第一章

一维:

均值函数：$EX_{(t)} = \mu_X(t)$ 方差函数：$VarX_{(t)} = \sigma(t)$

一维分布：$F_t(x) = P\left(X_{(t)} \le x\right)$uuu77nb

二维:

协方差函数：$R_X(t,s) = Cov\left(X(t), X(s)\right)$

$$= E\{\left(X(t) - \mu_X(t)\right)\left(X(s) - \mu_X(s)\right)\}$$

①$R_X(t-s) = R_X(0, t-s)$②$R_X(t)$为偶函数，$R_X(0) = VarX(t)$

自相关函数：$r_X(t,s) = E[X(t)X(s)]$

相关系数：$\rho_X(t,s) = \frac{R_X(t,s)}{\sigma(t)\sigma(s)}$

二维联合分布：$F_{t,s}(x_t, x_s) = P(X(t) \le x_t, X(s) \le x_s)$

性质:

对称性：$R_X(t,s) = R_X(s,t)$ $\quad r_X(t,s) = r_X(s,t)$

非负定性：$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j R_X(t_i, t_j) \ge 0$

（因为$Var(\sum_{j=1}^n b_j X(t_j)) = E\{\sum_{j=1}^n b_j (X_{t_j} - \mu_{t_j})\}^2$

令$Y = \sum_{j=1}^n b_j (X_{t_j})$，则$Var(Y) = Cov(Y,Y) = E\{(Y - \mu_Y)^2\} = E\{[\sum_{i=1}^n b_i (X_{t_i} - \mu_{t_i})][\sum_{j=1}^n b_j (X_{t_j} - \mu_{t_j})]\} =$

（拆括号，再合并）$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j R_X(t_i, t_j)$）

有限维分布族:

$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n)\}$$

对称性：对变量$X(t_1), X(t_2)$…的排序无关

相容性：当某些$x \to \infty$时高位分布和边缘分布与相应的低维分布是一致的，对$m < n$有：

$$F_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_m, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, \infty \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_m}(x_1, \dots x_m)$$

同分布：两个随机变量X_1, X_2的分布函数$F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)$对任何 x 都是相等的，则他们是同分布的；若一个随机向量$X = (X_1, \dots, X_n)$和$Y = (Y_1, \dots, Y_n)$有相同的联合分布，则也称他们是同分布的。

独立增量过程：对任意$t_1 < t_2 \dots < t_n \in T$随机变量$X(t_2) - X(t_3), X(t_3) - X(t_2) \dots X(t_n) - X(t_{n-1})$相互独立

平稳独立增量过程：对任意t_1, t_2，$X(t_1 + h) - X(t_1) = X(t_2 + h) - X(t_2)$（左右同分布）

Poisson 过程是平稳独立增量过程

独立和: $X_n = \sum_{i=0}^n Z_i$，过程$\{X_n, n \ge 0\}$是独立增量过程，成为独立和（$Z_i, i = 0,1\dots$）是 iid 的随机变量

条件期望:

(a) $X \perp Y \Rightarrow E(X|Y = y) = EX$

(b) 平滑性：$EX = \int E(X|Y = y) dF_Y(y) = E[E(X|Y)]$

(c) $E[\emptyset(X,Y)|Y = y] = E[\emptyset(X,y)|Y = y]$

离散条件期望:

①X 取 x 的条件概率$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$

②X 的条件分布函数$F(x|y) = P\{X \le x|Y = y\}$

③X 的条件期望$E(X|Y = y) = \sum_x xP\{X = x|Y = y\}$

连续条件期望：$(X,Y) \sim f(x,y)$

①X 取 x 的条件概率$P(X = x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f(x|y)$

②X 的条件分布函数$F(x|y) = \int_{-\infty}^x f(x|y) dx$

③X 的条件期望$E(X|Y = y) = \int x f(x|y) dx (= g(y))$

矩母函数（连续）：r.v. X 的矩母函数为e^{tX}的期望

$$g(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f(x) dx$$

矩母函数性质：矩母函数唯一的确定了 X 的分布

①$E[X^n] = g^{(n)}(0), n \ge 1$（g 的 n 阶导数在 0 的取值）

②$E(e^{t(X+Y)}) = g_{X+Y}(t) = g_X(t) g_Y(t)$

随机和的矩母函数：随机和$Y = \sum_{k=1}^N X_k$,N 非负整数, X 是 iid 的

①$EY = EN * EX$ ②$EY^2 = EN * VarX + EN^2 * E^2X$

③$VarY = EN * VarX + E^2X * VarN$

④$g_Y(t) = E[g_X(t)^N]$

生成函数（离散）：离散 r.v.X 的生成函数为s^X的期望

$$\emptyset_X(s) = \sum_{k=0}^\infty p_k s^k \quad (p_k = P(X = k), k = 0,1 \dots)$$

生成函数性质:

① $p_0 = \emptyset_X(0)$，$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \emptyset_X(s)|_{s=0}, k = 1,2 \dots$

② $\emptyset_{X+Y}(s) = \emptyset_X(s) \emptyset_Y(s)$

③ $EX = \emptyset_X'(s)|_{s=1}$

④ $E\{X(X-1) \cdots (X - r + 1)\} = \frac{d^r}{ds^r} \emptyset_X(s)|_{s=1}$

随机和的生成函数:

$$\emptyset_Y(s) = E(s^Y) = E\{(\emptyset_X(s))^N\} = \emptyset_N(\emptyset_X(s))$$

第二章

Poisson 过程：整数值随机过程{N(t), t≥0}满足：

①N(0)=0 ②N(t)是独立增量过程（增量代表区间内发生的事件数）

③增量 N(s+t)-N(s)服从λt 的泊松分布：

$$P\{N(s+t) - N(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

性质：$\boldsymbol{Var[N(t)] = EN(t) = \lambda t}$

是泊松过程的四个假定:

① 不相交区间中事件发生的数目相互独立

② 增量 N(t+h)-N(t)的分布只依赖于区间长度 h

③ 存在λ>0，当 h→0 时，长度为 h 的小区间中时间至少发生一次的概率$P\{N(t+h) - N(t) \ge 1\} = \lambda h + o(h)$

④ 小区间(t,t+h]发生两个或两个以上事件的概率为 o(h)

跳跃时刻：$N(t) \sim Poi(\lambda)$

$W_n = inf\{t \ge 0 : N(t) = n\}$ $n \ge 1$为第 n 个跳跃时刻。

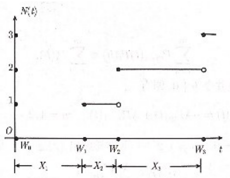

图 2.1 Poisson 过程的样本路径

$W_n = \sum_{k=1}^n X_k$，$N(t) = \sum_{k=1}^\infty I\{W_k \le t\}$

$\boldsymbol{\{W_n \le t\} \Leftrightarrow \{N(t) \ge n\}}$

$\boldsymbol{\{W_n > t\} \Leftrightarrow \{N(t) < n\}}$ $\boldsymbol{\{W_{k+1} > t\} \Leftrightarrow \{N(t) \le k\}}$

$\boldsymbol{\{W_{k+1} \le t\} \Leftrightarrow \{N(t) > k\}}$

等号不能随便抹去；左=第 n 个事件在 t 时刻前到来；右=t 时刻到来事件总个数大于等于 n。

其中时间间隔$X_i \sim Exp(\lambda), i = 1,2\dots$

跳跃时刻分布:

若$X_n, n = 1,2\dots$是均值为$\frac{1}{\lambda}$的 iid 指数随机变量，$W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

跳跃时刻联合分布：前提：给定$N(t) = n$

$W_1, \dots, W_n$的联合分布为$f_{W_1 \cdots W_n}(w_1, \cdots, w_n | N(t) = n) = \frac{n!}{t^n}$

非齐次泊松过程:

①N(0)=0 ②N(t)是独立增量过程

③$P\{N(s+t) - N(s) = k\} = \frac{(\int_s^{s+t} \lambda(u) du)^k e^{-\int_s^{s+t} \lambda(u) du}}{k!}$

复合泊松过程：N(t)是泊松过程，$Y_1, \dots, Y_n$是 iid 的 r.v.

$EY_i = \mu | VarY_i = \sigma^2 | Y_i \sim G(y), i = 1,2\dots | X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$是~

1.$EX(t) = EN(t)EY = \lambda \mu t$ 2.$VarX(t) = EN(t)VarY_1$

$$= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$$

3.若$Y_1 = \cdots = Y_n = 1$，$X(t) = N(t)$

4.$P(X(t) \le x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} G^{(n)}(x)$（卷积公式）

更新过程：将泊松过程时间间隔的指数分布换成任意

$X_i, i = 1,2\dots$是一连串非负、iid 的随机变量，分布为F(x).

记$W_n = 0$，$W_n = \sum_{i=1}^n X_i$，W_n表示第 n 次事件发生时间.

$N(t) = max\{n : W_n \le t\}$为更新过程。

期望（更新函数）$m(t) = EN(t) = \lambda t$

$(P\{N(t) = n\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t))$

第三章

离散时间 Markov 链：若对任何一列状态$i_0, \dots, i_{n-1}, i, j$，及任何$n \ge 0$，随机过程$\{X_n, n \ge 0\}$满足 Markov 性质：

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

转移概率矩阵$\mathbb{P} \triangleq \begin{pmatrix} P_{00} & \cdots & P_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{cases} \sum_{i=0}^n P_{ji} = 1 (\text{行和为 } 1, \text{列和不一定}) \\ 0 \le P_{ij} \le 1 \end{cases}$

n 步转移概率：$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^\infty P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} = (\mathbb{P}^n)_{ij}$

Chapman-K 方程：$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^\infty P_{ik}^n P_{kj}^m$

状态分类：**可达**：ij 互达 $\Leftrightarrow \exists n, P_{ij}^{(n)} > 0$

互达: **ij可达** $\Leftrightarrow \exists n, m \ s.t. P_{ij}^{(n)} > 0, P_{ji}^{(m)} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{d(i) = d(j)}$

不可约：所有状态均互达，即所有状态处于同一等价类

周期：状态 i 的周期$d(i)$=所有满足$P_{ii}^{(n)} > 0$的 n 的最大公约数

非周期：状态 i 是非周期的 $\Leftrightarrow d(i) = 1$

周期的基本性质:

1. 状态 i 的周期为 d(i) $\Rightarrow \exists N \ s.t. \forall n > N, P_{ii}^{(nd(i))} > 0$
2. 状态 i 的周期为 d，$P_{ij}^{(m)} > 0 \Rightarrow \exists N \ s.t. \forall n > N, P_{ji}^{(m+nd)} \ge P_{mj}^{(m)} P_{ii}^{(d)} > 0$

Th：转移概率矩阵是**不可约、非周期的、有限状态**的 Markov 链$\Rightarrow \exists N \ s.t. \forall n > N, \mathbb{P}^n$**所有元素均 > 0**

常返与瞬过:

$\boldsymbol{f_{ij}^{(n)}}$=从状态 i 出发，第 n 次转移后首次到达 j 的概率

$=P\{X_n = j, X_{n-1} \ne j, \dots, X_2 \ne j | X_1 = i\}$（$\boldsymbol{f_{ij}^{(0)} = 0}$）

$\boldsymbol{f_{ii}^{(n)}}$=从状态 i 出发，第 n 次转移后首次回到 i 的概率

$=P\{X_n = i, X_{n-1} \ne i, \dots, X_2 \ne i | X_1 = i\}$（$\boldsymbol{f_{ii}^{(0)} = 0}$）

$\boldsymbol{f_{ij}} = \sum_{n=0}^\infty f_{ij}^{(n)}$=从 i 出发，能到达 j 的概率。

$$\boldsymbol{P(\text{从i出发至少返回i状态K次}) = f_{ii}^K}$$

常返：状态 i 常返 $\Leftrightarrow f_{ii} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)} = \infty$

瞬过：状态 i 瞬过 $\Leftrightarrow f_{ii} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)} < \infty$

步数T_{ij}：0 时从 i 出发，首次到达 j 用的步数

两个等式：$\boldsymbol{P(T_{ij} = n) = f_{ij}^{(n)}}$，$\boldsymbol{P(T_{ij} < \infty) = \sum_{n=1}^\infty f_{ii}^{(n)} = f_{ij}}$

性质：若 i 常返且 ij 互达，j 也常返

常返时T_i: 从 i 出发首次回到 i 的时刻$= inf\{n \ge 1, X_n = i, X_k \ne i, k = 1 \dots n-1 | X_0 = i\}$

平均常返时μ_i $= ET_i = \sum_{n=1}^\infty n f_{ii}^{(n)}$

零常返$\Leftrightarrow \mu_i = +\infty$（无穷状态才可能出现零常返）

正常返$\Leftrightarrow \mu_i < +\infty$（有限状态的 Markov 链都是正常返）

极限分布：$\tau_i = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}$

Markov 链基本极限定理

1. 状态 i 瞬过/零常返$\Leftrightarrow \tau_i = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$
2. 状态 i 周期 d_i 正常返$\Leftrightarrow \tau_i = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{d_i}{\mu_i}$
3. 状态 i 非周期正常返$\Leftrightarrow \tau_i = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

遍历=非周期正常返

Th：若状态 i 是遍历的，则 $\forall j \to i, \lim\limits_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

平稳分布：Markov 链的转移矩阵$\mathbb{P} = (P_{ij})$，若存在一个分布$\{\tau_i, i \geq 0\}$满足$\tau_i = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k P_{ki}$，则成$\{\tau_i, i \geq 0\}$是…

即满足$(\tau_0 \quad \cdots \quad \tau_n)\begin{pmatrix} P_{00} & \cdots & P_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} = (\tau_0 \quad \cdots \quad \tau_n)$

注：若初始状态X_0具有平稳分布$(\tau_0 \quad \cdots \quad \tau_n)$，则过程永远处于平稳分布，即$\forall p, X_p$也具有平稳分布。

重要结论：

（极限分布⇒平稳分布）若 Markov 链不可约、遍历，则对所有状态 i，$\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \tau_j$存在，且$\Pi = (\tau_0 \quad \cdots \quad \tau_n)$为平稳分布，即$\sum_k \tau_k = 1$，$\Pi\mathbb{P} = \Pi$

（平稳分布⇒极限分布）若 Markov 链不可约、遍历，只存在一个平稳分布，该平稳分布就是 Markov 链的极限分布，即$\forall i, \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \tau_j$

第四章

严平稳过程：

设$\{X(t), t \in T\}$为一随机过程，若对任意的 k 和对任意的$t_1, \dots, t_k \in T$和任何 h，有$\{X(t_1+h), \dots, X(t_k+h)\} = \{X(t_1), \dots, X(t_k)\}$（左右同分布），则称为~。

性质：

均值若存在，必常数：$EX(t) = m(t) = m$

方差若存在，必常数：$Var(X(t)) = \sigma^2 = E(X(t)-m)^2$

协方差函数只与 t-s 有关：$E(X(t)-m)(X(s)-m) = E(X(t-s)-m)(X(0)-m)$（记 $R(h) = E(X(h)-m)(X(0)-m)$）

严平稳过程 X 的**自相关函数**：$r(\tau) = EX(t)EX(t+\tau)$

标准自相关函数：$\rho(v) = R(v)/\sigma^2 = R(v)/R(0)$

$(\rho(0) = 1, |\rho(v)| \leq 1)$

宽平稳过程：设$\{X(t), t \in T\}$为一实值随机过程，如果对$\forall t \in T$，有$\mathbf{EX^2(t)} < \infty$（方差存在），$\mathbf{EX(t) = m}$及协方差函数$\boldsymbol{E(X(t)-m)(X(s)-m)}$**仅与 t-s 有关**，则称 X~

严平稳和宽平稳判断：

1. 二阶矩存在的严平稳是宽平稳
2. X 在时刻 t 的取指与 t 无关，那么一定是严平稳
3. 注意看是平稳过程还是平稳序列！！！！看 t 的范围

周期平稳过程：设$\{X(t), t \in T\}$为一平稳过程，若存在正常数κ使$X(t+\kappa) = X(t)$，则成 X 为周期平稳过程，κ为 X 的周期，其协方差函数也是周期函数，且周期也为κ：$R(\tau+\kappa) = E(X(t+\tau+\kappa)-m)(X(t)-m) = E(X(t+\tau)-m)(X(t)-m) = R(\tau)$

复平稳过程：设$\{X(t), t \in T\}$为一<**复值**>随机过程，如果对$\forall t \in T$，有$EX^2(t) < \infty$（方差存在），$EX(t) = m$及协方差函数$\boldsymbol{E(X(t)-m)\overline{(X(s)-m)}}$（共轭）**仅与 t-s 有关**，则~

均值遍历性：

设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为一平稳过程（或序列），若

$$\bar{X} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = m$$

或

$$\bar{X} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X(k) = m$$

则称 X 的均值有遍历性。

协方差遍历性：

设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为一平稳过程（或序列），若

$$\hat{R}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (X(t)-m)(X(t+\tau)-m)dt = R(\tau)$$

或

$$\hat{R}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} (X(k+\tau)-\hat{m}_N)(X(k)-\hat{m}_N) = R(\tau)$$

则称 X 的协方差具有遍历性。

随机过程遍历性=均值遍历性+协方差遍历性

均值遍历性定理：

1. $X = \{X_n, n = 0, \pm 1 \dots\}$为平稳序列，其协方差函数为$R(\tau)$，则$X$有均值遍历性$\Leftrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0$
2. $X = \{X_n, n = 0, \pm 1 \dots\}$为平稳过程，$X$有均值遍历性$\Leftrightarrow \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)d\tau = 0$

充分条件：

平稳序列：若$\lim\limits_{\tau\to\infty} R(\tau) \to 0$ ⇒具有均值遍历性

平稳过程：若$\int_{-\infty}^{+\infty}|R(\tau)| < \infty$ ⇒具有均值遍历性

协方差函数遍历性定理：

定义$Y_\tau(t) = (X(t+\tau)-m)(X(t)-m)$，有$EY_\tau(t) = R(\tau)$

$X = \{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为<u>平稳过程</u>

$Y_\tau = \left\{Y_\tau(t), -\infty < t < +\infty\right\}$

给定τ，**X的协方差函数$R(\tau)$有协方差遍历性**$\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\lim\limits_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B(\tau_1)-R^2(\tau))d\tau_1 = 0}$

其中，$B(\tau_1) = EX(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)$

充分条件：

$X = \{X_n, n = 0, \pm 1 \dots\}$是均值为 0 的 Gauss 平稳过程：

$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) = 0 \Rightarrow$ 协方差函数有均值遍历性

协方差函数的性质：

1. 对称性：$R(\tau) = R(-\tau)$
2. 有界性：$|R(\tau)| \leq R(0)2$
3. 非负定性：对任意时刻t_n及实数$a_n, n = 1,2\dots N$，有$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m R(t_n - t_m) \geq 0$
4. 平稳过程 n 阶导数的协方差函数为（导数存在即成立）

$$\mathrm{Cov}\left(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t+r)\right) = (-1)^n R^{2n}(\tau)$$

功率谱密度：$S(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty} E\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2$

$$F(\omega,T) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega\tau}dt \qquad R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)d\omega$$

性质：$\bar{S}(\omega) = S(\omega) \geq 0 \qquad S(-\omega) = S(\omega)$

W-K 公式：假定$EX(t) = 0$且$\int|R(\tau)|d\tau < \infty$

平稳过程：$S(\omega) = \int R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$

偶 Fourier 变换的形式：$S(\omega) = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \qquad R(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega$

平稳序列：$S(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} \qquad R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega$

有理谱密度：由$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$计算 $R(\tau)$

1. 留数定理：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f(z), a_k]$，取<u>上半平面</u>的留数!!!!!!
2. 计算 m 级留数 $Res[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$

$R(\tau)$	$S(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(\tau)$	1

常数协方差/功率谱：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

三角函数协方差/功率谱：

$$\cos\omega\tau_0 = \frac{1}{2}(e^{i\omega\tau_0} + e^{-i\omega\tau_0}) \qquad \sin\omega\tau_0 = \frac{1}{2i}(e^{i\omega\tau_0} - e^{-i\omega\tau_0})$$

$S(\omega) = a\cos\omega\tau_0, R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a\cos\omega\tau_0 e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{a}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau+\tau_0)} + e^{i\omega(\tau-\tau_0)}d\omega = \frac{a}{2}\delta(\tau+\tau_0) + \delta(\tau+\tau_0)$

公式：

$X \perp Y \Rightarrow EXY = EX * EY$

离散概率分布	$P(X=x)$	矩母函数	EX	$\mathrm{Var}(X)$
二项分布 $B(n,p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0,1,\cdots,n$	$(pe^t + (1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布 , $\lambda > 0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x = 1,2,\cdots$	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$	λ	λ
几何分布, $0 \leqslant p \leqslant 1$	$p(1-p)^{x-1}$, $x = 1,2,\cdots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布 参数为 r,p	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$, $x = r, r+1, \cdots$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
连续概率分布	$f(x)$	$g(t)$	EX	$\mathrm{Var}X$
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, a < x < b$	$\frac{e^{ta}-e^{tb}}{t(a-b)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 , $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γ分布$\Gamma(n,\lambda), \lambda > 0$	$\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, x \geqslant 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}$	$\exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2
Beta 分布 $B(a,b)$, $a > 0, b > 0$	$cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1$, $c = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$