sigma_e^2$ ).

# Estimation de $\sigma_e^2$

## Interprétation

- ▶ **Estimateur OLS** : sans biais, divise par  $n - r(X)$  (degrés de liberté)
- ▶ **Estimateur ML** : biaisé, divise par  $n$  (néglige l'incertitude sur  $\hat{\beta}$ )
- ▶ Le biais vient de la perte de degrés de liberté due à l'estimation de  $\beta$

## En pratique

On utilise généralement l'estimateur OLS :  $S^2 = \frac{RSS}{n-p}$  (quand  $X$  est de plein rang).

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Notations

$$y = X\beta + Zu + \epsilon$$

Notations complémentaires:

- ▶  $q$  : nombre de variables aléatoires pour structurer la variance-covariance des observations, avec  $n > q$
- ▶  $k$  : indice indiquant la  $k$ -ème variable aléatoire, donc  $k \in \{1, \dots, q\}$
- ▶  $Z$  : matrice d'incidence de dimension  $n \times q$  reliant les  $y_i$  aux  $u_k$
- ▶  $G$  : matrice de variance-covariance de dimension  $q \times q$  du vecteur  $u$ , telle que  $G = \sigma_u^2 A$  où  $A$  est connue et définie positive
- ▶  $\varphi$  : vecteur des composantes de la variance, ici égal à  $(\sigma_u^2, \sigma_e^2)^\top$
- ▶  $H$  : matrice de variance-covariance de dimension  $n \times n$  dépendant de  $\varphi$

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Vraisemblance

- ▶ données :  $\mathcal{D} = \{y \mid X, Z\}$
- ▶ paramètres :  $\Theta = \{\beta, \sigma_u^2, \sigma_e^2\}$

Vraisemblance :

$$y = X\beta + Zu + \epsilon$$

avec  $u \sim \mathcal{N}(0, G)$ ,  $\epsilon \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, R)$  et  $\text{Cov}[u, \epsilon] = 0$

De plus, on a ici :

- ▶  $G = \sigma_u^2 A$
- ▶  $R = \sigma_e^2 V$



## Vraisemblance du modèle mixte (suite)

De manière générale, on peut donc écrire :

$$y \mid \beta, u, R \sim \mathcal{N}(X\beta + Zu, R)$$

Après intégration des  $u_k$  (on dit aussi qu'elles ont été "marginalisées"), on obtient :

$$y \mid \beta, G, R \sim \mathcal{N}(X\beta, ZGZ^\top + R)$$

L'espérance et la variance-covariance des observations sont bien des fonctions linéaires de paramètres :

- ▶  $\mathbb{E}[y \mid \beta] = X\beta$
- ▶  $\text{Cov}[y \mid \varphi] := H = ZGZ^\top + R$   
(égale ici à  $\sigma_u^2 ZAZ^\top + \sigma_e^2 V$ )

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Estimation de $\beta$ et prédiction de $u$

## Deux approches

- ▶ **Paradigme fréquentiste :**
  - ▶  $\hat{\beta}$  : BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)
  - ▶  $\hat{u}$  : BLUP (Best Linear Unbiased Predictor)
- ▶ **Paradigme bayésien :** mêmes formules, interprétation différente

# Estimation de $\beta$ et prédiction de $u$

## Log-densité conjointe

$$\begin{aligned}\log f(y, u \mid \beta, G, R) &= \log f(y \mid \beta, u, R) + \log f(u \mid G) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &n \log 2\pi + \log |R| + (y - X\beta - Zu)^\top R^{-1} (y - X\beta - Zu) \\ &+ q \log 2\pi + \log |G| + u^\top G^{-1} u \end{aligned} \right]\end{aligned}$$

# Estimation de $\beta$ et prediction de u

Estimateur BLUE de  $\beta$

$$\hat{\beta} = (X^{\top} H^{-1} X)^{-1} X^{\top} H^{-1} y$$

Moindres carrés généralisés

Prédicteur BLUP de u

$$\hat{u} = GZ^{\top} H^{-1} (y - X\hat{\beta})$$

# Outline

## Modèle linéaire simple

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$

Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

Notations

Vraisemblance

Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Estimation de $\sigma_u^2$ et $\sigma_e^2$

## Problème du maximum de vraisemblance (ML)

- ▶ Comme pour le modèle linéaire classique, ML produit des estimateurs **biaisés** de  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_e^2$
- ▶ Nécessité d'une méthode spécifique

## Maximum de vraisemblance restreinte (ReML)

Méthode développée pour estimer les composantes de la variance :

- ▶ Décompose la vraisemblance en deux parties
- ▶ Une partie ne dépend que des variables aléatoires  $u$  sans  $\beta$

# Principe du ReML

## Élimination de $\beta$

- ▶ On cherche des vecteurs tels que  $v^\top X = 0$
- ▶ Il existe  $n - r(X)$  vecteurs linéairement indépendants
- ▶ Exemple :  $S = I_n - X(X^\top X)^{-1}X^\top$  vérifie  $SX = 0$

## Vraisemblance restreinte

$$K^\top y \sim \mathcal{N}(0, K^\top H(\varphi)K)$$

avec  $K^\top K = I_n$  et  $K^\top X = 0$

## Procédure

1. Maximiser la vraisemblance restreinte pour obtenir  $\hat{\varphi}$
2. Calculer  $\hat{\beta}|\hat{\varphi}$  (BLUE empirique)
3. Calculer  $\hat{u}|\hat{\varphi}$  (BLUP empirique)



# Algorithme EM

## Principe général

Algorithme pour modèles avec "données manquantes" (variables latentes) :

- ▶ **Données manquantes** :  $z = (\beta^\top, u^\top)^\top$
- ▶ **Données complètes** :  $x = (y^\top, z^\top)^\top$

## Fonction Q

$$Q(\varphi; \varphi^{(t)}) = \mathbb{E}_{z|y, \varphi^{(t)}}[\ell(\varphi; x)]$$

Espérance de la log-vraisemblance complète

# Algorithme EM

## Étapes de l'algorithme

1. **E (Expectation)** : Calculer  $Q(\varphi; \varphi^{(t)})$
2. **M (Maximization)** : Maximiser  $Q$  par rapport à  $\varphi$  :

$$\varphi^{(t+1)} = \arg \max_{\varphi} Q(\varphi; \varphi^{(t)})$$

## Vraisemblance complète du modèle mixte

$$L(\varphi; \mathbf{x}) \propto f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \sigma_e^2) \times f(\mathbf{u} | \sigma_u^2)$$

$$\ell(\sigma_e^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_e^2 - \frac{\boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}}{2\sigma_e^2}$$

$$\ell(\sigma_u^2) = -\frac{q}{2} \log 2\pi - \frac{q}{2} \log \sigma_u^2 - \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}}{2\sigma_u^2}$$

# Références

- ▶ **Dagnelie (2012)** : *Principes d'expérimentation: planification des expériences et analyses de leurs résultats*
- ▶ **Dempfle (1977)** : *Relation entre BLUP (Best Linear Unbiased Prediction) et estimateurs bayésiens*
- ▶ **Foulley (2002)** : *Méthodes du maximum de vraisemblance en modèle linéaire mixte*
- ▶ **Foulley (2002)** : *Algorithme EM : théorie et application au modèle mixte*
- ▶ **Robert (2001)** : *L'analyse statistique bayésienne*

# Références

- ▶ **Gumedze et Dunne (2011)** : *Parameter estimation and inference in the linear mixed model*
- ▶ **Henderson (1950)** : *Estimation of genetic parameters*
- ▶ **Henderson et al. (1959)** : *The Estimation of Environmental and Genetic Trends from Records Subject to Culling*
- ▶ **Verbyla (1990)** : *A Conditional Derivation of Residual Maximum Likelihood*
- ▶ **Wand (2002)** : *Vector differential calculus in statistics*

# Outline

## Modèle linéaire simple

- Notations

- Vraisemblance

- Estimation de  $\beta$

- Estimation de  $\sigma_e^2$

## Modèle linéaire mixte

- Notations

- Vraisemblance

- Estimation de  $\beta$  et prediction de  $\mathbf{u}$

- Estimation de  $\sigma_u^2, \sigma_e^2$

Activité - 45-60 min

# Activité

- Code R