Домашнее задание №4

№1. $R(A) = \frac{1}{m} \mathop{E}_{\sigma} \{ \sup\limits_{a \in A} \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i a_i \}$, $A = \{(1,2),(3,3),(4,0)\}$

$m = 2 \Rightarrow \sigma = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$.

по формуле супремума

- $(1,1)$: $\langle \sigma, a_1 \rangle = 3$ $\quad \langle \sigma, a_2 \rangle = \underline{6}$ $\quad \langle \sigma, a_3 \rangle = 4$
- $(1,-1)$: $\langle \sigma, a_1 \rangle = -1$ $\quad \langle \sigma, a_2 \rangle = 0$ $\quad \langle \sigma, a_3 \rangle = \underline{4}$
- $(-1,1)$: $\langle \sigma, a_1 \rangle = \underline{1}$ $\quad \langle \sigma, a_2 \rangle = 0$ $\quad \langle \sigma, a_3 \rangle = -4$
- $(-1,-1)$: $\langle \sigma, a_1 \rangle = \underline{-3}$ $\quad \langle \sigma, a_2 \rangle = -6$ $\quad \langle \sigma, a_3 \rangle = -4$

$$R(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} - 3 \cdot \frac{1}{2^2} \right) = 8 \cdot \frac{1}{2^3} = 1.$$

Ответ: $R(A) = 1$.

№2. $S = \{(0,-1),(1,1),(1/3,1)\}$ $\qquad x \in [0,1]$, $y \in \{\pm 1\}$

$H = \{h_1, h_2\}$ $\quad h_1(x) = 2x - 1$ $\quad h_2(x) = x$

$\ell(h, x) = \max(0, 1 - y \cdot h(x))$.

$X \sim R[0,1] \longrightarrow p_X(x) = 1$. $\qquad y(x) = \begin{cases} 1, & x > 1/4 \\ -1, & x \le 1/4 \end{cases}$

$Rep(\ell \circ H, S) = \sup\limits_{h \in H} (L_D(h) - L_S(h))$, $\qquad L_D(h) = E\{\ell(h,x)\}$

$L_S(h) = \frac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{m} \ell(h, x_i)$.

1) $h_1(x) = 2x - 1$

$h_1(x_1) = -1$ $\quad h_2(x_2) = 1$ $\quad h_3(x_3) = -1/3$

$L_D(h_1) = E\{\max(0, 1 - y \cdot (2x-1))\} =$

$= \int\limits_0^1 \max(0, 1 - y \cdot (2x-1)) dx =$

$$= \int_0^{1/4} \max(0, 1+(2x-1))\,dx + \int_{1/4}^{1} \max(0, 1-(2x-1))\,dx =$$

$$= \int_0^{1/4} \max(0, 2x)\,dx + \int_{1/4}^{1} \max(0, 2-2x)\,dx =$$

$$= \int_0^{1/4} 2x\,dx + \int_{1/4}^{1} (2-2x)\,dx = x^2\Big|_0^{1/4} + (2x - x^2)\Big|_{1/4}^{1} =$$

$$= \frac{1}{16} + 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8}$$

$$L_S(h_1) = \frac{1}{3}\Big(\max(0, 1-(-1)\cdot(2\cdot 0-1)) + \max(0, 1-1(2\cdot 1-1)) +$$
$$\max(0, 1-1\cdot(2\cdot \tfrac{1}{3}-1))\Big) = \frac{1}{3}\left(0+0+\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$L_D(h_1) - L_S(h_1) = \frac{5}{8} - \frac{4}{9} = \frac{13}{72}$$

2) $h_2(x) = x$

$h_2(x_1) = 0 \qquad h_2(x_2) = 1 \qquad h_3(x_3) = 1/3$

$$L_D(h_2) = E\{\max(0, 1-yx)\} = \int_0^{1/4} \max(0, 1+x)\,dx + \int_{1/4}^{1} \max(0, 1-x)\,dx =$$

$$= \int_0^{1/4} (1+x)\,dx + \int_{1/4}^{1} (1-x)\,dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{1/4} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/4}^{1} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{32} + 1 - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{32} = \frac{9}{16}$$

$$L_S(h_2) = \frac{1}{3}\left(\max(0, 1+0) + \max(0, 1-1) + \max(0, 1-1/3)\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

$$L_D(h_1) - L_S(h_2) = \frac{9}{16} - \frac{5}{9} = \frac{81-80}{9\cdot 16} = \frac{1}{9\cdot 16} = \frac{1}{144}$$

Ответ: $Rep(\ell \circ H, S) = \sup_{h \in H}(L_D(h) - L_S(h)) = \frac{13}{72}$.

№3. 2) Докажем, что $R(A_1+A_2)=R(A_1)+R(A_2)$,

$$A_1+A_2=\{a_1+a_2 : a_1\in A_1, a_2\in A_2\}$$

$$R(A_1+A_2)=\frac{1}{m}\cdot \underset{\sigma}{E}\{\sup_{a\in A_1+A_2}\sum \sigma_i a_i\}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2^m}\sum_{\sigma}\sup_{a_1+a_2\in A_1+A_2}\langle\sigma, a_1+a_2\rangle.$$

кол-во элементов в мн-ве σ и все они равновероятны

Покажем, что $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle=\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle$.

Докажем от противного. Пусть $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle\neq\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle$.

1) $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle>\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle\Rightarrow$

$\exists\varepsilon>0$, что $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle+\varepsilon=\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle$

также знаем, что $\exists\bar a_1$ $\sup\langle\sigma,a_1\rangle<\langle\sigma,\bar a_1\rangle+\varepsilon/2$

$\exists\bar a_2$ $\sup\langle\sigma,a_2\rangle<\langle\sigma,\bar a_2\rangle+\varepsilon/2$

тогда $\exists\bar a_1,\bar a_2$, $\exists\varepsilon>0$, что $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle+\varepsilon<\sup\langle\sigma,\bar a_1\rangle+\sup\langle\sigma,\bar a_2\rangle+\varepsilon$

$\Rightarrow\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle<\sup\langle\sigma,\bar a_1\rangle+\sup\langle\sigma,\bar a_2\rangle$, что верно $\forall a_1,a_2$.

Если взять $a_1=\bar a_1$, $a_2=\bar a_2$, то получим противоречие.

2) $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle<\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle$

$\Rightarrow\exists\varepsilon>0$: $\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle=\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle+\varepsilon$.

тогда $\exists\bar a_1,\bar a_2$, что $\sup\langle\sigma,a_1\rangle<\langle\sigma,\bar a_1\rangle+\varepsilon/2$

$\sup\langle\sigma,a_2\rangle<\langle\sigma,\bar a_2\rangle+\varepsilon/2$

$\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle<\langle\sigma,\bar a_1+\bar a_2\rangle+\varepsilon$

$\Rightarrow\langle\sigma,\bar a_1+\bar a_2\rangle+\varepsilon>\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle+\varepsilon$

Пусть $a_1=\bar a_1$ и $a_2=\bar a_2$: $\langle\sigma,\bar a_1+\bar a_2\rangle>\sup\langle\sigma,\bar a_1\rangle+\sup\langle\sigma,\bar a_2\rangle$

Противоречие.

$\Rightarrow\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle=\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\sup\langle\sigma,a_2\rangle$

$\Rightarrow R_1(A_1+A_2)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{\sigma}\sup\langle\sigma,a_1+a_2\rangle=$

$=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2^m}\sum_{\sigma}\sup\langle\sigma,a_1\rangle+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{\sigma}\sup\langle\sigma,a_2\rangle=R(A_1)+R(A_2)$ ∅

1) Докажем, что $R(\{ca+a_0 : a \in A\}) \leq |c| R(A)$.

Воспользуемся предыдущим пунктом:

$$R(\{ca+a_0 : a \in A\}) = R(\{ca : a \in A\}) + R(a_0).$$

$R(a_0) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2^m} \sum \sup \langle b, a_0 \rangle = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2^m} \sum\limits_{b} \langle b, a_0 \rangle =$

$= \Big[$ т.к. $b_i \in \{\pm 1\}$, то для любого элемента $\bar{b}$ найдётся элемент $-\bar{b}$ такой, что $\bar{b} + (-\bar{b}) = \bar{0}$.

$\Rightarrow \sum \langle b, a_0 \rangle = 0. \Big] = 0.$

Получим, что $R(\{ca+a_0 : a \in A\}) = R(\{ca : a \in A\})$.

Рассмотрим $R(\{ca : a \in A\}) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \sum\limits_{b} \sup\limits_{a \in A} \langle b, ca \rangle =$

$$= \begin{cases} c \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \sum\limits_{b} \sup\limits_{a \in A} \langle b, a \rangle, & \text{если } c > 0 \\ |c| \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \sum\limits_{b} \sup\limits_{a \in A} \langle -b, a \rangle, & \text{если } c < 0 \end{cases} =$$

$= \Big[$ т.к. мы знаем, что $\forall \bar{b} \in b \; \exists -\bar{b}$, что $\bar{b} + (-\bar{b}) = \bar{0}$, то $\sum\limits_{b} \sup\limits_{a \in A} \langle b, a \rangle = \sum\limits_{b} \sup\limits_{a \in A} \langle -b, a \rangle \Big] =$

Всё равно перебираем все элементы множества.

$= |c| \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2^m} \sum\limits_{b} \sup\limits_{a \in A} \langle b, a \rangle = |c| \cdot R(A)$.

$\Rightarrow R(\{ca+a_0 : a \in A\}) = |c| R(A)$

$\otimes$