Homework 3

PB17111623 范睿

2019 年 9 月 29 日

1 HW3

1.1 证明：包含 n 个元素的堆的 Max-Heapify 函数的时间复杂度是$\mathcal{O}(\log n)$，Build-Max-Heap 函数的时间复杂度是 $\mathcal{O}(n)$

证明：

在最坏情况下，每一次调用Max-Heapify函数都会进入“if largest $\neq$ i”的条件中。第一次调用Max-Heapify时，向算法传递的第二个参数i为A.length/2，即有子节点的节点中下标最大结点的下标。在最坏情况下，每一次调用向Max-Heapify传递的第二个参数i沿着二叉树的结点一直到根结点1结束。因此在最坏情况下，算法的复杂度为此树的高度。由于包含n个元素的完全二叉树的高度为$\log n$，Max-Heapify的复杂度为$\mathcal{O}(\log n)$。

在一个高度为h的结点上运行MAX-HEAPIFY的代价是$(O)(h)$,则总代价为

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h})$$

有

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = 2$$

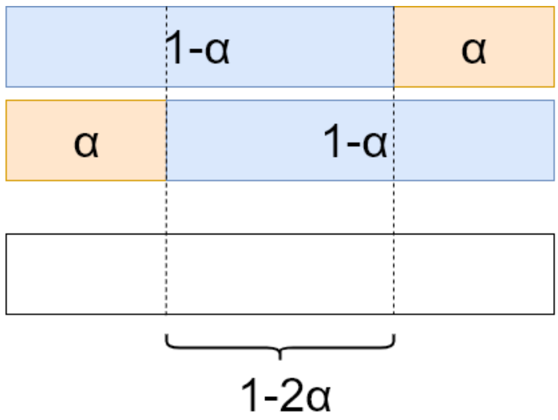
则

$$\mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}) = \mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}) = \mathcal{O}(n)$$

综上，Build-Max-Heap的时间复杂度为$\mathcal{O}(n)$

1.2 试证明：在一个随机输入数组上，对于任何常数 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$，Partition 产生比 $1-\alpha:\alpha$ 更平衡的划分的概率约为 $1-2\alpha$

证明：



如图所示，产生$1-\alpha:\alpha$的划分比例的情况可能为前两排两种，即α部分在最左和最右。那么比$1-\alpha:\alpha$更平均的分割就是分割线在第三行被扩起来的部分。由于输入随机，因此更平均的概率为$1-2\alpha$。

1.3 假设快速排序的每一层所做的划分比例都是 $1-\alpha:\alpha$，其中 $0<\alpha \leq \frac{1}{2}$ 且是一个常数．试证明：在相应的递归树中，叶结点的最小深度大约是 $-\frac{\lg n}{\lg \alpha}$，最大深度大约是 $-\frac{\lg n}{\lg(1`\alpha)}$(无需考虑舍入问题).

我们可以沿着每一层$1-\alpha$的划分分支寻找到最深的叶结点，因此

$$(1-\alpha)^{h_{max}}n = 1$$
$$h_{max} = \log_{1-\alpha}\frac{1}{n}$$
$$h_{max} = \frac{\lg\frac{1}{n}}{\lg(1-\alpha)}$$
$$h_{max} = -\frac{\lg n}{\lg(1-\alpha)}$$

同理，沿着每一层α的划分可以找到最浅的叶结点，有

$$\alpha^{h_{min}}n = 1$$
$$h_{min} = \log_{\alpha}\frac{1}{n}$$
$$h_{min} = -\frac{\lg n}{\lg\alpha}$$