

# 农作物的种植策略

## 分析

### 大题目

乡村经济的可持续发展

利用有限耕地资源，因地制宜（地理环境因素），发展有机种植产业。

- **地理条件**（搜索相关资料）
  - 华北山区的乡村地
  - 常年温度偏低
  - 大多数耕地每年只能种植一季农作物。
- **种植地资源**
  - 露天耕地 1201 亩，分散为 34 个大小不同的地块。
    - 耕地类型（4 种）：平旱地、梯田、山坡地、水浇地
      - 平旱地、梯田、山坡地适宜每年种植 一季粮食类作物；
      - 水浇地适宜每年种植 一季水稻 或 两季蔬菜。
  - 另有 16 个普通大棚、4 个智慧大棚
    - 每个大棚耕地面积为 0.6 亩。
    - 普通大棚适宜每年种植 一季蔬菜 和 一季食用菌
    - 智慧大棚适宜每年种植 两季蔬菜。
  - 同一地块（含大棚）每季可以合种不同的作物。
- **农作物的生长规律**
  - 题目要求：
    - 每种作物在同一地块（含大棚）都不能连续重茬种植，否则会减产
    - 含有豆类作物根菌的土壤有利于其他作物生长，每个地块（含大棚）的所有土地三年内至少种植一次豆类作物。
    - 种植方案应考虑到方便耕种作业和田间管理
      - 每种作物每季的种植地不能太分散
      - 每种作物在单个地块（含大棚）种植的面积不宜太小
  - 简化解释：
    - 某地今年种某作物后，明年应换另一种作物，或继续种该作物减产（主要看利润）
    - 每个地块（含大棚）的所有土地三年内至少种植一次豆类作物。
    - 每种作物每季的种植地不能太分散（种植地更换时要求）
    - 每种作物在单个地块（含大棚）种植的面积不宜太小（制定一个最小值，现在定为种植地的一半）

## 观察数据

每季种植作物都是——一种作物种植一片地

每次种植时，智慧大棚的地是分开两片分别种植作物（可种植同种作物），其他地是一次只能种植一种作物。

这样的种植方式可能是为了方便管理

## 数据内置说明

### 种植地说明

- (1) 平旱地、梯田和山坡地每年都只能种植一季作物。
- (2) 水浇地每年可以种植一季也可以种植两季作物。
- (3) 大棚能够在一定程度上起保温作用，每年都可以种植两季作物。
- (4) 智慧大棚主要是在冬季利用太阳能自动调节棚内温度，保证作物的正常生长。

### 粮食种植说明

- (1) 平旱地、梯田和山坡地每年适宜单季种植粮食类作物（水稻除外）。
- (2) 水浇地每年可以单季种植水稻或两季种植蔬菜作物。
- (3) 若在某块水浇地种植两季蔬菜，第一季可种植多种蔬菜（大白菜、白萝卜和红萝卜除外）；第二季只能种植大白菜、白萝卜和红萝卜中的一种（便于管理）。
- (4) 根据季节性要求，大白菜、白萝卜和红萝卜只能在水浇地的第二季种植。
- (5) 普通大棚每年种植两季作物，第一季可种植多种蔬菜（大白菜、白萝卜和红萝卜除外），第二季只能种植食用菌。
- (6) 因食用菌类适应在较低且适宜的温度和湿度环境中生长，所以只能在秋冬季和普通大棚里种植。
- (7) 智慧大棚每年都可种植两季蔬菜（大白菜、白萝卜和红萝卜除外）。

## 问题 1

- 题目
  - 假定各种农作物未来的预期销售量、种植成本、亩产量和销售价格相对于 2023 年保持稳定
  - 每季种植的农作物在当季销售
- 解读
  - 2024~2030 各种农作物 的 预期销售量、种植成本、亩产量和销售价格 使用2023年数据
  - 当季作物当季售卖
- 要求
  - 总产量超过相应的预期销售量
    - (1) 超过部分滞销，造成浪费；
    - (2) 超过部分按 2023 年销售价格的 50%降价出售。
- 解读
  - $\text{产量} \leq \text{预期销售量}$
  - 分别制定两个最优化模型

## 思路

### 符号与定义

- 索引解释：
  - $i$  表示作物的索引
    - $i = 1, 2, \dots, N$
  - $t$  表示时间索引（从2024年至2030年，共7年）。
    - $t = 2024, \dots, 2030$
  - $k$  表示第  $k$  块地（ $k$  为我们给土地的标号）
    - $k = 1, 2, \dots, M$
  - $s$  表示第  $s$  个季次
    - $s = 1, 2$
  - $N$  表示作物种类总数
  - $M$  表示地块总数
- 决策变量
  - $A_{i,t,k,s}$  在第  $t$  年第  $s$  季次第  $k$  地块（含大棚）种植第  $i$  种作物的面积（亩）。
  - $x_{i,t,k,s}$  一个二元变量，表示在第  $t$  年第  $s$  季次地块  $k$  上是否种植作物  $i$  (此为01变量，1 表示种植作物  $i$ , 0表示不种)
- 参数
  - $G_{i,s}$  第  $i$  种作物在第  $s$  个季次的单位亩产量（斤/亩），考虑到不同季次的作物产量可能不同。
  - $C_i$  表示作物  $i$  的种植成本（元/亩）。
  - $P_i$  表示作物  $i$  的销售单价（元/斤）。
  - $S_i$  表示作物  $i$  的预期销售量（斤）。
  - $W_k$  表示地块  $k$  的面积（亩）
  - $R$  表示7年的总收益。

### 模型建立

情景 1：超过部分滞销

$$\text{Maximize } R = \sum_{t=2024}^{2030} (R_{\text{normal},t} - C_{\text{total},t})$$

情景2：超过部分按50%降价出售

$$\text{Maximize } R = \sum_{t=2024}^{2030} (R_{\text{normal},t} + R_{\text{discount},t} - C_{\text{total},t})$$

其中：

- 正常销售收益：

$$R_{\text{normal},t} = \sum_{i=1}^N \min \left( \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^2 A_{i,t,k,s} \times G_{i,s}, S_i \right) \times P_i$$

- 降价销售收益：

$$R_{\text{discount},t} = \sum_{i=1}^N \max \left( \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^2 A_{i,t,k,s} \times G_{i,s} - S_i, 0 \right) \times 0.5 \cdot P_i$$

- 种植成本：

$$C_{\text{total},t} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^2 A_{i,t,k,s} \times C_i$$

## 约束条件

### 2. 种植面积与选择变量的关系

$$A_{i,t,k,s} \geq (W_k \div 4) \cdot x_{i,t,k,p,s}, \forall i, k, s = 1, 2, \forall t$$

### 3. 平旱地、梯田和山坡地的种植限制

$$x_{i,t,k,s} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \in \text{粮食} \cup \text{粮食(豆类)} - \{\text{水稻}\}, \forall k \in \{\text{平旱地, 梯田, 山坡地}\}, \forall s, \forall t \\ 0, & \text{若 } i \notin \text{粮食} \cup \text{粮食(豆类)} \end{cases}$$

### 4. 水浇地的种植限制

$$x_{j,t,k,2} = \begin{cases} 1, & \text{若 } j \in \{\text{大白菜, 白萝卜, 红萝卜}\} \text{ 且 } x_{i,t,k,1} = 1, i \in \text{蔬菜} \cup \text{蔬菜(豆类)}, \forall k \in \{\text{水浇地}\}, \forall t \\ 0, & \text{若 } j \notin \{\text{大白菜, 白萝卜, 红萝卜}\} \text{ 或 } x_{i,t,k,1} = 1, i \in \{\text{水稻}\} \end{cases}$$

### 5. 普通大棚的种植限制

$$x_{i,t,k,1} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \in \text{蔬菜} \cup \text{蔬菜(豆类)} - \{\text{大白菜, 白萝卜, 红萝卜}\}, \forall k \in \{\text{普通大棚}\}, \forall t \\ 0, & \text{若 } i \notin \text{蔬菜} \cup \text{蔬菜(豆类)} \end{cases}$$

$$x_{i,t,k,2} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \in \text{食用菌}, \forall k \in \{\text{普通大棚}\}, \forall t \\ 0, & \text{若 } i \notin \text{食用菌} \end{cases}$$

### 6. 智慧大棚的种植限制

$$x_{i,t,k,s} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \in \text{蔬菜} \cup \text{蔬菜(豆类)} - \{\text{大白菜, 白萝卜, 红萝卜}\}, \forall k \in \{\text{智慧大棚}\}, \forall s, \forall t \\ 0, & \text{若 } i \notin \text{蔬菜} \cup \text{蔬菜(豆类)} \end{cases}$$

### 7. 豆类作物轮作要求

$$\sum_{t' \in \{t, t+1, t+2\}} \left( \sum_{s=1}^2 \left( \left( \sum_{j \in \{\text{蔬菜(豆类)}\}} x_{j,t',k,s} \geq 2 \right) \right) \right) \geq 1, \forall k \in \{\text{水浇地, 普通大棚, 智慧大棚}\}$$

$$\sum_{t' \in \{t, t+1, t+2\}} \left( \sum_{s=1}^2 \left( \left( \sum_{j \in \{\text{粮食(豆类)}\}} x_{j,t',k,s} \geq 2 \right) \right) \right) \geq 1, \forall k \in \{\text{平旱地, 梯田, 山坡地}\}$$

### 8. 不连续重茬种植

$$x_{i,t,k,s} + x_{i,t+1,k,s} \leq 1, \forall i, k, s = 1, 2, \forall t$$

## 问题 2

### C题第二题的具体数学建模过程

#### 1. 符号与定义

##### • 索引解释:

- $i$ : 作物索引,  $i = 1, 2, \dots, N$
- $t$ : 时间索引, 表示年份,  $t = 2024, \dots, 2030$
- $k$ : 地块索引, 表示第  $k$  个地块,  $k = 1, 2, \dots, M$
- $s$ : 季次索引, 表示第  $s$  个季次,  $s = 1, 2$

##### • 决策变量:

- $A_{i,t,k,s}$ : 在第  $t$  年第  $s$  季次在第  $k$  块地 (含大棚) 种植第  $i$  种作物的面积 (亩)。
- $x_{i,t,k,s}$ : 一个二元变量, 表示在第  $t$  年第  $s$  季次地块  $k$  上是否种植作物  $i$  (1 表示种植, 0 表示不种植)。

##### • 参数:

- $G_{i,s}$ : 第  $i$  种作物在第  $s$  个季次的单位亩产量 (斤/亩), 不同季次的作物产量可能不同。
- $C_i$ : 表示作物  $i$  的种植成本 (元/亩)。

- $P_i$ : 表示作物  $i$  的销售单价 (元/斤)。
- $S_i$ : 表示作物  $i$  的预期销售量 (斤)。
- $W_k$ : 表示地块  $k$  的面积 (亩)。
- $R$ : 表示7年的总收益。

## 2. 目标函数

题目要求有两种情景的目标函数：

### • 情景1：超过部分滞销

最大化目标函数为正常销售收益减去种植成本：

$$\text{Maximize } R = \sum_{t=2024}^{2030} (R_{\text{normal},t} - C_{\text{total},t})$$

### • 情景2：超过部分按50%降价出售

最大化目标函数为正常销售收益和降价销售收益之和减去种植成本：

$$\text{Maximize } R = \sum_{t=2024}^{2030} (R_{\text{normal},t} + R_{\text{discount},t} - C_{\text{total},t})$$

## 3. 收益和成本的定义

### • 正常销售收益：

$$R_{\text{normal},t} = \sum_{i=1}^N \min \left( \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^2 A_{i,t,k,s} \times G_{i,t,s}, S_{i,t} \right) \times P_{i,t}$$

### • 降价销售收益：

$$R_{\text{discount},t} = \sum_{i=1}^N \max \left( \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^2 A_{i,t,k,s} \times G_{i,t,s} - S_{i,t}, 0 \right) \times 0.5 \cdot P_{i,t}$$

### • 种植成本：

$$C_{\text{total},t} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^2 A_{i,t,k,s} \times C_{i,t}$$

## 4. 参数的变化

### • 预期销售量的变化：

#### ◦ 小麦和玉米：

$$S_{i,t} = S_{i,2023} \times (1 + r_{S,i,t})$$

其中,  $r_{S,i,t} \in [0.05, 0.10]$ , 表示年增长率为5%到10%。

#### ◦ 其他作物：

$$S_{i,t} = S_{i,2023} \times (1 + \delta_{S,i,t})$$

其中,  $\delta_{S,i,t} \in [-0.05, 0.05]$ , 表示年变化为±5%。

### • 亩产量的变化：

$$G_{i,t,s} = G_{i,2023,s} \times (1 + \delta_{G,i,t,s})$$

其中：

$\delta_{G,i,t,s} \in [-0.1, 0.1]$ : 表示每年亩产量的变化范围 (±10%)。

- 种植成本的变化:

$$C_{i,t} = C_{i,2023} \times (1.05)^{t-2023}$$

- 销售价格的变化:

- 粮食类作物价格保持稳定:

$$P_{i,t} = P_{i,2023}$$

- 蔬菜类作物价格每年增长5%:

$$P_{i,t} = P_{i,2023} \times (1 + 0.05)^{t-2023}$$

- 食用菌类价格每年下降1%至5%，羊肚菌下降5%:

$$P_{i,t} = P_{i,2023} \times (1 - r_{P,i,t}), \quad r_{P,i,t} \in [0.01, 0.05]$$

对于羊肚菌,  $r_{P,i,t} = 0.05$ 。

## 5. 约束条件

### 1. 作物选择约束:

每片地块每年每季最多只能选择种植一种作物:

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t,k,s} = 1, \quad \forall k, s = 1, 2, t$$

### 2. 种植面积与选择变量的关系:

$$A_{i,t,k,s} \geq (W_k \times 0.4) \cdot x_{i,t,k,s}, \quad \forall i, k, s = 1, 2, t$$

### 3. 地块类型的种植限制:

平旱地、梯田和山坡地的限制、普通大棚和智慧大棚的限制、水浇地的限制与问题1保持一致。

### 4. 豆类作物轮作要求:

每三年内至少种植一次豆类作物:

$$\sum_{t' \in \{t, t+1, t+2\}} \left( \sum_{s=1}^2 \left( \sum_{j \in \{\text{豆类作物}\}} x_{j,t',k,s} \right) \geq 1 \right), \quad \forall k$$

### 5. 不连续重茬种植:

确保同一地块相邻两年不种植相同的作物:

$$x_{i,t,k,s} + x_{i,t+1,k,s} \leq 1, \quad \forall i, k, s = 1, 2, t$$

## 6. 总结

这个模型考虑了未来7年内各种农作物在预期销售量、亩产量、种植成本和销售价格方面的不确定性，以及种植决策所需满足的各种条件和约束。通过求解这个优化模型，可以获得2024-2030年期间的最优种植方案，最大化收益并降低种植风险。

对于范围的处理

我们将采用情景模拟的方法

• 情景模拟的具体步骤

1. 定义不确定参数的范围

根据题目的描述，我们有以下不确定参数及其变化范围：

- 小麦和玉米的年增长率  $r_{S,i,t}$ ：在  $[5\%, 10\%]$  之间。
- 其他作物的年变化率  $\delta_{S,i,t}$ ：在  $[-5\%, 5\%]$  之间。
- 亩产量的年变化率  $\delta_{G,i,t,s}$ ：在  $[-10\%, 10\%]$  之间。
- 食用菌的销售价格变化率  $r_{P,i,t}$ ：每年下降  $[1\%, 5\%]$  之间。

2. 设定不同的场景

为每个不确定参数设定几个典型值，形成多个场景。

- 场景1（最乐观的情况）：
  - 小麦和玉米的年增长率取上限（10%）。
  - 其他作物的年变化率取上限（5%）。
  - 亩产量年变化率取上限（10%）。
  - 食用菌的销售价格变化率取下限（下降1%）。
- 场景2（最悲观的情况）：
  - 小麦和玉米的年增长率取下限（5%）。
  - 其他作物的年变化率取下限（-5%）。
  - 亩产量年变化率取下限（-10%）。
  - 食用菌的销售价格变化率取上限（下降5%）。
- 场景3（中间情况）：
  - 小麦和玉米的年增长率取中间值（7.5%）。
  - 其他作物的年变化率取中间值（0%）。
  - 亩产量年变化率取中间值（0%）。
  - 食用菌的销售价格变化率取中间值（下降3%）。

4. 比较各场景的结果

对比不同场景下的最优解，评估各个场景的收益和风险。例如：

- 场景1 的最优方案可能给出最高的总收益，但在实际情况可能并不容易实现。
- 场景2 的最优方案虽然收益较低，但更保守且风险较小。
- 场景3 的方案可能在收益和风险之间取得平衡。

场景1 总利润	场景2	场景3
24,121,320.124	17,102,010.622	20,659,350.881

假设这个概率区间符合正态分布，则场景3是最有可能出现的方案。我们选择最有可能出现的场景3作为本题解。

### 问题 3

针对问题，我们做如下考虑：

替代性：某一些农作物可以相互替代，例如不同种类的豆类(黄豆、黑豆等)或粮食类作物(小麦、玉米等)。当一种作物的预期收益下降时，种植另一种替代作物可能提升收益。

互补性：某些作物具有互补性，如轮作体系中豆类作物能够提高土地肥力，有助于下季的种植，或特定蔬菜组合可以共同提高种植效益；

相关性：销售量与价格的相关性，即当某种作物的市场需求量增加，销售价格也可能相应上涨(正相关)。而价格的上涨，可能导致市场需求量减少（负相关）

对各种农作物进行K-means聚类分析，根据[肘部法图形]，将农作物分为3类，通过分析得以下分组

Cluster 0 作物集合: {'豇豆', '谷子', '茄子', '黄豆', '刀豆', '大白菜', '绿豆', '南瓜', '土豆', '高粱', '白萝卜', '小青菜', '红薯', '西红柿'}

Cluster 1 作物集合: {'生菜', '香菇', '青椒', '黑豆', '辣椒', '爬豆', '榆黄菇', '水稻', '芹菜', '芸豆', '羊肚菌', '菜花', '大麦', '白灵菇', '菠菜', '黄心菜', '黍子', '红豆', '红萝卜', '包菜', '黄瓜', '油麦菜', '空心菜', '荞麦', '莜麦'}

Cluster 2 作物集合: {'小麦', '玉米'}

相同类别之间是都是可替代的

[饼图]

对各农作物的 ['亩产量/斤', '种植成本/(元/亩)', '销售单价/(元/斤)', '预期销量/斤'] 进行相关性分析

[热力图]

[p值]

(此段仅为参考，取自他人，该段只做了两个变量的相关性分析) 尽管在p检验上可以看出种植成本和销售单价对预期销售量的影响并不显著，但显然其确实对预期销售量具有负面影响。一方面，种植成本上升时，生产者可能会将这些成本转嫁给消费者，从而提高销售价格。若消费者对价格较为敏感，价格的上涨会导致销售量下降。即使生产者不完全将成本转嫁，较高的成本仍可能使得生产者减少生产，导致市场上的供应量减少，从而影响销售量。另一方面，销售单价上升会使得消费者在购买该产品时的成本增加，从而可能导致需求减少。这是由于价格效应，消费者可能会因为价格过高而减少购买量，或者转向其他价格较低的替代品。因此，在后续计算中，我们会根据销售单价和种植成本的变化适度改变预期销售额。