Ecuaciones Diferenciales Parciales

Jenifer Alondra Ocaña Miranda

Semana del 26 al 30 de Abril de 2021

1 Introduccion

En el presente reporte resumimos lo visto en las ultimas 3 actividades de la materia de fisica computacional en la cuales vimos la solucion de diferentes formas de 3 ecuaciones diferenciales parciales renombradas mediante el metodo de diferencias finitas y con distintas condiciones a la frontera.
Como sabemos de nuestro curso de ecuaciones diferenciales una ecuacion diferencial es una ecuacion que relaciona las derivadas de diversos ordenes de una funcion desconocida.
Una ecuacion diferencial parcial es aquella donde la funcion desconocida esta en funcion de varias variables y tenemos una ecuacion en terminos de derivadas parciales de esta funcion.
Al solucionar estas ecuaciones nos referimos el buscar la ecuacion solucion cuyas derivadas satisfacen la ecuacion diferencial, sin embargo como sabemos una ecuacion pierde sus constantes al derivarla de modo que al solucionarla no tenemos idea de la constante que pueda haber en la solucion, es por ello que sin condiciones de valor inicial o de frontera no podemos determinar el valor de constantes en la ecuacion solucion, la solucion que contiene la constante en general se le conoce como solucion general.
Vemos las tres familias mas grandes de ecuaciones diferenciales parciales, despues nos encaminamos a utilizar el metodo de soluciones finitas para resolver numericamente las ecuaciones diferenciales de calor, de onda y de Poisson.
Ademas conocemos las diferencias entre las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, Neumann y de Robin.
Al final se describe el algoritmo que utilizamos para la solucion de cada ecuacion y se explica en general los pasos en su solucion.

2 Descripción de las tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales: Parabólica, Hiperbólicas y Elípticas.

Estudiamos las ecuaciones diferenciales parciales de segundo grado estas tienen la forma.

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\Phi}{\partial x}+E\frac{\partial\Phi}{\partial y}+F=0$$

Que poniendo todos los terminos de una derivada en una sola variable nos queda

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+D=0$$

De modo que el termino D contiene contiene términos con derivadas primeras.

Las tres grandes familias vienen de la cantidad de soluciones que puede tener esta ecuacion y la naturaleza de estas, esto puede conocerse a traves del determinante

$$B^2-4AC$$

Donde

2.1 $B^2-4AC>0$ existen dos soluciones reales. Hiperbolicas

Entonces existen dos lineas caracteristicas reales a lo largo de las cuales se satisface las condiciones que nos llevan a la solucion. Las derivadas parciales hiperbolicas estan asociadas con probelmas de propagacion de ondas en los que no existen procesos disipativos lo que a su vez implica que las condiciones iniciales de frontera tienen discontinuidades que se propagan al interior del dominio. Un ejemplo de este tipo es la ecuacion de onda la cual tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

donde c es un coeficiente no negativo.
En una dimension quedaria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2.2 $B^2-4AC=0$ existe una unica linea caracteristica real. Parabolico

En contraste con lo que ocurre en ecuaciones hiperbólicas, las derivadas de la variable dependiente Φ son siempre continuas en las características, y, debido a la presencia de mecanismos disipativos, ninguna discontinuidad que pueda existir en las condiciones iniciales o de contorno persistirá en el interior del dominio de cálculo.
En un problema no estacionario unidimensional cualquier perturbacion en un punto P en un instante dado t_0 puede afectar a la solucion en todos los puntos del dominio en $t\geq t_0$ y dicha influencia sera progresivamente menos en puntos cada vez mas alejados de P.

Ejemplo de la naturaleza de estas ecuaciones son la ecuacion de calor y la ecuacion de difusion.
Ecuacion de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
donde α es un coeficiente de difusion positivo.

En flujos hiperbolicos y parabolicos es posible utilizar un procedimiento de avance en el tiempo a lo largo de la direccion de flujo a partir de las condiciones iniciales.

2.3 $B^2 - 4A < 0 noexistiraningunalineacaracteristicareal.Caractereliptico$

En el caso de ecuaciones Elipticas cualquier perturbacion introducida en un punto P del dominio de calculo afectara a la solucion en cualquier otro punto, de nuevo la influencia disminuira a la par de la distancia del punto. En problemas elipticos no es posible seguir procedimientos a lo largo de la direccion de flujo antes mencionados. Cualquier discontinuidad que pueda existir en el contorno es suavizada en el interior del dominio debido a los mecanismos disipativos.

Un sistema de ecuaciones puede contener ecuaciones de distinto tipo. Por otra parte, también es posible definir el carácter de una ecuación con respecto a direcciones particulares.

La ecuacion de Laplace es un ejemplo de este tipo de ecuaciones y tiene la forma.
$$^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

3 Descripción de los tres tipos de Condiciones a la Frontera: Dirichlet, Neumann y Robin (mixto).

Como sabemos de nuestro curso de ecuaciones difereniales al resolver una ecuacion diferencial tenemos familias de soluciones de la misma forma, por la naturaleza del problema de ecuaciones diferenciales perdemos la informacion de las constantes que pudieron darle origen por eso es que tenemos familias de soluciones pero al tener informacion de las condiciones iniciales o de frontera solo habra una ecuacion que les satisface.
Como su nombre lo dice las condiciones de frontera son las condiciones que debe satisfacer la ecuacion solucion al ser evaluada en los puntos de frontera del dominio.
Esto se le llama problema con condiciones de frontera.

3.1 Condiciones de frontera de Dirichlet

Las condiciones de dirichlet o de primer tipo osn condiciones de frontera llamadas asi en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichet. En ecuaciones

diferenciales ordinarias o de derivadas parciales se dan condiciones que debe satisfacer la ecuacion solucion especificamente, es decir es como las condiciones iniciales pero en frontera, donde se nos dice el valor de la ecuacion en dichos puntos en un momento inicial.
Tener estas condiciones son condiciones que garantizan la existencia y convergencia de las series de Fourier o de sus transormadas.

$$y(0) = \alpha_1$$

$$y(1) = \alpha_2$$

3.2 Condiciones de frontera de Neumann

Las condiciones de frontera de Neumann o de segundo tipo llama asi en alusion de Carl Neumann un matematico aleman. En una ecuacion diferencial ordinaria o de derivadas parciales cuando se especifica el valor de la derivada de la solucion en los puntos de la frontera del dominio.

$$\frac{dy}{dx}(0) = \alpha_1$$

$$\frac{dy}{dx}(1) = \alpha_2$$

3.3 Condiciones de frontera de Robin(mixto)

Las condiciones de frontera de Robin o de tercer tipo, llamada asi en honor a Victor Gustave Robin un matematico frances, en una ecuacion diferencial ordinaria o en una de derivadas parciales se nos dan una combinacion lineal de valores que debe tener la funcion y y los valores de su derivada en la frontera del dominio. Es decir este ultimo tipo es una combinacion de las condiciones de Dirichlet y de Neumann, son de distinto tipo en diferentes subconjuntos de la frontera.

$$au + b\frac{\partial u}{\partial n} = g$$

sobre la frontera del dominio

Para a y b distintos de cero o funciones dadas.
g es una funcion dada y definida en la frontera.
Siendo u la funcion solucion.
$\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada normal en la frontera.

4 Descripción del Método de Diferencias Finitas Solución de la Ecuación del Calor: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución. Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 10 en Github.

En analisis numerico los metodos de diferencias finitas son metodos numericos para resolver las ecuaciones diferenciales aproximando las derivadas con diferencias finitas para lo cual el dominio espacial y el tiempo son discritezados en un numero finito de intervalos o pasos, de la mano con la tecnica de escribir un sistema de ecuaciones difernciales en ecuaciones lineales de primer grado que resolvemos mediante metodos de matrices.
Las derivadas se aproximan mediante series de Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x)$$

donde $R_n(x)$ denota la diferencia entre el valor del polinomio de Taylor y la funcion real. Para aproximar la derivada truncamos la serie de Taylor de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(x) \\ \frac{f(x_0 + h)}{h} &= \frac{f(x_0)}{h} + f'(x_0) + \frac{R_1(x)}{h} \end{aligned}$$

despejando la derivada

$$\frac{f(x_0 + h)}{h} - \frac{f(x_0)}{h} - \frac{R_1(x)}{h} = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h - f(x_0)}{h} - \frac{R_1(x)}{h}$$

Despreciando el error nos queda

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Como vemos esta involucra un paso hacia adelante de la derivada, tambien tenemos la aproximacion hacia atras.

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + R_1(x)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Podemos de la misma forma aproximar la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Sustituimos la diferencia finita hacia atras $f'(x_0+h) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + R(x)$ Y la derivada $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + R(x)$ ...

$$f''(x_0) \approx \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + R(x) - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + R(x)}{h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + R(x)$$

Solucion de la ecuacion de calor

La ecuacion de calor tiene la forma, como ya mencionamos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

Que segun wikipedia tambien se puede escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

donde el coeficiente α es un coeficiente de difusividad termica. Utilizando la expresion que acabamos de desarrollar y ahora si hacemos explicito el hecho de que u depende de x y t como en la actividad.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Para entender esto debemos entender que hemos discretizado el espacio. Para la cual requerimos una condicion al tiempo t=0 Y condiciones a la frontera ya sea de tipo Dirichlet o de Neumann. El logaritmo consiste en primeramente dicretizar nuestro dominio tanto en el espacio como en el tiempo, para ello declaramos h como el cambio en el espacio siendo el tamaño de este entre N-1, siendo N la cantidad de puntos que habra en nuestra discretizacion.
consideremos k es avance en el tiempo y h en el espacio entonces la ecuacion anterior la podemos escribir como

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

...

$$\frac{\breve{(}x,t+k) - u(x,t)}{k} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Despejando de la ecuacion el valor desconocido $u(x,t+k)$ Donde despuesde trabajo algebraico llegamos a que un valor en un punto para un tiempo t es igual a

$$u_j^t = \alpha y_{j+1}^{t-1} + (1-2\alpha)u_j^{t-1}\alpha u_{j-1}^{t1}$$

es decir esta en terminos de puntos en un tiempo anterior y mas importante en un espacio de tres moleculas alrededor de esta. en esta ecuacion $\alpha = \alpha_t k/h^2$ el coeficiente de difusion termica, el cambio temporal y el espacial al cudrado.

Se crea el dominio como una matriz de del punto "a" al punto "b" los extremos del dominio con la cantidad de N puntos, se crea la matriz del dominio llenandose con las condiciones iniciales.
Tambien necesitamos crear el tamaño de la discretizacion en el tiempo del mismo modo que con x.

Ahora vamos a pasar a integrar

Despues debemos declarar las condiciones que se nos dan para frontera de tipo Dirichlet. Vamos paso por paso calculando la solucion y para esto usamos los loop, recorriendo primeramente en un tiempo todos los puntos. Llamemos k un indice que recorre el tiempo e i uno que recorre el espacio. En nuestra matriz del dominio de tamaño (M,N) donde M es la cantidad de puntos en el espacio y N en el espacio. Usamos los loops para recorrer la matriz de modo que el externo recorre k, y el interno recorre i, por los puntos que no sean la frontera (estos ya estan definidos). Para cada loop anidado se utiliza la formula que se explico de diferencias finitas donde se utlizan tres punto espaciales en un tiempo anterior en una molecula computacional. Finalmente graficamos y eso es lo que hicimos.
https://github.com/Jen-Ocana/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_10/Actividad_10.ipynb

en el presente link se muestra los errores que tuvimos al utilizar la funcion odeint.

5 Solución de la Ecuación de Onda: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución.Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 11 en Github.

La ecuacion de onda tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t)$$

donde c^2 es la velocidad de la informacion y la funcion u represena la presion en una orda acustica, o la intensidad de un campo magentico, entre otras. Concentremonos en una dimension la onda tiene forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

donde x pertenece al intervalo de 0 a L y t de 0 a T.

Para encontrar solucion de estos problemas es necesario tener 4 condiciones de las cuales dos son iniciales y otras 2 de la frontera.
Queda entendido que es necesario conocer le valor de c y de la funcion que nos da la condicion inicial.

Aqui de nuevo hacemos uso de lo desarrollado en las series de Taylor para un espacio discretizado.

De modo que considerando h como el incremento en el espacio x, y k el incremento en el tiempo, la ecuacion se puede escribir como

$$\frac{u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t+k)}{k^2}=c^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

Si observamos los terminos implicados vemos que hay 5 puntos, uno un paso adelante en el tiempo, uno un paso atras en el tiempo, uno en el mismo tiempo pero un paso adelante en el espacio, y otro en el mismo tiempo un paso atras en el espacio y finalmente, el punto en cuestion en un espacio x y tiempo t.

Cambiando a la notacion entonces en nuestra matriz espacio tiempo.

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{k^2}=c^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$$

Despejando el valor desconocido u_j^{n+1} nos queda

$$u_j^{n+1}=2u_j^n-u_j^{n-1}+C^2(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

donde ahora la C mayuscula es c^2k^2/h^2

Finalmente el algoritmo de diferencias finitas. Tomando la condicion inicial hacemos la sustitucion de las expresiones obtenidas con series de Taylor y el metodo de diferencias finitas que nos llevo a informacion extra sobre las condiciones iniciales que sustituyendo en la expresion ya obtenida para aquellos puntos donde no podemos usar el metodo con 5 puntos.

Igual que en el metodo anterior lo primero que hacemos es una funcion que trabaje para nuestra ecuacion, en la cual primero haceos...

Discretizar el espacio creando nuestra matriz de dominio en el espacio y otra en el tiempo, con una cantidad de puntos definida en ambos, de modo que calculamos ahora el paso en es espacio como el valor entre un punto y otro, el paso en el tiempo como C*dx/c, teniendo el paso en el tiempo lo discretizamos a un entero y lo utilizamos para crear el tiempo.

Creamos 3 matrices para los 3 tiempos que tenemos implicados en la ecuacion que encontramos, esto porque en cada calculo nos referimos al anterior y a un nuevo termino de modo que es mas facil si les asignamos una variable.

Definimos la funcion de forzamiento y la velocidad inicial de la onda a un tiempo cero primeramente.

Despues utilizamos for para recorrer el espacio en un tiempo 0 dandole el espacio a la matriz el valor correspondiente segun I la funcion de condicion inicial evaluado en el punto espacial.

Utilizamos un segundo for para recorrer aquellos puntos en un primer paso que no puede ser calculado con la formula que implica 5 puntos, es decir con la ultima formula calculada le asignamos valor al espacio en la matriz correspondiente al punto evaluandose segun la formula obtenida.

Proseguimos entonces a calcular los puntos donde si podemos utilizar un extensil de 5 puntos y para esto redefinimos las matrices que hacen referecnia a

valores nuevos y viejos.
Creamos un for que recorre primeramente el tiempo y a su vez otro for que para cada tiempo recorre el espacio y a cada punto en la matriz le asigna el valor correspondiente segun nuestra formula de un extensil de 5 puntos, aqui definimos los valores a la frontera que se nos dieron.
se vuelve a redefinir los valores de las matrices que hacen referencia al antiguo y nuevo para reutilizarse.
Finalmente declaramos las variables que necesitamos a lo largo del proceso y se las damos como argumento para la funcion, estas son por supuesto pensadas antes de hacer el algoritmo sin embargo, mi objetivo era principalmente como es que este funciona, aqui declaramos variables como el largo del espacio, del tiempo, las funciones de condiciones iniciales, la cantidad de pasos a utilizar, velocidad inicial, funcion de forzamiento y la constante C.
Parte del algoritmo o como parte extra solo queda graficar la solucion.

https://github.com/Jen-Ocana/Fisica-Computacional-1/blob/master/Actividad_11/Actividad11.ipynb

6 Solución de la Ecuación de Poisson: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución. Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 12 en Github.

La ecuacion de Poisson es una ecuacion diferencial parcial de tipo eliptico. Resolveremos esta ecuacion por metodo de diferencias finitas.
La ecuacion tiene la forma

$$-^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

En esta actividad trabajos la solucion numerica de la ecuacon con los tipo 1 y 2 de condiciones a la frontera. NO SE REQUIERE CONDICION INICIAL.
Nos centramos en un dominio cartesiano.
Si aproximamos las derivadas parciales de segundo con las expresiones ya desarrolladas a partir de la series de Taylor y la descritizacion del dominio. Nos queda

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1},y_k) - 2u(x_i,y_k) + u(x_{i-1},y_k)}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i,y_{k+1}) - 2u(x_i,y_k) + u(x_i,y_{k-1})}{h_y^2}$$

Cambiando a la notacion de indices y subindices nos queda algo asi

$$f_{i,k} = -\frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{h_y^2}) + 2(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2})U_{i,k}$$

Donde como sabemos i y k representan los puntos dentro del dominio y los valores a la frontera esta ya determinado dado la naturaleza del problema.

Esta ecuacion como vemos requiere de 5 espacios en una matriz de espacio tiempo o molecula computacional. Pasare a explicar el algoritmo ya que no veo pertinente explicar todo el desarrollo algebraico de matrices que ya estudiamos. Para la ecuacion con condiciones de frontera de tipo Dirichlet tenemos un problema matricial de la forma

$$AU = F$$

Donde A es una matriz tridiagonal, U es desonocida y F es conocida. Empezamos creando nuestro dominio en un espacio x-y es decir creamos primero los valores iniciales y finales del espacio y del tiempo, ademas de que calculamos el paso necesario para estos y finalmente ceamos la maya XY dle espacio.
Creamos una funcion que genere las matrices g y f, g es solo una matriz auxiliar para crear f, de modo que g es una matriz que contiene la informacion espacio donde integramos, esta funcion nos la proporcionan a lo largo del ejercicio. f es esta matriz pero aplicando la funcion flatten para ahorrar espacio.
Tenemos que definir otra funcion que genere nuestras condiciones de frontera de tipo Dirichlet, de modo que a ciertas variables se les asigne el espacio frontera correspondiente y su valor.
Y pasamos pasar la informacion de estas matrices frontera a matrices que encajen en nuestra matriz a trabajar la solucion numerica.
Reunimos las partes de nuestra matriz en contruccion en una sola matriz g.
Ahora generamos la matriz A de diagonales, en este paso lo que hacemos es definir los valores que deben estar en las diagonales correspondientes de A.
Finalmente utilizadas estas funciones con la informacion a proporcionar del problema se resuelve el sistema linea de ecuacines de la matriz A igual a F con la funcion linalg.solve de numpy de modo que esta matriz exlcuyendo los puntos frontera se le asigna a nuestra funcion solucion.
Se grafica para observar le resultado.

7 Resumen y conclusiones

En resumen en estas tres actividades nos dimos un paseo por las ecuaciones diferenciales parciales principales o de mayor aplicacion, aprendimos los tres tipos de condiciones de frontera y de ecuaciones diferenciales parciales. Ademas exploramos mas funciones de las bibliotecas que no son comunmente utilizadas por nosotros en el ambito del algebra lineal, fue muy dificil entender a grandes rasgos lo que haciamos pero principalmente en mi caso porque de cierta forma me intimidaba sin embargo, de hacer el esfuerzo e investigar aquello que me hacia ruido para continuar de la mano de la expliacion del profesor comprendi lo que estabamos haciendo. En cuanto al metodo numerico de diferencias finitas esto es lo que aprendi en general para resolver ecuaciones diferenciales, es que primero debo cambiar la notacion a la desarrollada mediante series de Taylor y una discretizacion del dominio, seguimos entonces a cambiar la notacion solo para facilidad y despejar el valor del punto de interes, de modo que tengo una expresion en terminos de otros puntos del dominio para conocer el valor del punto de interes, este puede ser de 3, 4 o 5 puntos, mis condiciones a frontera me permitiran saber en que puntos puedo trabajar con esta formula, de otra forma puedo sustituir en las condicones iniciales la forma por el metodo de diferencias finitas de modo que pueda darme informacion extra para calcular aquellos puntos que no cuenten, por ejemplo, de 5 puntos para su calculo, finalmente trabajo loops para el calculo del valor en cada punto del dominio. Y grafico para observar la solucion. En la ultima actividad esto se volvio un poco mas complicado y nos adentramos a solucionar el problema con matices, de modo que aqui lo que debia hacer es similarmente obtener una expresion de los puntos de interes en terminos de otros puntos del dominio y crar mi sistema de ecuaciones, por un lado una matriz con las condiciones iniciales en forma de funcion, por otro lado aquellas que afectan directamente a mi solcion en forma de coeficiente y finalmente la matriz de mi solucion en si, de modo que para calcular mi matriz solucion, debo armar mi sistema de matrices cumpliendo con las diagonales, y los valores de frontera asi como las funciones que hay abtenido para los valores inciales, haciendolo mas optimo con la funcion .flatten que me permite utilizar menos memoria, armado ya cada matriz de mi sistema de ecuaciones resuelvo el sistema mediante linalg.solve. Quiero recordar que esto es un resumen pues a grandes rasgos hay detalles que cuidar entre valores de constantes y la cantidad de puntos que manejamos en el dominio espacial y temporal.

8 Bibliografía empleada.

https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson%27s$_{e}quation$
https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_boundary_condition
https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann$_{b}oundary_{c}ondition$
https://en.wikipedia.org/wiki/Robin$_{b}oundary_{c}ondition$
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite$_{d}ifference_{m}ethod$
http://www.dma.uvigo.es/ aurea/TR$_{C}2_{E}DO.pdf$
https://www2.uned.es/ing-fluidos/IntroMF/node87.html
https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace%27s$_{e}quation$
https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$
https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$
https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n$_{h}iperb\%C3\%B3lica_{e}n_{d}erivadas_{p}arciales$
https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical$_{m}ethods_{f}or_{p}artial_{d}ifferential_{e}quations$
Me base tambien en los jupyter notebook.