

CAPÍTULO**11**

Líneas de transmisión

El diccionario es el único lugar en que viene el éxito antes del trabajo. El trabajo intenso es el precio que debemos pagar por el éxito. Estoy convencido de que usted puede lograr casi cualquier cosa si está dispuesto a pagar el precio.

—VINCE LOMBARDI

11.1

INTRODUCCIÓN

El estudio presentado en el capítulo anterior se dirigió, en esencia, a la propagación de ondas en medios no acotados, medios de extensión infinita. Se dice de esta propagación de las ondas que se realiza sin guías, en cuanto a que la onda plana uniforme existe en todo el espacio y la energía EM que está asociada con la onda se extiende en una amplia área. No obstante, la propagación de las ondas en medios no acotados se utiliza en la difusión por radio y por TV, en donde la información que se transmite va dirigida a todo aquel que pueda interesarle. Estos medios de propagación de ondas no ayudan en una situación como la de una conversación telefónica, en la que la información debe ser recibida en forma privada por una sola persona.

Otro medio para transmitir energía o información es el de las estructuras guiadas. Estas estructuras sirven para guiar (o dirigir) la propagación de la energía desde la fuente hasta la carga. Como ejemplos típicos se tienen las líneas de transmisión y las guías de onda. En el capítulo siguiente analizaremos estas últimas, y en éste estudiaremos las líneas de transmisión.

Las líneas de transmisión son de utilización común para la distribución de energía (a bajas frecuencias) y en comunicaciones (a altas frecuencias). Una línea de transmisión está formada básicamente por dos o más conductores paralelos que se emplean para conectar una fuente a una carga. La fuente puede ser un generador hidroeléctrico, un transmisor o un oscilador, y la carga puede ser una fábrica, una antena o un osciloscopio, respectivamente. Las líneas de transmisión típicas pueden constar de un cable coaxial, una línea de dos hilos, una línea plana o de placas paralelas, un alambre por arriba de un plano conductor y una línea de microcinta. En la figura 11.1 se representan vistas en sección transversal de estas líneas, y conviene observar que cada una de ellas está formada por dos conductores en paralelo. Los cables coaxiales se utilizan por rutina en los

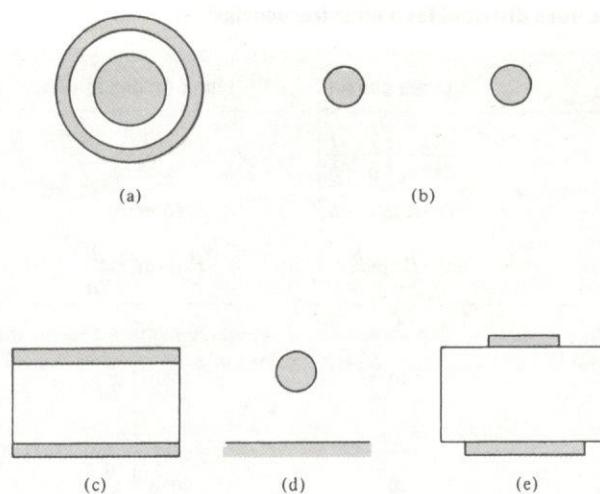


Figura 11.1 Vista en sección transversal de las líneas de transmisión típicas: (a) línea coaxial, (b) línea de dos hilos, (c) línea plana, (d) alambre por arriba de un plano conductor, (e) línea de microcinta.

laboratorios eléctricos y para conectar los aparatos de TV a sus antenas. Las líneas de microcinta (similares a la de la figura 11.1e) son de especial importancia en los circuitos integrados, en los que las cintas metálicas con las que se conectan los elementos electrónicos se depositan sobre sustratos dieléctricos.

Los problemas de líneas de transmisión suelen resolverse utilizando la teoría de campos electromagnéticos y la de los circuitos eléctricos, que son las dos teorías más importantes en las que tiene su fundamento la ingeniería eléctrica. En este capítulo utilizamos la teoría de los circuitos porque ofrece más facilidad para los cálculos matemáticos. Se aplican también aquí los conceptos básicos de la propagación de ondas (como la constante de propagación, el coeficiente de reflexión y la razón de ondas estacionarias) que vimos en el capítulo anterior.

El análisis que vamos a presentar de las líneas de transmisión abarca la deducción de las ecuaciones de las líneas y las magnitudes características, el uso del diagrama de Smith, diversas aplicaciones prácticas de las líneas de transmisión y los transitorios que ocurren en estas líneas.

11.2 PARÁMETROS DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Se acostumbra, y resulta conveniente, describir una línea de transmisión en función de sus parámetros, los cuales son su resistencia por unidad de longitud, R , su inductancia por unidad de longitud, L , su conductancia por unidad de longitud, G , y su capacitancia por unidad de longitud, C . Cada una de las líneas que aparecen en la figura 11.1 tiene fórmulas específicas para determinar R , L , G y C . Las fórmulas para calcular los valores

Tabla 11.1 Parámetros de línea distribuidos a altas frecuencias*

Parámetros	Línea coaxial	Línea de dos hilos	Línea plana
$R (\Omega/m)$	$\frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$ ($\delta \ll a, c - b$)	$\frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$ ($\delta \ll a$)	$\frac{2}{w \delta \sigma_c}$ ($\delta \ll t$)
$L (H/m)$	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$	$\frac{\mu d}{w}$
$G (\Omega/m)$	$\frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$	$\frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$	$\frac{\sigma w}{d}$
$C (F/m)$	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$	$\frac{\epsilon w}{d}$ ($w \gg d$)

* $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}} =$ profundidad pelicular del conductor; $\cosh^{-1} \frac{d}{2a} \approx \ln \frac{d}{a}$ si $\left[\frac{d}{2a} \right]^2 \gg 1$.

de R, L, G y C para las líneas de cable coaxial, de dos hilos y las planas, aparecen en la tabla 11.1. Las dimensiones de las líneas se muestran en la figura 11.2. Algunas de las fórmulas¹ de la tabla 11.1 se dedujeron en los capítulos 6 y 8. Deberá observarse que

1. Los parámetros de una línea, R, L, G y C , no son discretos o concentrados, sino distribuidos como se muestra en la figura 11.3. Dicho en otras palabras, los parámetros están distribuidos a lo largo de la longitud completa de la línea.
2. Para cada línea, los conductores están caracterizados por $\sigma_c, \mu_c, \epsilon_c = \epsilon_0$, y el dieléctrico homogéneo que separa a los conductores está caracterizado por σ, μ, ϵ .
3. $G \neq 1/R$; R es la resistencia en ca por unidad de longitud de los conductores que forman la línea, y G es la conductancia por unidad de longitud debida al medio dieléctrico que separa a los conductores.
4. El valor de L que aparece en la tabla 11.1 es la inductancia externa por unidad de longitud; es decir, $L = L_{ext}$. Los efectos de la inductancia interna L_{int} ($= R/\omega$) son despreciables a altas frecuencias, que son a las que trabajan la mayoría de los sistemas de comunicación.

¹ Pueden obtenerse fórmulas similares para otras líneas de transmisión en los manuales o libros de datos de ingeniería —por ejemplo, en la obra de M. A. R. Guston, *Microwave Transmission-line Impedance Data*, Van Nostrand Reinhold, Londres, 1972.

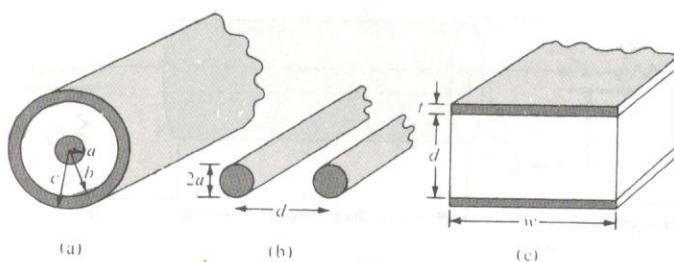


Figura 11.2 Líneas de transmisión comunes: (a) línea coaxial, (b) línea de dos hilos, (c) línea plana. Para cada línea, los conductores se caracterizan por σ_c , μ_c , $\epsilon_c = \epsilon_0$ y el dieléctrico que los separa por σ , μ , ϵ .

5. Para cada línea,

$$LC = \mu\epsilon \quad \text{y} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad [11.1]$$

A manera de preparación para la siguiente sección, consideremos cómo se propaga una onda EM por una línea de transmisión de dos conductores. Por ejemplo, considérese la línea coaxial que conecta al generador o fuente con la carga, como en la figura 11.4(a). Al cerrar el interruptor S , el conductor interior se hace positivo con respecto al exterior, de manera que el campo \mathbf{E} queda dirigido radialmente hacia afuera, como en la figura 11.4(b). Según la ley de Ampère, el campo \mathbf{H} encierra en círculo al conductor por el que fluye la corriente, como en la figura 11.4(b). El vector de Poynting ($\mathbf{E} \times \mathbf{H}$) apunta a lo largo de la línea de transmisión. En consecuencia, al cerrar el interruptor simplemente se establece una perturbación, la cual se manifiesta como una onda electromagnética transversal (EMT) que se propaga a lo largo de la línea. Esta onda es una onda plana no uniforme, y por medio de ella se transmite energía a lo largo de la línea.

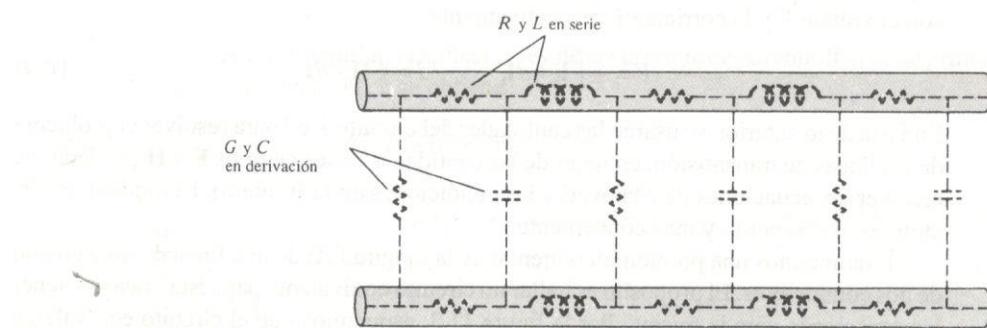


Figura 11.3 Parámetros distribuidos de una línea de transmisión de dos conductores.

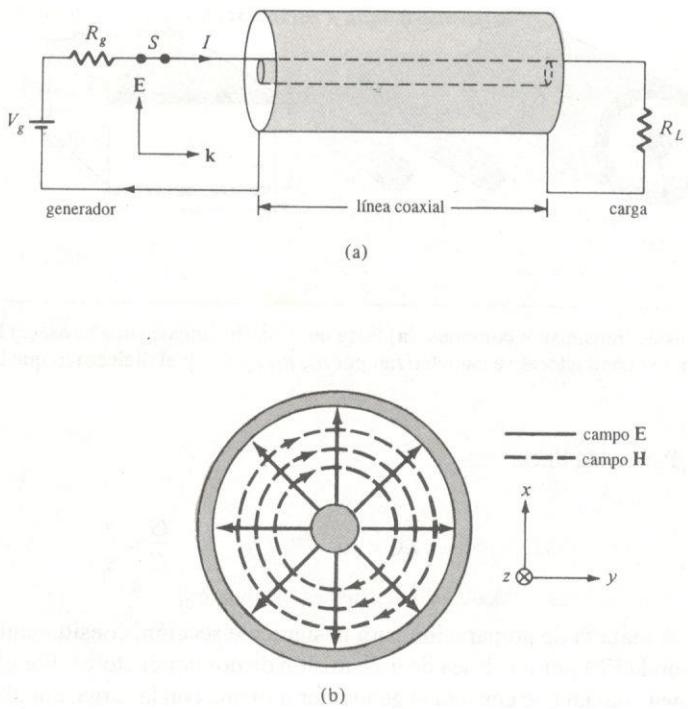


Figura 11.4 (a) Línea coaxial que conecta el generador a la carga; (b) Campos **E** y **H** en la línea coaxial.

11.3 ECUACIONES DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Como se mencionó en la sección anterior, una línea de transmisión de dos conductores soporta una onda EMT; es decir, los campos eléctrico y magnético que hay en la línea son transversales respecto a la dirección de propagación de la onda. Una propiedad importante de las ondas EMT es que los campos **E** y **H** están relacionados en forma única con el voltaje *V* y la corriente *I*, respectivamente:

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad [11.2]$$

En vista de lo anterior, se usarán las cantidades del circuito *V* e *I* para resolver el problema de las líneas de transmisión, en lugar de las cantidades de los campos **E** y **H** (es decir, de resolver las ecuaciones de Maxwell y las condiciones en la frontera). El modelo de circuito es más sencillo y más conveniente.

Examinemos una porción incremental de la longitud Δz de una línea de transmisión de dos conductores. El propósito es hallar un circuito equivalente para esta línea y obtener las ecuaciones para la misma. Por la figura 11.3, esperamos que el circuito equivalente de una porción de la línea sea como se representa en la figura 11.5. El modelo de la figura 11.5 está construido en función de los parámetros de la línea *R*, *L*, *G* y *C*, y puede representar cualquiera de las líneas de dos conductores de la figura 11.2. A este modelo

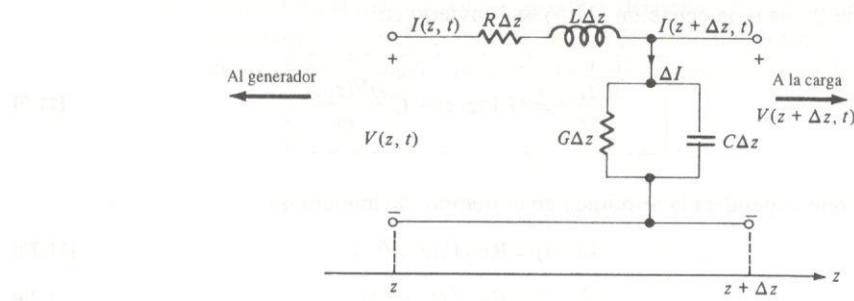


Figura 11.5 Modelo de circuito equivalente de tipo L de una longitud diferencial Δz de una línea de transmisión de dos conductores.

se le llama circuito equivalente de tipo L ; existen otros tipos posibles (véase problema 11.1). En el modelo de la figura 11.5, suponemos que la onda se propaga a lo largo de la dirección $+z$, desde el generador hasta la carga.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a la espira exterior del circuito de la figura 11.5, se obtiene

$$V(z, t) = R \Delta z I(z, t) + L \Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + V(z + \Delta z, t)$$

o sea,

$$-\frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = R I(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad [11.3]$$

Si se toma el límite de la ecuación (11.3) como $\Delta z \rightarrow 0$, esto lleva a

$$\boxed{-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = RI(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}} \quad [11.4]$$

De modo similar, al aplicar la ley de la corriente de Kirchhoff al nodo principal del circuito de la figura 11.5, se obtiene

$$\begin{aligned} I(z, t) &= I(z + \Delta z, t) + \Delta I \\ &= I(z + \Delta z, t) + G \Delta z V(z + \Delta z, t) + C \Delta z \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

o sea,

$$-\frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} = G V(z + \Delta z, t) + C \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \quad [11.5]$$

Conforme $\Delta z \rightarrow 0$, la ecuación (11.5) se convierte en

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = G V(z, t) + C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad [11.6]$$

Si se supone dependencia armónica en el tiempo, de manera que

$$V(z, t) = \operatorname{Re}(V_s(z) e^{j\omega t}) \quad [11.7a]$$

$$I(z, t) = \operatorname{Re}(I_s(z) e^{j\omega t}) \quad [11.7b]$$

en donde $V_s(z)$ e $I_s(z)$ son las formas de fasor de $V(z, t)$ e $I(z, t)$, respectivamente, las ecuaciones (11.4) y (11.6) se convierten en

$$-\frac{dV_s}{dz} = (R + j\omega L) I_s \quad [11.8]$$

$$-\frac{dI_s}{dz} = (G + j\omega C) V_s \quad [11.9]$$

En las ecuaciones diferenciales (11.8) y (11.9), V_s e I_s están acoplados. Para separarlos, se toma la segunda derivada de V_s en la ecuación (11.8) y se usa la ecuación (11.9); así se obtiene

$$\frac{d^2V_s}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V_s$$

o sea,

$$\frac{d^2V_s}{dz^2} - \gamma^2 V_s = 0 \quad [11.10]$$

en donde

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad [11.11]$$

Al tomar la segunda derivada de I_s en la ecuación (11.9), y si se utiliza la ecuación (11.8), se obtiene

$$\frac{d^2I_s}{dz^2} - \gamma^2 I_s = 0 \quad [11.12]$$

Observamos que las ecuaciones (11.10) y (11.12) son, respectivamente, las ecuaciones de onda para el voltaje y la corriente, y que son de forma similar a las ecuaciones de onda obtenidas para las ondas planas de las ecuaciones (10.17) y (10.19). En consecuencia, en nuestras notaciones usuales, γ es en la ecuación (11.11) la constante de propagación

(pulgadas por metro), α es la constante de atenuación (en nepers por metro o en decibeles por metro), y β es la constante de fase (en radianes por metro). La longitud de onda λ y la velocidad de onda u las dan, respectivamente, las expresiones

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad [11.13]$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda \quad [11.14]$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (11.10) y (11.12) son similares al caso 2 del ejemplo 6.5, o sea,

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{\gamma z} \quad [11.15]$$

————— → +z —z ←————

y

$$I_s(z) = I_o^+ e^{-\gamma z} + I_o^- e^{\gamma z} \quad [11.16]$$

————— → +z —z ←————

en donde V_o^+ , V_o^- , I_o^+ e I_o^- son las amplitudes de onda; los signos + y - denotan, respectivamente, que la onda viaja a lo largo de las direcciones $+z$ y $-z$, como también lo indican las flechas. Así, se obtiene la expresión instantánea para el voltaje como

$$\begin{aligned} V(z, t) &= \operatorname{Re}(V_s(z) e^{j\omega t}) \\ &= V_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \end{aligned} \quad [11.17]$$

La *impedancia característica* Z_0 de la línea se define como la razón de la onda de voltaje que viaja positivamente a la onda de corriente en cualquier punto de la línea. Z_0 es análoga a η , la impedancia intrínseca del medio de propagación de la onda. Si se sustituyen las ecuaciones (11.15) y (11.16) en las ecuaciones (11.8) y (11.9), y al igualar los coeficientes de los términos $e^{\gamma z}$ y $e^{-\gamma z}$, se obtiene

$$Z_0 = \frac{V_o^+}{I_o^+} = -\frac{V_o^-}{I_o^-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} \quad [11.18]$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = R_o + jX_o \quad [11.19]$$

en donde R_o y X_o son las partes real e imaginaria de Z_0 . No debe confundirse R_o con R ; R está expresada en ohms por metro y R_o lo está en ohms. La constante de propagación

γ y la impedancia característica Z_0 son propiedades importantes de la línea porque dependen ambas de los parámetros de la línea R , L , G y C y de la frecuencia de operación. El recíproco de Z_0 es la admitancia característica Y_0 , es decir, $Y_0 = 1/Z_0$.

La línea de transmisión que se ha considerado hasta ahora en esta sección es del tipo *dissipativo* en cuanto a que los conductores que forman la línea son imperfectos ($\sigma_c \neq \infty$) y el dieléctrico en el cual están embebidos los conductores es disipativo ($\sigma \neq 0$). Una vez considerado este caso general, ahora se puede considerar dos casos especiales de línea de transmisión sin pérdidas y línea sin distorsión.

A. Línea sin pérdidas ($R = 0 = G$)

Se dice que una línea de transmisión *no tiene pérdidas* si los conductores de la línea son perfectos ($\sigma_c \approx \infty$) y el medio dieléctrico que los separa tampoco tiene pérdidas ($\sigma \approx 0$). Para una línea de esta clase, es evidente por la tabla 11.1 que cuando $\sigma_c \approx \infty$ y $\sigma \approx 0$,

$$R = 0 = G$$

[11.20]

Ésta es una condición necesaria para que una línea no tenga pérdidas. En consecuencia, para una línea de esta clase la ecuación (11.20) obliga a las ecuaciones (11.11), (11.14) y (11.19) a convertirse en

$$\alpha = 0, \quad \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad [11.21a]$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f\lambda \quad [11.21b]$$

$$X_0 = 0, \quad Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [11.21c]$$

B. Línea sin distorsión ($R/L = G/C$)

Una señal consiste normalmente en una banda de frecuencias; las amplitudes de onda de las diferentes componentes de frecuencia son atenuadas de manera diferente en una línea disipativa, ya que α depende de la frecuencia. Esto da lugar a distorsión. Una *línea sin distorsión* es aquella en que la constante de atenuación α es independiente de la frecuencia, mientras que la constante de fase β es linealmente dependiente de la frecuencia. Por la expresión general para α y β (véase problema 11.6), es evidente que resulta una línea sin distorsión si los parámetros de la línea son tales que

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

[11.22]

En consecuencia, para una línea sin distorsión,

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{RG} \left(1 + \frac{j\omega L}{R} \right) \left(1 + \frac{j\omega C}{G} \right) \\ &= \sqrt{RG} \left(1 + \frac{j\omega C}{G} \right) = \alpha + j\beta\end{aligned}$$

o sea,

$$\alpha = \sqrt{RG}, \quad \beta = \omega \sqrt{LC}$$

[11.23a]

lo cual indica que α no depende de la frecuencia, mientras que β es una función lineal de la misma. También

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R(1+j\omega L/R)}{G(1+j\omega C/G)}} = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0 + jX_0$$

o sea,

$$R_0 = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad X_0 = 0$$

[11.23b]

y

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f\lambda$$

[11.23c]

Debe observarse que

1. La velocidad de fase es independiente de la frecuencia porque la constante de fase β depende linealmente de la frecuencia. Se tiene distorsión de forma de las señales, a menos que α y u sean independientes de la frecuencia.
2. u y Z_0 son las mismas que para las líneas sin pérdidas.
3. Una línea sin pérdidas es también una línea sin distorsión, pero una línea sin distorsión no es necesariamente sin pérdidas. Aunque las líneas sin pérdidas son deseables en la transmisión de energía, las líneas telefónicas se requiere que sean sin distorsión.

En la tabla 11.2 se presenta un resumen de todo este análisis. El estudio de la mayor parte de nuestro análisis se limitará a las líneas de transmisión sin pérdidas.

EJEMPLO

11.1

Una línea en aire tiene impedancia característica de 70Ω y constante de fase de 3 rad/m a 100 MHz . Calcule la inductancia por metro y la capacitancia por metro de la línea.

Tabla 11.2

Características de las líneas de transmisión

Caso	Constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$	Impedancia característica $Z_0 = R_0 + jX_0$
General	$\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$	$\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$
Sin pérdidas	$0 + j\omega \sqrt{LC}$	$\sqrt{\frac{L}{C}} + j0$
Sin distorsión	$\sqrt{RG} + j\omega \sqrt{LC}$	$\sqrt{\frac{L}{C}} + j0$

SOLUCIÓN

Una línea en aire puede considerarse como una línea sin pérdidas, ya que $\sigma \approx 0$. Por lo tanto

$$R = 0 = G \quad \text{y} \quad \alpha = 0$$

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [11.1.1]$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad [11.1.2]$$

Al dividir la ecuación (11.1.1) entre la ecuación (11.1.2), se obtiene

$$\frac{R_0}{\beta} = \frac{1}{\omega C}$$

o sea,

$$C = \frac{\beta}{\omega R_0} = \frac{3}{2\pi \times 100 \times 10^6 (70)} = 68.2 \text{ pF/m}$$

De la ecuación (11.1.1),

$$L = R_0^2 C = (70)^2 (68.2 \times 10^{-12}) = 334.2 \text{ nH/m}$$

EJERCICIO**11.1**

Una línea de transmisión que opera a 500 MHz tiene $Z_0 = 80 \Omega$, $\alpha = 0.04 \text{ Np/m}$, $\beta = 1.5 \text{ rad/m}$. Halle los parámetros de la línea, R , L , G y C .

RESPUESTA

$3.2 \Omega/\text{m}$, 38.2 nH/m , $5 \times 10^{-4} \text{ Vs/m}$, 5.97 pF/m .

EJEMPLO**11.2**

Una línea sin distorsión tiene $Z_0 = 60 \Omega$, $\alpha = 20 \text{ mNp/m}$, $u = 0.6c$, en donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Halle R , L , G , C y λ a 100 MHz.

SOLUCIÓN

Para una línea sin distorsión,

$$RC = GL \quad \text{o sea,} \quad G = \frac{RC}{L} \quad [11.2.1]$$

y, por lo tanto,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [11.2.1]$$

$$\alpha = \sqrt{RG} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{Z_0} \quad [11.2.2a]$$

o sea,

$$R = \alpha Z_0 \quad [11.2.2b]$$

Pero,

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [11.2.3]$$

De la ecuación (11.2.2b),

$$R = \alpha Z_0 = (20 \times 10^{-3})(60) = 1.2 \Omega/\text{m}$$

Si se divide la ecuación (11.2.1) entre la ecuación (11.2.3), se obtiene lo siguiente

$$L = \frac{Z_0}{u} = \frac{60}{0.6(3 \times 10^8)} = 333 \text{ nH/m}$$

De la ecuación (11.2.2a),

$$G = \frac{\alpha^2}{R} = \frac{400 \times 10^{-6}}{1.2} = 333 \mu \text{S/m}$$

Al multiplicar las ecuaciones (11.2.1) y (11.2.3) entre sí, se obtiene

$$u Z_0 = \frac{1}{C}$$

o sea,

$$C = \frac{1}{u Z_0} = \frac{1}{0.6(3 \times 10^8) 60} = 92.59 \text{ pF/m}$$

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{0.6(3 \times 10^8)}{10^8} = 1.8 \text{ m}$$

EJERCICIO

11.2

Una línea telefónica tiene $R = 30 \Omega/\text{km}$, $L = 100 \text{ mH/km}$, $G = 0$ y $C = 20 \mu\text{F/km}$. A $f = 1 \text{ kHz}$, obtenga

- La impedancia característica de la línea
- La constante de propagación
- La velocidad de fase

RESPUESTA

- (a) $70.75 / -1.367^\circ \Omega$, (b) $2.121 \times 10^{-4} + j8.888 \times 10^{-3}/\text{m}$, (c) $7.069 \times 105 \text{ m/s}$.

11.4

IMPEDANCIA DE ENTRADA, RAZÓN DE ONDA ESTACIONARIA Y ENERGÍA

Considérese una línea de transmisión de longitud ℓ , caracterizada por γ y Z_0 , conectada a una carga Z_L , como se muestra en la figura 11.6. Si se observa hacia la línea, el generador la ve con la carga como una impedancia de entrada Z_{ent} . Es nuestro objetivo en esta sección determinar la impedancia de entrada, la razón de onda estacionaria (ROE) y el flujo de energía en la línea.

Supóngase que la línea de transmisión se extiende desde $z = 0$ en el generador hasta $z = \ell$ en la carga. Antes que todo, se necesita V_o^+ e I_o^+ en las ecuaciones (11.15) y (11.16), es decir,

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{\gamma z} \quad [11.24]$$

$$I_s(z) = \frac{V_o^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_0} e^{\gamma z} \quad [11.25]$$

en donde se ha incorporado la ecuación (11.18). Para hallar V_o^+ y V_o^- , deben darse las condiciones terminales. Por ejemplo, si se dan las condiciones en la entrada como

$$V_o = V(z = 0), \quad I_o = I(z = 0), \quad [11.26]$$

al sustituir éstas en las ecuaciones (11.24) y (11.25), se obtiene

$$V_o^+ = \frac{1}{2} (V_o + Z_0 I_o) \quad [11.27a]$$

$$V_o^- = \frac{1}{2} (V_o - Z_0 I_o) \quad [11.27b]$$

Si la impedancia de entrada en las terminales de entrada es Z_{ent} , el voltaje de entrada V_o y la corriente de entrada I_o se obtienen fácilmente de la figura 11.6 como

$$V_o = \frac{Z_{\text{ent}}}{Z_{\text{ent}} + Z_g} V_g, \quad I_o = \frac{V_g}{Z_{\text{ent}} + Z_g} \quad [11.28]$$

Por otra parte, si se nos dan las condiciones en la carga como

$$V_L = V(z = \ell), \quad I_L = I(z = \ell) \quad [11.29]$$

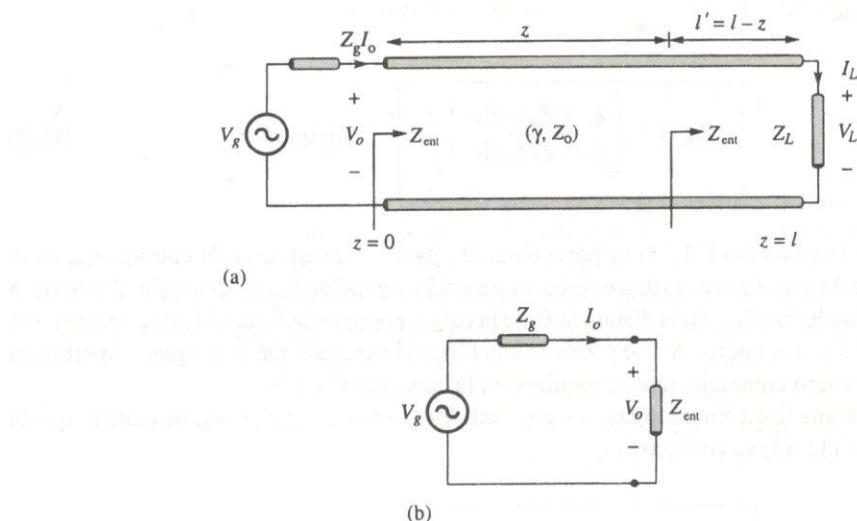


Figura 11.6 (a) Impedancia de entrada debida a una línea terminada por una carga; (b) circuito equivalente para hallar V_o e I_o en función de Z_{ent} en la entrada.

Al sustituir éstas en las ecuaciones (11.24) y (11.25), se obtiene

$$V_o^+ = \frac{1}{2} (V_L + Z_0 I_L) e^{\gamma \ell} \quad [11.30a]$$

$$V_o^- = \frac{1}{2} (V_L - Z_0 I_L) e^{-\gamma \ell} \quad [11.30b]$$

En seguida, se determina la impedancia de entrada $Z_{\text{ent}} = V_s(z)/I_s(z)$ en cualquier punto de la línea. En el generador, por ejemplo,

$$Z_{\text{ent}} = \frac{V_s(z)}{I_s(z)} = \frac{Z_0(V_o^+ + V_o^-)}{V_o^+ - V_o^-} \quad [11.31]$$

Al sustituir la ecuación (11.30) en la (11.31), y si se utiliza el hecho de que

$$\frac{e^{\gamma \ell} + e^{-\gamma \ell}}{2} = \cosh \gamma \ell, \quad \frac{e^{\gamma \ell} - e^{-\gamma \ell}}{2} = \sinh \gamma \ell \quad [11.32a]$$

o sea,

$$\tanh \gamma \ell = \frac{\sinh \gamma \ell}{\cosh \gamma \ell} = \frac{e^{\gamma \ell} - e^{-\gamma \ell}}{e^{\gamma \ell} + e^{-\gamma \ell}} \quad [11.32b]$$

se obtiene

$$Z_{\text{ent}} = Z_0 \left[\frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma \ell}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma \ell} \right] \quad (\text{dissipativa}) \quad [11.33]$$

Aunque la ecuación (11.33) se haya obtenido para la impedancia de entrada Z_{ent} en el extremo de generación, es una expresión general para hallar Z_{ent} en cualquier punto de la línea. Para hallar Z_{ent} a una distancia ℓ' de la carga, como en la figura 11.6(a), se sustituye ℓ por ℓ' . En el apéndice A.3 se presenta una fórmula para calcular la tangente hiperbólica de un número complejo, que se requiere en la ecuación (11.33).

Para una línea sin pérdidas, $\gamma = j\beta$, $\tanh j\beta\ell = j \tan \beta\ell$, y $Z_0 = R_0$, de manera que la ecuación (11.33) se convierte en

$$Z_{\text{ent}} = Z_0 \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta\ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta\ell} \right] \quad (\text{sin pérdidas}) \quad [11.34]$$

lo cual indica que la impedancia de entrada varía en forma periódica con la distancia ℓ medida desde la carga. A la cantidad $\beta\ell$ de la ecuación (11.34) se la conoce como la *longitud eléctrica* de la línea y puede expresarse en grados o en radianes.

Ahora se define Γ_L como el *coeficiente de reflexión por voltaje* (en la carga). Γ_L es la relación de la onda de reflexión de voltaje a la onda incidente en la carga, es decir,

$$\Gamma_L = \frac{V_o^- e^{\gamma\ell}}{V_o^+ e^{-\gamma\ell}} \quad [11.35]$$

Al sustituir V_o^- y V_o^+ de la ecuación (11.30) en la ecuación (11.35), e incorporar $V_L = Z_L I_L$, se obtiene

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad [11.36]$$

En general, el coeficiente de reflexión del voltaje en cualquier punto de la línea puede definirse como la razón de la magnitud de la onda de voltaje reflejada a la de la onda incidente, es decir,

$$\Gamma(z) = \frac{V_o^- e^{\gamma z}}{V_o^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{2\gamma z}$$

Pero $z = \ell - \ell'$. Sustituyendo y combinando con la ecuación (11.35), se obtiene

$$\Gamma(z) = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{2\gamma\ell} e^{-2\gamma\ell'} = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell'} \quad [11.37]$$

El *coeficiente de reflexión de corriente* en cualquier punto de la línea es el negativo del coeficiente de reflexión del voltaje en ese punto. En consecuencia, el coeficiente de reflexión de la corriente en la carga es $I_o^- e^{\gamma\ell}/I_o^+ e^{-\gamma\ell} = -\Gamma_L$.

Igual que se hizo para las ondas planas, se define la *razón de onda estacionaria* (*s*) (denotada también por ROE) como

$$s = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad [11.38]$$

Es fácil demostrar que $I_{\max} = V_{\max}/Z_0$, e $I_{\min} = V_{\min}/Z_0$. La *impedancia de entrada* Z_{ent} de la ecuación (11.34) tiene máximos y mínimos que ocurren, respectivamente, en los máximos y mínimos de la onda estacionaria del voltaje y la corriente. Se demuestra con facilidad que

$$|Z_{\text{ent}}|_{\max} = \frac{V_{\max}}{I_{\min}} = sZ_0 \quad [11.39a]$$

$$|Z_{\text{ent}}|_{\min} = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} = \frac{Z_0}{s} \quad [11.39b]$$

Como una manera de demostrar estos conceptos, considérese una línea sin pérdidas con impedancia característica de $Z_0 = 50 \Omega$. Por razones de simplificación, se supone que la línea termina en una carga resistiva pura $Z_L = 100 \Omega$, y que el voltaje en la carga es 100 V (rmc). Las condiciones que obran en la línea se indican en la figura 11.7, en la cual debe observarse que dichas condiciones se repiten cada semilongitud de onda.

La potencia promedio de entrada a una distancia z de la carga la da una ecuación similar a la (10.68); es decir,

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_s(z) I_s^*(z)] \quad [11.40]$$

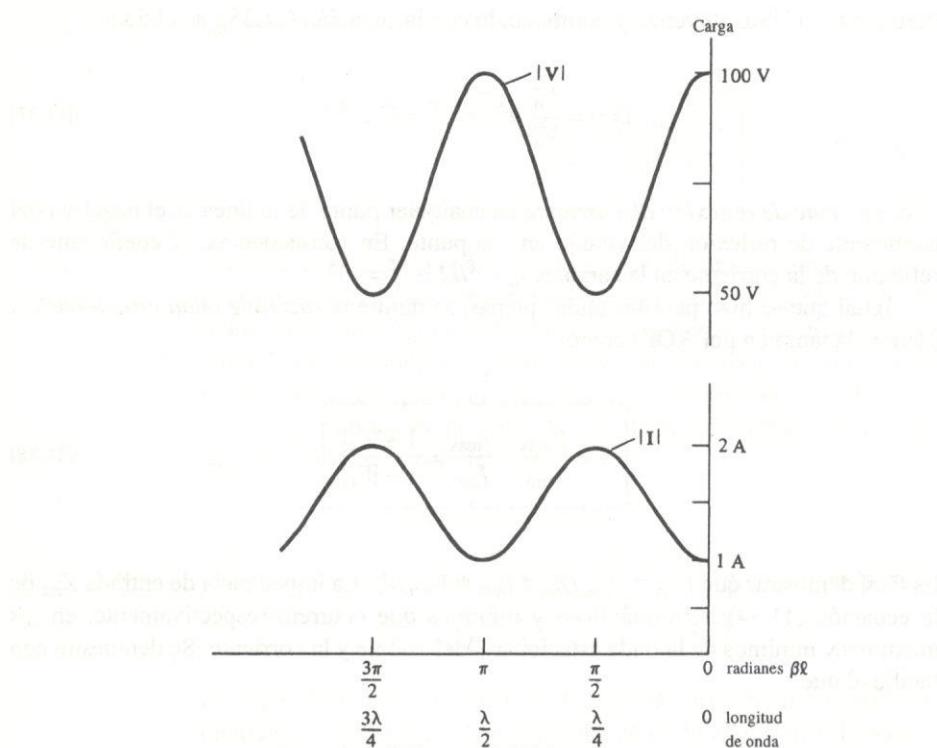


Figura 11.7 Esquemas de ondas de voltaje y de corriente en una línea sin pérdidas terminada por una carga resistiva.

Ahora se considerarán casos especiales cuando la línea está conectada a la carga $Z_L = 0$, $Z_L = \infty$ y $Z_L = Z_0$. Estos casos especiales pueden obtenerse fácilmente del caso general.

A. Línea en cortocircuito ($Z_L = 0$)

Para este caso, la ecuación (11.34) se convierte en

$$Z_{cc} = Z_{ent} \Bigg|_{Z_L=0} = jZ_0 \tan \beta\ell \quad [11.41a]$$

También

$$\Gamma_L = -1, \quad s = \infty \quad [11.41b]$$

Se observa por la ecuación (11.41a) que Z_{ent} es una reactancia pura, la cual puede ser capacitiva o inductiva, dependiendo del valor de ℓ . La variación de Z_{ent} con ℓ se ilustra en la figura 11.8(a).

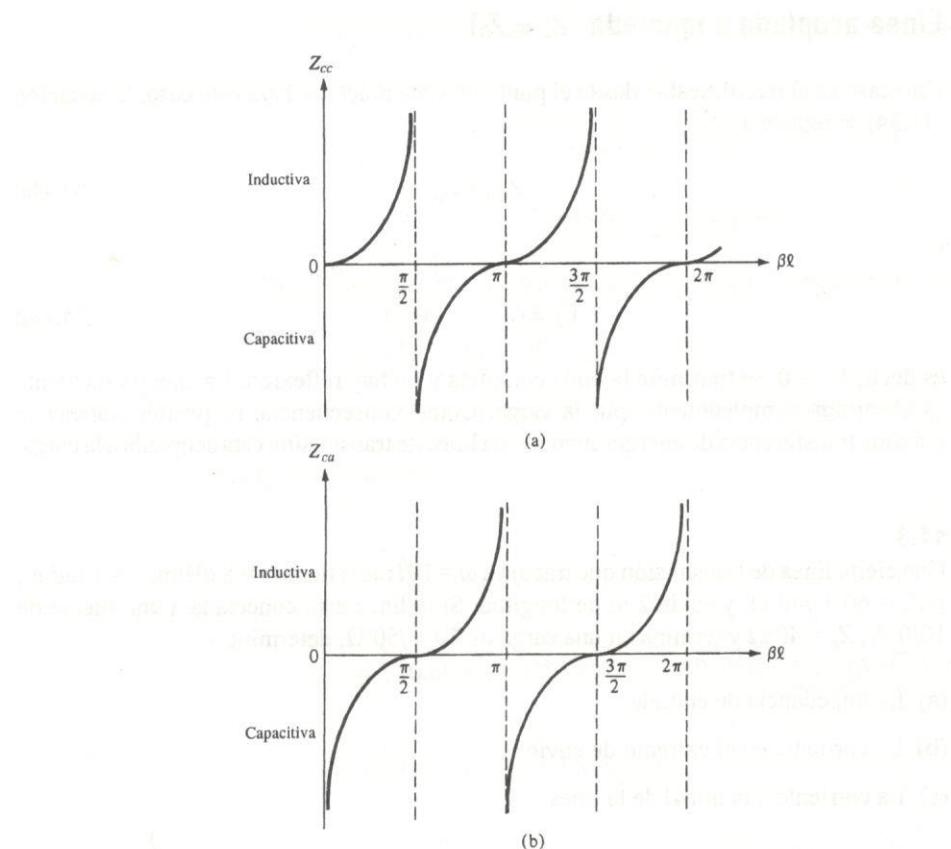


Figura 11.8 Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas: (a) cuando está en corto, (b) cuando es abierta.

B. Línea en circuito abierto ($Z_L = \infty$)

En este caso, la ecuación (11.34) se convierte en

$$Z_{ca} = \lim_{Z_L \rightarrow \infty} Z_{ent} = \frac{Z_0}{j \tan \beta \ell} = -j Z_0 \cot \beta \ell \quad [11.42a]$$

y

$$\Gamma_L = 1, \quad s = \infty \quad [11.42b]$$

La variación de Z_{ent} con ℓ aparece en la figura 11.8(b). Debe notarse, por las ecuaciones (11.41a) y (11.42a) que

$$Z_{cc} Z_{ca} = Z_0^2 \quad [11.43]$$

C. Línea acoplada o igualada ($Z_L = Z_0$)

Este caso es el más deseable desde el punto de vista práctico. Para este caso, la ecuación (11.34) se reduce a

$$Z_{\text{ent}} = Z_0 \quad [11.44a]$$

y

$$\Gamma_L = 0, \quad s = 1 \quad [11.44b]$$

es decir, $V_o^- = 0$, se transmite la onda completa y no hay reflexión. La energía incidente es absorbida completamente por la carga. Como consecuencia, es posible obtener la máxima transferencia de energía cuando una línea de transmisión está acoplada a la carga.

EJEMPLO

11.3

Una cierta línea de transmisión que trabaja a $\omega = 10^6$ rad/s tiene $\alpha = 8$ dB/m, $\beta = 1$ rad/m, y $Z_0 = 60 + j40 \Omega$, y es de 2 m de longitud. Si la línea está conectada a una fuente de $10/0^\circ$ V, $Z_g = 40 \Omega$ y termina en una carga de $20 + j50 \Omega$, determine

- (a) La impedancia de entrada
- (b) La corriente en el extremo de envío
- (c) La corriente a la mitad de la línea

SOLUCIÓN

- (a) Como $1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}$,

$$\alpha = \frac{8}{8.686} = 0.921 \text{ Np/m}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.921 + j1 / \text{m}$$

$$\gamma\ell = 2(0.921 + j1) = 1.84 + j2$$

Al usar la fórmula para $\tanh(x + jy)$ del apéndice A.3, se obtiene

$$\tanh \gamma\ell = 1.033 - j0.03929$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= Z_0 \left(\frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma\ell}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma\ell} \right) \\ &= (60 + j40) \left(\frac{20 + j50 + (60 + j40)(1.033 - j0.03929)}{60 + j40 + (20 + j50)(1.033 - j0.03929)} \right) \\ Z_{\text{ent}} &= 60.25 + j38.79 \Omega \end{aligned}$$

(b) La corriente en el extremo de envío es $I(z=0) = I_o$. Por la ecuación (11.28),

$$I(z=0) = \frac{V_g}{Z_{\text{ent}} + Z_g} = \frac{10}{60.25 + j38.79 + 40}$$

$$= 93.03 / -21.15^\circ \text{ mA}$$

(c) Para determinar la corriente en cualquier punto, se necesitan V_o^+ y V_o^- . Pero,

$$I_o = I(z=0) = 93.03 / -21.15^\circ \text{ mA}$$

$$V_o = Z_{\text{ent}} I_o = (71.66 / 32.77^\circ)(0.09303 / -21.15^\circ) = 6.667 / 11.62^\circ \text{ V}$$

De la ecuación (11.27),

$$V_o^+ = \frac{1}{2} (V_o + Z_o I_o)$$

$$= \frac{1}{2} [6.667 / 11.62^\circ + (60 + j40)(0.09303 / -21.15^\circ)] = 6.687 / 12.08^\circ$$

$$V_o^- = \frac{1}{2} (V_o - Z_o I_o) = 0.0518 / 260^\circ$$

A la mitad de la línea, $z = \ell/2$, $\gamma z = 0.921 + j1$. Por lo tanto, la corriente en este punto es

$$I_s(z = \ell/2) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\gamma z}$$

$$= \frac{(6.687 e^{j12.08^\circ}) e^{-0.921 - j1}}{60 + j40} - \frac{(0.0518 e^{j260^\circ}) e^{0.921 + j1}}{60 + j40}$$

Nótese que $j1$ está en radianes y es equivalente a $j57.3^\circ$. En consecuencia,

$$I_s(z = \ell/2) = \frac{6.687 e^{j12.08^\circ} e^{-0.921} e^{-j57.3^\circ}}{72.1 e^{j33.69^\circ}} - \frac{0.0518 e^{j260^\circ} e^{0.921} e^{j57.3^\circ}}{72.1 e^{j33.69^\circ}}$$

$$= 0.0369 e^{-j78.91^\circ} - 0.001805 e^{j283.61^\circ}$$

$$= 6.673 - j34.456 \text{ mA}$$

$$= 35.10 / 281^\circ \text{ mA.}$$

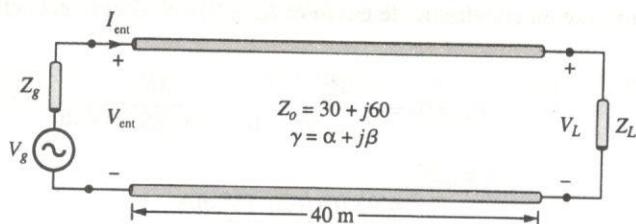


Figura 11.9

Para el ejercicio 11.3.

EJERCICIO**11.3**

Una línea de transmisión de 40 m de longitud que aparece en la figura 11.9 tiene $V_g = 15 / 0^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$, $Z_0 = 30 + j60 \Omega$ y $V_L = 5 / -48^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$. Si la línea está acoplada a la carga, calcule:

- La impedancia de entrada Z_{ent}
- La corriente I_{ent} y el voltaje V_{ent} en el extremo de envío
- La constante de propagación γ

RESPUESTA

- (a) $30 + j60 \Omega$, (b) $0.112 / -63.43^\circ \text{ A}$, $7.5 / 0^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$, (c) $0.0101 + j0.2094 / \text{m}$.

11.5**DIAGRAMA DE SMITH**

Antes de la aparición de las computadoras y calculadoras digitales, los ingenieros desarrollaron toda clase de artificios (tablas, gráficas, diagramas, etc.) a fin de facilitar sus cálculos para diseño y análisis. Con el propósito de reducir las tediosas manipulaciones que se tienen en el cálculo de las características de las líneas de transmisión, se han desarrollado medios gráficos. El diagrama de Smith² es el que más se utiliza de las técnicas gráficas. En principio es una indicación gráfica de la impedancia de una línea de transmisión al desplazarse a lo largo de la línea. Una vez que se adquiere algo de experiencia resulta muy fácil de usar. Primero veremos cómo está construido el diagrama de Smith y después lo usaremos en nuestros cálculos de las características de líneas de transmisión, por ejemplo de Γ_L , s y Z_{ent} . Supondremos que la línea de transmisión a la que habrá de aplicarse el diagrama de Smith es sin pérdidas ($Z_0 = R_0$), aunque fundamentalmente no se requiere.

² Ideada por Phillip H. Smith en 1939. Véase de P. H. Smith, "Transmission Line Calculator." *Electronics*, vol. 12, pp. 29-31, 1939, y de P. H. Smith, "An Improved Transmission Line Calculator." *Electronics*, vol. 17, pp. 130-133, 318-325, 1944.