# Домашнее задание №8.

№1. Обобщить алгоритм ДП для вычисления $\hat{y}$ в многоклассовом SGD.

$$\Delta(y', y) = \sum_{t=1}^{\tau} \delta(y'_t, y_t).$$

- Ищем $\hat{y}$ как $\arg\max_{y' \in Y} \left(\Delta(y', y) + \langle w^{(t)}, \Psi(x, y') - \Psi(x, y)\rangle\right)$

$$\Psi(x, y) = \sum_{t=1}^{\tau} \phi(x, y_t, y_{t-1})$$

Тогда можем переписать функцию под argmax в виде:

$$\sum_{t=1}^{\tau}\left(\delta(y'_t; y_t) + \langle w, \phi(x, y'_t, y'_{t-1}) - \phi(x, y_t, y_{t-1})\rangle\right)$$

Т.к. $\phi(x, y_t, y_{t-1})$ – константа, то тогда нас интересует

$$\hat{y} \in \arg\max_{y' \in Y}\left(\sum_{t=1}^{\tau}\left(\delta(y'_t; y_t) + \langle w, \phi(x, y'_t, y'_{t-1})\rangle\right)\right)$$

Теперь определим:

$$M_{s,\tau} = \max_{(y_1 \dots y_\tau): y_\tau = s} \sum_{t=1}^{\tau}\left(\sum_{T=1}^{\tau}\left(\delta(y'_T; y_T) + \langle w, \phi(x, y'_T, y'_{T-1})\rangle\right)\right).$$

И тогда можно записать рекурсивное выражение

$$M_{s,\tau} = \max_{s'}\left(M_{s',\tau-1} + \delta(s, y_\tau) + \langle w, \phi(x, s, s')\rangle\right).$$

$\varnothing$

N2. Показать, что следующие определения эквивалентны:

$$b(y') = (\text{sign}(y_1' - \theta), \dots, \text{sign}(y_r' - \theta))$$

$$\sim$$

$$\tilde{b}(y') = \underset{v \in V}{\text{argmax}} \sum_{i=1}^{r} v_i y_i'$$

•

Recall at k: $\theta: a + b \le k$, $\Delta(y'; y) = \text{recall}$

Precision at k: $\theta: a + b \ge k$, $\Delta(y'; y) = \text{precision}$

Надо показать, что $\forall \theta\ \exists V$ такое множество, $V \subseteq \{\pm 1\}^r$, что

$$\forall y': (\text{sign}(y_1' - \theta), \dots, \text{sign}(y_r' - \theta)) = \underset{v \in V}{\text{argmax}} \sum_{i=1}^{r} v_i y_i'.$$

(1). Пусть у нас $y_i'$, которые больше $0$, для Recall at $k$ будет меньше $k$, а для Precision at $k$ будет больше $k$.

Тогда $\theta = 0$ и получаем, что в $V = \{\pm 1\}^r$

$\exists v^* = (\text{sign}(y_1'), \dots \text{sign}(y_r'))$ такой что

$$\underset{v \in V}{\text{argmax}} \sum_{i=1}^{r} v_i y_i' = v^* = (\text{sign}(y_1', \dots \text{sign}(y_r'))).$$

$\varnothing$

(2). Recall at $k$. Если $a + b \le k$, то выберем $\theta > 0$ такое, что $\sum_{i=1}^{r} \text{sign}(y_i' - \theta) = k$.

В этом случае возьмём такое множество $V \subset \{\pm 1\}^r$, вектора которого содержат ровно $k$ единиц.

Тогда $\arg\max\limits_{v \in V} \sum\limits_{i=1}^{r} v_i y_i' = v^*$, в котором $k$ единиц

и которые стоят около тех $y_i'$, что

$sign(y_i' - \theta) = 1$, а таких

меток $k$ шт.

Т.е. индексы $i_j$, что $sign(y_i' - \theta) = 1$ и $v_j = 1$

$$\forall \theta \ \exists V: \ \Rightarrow (sign(y_1' - \theta), \dots sign(y_r' - \theta)) = \arg\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{r} v_i y_i'$$

③ Аналогично и для Precision at k как в пункте ②.

Выбираем мн-во $V \subset \{\pm 1\}^r$ с ровно $k$ единицами.

Единиц не может быть больше, т.к. тогда

был бы индекс $i$, что $y_i' < 0$, а $v_i = 1$ и

для получения максим. надо было

бы взять $v_i = -1$.

Тогда $\arg\max\limits_{v \in V} \sum\limits_{i=1}^{r} v_i y_i' = v^*$ и

$$\forall \theta \ \exists V: \ (sign(y_1' - \theta), \dots sign(y_r' - \theta)) = \arg\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{r} v_i y_i'.$$

$\cancel{\emptyset}$