

Lichtausbreitung in Räumen: Skizzen zur Monte-Carlo-Simulation

Henrik Schulze

3. November 2021

Lambert-Strahler

Modell für ebenen diffusen Strahler („Milchglas“) oder auch diffuse Reflexion an Wänden. Von der Strahlungsleistung Φ wird

$$I(\Omega)d\Omega = \frac{\Phi}{\pi} \cos \vartheta d\Omega \quad (1)$$

in den infinitesimalen Raumwinkelbereich

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (2)$$

abgestrahlt, siehe Abbildung 1. Die Größe $I(\Omega)$ wird als Strahlstärke (engl.: *radiant intensity*) bezeichnet. Die Kugelkoordinaten sind mit $\Omega = (\vartheta, \varphi)$ bezeichnet (Polarwinkel

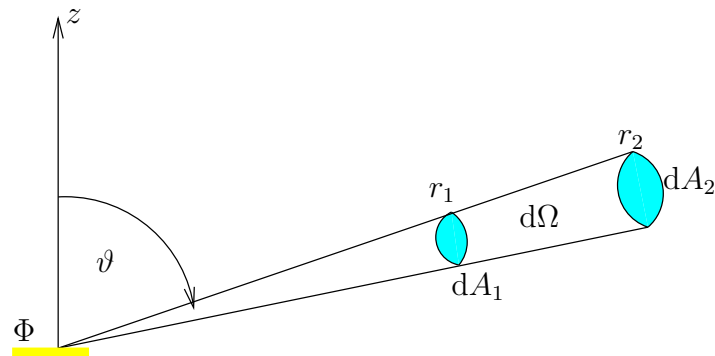


Abbildung 1: Allgemeine Markov-Kette mit m Übergängen.

und Azimutwinkel φ):

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Der Faktor $\cos \vartheta$ in Gleichung (1) kommt daher, dass die strahlende Fläche unter dem Winkel ϑ erscheint. Der Faktor $1/\pi$ kommt von der Normierung über die Hemisphäre \mathcal{H} :

$$\int_{\mathcal{H}} \cos \vartheta \, d\Omega = \int_0^\pi d\vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi$$

und damit

$$\int_{\mathcal{H}} I(\Omega) \, d\Omega = \Phi. \quad (3)$$

Der verallgemeinerte Lambert-Strahler mit

$$I(\Omega) d\Omega = \frac{m+1}{2\pi} \cos^m(\vartheta) \Phi d\Omega \quad (4)$$

ist ein geeignetes Modell für eine gerichtete Strahlungsquelle. Hierbei ist $m \geq 0$ ein Parameter. Für $m = 1$ bekommt man den Lambert-Strahler, für $m = 0$ einen Halbkugelstrahler. Für $m > 1$ ist die Strahlung in z-Richtung gebündelt.

Zufallsgenerator für den Lambertstrahler

Stelle mir zufällig abgestrahlte „Lichtpakete“ oder „Photonen“ vor. Die Größe

$$\frac{1}{\pi} \cos \vartheta d\Omega = \frac{1}{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

definiert eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf der Halbkugel. Sie hängt nicht von φ ab. Integriere über $d\varphi$ und erhalte eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(\vartheta) = 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \quad (5)$$

für den Winkel ϑ . Es gilt (rechne nach!)

$$\int_0^{\pi/2} p(\vartheta) d\vartheta = 1.$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet:

$$F(\vartheta) = \sin^2 \vartheta \quad (6)$$

oder auch

$$F(\vartheta) = 1 - \cos^2 \vartheta \quad (7)$$

Mit der Inversionsmethode bekommt man einen Zufallsgenerator durch

$$\vartheta = \arcsin \sqrt{u} \quad (8)$$

oder

$$\vartheta = \arccos \sqrt{u}. \quad (9)$$

Der Winkel φ ist gleichverteilt zwischen 0 und 2π .

Für den verallgemeinerten Lambert-Strahler gilt

$$F(\vartheta) = 1 - \cos^{m+1} \vartheta, \quad (10)$$

und kann man den Polarwinkel mit

$$\vartheta = \arccos \sqrt[m+1]{u} \quad (11)$$

erzeugen.

Vereinfachung: Für den Richtungsvektor eines Lambertstrahlers

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (12)$$

braucht man gar nicht ϑ , sondern nur $\cos \vartheta$. Den arccos braucht man gar nicht zu berechnen. Würfele also

$$\cos \vartheta = \sqrt[m+1]{u}$$

aus, berechne

$$\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$$

und setze beides in den Richtungsvektor ein. Beachte $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

Etwas Geometrie: Lambertstrahler in beliebige Richtungen

Die Winkel ϑ bezieht sich auf einen Einheitsvektor in z-Richtung:

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine abstrahlende Ebene kann irgend eine Lage im Raum haben, die durch den Normalenvektor der Ebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Eine Drehmatrix $\mathbf{R}(\alpha, \beta)$ mit

$$\vec{n} = \mathbf{R}(\alpha, \beta) \vec{e}_z$$

ist gegeben durch [Orthogonalität prüfen! Vgl. Kladde 2017-01-29]

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Würfele also den Richtungsvektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (14)$$

mit dem Lambert-Zufallsgenerator aus und drehe ihn dann mit

$$\vec{u} \mapsto \vec{v} = \mathbf{R}\vec{u}$$

in die Richtung relativ zum Normalenvektor der Ebene. Bemerkung: Über den Azimutwinkel brauchen wir nicht nachzudenken, da er gleichverteilt ist.

Noch etwas Geometrie: Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Ein Lichtpaket („Photon“) breitet sich entlang einer Geraden aus, die in Punkt-Richtungsform beschrieben wird durch

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{a} + \lambda \vec{v}. \quad (15)$$

Der Aufpunkt \vec{a} ist der Punkt, von dem in Richtung \vec{v} abgestrahlt wird. Das abgestrahlte Licht trifft auf eine Ebene, die in Hessescher Normalenform gegeben ist als

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d, \quad (16)$$

wobei d der Abstand vom Ursprung ist und der Normalen-Einheitsvektor \vec{n} vom Ursprung weg zeigen muss. Aus der Schnittbedingung zwischen Gerade und Ebene erhält man

$$\vec{n} \cdot (\vec{a} + \lambda \vec{v}) = d$$

und damit

$$\lambda = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}. \quad (17)$$

Ein Raum hat mehrere Flächen. Im einfachsten Fall sind das die 6 Begrenzungsflächen eines quaderförmigen Raumes. Mit jeder Ebene gibt es einen Schnittpunkt. Das Licht trifft auf dem mit dem *kleinsten positiven* λ auf. Dieser Punkt wird als Quelle (Lambert-Strahler) für die nächste Reflexion betrachtet.

Achtung: Abgestrahlt wird nach *innen*. Der Normalenvektor der der Hesseschen Normalenform zeigt aber vom Ursprung weg. Man muss also ggf. das Vorzeichen von \vec{n} umdrehen! Das Minuszeichen kann man an verschiedenen Stellen einbauen...

Monte-Carlo-Simulation

Betrachte der Einfachheit halber nur quaderförmige Räume. Simuliere jetzt den Weg eines Lichtpaketes. An der Lichtquelle wird gestartet. Die Quelle ist ein Lambert- oder verallgemeinerter Lambert-Strahler. Man könnte auch einen Kugelstrahler irgendwo mitten im Raum platzieren. Das Lichtpaket fliegt zu einer Wand und wird dort nach dem Lambert-Gesetz reflektiert, d.h. es wird mit zufälliger Richtung wieder emittiert. Die Wand hat eine Reflektivität¹ ρ ($0 < \rho < 1$), d.h. der Anteil $1 - \rho$ der Leistung wird absorbiert. Es gibt zwei Möglichkeiten, das zu berücksichtigen:

1. Das Lichtpaket startet mit der Leistung Eins und wird bei jeder Reflexion um den Faktor ρ schwächer. Vgl. Wasow [1].
2. Das Lichtpaket wird mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \rho$ von der Wand absorbiert und mit der Wahrscheinlichkeit ρ reflektiert, aber es fliegt immer mit der selben Leistung weiter. Vgl. Forsythe, Leibner [2].
3. Hier wie bei der zweiten Variante gerechnet, aber nur der letzte Aufprall (die Absorption) für das Histogramm gezählt. Man muss den Wert mit $(1 - \rho)^{-1}$ gewichten, damit die Leistung richtig normiert ist.

Bei der ersten Variante fliegt das Lichtpaket immer weiter. Da man nicht unendlich viele Reflexionen simulieren kann, muss man irgendwo abbrechen. Bei kleinem ρ braucht man nur wenige Reflexionen, bei großem dagegen viele. Ausprobieren. Starte z.B. mal mit 10 Reflexionen.

Bei der zweiten und dritten Variante steckt der Leistungsverlust in der Statistik (geometrische Verteilung).

Die Wände werden in Kacheln unterteilt (Kantenlänge im Bereich Dezimeter) und mit einem (eindimensionalen) Index durchnummeriert. Es werden sehr viele (einige Millionen) Lichtpakete ausgesendet und deren Ausbreitung simuliert. Bei jedem Auftreffen eines Lichtpaketes auf einer Kachel wird dies als Beitrag der auftreffenden Strahlungsleistung auf dieser Kachel gezählt. Bei Variante 1 muss berücksichtigt werden, wie sich die Leistung durch Reflexion bereits abgeschwächt hat: Beim ersten Auftreffen die volle Leistung, beim zweiten um ρ weniger, beim dritten um ρ^2 weniger usw. Bei Variante 2 und 3 wird einfach gezählt, d.h. ein Histogramm gebildet. Bei der Variante 2 wird jeder Aufprall gezählt, bei Variante 3 nur der letzte. Zum Schluss muss man noch normieren, d.h. durch die Zahl der Pakete teilen. Auf diese Weise bekommt jede Kachel einen Wert, der die auftreffende Strahlungsleistung repräsentiert.

Die Gesamtleistung an allen Kacheln zusammen hat den Wert

$$\frac{1}{1 - \rho} \Phi.$$

Das folgt aus der Summenformel der geometrischen Reihe.

Zu allen drei Varianten gibt es auch die Möglichkeit einer Simulation rückwärts. Die Lichtausbreitung ist umkehrbar. Man simuliert jetzt vom Empfangspunkt ausgehend

¹Wir nehmen zunächst mal festes ρ für den ganzen Raum an. Das lässt sich aber leicht verallgemeinern.

die Reflexionen rückwärts. Die Lichtausbreitung von der Quelle zu den Wänden wird analytisch mit der Lambert-Formel gerechnet.

Diese Monte-Carlo-Simulation ist ein Beispiel für eine Markov-Kette (siehe Seminar, 2. Teil).

Path Tracing für $N = 3$ Flüge innerhalb eines Quaders

Vgl. Notizen Kladde 2017-02-12

Bemerkung: Koordinatenursprung innerhalb des Quaders.

Am Startpunkt \vec{x}_0 wird ein (normierter) Richtungsvektor \vec{v}_1 ausgewürfelt. Die Statistik wird durch die Richtcharakteristik der Quelle bestimmt, z.B. Lambertstrahler oder verallgemeinerter Lambertstrahler oder auch Kugelstrahler.

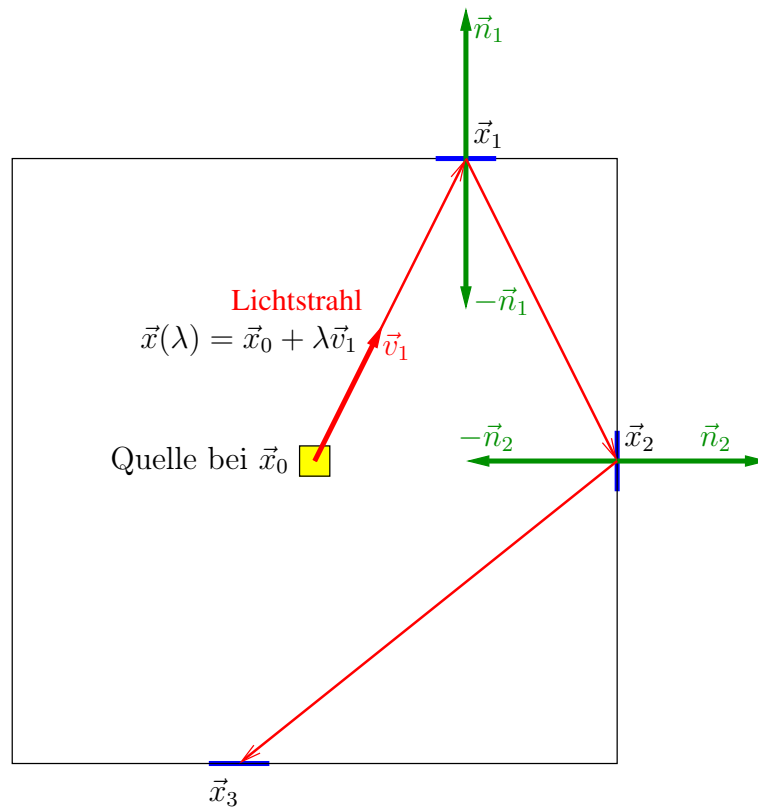


Abbildung 2: Simulation der Markov-Kette für Licht im Raum (forward pathtracing) für den zufälligen Fall von 3 Übergängen.

Der Flug Nummer 1 endet am Aufprallpunkt

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{v}_1,$$

wobei λ_1 die zurückgelegte Wegstrecke ist. Dieser Punkt (an einer Wand) liegt in einer Ebene, die in der Hesseschen Normalenform gegeben ist durch

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{x} = d_1.$$

Der Normalenvektor \vec{n}_1 zeigt nach *außen*, und den nach *innen* zeigenden Vektor schreiben wir

$$-\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Hieraus wird die Drehmatrix

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(\alpha, \beta)$$

für den Flug Nummer 2 nach Gleichung (13) gebildet. Es gilt dabei

$$-\vec{n}_1 = \mathbf{R}_2 \vec{e}_z.$$

Jetzt wird mit dem Zufallsgenerator für den Lambertstrahler ein Einheitsvektor \vec{u}_2 nach Gleichung (12) ausgewürfelt. Dieser ist aber noch in Bezug zur z-Achse (also \vec{e}_z) ausgerichtet (also im ursprünglichen Koordinatensystem) und muss durch

$$\vec{v}_2 = \mathbf{R}_2 \vec{u}_2$$

in die Abstrahlrichtung für Flug Nummer 2 gedreht werden.

Der Flug Nummer 2 endet am Aufprallpunkt

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2.$$

Es wird wieder aus dem Normalenvektor \vec{n}_2 der Aufprallebene eine Drehmatrix \mathbf{R}_3 berechnet. Dann wird ein Lambert-Zufallsvektor \vec{u}_3 mit dieser Matrix in die Abstrahlrichtung

$$\vec{v}_3 = \mathbf{R}_3 \vec{u}_3$$

für Flug Nummer 3 gedreht.

Der Flug Nummer 3 endet am Aufprallpunkt

$$\vec{x}_3 = \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3.$$

Hier wird jetzt ausgewertet.

Auswertung am Beispiel der dritten Variante

Bei der oben genannten dritten Variante wird nur der Ort nach dem letzten Flug ausgewertet. Von der Programmierung ist das wahrscheinlich die einfachste Variante. Die Anzahl der Flüge folgt einer geometrischen Verteilung, und der letzte Ort \vec{x} (im obigen Beispiel eben \vec{x}_3) wird gespeichert. Es werden dann viele (z.B. eine Million) solche „Flugfolgen“ ausgewürfelt, und für die Endpunkte \vec{x} wird ein Histogramm erstellt. Der Befehl `histcount2` könnte dabei hilfreich sein.

Auswertung am Beispiel der zweiten Variante

Bei der zweiten Variante wird nach jedem Aufprall für das Histogramm gezählt. Das ist ein klein wenig komplizierter zu programmieren, liefert aber eine bessere Statistik.

Ein paar Ergebnisse als Beispiel

Es wird eine Würfel der Kantenlänge 1 betrachtet. Der Strahler (verallgemeinerter Lambert-Strahler mit $m = 5$) ist in der Mitte des Würfels und strahlt nach unten. Abbildung 3 zeigt links ein paar wenige Ausbreitungswege der Photonen und rechts die simulierte Ausleuchtung der Bodenfläche für 100000 simulierte Photonen und die zweite Variante.

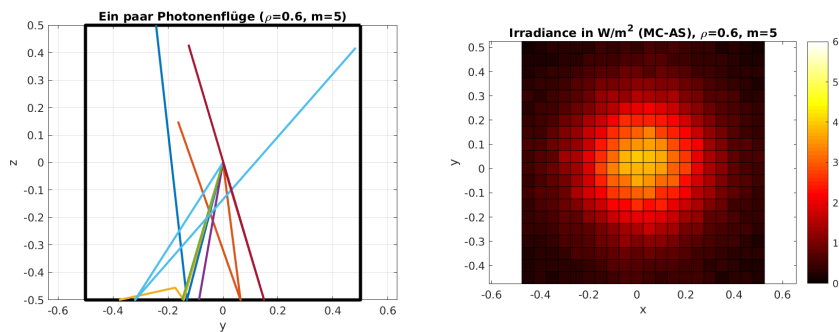


Abbildung 3: Simulation der Markov-Kette für Licht im Raum und die Ausleuchtung der Bodenfläche für $\rho = 0.6$.

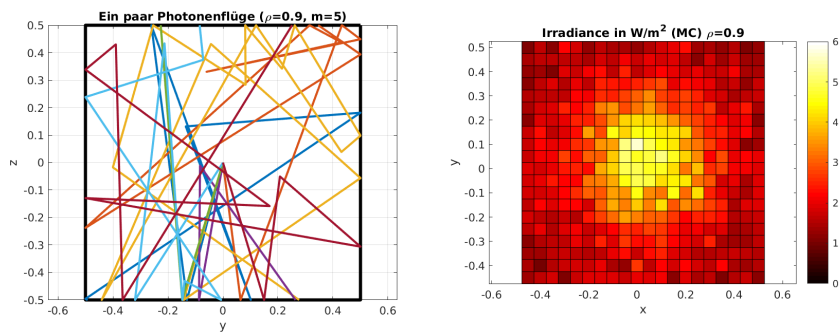


Abbildung 4: Simulation der Markov-Kette für Licht im Raum und die Ausleuchtung der Bodenfläche für $\rho = 0.9$.

Literatur

- [1] W. Wasow, "Matrix inversion by a Monte Carlo method," *Math. Tables Other Aids Comput.*, vol. 4, pp. 127–129, 1950.

- [2] S. Forsythe and R. Leibner, “A note on the inversion of matrices by random walks,” *Math. Tables Other Aids Comput.*, vol. 6, pp. 78–81, 1952.