Homework 9

PB17111623 范睿

2019 年 12 月 30 日

1

1.1 子图同构问题取两个无向图 G1 和 G2, 要回答 G1 是否与 G2 的一个子图同构这一问题。证明：子图同构问题是 NP 完全的。

证明子图同构问题是NP完全的⇔子图同构问题既是NP问题，又是NP-hard问题。
设$G_1 = (V_1, E_1), G + 2 = (V_2, E_2)$

1.证明子图同构问题是NP问题：
若G_1与G_2的某一子图$\hat{G_2} = (\hat{V_2}, \hat{E_2})$同构，即存在一个映射$f : V_1 \to \hat{V_2}$，若$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in \hat{E_2}$。若验证此映射$f$是满足同构要求的映射，则遍历$G_1$所有边$(u, v)$，验证$(f(u), f(v))$是否属于$\hat{E_2}$。时间为$\mathcal{O}(E_1)$。因此子图同构问题是NP问题。

2.证明子图同构问题是NP-hard问题：
利用Clique问题为NP-hard问题的结论来证明子图同构问题是NP-hard问题，可以将子图同构问题转化成Clique问题。
我们想在G_2中找到一个子图，此子图与G_1同构，那么我们可以现在G_2中找到一个大小为$|V_1|$的团，如果存在这样的团，那么这个团一定与G_1同构（相当于找到了与把G_1补全成的完全图同构的子图）。此转换时间为$\mathcal{O}(E_1)$，时间为线性。转化后的问题的结果就是原问题的结果，时间也是$\mathcal{O}(E_1)$，因此子图同构问题是NP-hard问题。

2 证明：哈密顿路径问题是 NP 完全的

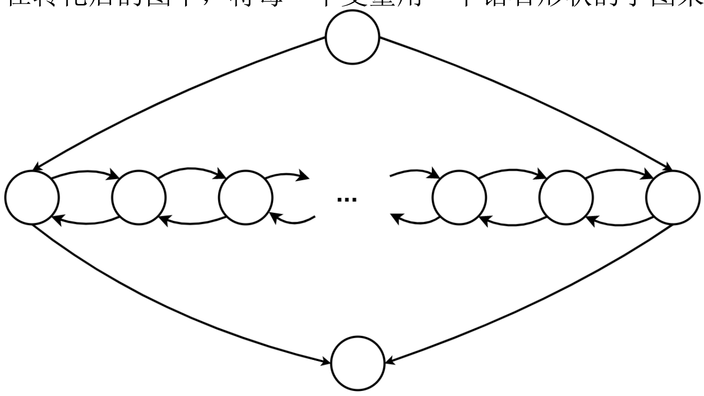
哈密顿路径是经过图中每个顶一次的路径。

1.证明哈密顿路径问题是NP问题：
若存在一条哈密顿路径p，我们可以沿着路径查看。每经过一个顶点将此顶标记为visited，每一个新遇到的顶点都没有被visit过，那么此路径就是一条哈密顿路径，验证时间为$\mathcal{O}(|p|)$。

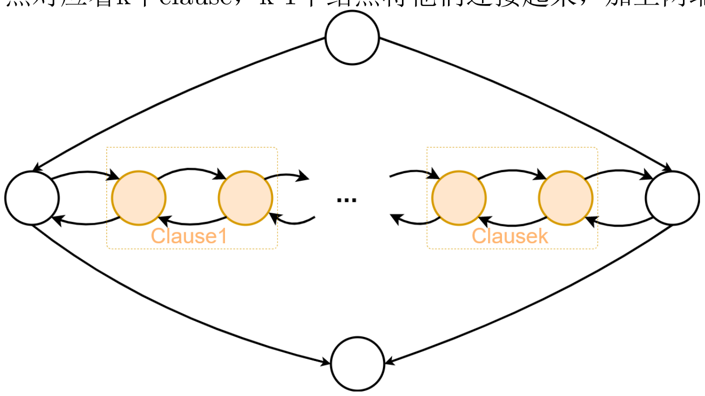
2.证明哈密顿路问题是NP-hard问题：
利用3SAT问题是NP-hard问题的结论来证明，将3SAT问题转换为哈密顿路径问题。
设一个3-CNF的表达式为

$$\Phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge ... \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

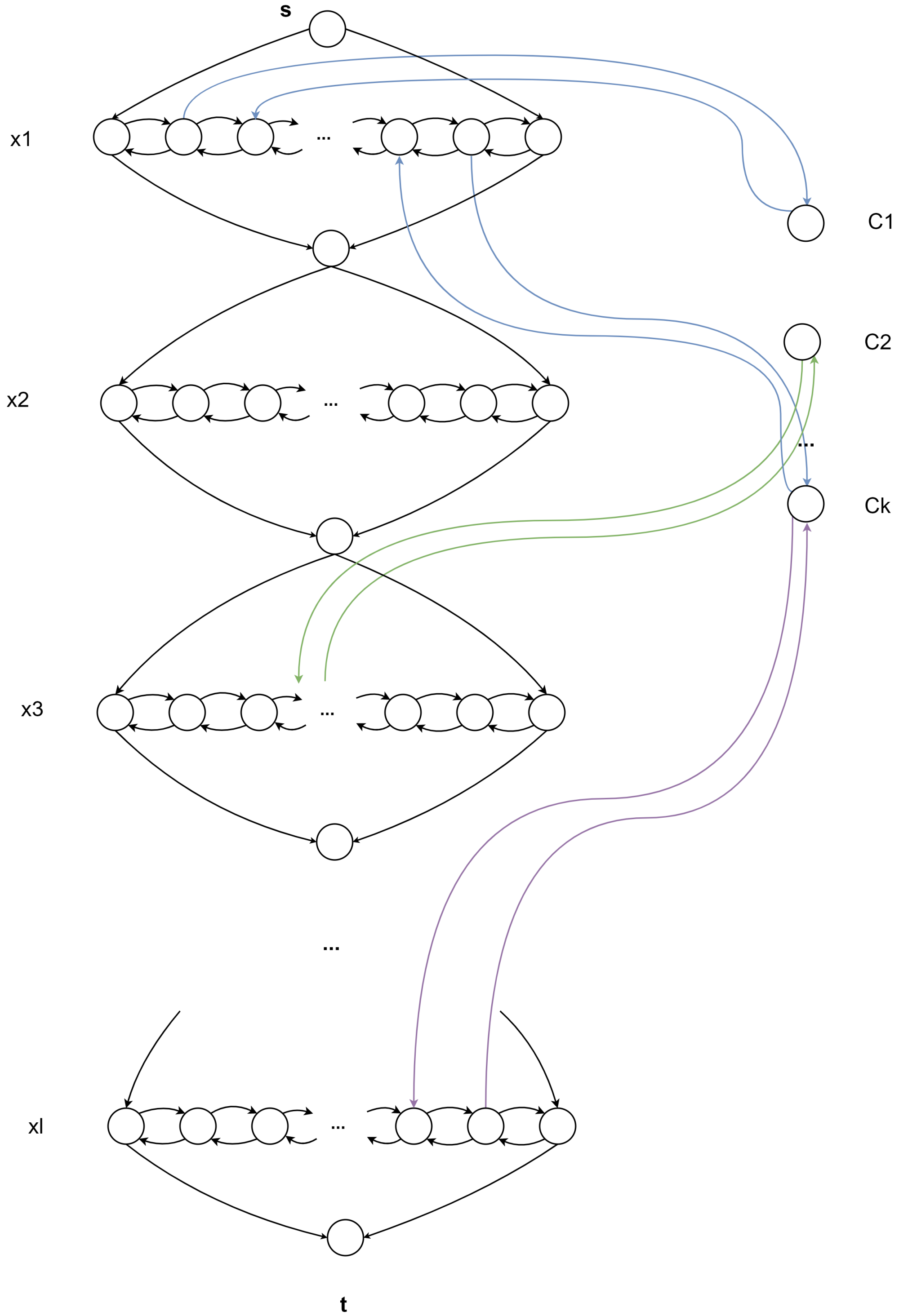
其中，a_i, b_i, c_i可以为x_i或$\bar{x}_i$。
在转化后的图中，将每一个变量用一个钻石形状的子图来代表：



若表达式中有k个clause，那么钻石形状子图中的中间一行共有3k+1个结点，其中有2k个结点对应着k个clause，k-1个结点将他们连接起来，加上两端的两个结点，共有3k+1个结点：



对每个clause还有一个对应的结点$C_1, C_2, ..., C_k$，那么有表达式生成的图G形如：
其中，若x_i在第j个clause以x_i的形式出现，那么第i个钻石子图中的代表与C_j相关联的两个结点，左边的指向C_j结点，右边的被C_j结点指向，否则（x_i在第j个clause以$\bar{x}_i$的形式出现）,第i个钻石子图中的代表与C_j相关联的两个结点，右边的指向C_j结点，左边的被C_j结点指向。



那么如果在此图中找到了一条Hamilton路径，可以确定一种x的赋值：若此路径从第i个钻石子图的左边进入，右边离开，x_i赋值为1，否则为0，并且此种赋值可以满足表达式。
显然，这种转化可以在$\mathcal{O}(k)$的时间完成，若找到了Hamilton路径，表达式结果为1，结果转换是$\mathcal{O}(1)$，因此Hamilton路径问题是NP-hard问题。

3

题目：在瓶颈旅行商问题中，目标是找出这样一条哈密顿回路，使得回路中代价最大的边的代价相对于其他回路来说最小。假设代价函数满足三角不等式，证明：这个问题存在一个近似比为 3 的多项式时间近似算法。

证明：

给出多项式算法：

（1）随机选一个结点1作为回路起点和终点

（2）从起点开始，利用Prim算法计算该图的最小生成树

（3）从起点开始先序遍历最小生成树，依次打印遍历结果，打印完毕后在最后添加起点1作为终点

证明此算法为近似比为3的多项式时间近似算法：

（1）设最小生成树各边的权重之和为$cost_{MST}$，那么有$cost_{best} > cost_{MST}$

（2）设遍历最小生成树的过程中，走过的边（算上重复走的）的权重总和为$cost'_{MST}$，那么有$2 * cost_{MST} < cost'_{MST}$

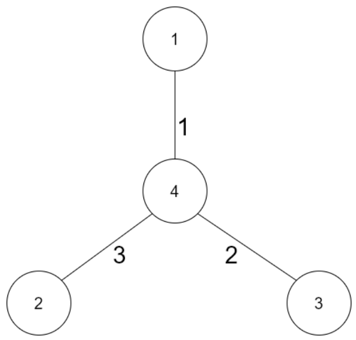
（3）设由算法给出的近似解的总代价为$cost_{algo}$，那么由三角不等式，有$cost_{algo} < cost'_{MST}$

因此，$cost_{algo} < 2 * cost_{best} < 3 * cost_{best}$，所以算法是近似比为3的多项式时间近似算法。

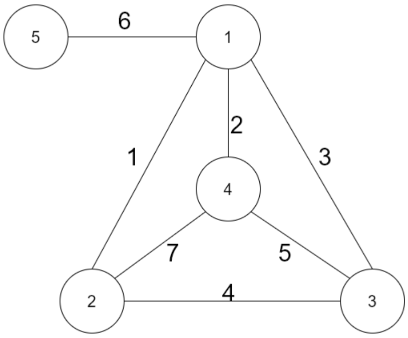
4

题目：设 G = (V,E) 是一个无向图，其中是每条边$(u, v) \in E$具有不同的权值$\omega(u, v)$。对每个顶点$v \in V$,设$\max v = argmax_{(u,v)\in E}\{\omega(u, v)\}$是与顶点$v$相关联的最大权值边。设$S_G = \{max(v) : v \in V\}$表示与各个顶点相关联的最大权值边的集合，$T_G$表示图$G$的最大权值生成树。对任意的边集$E' \subseteq E$，定义$\omega(E') = \sum_{(u,v)\in E'} \omega(u, v)$。

4.1 a. 给出一个至少包含 4 个顶点的图，使其满足 $S_G = T_G$。



4.2 b. 给出一个至少包含 4 个顶点的图，使其满足 $S_G \neq T_G$。



4.3 c. 证明：对任意的图 G，$S_G \subseteq T_G$。

利用反证法：
若$\exists(u,v) \in S_G$且$(u,v) \notin T_G$，令$(u,v) = \max(u)$
选择，T_G中，与u相连的，在当前的生成树中处于u到v的路径上的唯一边(u,v')（显然，生成树中u到v的路径唯一，若不唯一，则有环，所以(u,v')唯一），若用(u,v)代替(u,v')，即将(u,v')从T_G中删去，将(u,v)加入T_G,得到了权值更大的生成树，与T_G是最大权值生成树相矛盾。故不存在一条属于S_G但不属于T_G的边，即$S_G \subseteq T_G$

4.4 d. 证明：对任意的图G，$\omega(T_G) \geq \omega(S_G)/2$

由c问，可知$S_G \subseteq T_G$，那么有$\omega(T_G) \geq \omega(S_G)$，即有$\omega(T_G) \geq \omega(S_G)/2$

4.5 e. 给出一个$\mathcal{O}(V+E)$时间算法，用于计算 2 近似的最大生成树。

Algorithm 1

输入: 图G
输出: 近似最大生成树T_G

for *each vertex* $v \in G.V$ **do**
  v.max = max(v)
  T_G += v.max
end for
while $T_G.size < |G.V| - 1$ **do**
  Find (u,v) not in T_G and weigh max and no circle if add to T_G
  T_G += (u,v)
end while
return (u,v)

此算法可以计算2近似的最大生成树，因为此算法以S_G为基础寻找T_G。
由S_G性质可知，$|S_G| \geq |G.V|/2$，又由c问$S_G \subseteq T_G$。按照最坏的情况考虑，若$|S_G| =$

$|G.V|/2$，S_G将T_G分成了S_G和$T_G - S_G$两个集合，在这种情况下$|T_G - S_G| = |G.V|/2 - 1$，那么一定有$\omega(S_G) > \omega(T_G - S_G)$，有由于$\omega(S_G) + \omega(T_G - S_G) = \omega(T_G)$，所以$\omega(S_G) > \omega(T_G)/2$，因此此算法可以解得2近似的最大生成树。

5 给出一种 2-SAT 问题的多项式解法。

Algorithm 2

输入: 布尔表达式F

输出: 此表达式是否可满足

```
for each clause in F (x1,x2) do
    //x and /x is not the same node
    if x1's node is not in graph G then
        add a node named x1 into G
        add a node named /x1 into G
    end if
    if x2's node is not in graph G then
        add a node named x2 into G
        add a node named /x2 into G
    end if
    add edge (/x1,x2)
    add edge (/x2,x1)
end for
if DFSFindStronglyConnectedComponet(G) then
    return False
else
    return True
end if
```