Homework 2

PB17111623 范睿

2019 年 9 月 28 日

1 HW2

1.1 3.1-4

$2^{n+1} = \mathcal{O}(2^n)$成立

证明：

存在c=3，使得当n足够大时，$2^{n+1} = 2 * 2^n \leq c2^n = 3 * 2^n$均成立。

$2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$不成立

证明：

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t.$ 对于$\forall n > n_0$,有$2^n \geq c$, 即有$2^{2n} \geq c2^n$

所以不存在常数c满足上一条件，$2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$不成立

1.2 3.2-3

证明$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$:

由斯特林近似公式：对于所有$n \geq 1$,有$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\alpha_n}$,得:

$\lg(n!) = \lg(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\alpha_n}) = \frac{1}{2}\lg(2\pi) + (n + \frac{1}{2})\lg(n) + (\alpha_n - n)lg(e)$

由$\frac{1}{12n+1} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{12n}$,对于足够大的n，得

$\lg(n!) \leq (n + \frac{1}{2})\lg(n) + \frac{1}{12n}\lg(e) \leq 2n\lg(n)$

$\lg(n!) \geq n(\lg(n) - \lg(e))) \geq \frac{1}{2}n\lg(n)$

$\therefore$存在$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 2, s.t. c_1 n \lg(n) \leq \lg(n!) \leq c_2 n \lg(n)$ 命题得证

1.3 4.3-2

证明：

利用数学归纳法

①取$n_0 > 0, c_0 > 0$使得当$n \leq n_0$时，$T(n) < c\lg(n)$恒成立

②假设$T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq c\lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$成立

③若n为偶数，有$T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq c\lg(n) - c\lg 2$

$T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1 \leq c\lg(n) - c\lg 2 + 1$

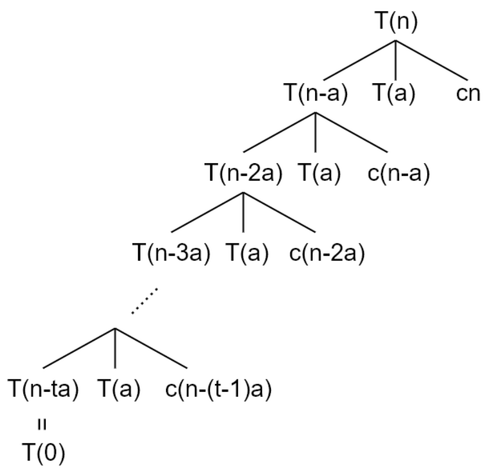
当$c \geq \frac{1}{\lg 2}$时，$c\lg(n) - c\lg 2 + 1 \leq c\lg(n)$，
即有$T(n) \leq c\lg(n)$,其中$c \geq \frac{1}{\lg 2}$

若n为奇数，有$T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq c\lg(n+1) - c\lg 2$
$T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1 \leq c\lg(n+1) - c\lg 2 + 1$
当$c \geq \frac{1}{\lg(\frac{2n}{n+1})}$时，$c\lg(n+1) - c\lg 2 + 1 \leq c\lg(n)$，
即有$T(n) \leq c\lg(n)$,其中$c \geq \frac{1}{\lg(\frac{2n}{n+1})}$

$\therefore \exists c \geq \max(c_0, \frac{1}{\lg 2}, \frac{1}{\lg(\frac{2n}{n+1})}), s.t. T(n) \leq c\lg(n)$
命题得证

1.4 4.4-8

设$n = ta$
递归树如下：



$T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$
$T(n-a) = T(n-2a) + T(a) + c(n-a)$
$T(n-2a) = T(n-3a) + T(a) + c(n-2a)$
......
$T(n-(t-1)a) = T(n-ta) + T(a) + c(n-(t-1)a) = T(0) + T(a) + c(n-(t-1)a)$
$\therefore T(n) = T(0) + tT(a) + c(n + (n-a) + (n-2a) + ... + (n-(t-1)a))$
$= T(0) + tT(a) + ctn + \frac{t(t-1)}{2}ca$
又由$t = \frac{n}{a}$，得$T(n) = \frac{c}{2a}n^2 + (\frac{T(a)}{a} + \frac{c}{2})n + T(0)$
解得$T(n) = \mathcal{O}(n^2)$

1.5 4.5-1

1.5.1 a.$T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + 1$

$a = 2, b = 4, f(n) = 1, n^{\log_b a-\epsilon} = n^{\log_4 2-\epsilon}$,$f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_4 2-\epsilon})$
$T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

1.5.2 b.$T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

$a = 2, b = 4, f(n) = \sqrt{n}, f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$T(n) = \Theta(\sqrt{n}\lg n)$

1.5.3 c.$T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + n$

$a = 2, b = 4, f(n) = n, f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$,且对于某个常数$c < 1$和所有足够大的$n$有$2\frac{n}{b} \leq cf(n)\therefore T(n) = \Theta(n)$

1.5.4 d.$T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + n^2$

$a = 2, b = 4, f(n) = n^2, f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$,且对于某个常数$c < 1$和所有足够大的$n$有$2\frac{n}{b} \leq cf(n)\therefore T(n) = \Theta(n^2)$

1.6 4.5-4

无法求解
证明：
$a = 4, b = 2, f(n) = n^2\lg n, n^{\log_b a} = n^2$，对于任意正常数$\epsilon$，比值$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \lg n$都渐进小于$n^{\epsilon}$，情况既不属于第二种又不属于第三种。
上界为$\mathcal{O}(n^2\lg n\log_2 n)$